

Ubicación de antenas de comunicación

José Javier González Ortiz, Lucía Montero Sanchis

Resumen— El objetivo del siguiente documento es presentar el modelo matemático que halla la distribución óptima de antenas de telefonía móvil en una determinada área. Para ello se tiene en cuenta la maximización de las ganancias de una compañía de telecomunicaciones, así como la minimización de los costes de inversión. Se ha implementado mediante un modelo de optimización lineal desarrollado en GAMS.

Palabras clave— Antenas de comunicación, programación lineal, maximización de ganancias, telefonía móvil.

I. ENUNCIADO

Para proporcionar una cobertura adecuada en zonas rurales es necesario instalar varias antenas para teléfonos móviles, de acuerdo a las características del entorno. Para modelar el terreno, se suele dividir en pequeños cuadrados o nodos. Se asigna una información a cada nodo, y las restricciones regulan las interacciones entre los mismos.

Se conoce el número medio de posibles llamadas en cada nodo (en miles de llamadas). No es necesario garantizar la cobertura para todos los clientes, sólo de aquellos que maximicen las ganancias.

Se dispone de dos tipos de antenas. Las diferencias entre ellas son la capacidad en miles de llamadas, el coste y la amplitud de las regiones que cubren. La antena pequeña tiene una capacidad de 3000 llamadas mensuales, un coste de 0.3 millones de euros, y cubre una región de dimensiones 3x3. La capacidad de la antena grande es de 6000 llamadas al mes, su coste es de 1.1 millones, y cubre un área de 4x5.

La compañía quiere amortizar la inversión en diez años, siendo el beneficio por llamada de 0.03€.

El objetivo es maximizar las ganancias de la compañía, teniendo en cuenta el coste de inversión de las antenas.

Ampliar el modelo para considerar un lago en la región.

II. DESCRIPCIÓN E HIPÓTESIS

El modelo de optimización que se plantea pretende encontrar cómo distribuir las antenas en un terreno para maximizar las ganancias mensuales de la compañía, teniendo en cuenta que el coste de la inversión en antenas debe amortizarse en un plazo de diez años.

El coste de las antenas que se proporciona en el enunciado no permite la amortización de la inversión, ya que el máximo beneficio mensual que se obtiene de una antena está limitado por la capacidad de llamadas de la misma. Por ese motivo hemos establecido un coste por antena menor, que permita recuperar la inversión en el plazo especificado.

El modelo desarrollado es un modelo de programación lineal entera mixta (MILP), ya que combina tanto variables discretas como continuas.

Se ha intentado ser lo más fiel a la realidad posible introduciendo una cantidad mínima de hipótesis y simplificaciones.

De esta manera, las antenas grandes, cuya asimetría axial en el eje menor permite la aparición de cuatro variaciones o rotaciones no han sido simplificadas y se analizan como cuatro antenas distintas que representan las variaciones de la misma antena de dimensiones 4x5.

Se ha considerado que, por motivos de espacio, no pueden colocarse varias antenas en un mismo nodo.

Al mismo tiempo se ha asumido que las antenas pueden cubrir de forma conjunta la demanda de una celda, distribuyéndose las llamadas en lotes de llamadas, donde los lotes de llamadas se analiza como un parámetro adicional. En el modelo elaborado se ha empleado lotes de mil llamadas.

Por otro lado, la capacidad máxima de una antena corresponde a la capacidad total que suministra a su área de cobertura y no a cada celda.

Se ha considerado oportuno, optimizar no sólo las ganancias sino que se minimizan también las antenas instaladas, ya que del espacio de soluciones que consiguen los máximos ingresos solamente nos interesa la que minimiza los costes

de la infraestructura, maximizando los beneficios de la compañía telefónica.

III. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO DE OPTIMIZACIÓN

A. Índices

- i Coordenada en X
- j Coordenada en Y
- k Tipo de Antena
- s Alias de i
- t Alias de j

B. Parámetros

A_{ij} Número medio de llamadas mensuales en la celda (i,j) [miles de llamadas]

B_{ij} Disponibilidad del espacio (i,j) para situar una antena

C_k Capacidad de la antena de tipo k [miles de llamadas/mes]

D_k Coste de instalar una antena de tipo k [miles de €]

D_M Precio de la antena más cara [miles de €]

E Plazo para amortizar la inversión [años]

F Beneficio por llamada [€]

L Lotes de llamadas [llamadas]

P Periodos de facturación [periodos/año]

λ_x Factor de ponderación de la cantidad de antenas [adimensional]

λ_g Factor de ponderación de la cantidad de beneficios [adimensional]

Parámetros de rango:

XP_k Alcance máximo en X positivo de la antena k

XN_k Alcance máximo en X negativo de la antena k

YP_k Alcance máximo en Y positivo de la antena k

YN_k Alcance máximo en Y negativo de la antena k

Cálculo de parámetros:

$$D_M = \max D_k \quad \forall k \quad (1)$$

Relación entre los factores de ponderación (la máxima variación en x no debe ser superior a la mínima variación en g):

$$\lambda_x = \lambda_g \cdot \frac{F}{\sum_{i,j} 1 * D_M} \quad (2)$$

C. Variables

- g Ganancias mensuales de la compañía [€]
- x_{ijk} Hay o no una antena de tipo k en (i,j)
- $x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i,j,k$

z_{ijkst} Llamadas de la celda (s,t) que son cubiertas por la antena de tipo k situada en (i,j) [miles de llamadas]

$$z_{ijkst} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i,j,k,s,t$$

D. Ecuaciones

En las ecuaciones a continuación mostradas, \mathcal{Q} representa el conjunto de celdas de coordenadas (s,t) a las que la antena k , situada en (i,j) es capaz de dar cobertura, mientras que $\bar{\mathcal{Q}}$ representa el espacio complementario, es decir todos las celdas del plano que no pertenecen a \mathcal{Q} .

Nótese que \mathcal{Q} aparece representado de dos formas alternativas las cuales son equivalentes pero permiten ver el rango de movimiento de los índices con mayor facilidad en cada caso.

No pueden colocarse antenas si el terreno no lo permite [antenas]

$$x_{ijk} - B_{ij} \leq 0, \quad \forall i,j,k \quad (3)$$

La ganancia al mes es la suma de todas la llamadas cubiertas, multiplicada por el coste de cada llamada [€]

$$g = F \cdot L \cdot \sum_{i,j,k,s,t} z_{ijkst} \quad (4)$$

La ganancia en el plazo de años fijado debe ser suficiente para amortizar la inversión en antenas [€]

$$E \cdot P \cdot g \geq \sum_{i,j,k} D_k \cdot x_{ijk} \quad (5)$$

Si x_{ijk} es 0 (no se coloca una antena en (i,j)), esa antena no puede cubrir llamadas de ningún (s,t) [llamadas]

$$z_{ijkst} \cdot L \leq x_{ijk} \cdot C_k, \forall i, j, k, s, t \quad (6)$$

Si el nodo (s,t) está fuera del rango de la antena k localizada en (i,j) , el número de llamadas cubiertas por la antena k en (s,t) será 0 [llamadas]

$$z_{ijkst} = 0, \forall i, j, k, s, t \in \overline{\mathcal{Q}} \quad (7)$$

$$\overline{\mathcal{Q}} \equiv \cup \begin{cases} s < i - XN_k \vee s > i + XP_k \\ t < j - YN_k \vee t > j + YP_k \end{cases}$$

El número de llamadas atendidas por una antena de tipo k , situada en (i,j) , está limitado por la capacidad máxima de la antena. Sólo se consideran los nodos en el rango de cobertura de las antenas [llamadas]

$$L \cdot \sum_{s,t \in \mathcal{Q}} z_{ijkst} \leq C_k \quad \forall i, j, k \quad (8)$$

$$\mathcal{Q} \equiv \cap \begin{cases} i - XN_k \leq s \leq i + XP_k \\ j - YN_k \leq t \leq j + YP_k \end{cases}$$

La suma de las coberturas suministradas por las antenas al punto (s,t) no puede superar la demanda en dicho punto. Sólo se consideran las antenas en el rango de (s,t) [llamadas]

$$L \cdot \sum_{i,j,k \in \mathcal{Q}} z_{ijkst} \leq A_{st} \quad \forall s, t \quad (9)$$

$$\mathcal{Q} \equiv \cap \begin{cases} s - XP_k \leq i \leq s + XN_k \\ t - YP_k \leq j \leq t + YN_k \end{cases}$$

No pueden instalarse varias antenas en un mismo nodo [antenas]

$$\sum_k x_{ijk} \leq 1 \quad \forall i, j \quad (10)$$

E. Función objetivo

Corresponde a la maximización de las ganancias mensuales y a la posterior minimización de inversión. Con las constantes se garantiza la prioridad del primer criterio [miles de €]

$$FO: \max \lambda_g \cdot g - \lambda_x \cdot \sum_{i,j,k} D_k \cdot x_{ijk} \quad (11)$$

IV. CÓDIGO

```
$TITLE MODELO DE TRANSPORTE
* José Javier González Ortiz
* Lucía Montero Sanchis
* Localización de Antenas de Comunicación

$title Antenas
OPTION optcr = 0

*ÍNDICES

SETS
  i      Coordenada en X      /1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8/
  j      Coordenada en Y      /1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8/
  k      Tipo de Antena       /P, G1, G2, G3, G4/
  alias(i,s)
  alias(j,t)
;

*PARÁMETROS

TABLE
  A(i,j)  Número medio de llamadas al mes (en lotes de
  llamadas)
$include Llamadas.txt
;

TABLE
  B(i,j)  Disponibilidad del espacio ij para colocar una
  antena
$include Mapa.txt
;

PARAMETERS
  C(k)   Capacidad en número de lotes de llamadas.mes de
  las antenas de tipo k /P 3, G1 6, G2 6, G3 6, G4 6/
  D(k)   Coste de instalar una antena de tipo k (miles) /P
  7, G1 15, G2 15, G3 15, G4 15/
;
* Parámetros de Rango
  XP(k)  Alcance máximo en X positivo de la antena k /
  P 1, G1 1, G2 2, G3 2, G4 2 /
  XN(k)  Alcance máximo en X negativo de la antena k /
  P 1, G1 2, G2 1, G3 2, G4 2 /
  YP(k)  Alcance máximo en Y positivo de la antena k /
  P 1, G1 2, G2 2, G3 1, G4 2 /
  YN(k)  Alcance máximo en Y negativo de la antena k /
  P 1, G1 2, G2 2, G3 2, G4 1 /
;

SCALAR
  E      Número de años para amortizar la inversión
  / 10 /
  F      Beneficio por llamada
  / 0.03 /
  L      Lote de llamadas en los que se reparten las
  antenas / 1000 /
  DM    Precio de la antena más cara
  P      Períodos de facturación
  / 12 /
  LambdaG Factor de ponderación de la cantidad de beneficios
  / 1000 /
  LambdaX Factor de ponderación de la cantidad de antenas
;

* Reescalamiento de parámetros
* Reescalamiento de las unidades en miles de llamadas
A(i,j) = A(i,j) * 1000 ;
C(k) = C(k) * 1000 ;
* Reescalamiento de las unidades en miles de euros
D(k) = D(k) * 1000 ;

* Definición de parámetros
DM = $MAX( k, D(k) ) ;
LambdaX = LambdaG * ( F/sum( (i,j), 1 ) / DM ) ;
```

```

*VARIABLES
VARIABLES
  VFO          Función objetivo
  x(i,j,k)      Hay una antena de tipo k en ij
  z(i,j,k,s,t) Número de Llamadas de la celda ts que son
gobernadas por la antena de tipo k situada en ij
  g             Ganancias mensuales de la compañía
;

BINARY VARIABLES x ;
INTEGER VARIABLES z ;
POSITIVE VARIABLES g ;

*COTAS
x.UP(i,j,k) = B(i,j);
* No se puede ganar más que la demanda máxima
g.UP = L * F * sum(i,j), A(i,j));
* La cuota de la antena ij modelo k no puede ser superior a:
* O si no hay antena, y sí la hay, al mínimo de la capacidad
de dicha antena y la demanda máxima
z.UP(i,j,k,s,t) = B(i,j) * min(A(s,t), C(k));

*RESTRICCIONES
EQUATIONS
  FOM          Función objetivo: Maximizar las
ganancias
  GANANCIAS    Definición del valor de ganancias
mensuales como la suma de todas la llamadas cubiertas
  LOCALIZACION(i,j,k) Si el lugar ij no puede tener una
antena la variable x estar a 0 para todo k
  AMORTIZACION La compañía desea amortizar las
antenas empleadas en E años
  TRADXZ(i,j,k,s,t) Relación entre si hay una antena
de tipo k en ij y la cobertura asignada a dicha antena en st
  ANTENA(i,j)     Sólo puede haber una antena por
celda

  FUERA(i,j,k,s,t)   Fuera del rango de la antena de
tipo k situada en ij la cobertura es nula
  VOLUMEN(i,j,k) Una antena de tipo k situada en ij
no puede atender más llamadas que su capacidad máxima
  DEMANDA(s,t) La suma de las coberturas
suministradas por las antenas en el rango de st no pueden
superar la demanda en dicho punto
;

  FOM .. VFO == LambdaG*g - LambdaX*sum( i,j,k,
D(k)*x(i,j,k) ) ;
  GANANCIAS .. g == F*L*sum( i,j,k,s,t , z(i,j,k,s,t) ) ;
  LOCALIZACION(i,j,k) .. x(i,j,k) - B(i,j) == 0 ;
  AMORTIZACION .. E*P*g == sum(k, D(k)*sum(i,j,x(i,j,k)) ) ;
  TRADXZ(i,j,k,s,t) .. z(i,j,k,s,t)*L == x(i,j,k)*C(k) ;
  ANTENA(i,j)$B(i,j) .. sum( k , x(i,j,k) ) == 1 ;

  FUERA(i,j,k,s,t)$(( ((ord(s) < ord(i)-XN(k)) OR
(ord(s) > ord(i)+XP(k))) ) OR (( ((ord(t) < ord(j)-YN(k))
OR (ord(t) > ord(j)+YP(k))) ) AND B(i,j) .. z(i,j,k,s,t) == 0 ;
  VOLUMEN(i,j,k)$B(i,j) .. sum( s,t$(( ((ord(s) ==
ord(i)-XN(k)) AND (ord(s) <= ord(i)+XP(k))) ) AND (( (ord(t) ==
ord(j)-YN(k)) AND (ord(t) <= ord(j)+YP(k))) )
, z(i,j,k,s,t))*L == C(k) ;
  DEMANDA(s,t) .. sum( i,j)$(( ((ord(i) >= ord(s)-
XP(k)) AND (ord(i) <= ord(s)+XN(k))) ) AND (( (ord(j) ==
ord(t)-YP(k)) AND (ord(j) <= ord(t)+YN(k))) ) AND B(i,j)
, z(i,j,k,s,t))*L == A(s,t) ;

MODEL Antenas / FOM, GANANCIAS, LOCALIZACION, AMORTIZACION,
TRADXZ, ANTENA, FUERA, VOLUMEN, DEMANDA /
SOLVE Antenas USING MIP MAXIMIZING VFO
* Mostrar la solución
DISPLAY g.l, x.l, z.l;

```

V. RESULTADOS

Una vez desarrollado el modelo y su respectiva implementación en GAMS se procedió a la correspondiente depuración del modelo mediante la variación de los parámetros de entrada, hasta que se pudo comprobar que los resultados generados eran coherentes y consistentes con el enunciado propuesto.

Para poder mostrar el funcionamiento del modelo se ha desarrollado un ejemplo que permita ver la

variedad de asignación de antenas y coberturas. Al mismo tiempo, se han empleado parámetros que permitían analizar la solución de una forma sencilla e inteligible, ya que una mayor demanda implicaría que los resultados no podrían ser representados o analizados de forma clara.

En la figura 1 se muestra el mapa empleado en dicho ensayo, donde se representa la demanda en miles de llamadas en cada celda así como el accidente geográfico del lago que restringe la colocación de las antenas.

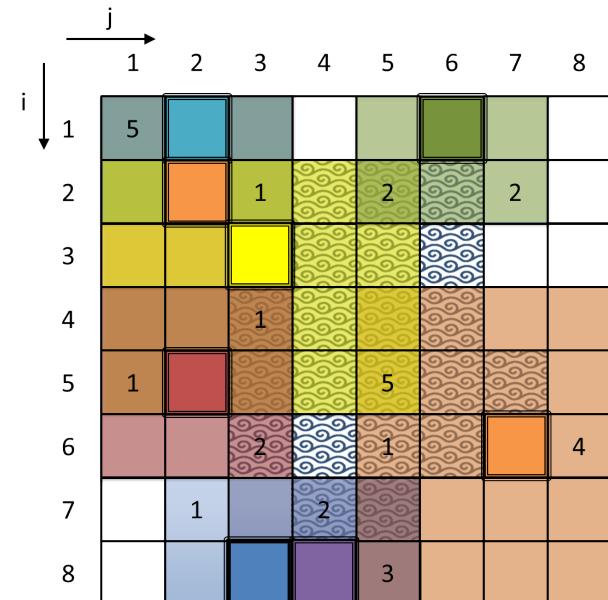


Fig. 1. Distribución de antenas

Conjuntamente las distintas regiones coloreadas representan las áreas de cobertura de cada una de las antenas y los recuadros resaltados indican la posición de dichas antenas manteniendo el código de colores.

Con objeto obtener un análisis más cuantitativo de los resultados, en la tabla 1 se muestra de forma sintetizada los valores de la variable z (Llamadas de la celda (s,t)) que son cubiertas por la antena de tipo k situada en (i,j) , tras la optimización del modelo en GAMS. Así, se muestran los lotes asignados para cada antena, identificados por los índices de posición de la antena (i,j) , y la celda en cuestión (s,t) . Es necesario mencionar que los lotes empleados han sido de mil llamadas por lo que existe una correspondencia directa con las unidades presentadas en la demanda del mapa.

VI. AMPLIACIÓN DE LA PRÁCTICA

| Tipo de Antena | I | J | S | T | Lotes de llamadas |
|----------------|---|---|---|---|-------------------|
| P | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| | | | 2 | 3 | 1 |
| | 1 | 6 | 2 | 5 | 1 |
| | | | 2 | 7 | 2 |
| | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| | 5 | 2 | 5 | 1 | 1 |
| | | | 6 | 3 | 2 |
| | 8 | 3 | 7 | 2 | 1 |
| G2 | 3 | 3 | 7 | 4 | 2 |
| | | | 8 | 4 | 3 |
| | | | 8 | 5 | 3 |
| G3 | 6 | 7 | 2 | 5 | 1 |
| | | | 3 | 4 | 1 |
| | | | 5 | 5 | 4 |
| | | | 5 | 5 | 1 |
| | | | 6 | 5 | 1 |
| | | | 6 | 8 | 4 |

Tabla 1. Asignación de coberturas

Tal y como se puede observar los datos mostrados en la tabla 1 explican la colocación de antenas visualizada en la figura 1, pudiendo ahora analizar como se distribuye el reparto de lotes entre antenas vecinas. Este resultado es muy importante ya que para algunas celdas, la única manera de satisfacer toda la demanda es el correcto reparto de los lotes entre las antenas que pueden otorgar cobertura a dicha celda.

Entre otros resultados se puede observar como se ha conseguido que en las antenas grandes, las cuales poseían cuatro posibles variaciones, se escoja la variante más adecuada. Esto se refleja en las dos antenas grandes obtenidas ya que cualquier otra variación no habría sido capaz de optimizar el modelo debido a entre otras restricciones la presencia del lago o la demanda de llamadas.

Por último, la solución obtenida satisface toda la demanda, consiguiendo unas ganancias mensuales máximas de $g = 900\text{€}$. Como el coste total de las antenas es $\text{Coste} = 30.000\text{€}$ y se está considerando los resultados financieros de la empresa en un margen de 10 años en los que se pretende amortizar la inversión. Los beneficios totales de dicho periodo serán $\text{Beneficio} = g \cdot P \cdot E - \text{Costes} = 78.000\text{€}$. Por lo que del espacio soluciones en los que $g = 900\text{€}$, ésta es la que maximiza los beneficios de la empresa.

A la hora de ampliar y mejorar el modelo obtenido es necesario remarcar que éste no es el que mejor se corresponde con la realidad^[1], ya que las antenas de telecomunicaciones no poseen áreas de cobertura rectangulares sino que éstas son circulares debido a que emiten con la misma potencia en todas la direcciones.

Sin embargo, debido a la imposibilidad de llenar el plano con círculos, el modelo es simplificado permitiendo que las partes más lejanas de las antenas se solapen y definiendo el área de cobertura como los puntos de intersección con las circunferencias correspondientes a las áreas de cobertura de las antenas vecinas.

De esta manera, se alcanza un modelo donde las celdas son hexagonales lo cual nos lleva a cubrir el terreno de una forma más óptima. Por otro lado, el modelo se vuelve más complicado ya que los sistemas de coordenadas correspondientes a una malla hexagonal se vuelven más intrincados que las tradicionales coordenadas cartesianas.

Para el estudio se ha escogido un sistema de coordenadas axial sobre malla hexagonal^[2]. Este sistema emplea dos ejes coordinados (x, y) no ortogonales con direcciones respecto a la horizontal $\theta_x = 0^\circ$ y $\theta_y = -60^\circ$ respectivamente.

De esta manera se incluyen tres modelos de antena de cobertura radial en un área romboidal correspondiente a un terreno de malla hexagonal de las mismas dimensiones que el terreno del modelo previo.

El principal cambio que implica la expresión del problema en coordenadas axiales de malla hexagonal supone la redefinición del recinto Q y de su complementario \bar{Q} . De esta forma es necesario añadir una restricción diagonal para expresar correctamente el nuevo contorno del área de cobertura.

Los cambios implican la sustitución de la ecuación (7) por la ecuación (12), la ecuación (8) por la (13) y la ecuación (9) por la (14).

Si el nodo (s, t) está fuera del rango de la antena k localizada en (i, j) , el número de llamadas cubiertas por la antena k en (s, t) será 0 [llamadas]

$$z_{ijkst} \leq 0, \forall i, j, k, s, t \in \overline{Q} \quad (12)$$

$$\overline{Q} \equiv \cup \begin{cases} s < i - R_k \vee s > i + R_k \\ t < j - R_k \vee t > j + R_k \\ s + t < i + j - R_k \vee s + t > i + j + R_k \end{cases}$$

El número de llamadas atendidas por una antena de tipo k , situada en (i, j) , está limitado por la capacidad máxima de la antena. Sólo se consideran los nodos en el rango de cobertura de las antenas [llamadas]

$$L \cdot \sum_{s, t \in Q} z_{ijkst} \leq C_k \quad \forall i, j, k \quad (13)$$

$$Q \equiv \cap \begin{cases} i - R_k \leq s \leq i + R_k \\ j - R_k \leq t \leq j + R_k \\ i + j - R_k \leq s + t \leq i + j + R_k \end{cases}$$

La suma de las coberturas suministradas por las antenas al punto (s, t) no puede superar la demanda en dicho punto. Sólo se consideran las antenas en el rango de (s, t) [llamadas]

$$L \cdot \sum_{i, j, k \in Q} z_{ijkst} \leq A_{st} \quad \forall s, t \quad (14)$$

$$Q \equiv \cap \begin{cases} s - R_k \leq i \leq s + R_k \\ t - R_k \leq j \leq t + R_k \\ s + t - R_k \leq i + j \leq s + t + R_k \end{cases}$$

Estos cambios en las ecuaciones del modelo implican que el código debe ser reformulado para el caso de la malla hexagonal. A continuación se incluye el código que implementa el modelo con coordenadas hexagonales.

```
* José Javier González Ortiz          *
* Lucía Montero Sanchis            *
* Localización de Antenas de Comunicación    *

$title AntenasHexagonales
OPTION optcr = 0

*ÍNDICES
SETS
  i      Coordenada en X      /1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8/
  j      Coordenada en Y      /1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8/
  k      Tipo de Antena       /R1, R2, R3/
  alias(i,s)
  alias(j,t)
;

*PARÁMETROS
TABLE
  A(i,j)  Número medio de llamadas al mes (en lotes de
```

```
llamadas)
$include Llamadas.txt
;

TABLE
  B(i,j)  Disponibilidad del espacio ij para colocar una
  antena
$include Mapa.txt
;

PARAMETERS
  C(k)    Capacidad en miles de llamadas.mes de las antenas
  de tipo k /R1 2, R2 5 , R3 10/
  D(k)    Coste de instalar una antena de tipo k (miles) /R1
  4, R2 10, R3 20/
  * Parámetros de Rango
  R(k)    Radio hexagonal de la antena k /R1 1, R2 2, R3 3/
;

SCALAR
  E        Número de años para amortizar la inversión
  / 10 /
  F        Beneficio por llamada
  / 0.03 /
  L        Lote de llamadas en los que se reparten las
  antenas   / 1000 /
  DM      Precio de la antena más cara
  P        Periodos de facturación
  / 12 /
  LambdaG Factor de ponderación de la cantidad de beneficios
  / 1000 /
  LambdaX Factor de ponderación de la cantidad de antenas
;

* Reescalamiento de parámetros
* Reescalamiento de las unidades en miles de llamadas
A(i,j) = A(i,j) * 1000 ;
C(k) = C(k) * 1000 ;
* Rescalado de las unidades en miles de euros
D(k) = D(k) * 1000 ;

* Definición de parámetros
DM = smax( k, D(k) );
LambdaX = LambdaG * (F/sum( (i,j), 1) / DM) ;

*VARIABLES
VARIABLES
  VFO          Función objetivo
  x(i,j,k)     Hay una antena de tipo k en ij
  z(i,j,k,s,t) Número de Llamadas de la celda ts que son
  gobernadas por la antena de tipo k situada en ij
  g            Ganancias mensuales de la compañía
;

BINARY VARIABLES x ;
INTEGER VARIABLES z ;
POSITIVE VARIABLES g ;

*COTAS
x.UP(i,j,k) = B(i,j);
* No se puede ganar más que la demanda máxima
g.UP = L * F * sum((i,j), A(i,j));
* La cuota de la antena ij modelo k no puede ser superior a:
* 0 si no hay antena, y si la hay, al mínimo de la capacidad
de dicha antena y la demanda máxima
z.UP(i,j,k,s,t) = B(i,j) * min(A(s,t), C(k));

*RESTRICCIONES
EQUATIONS
  FOM          Función Objetivo: Maximizar las
  ganancias
  GANANCIAS   Definición del valor de ganancias
  mensuales como la suma de todas las llamadas cubiertas
  LOCALIZACION(i,j,k) Si el lugar ij no puede tener una
  antena la variable x estar a 0 para todo k
  AMORTIZACION La compañía desea amortizar las
  antenas empleadas en E años
  TRADXZ(i,j,k,s,t) Relación entre si hay una antena
  de tipo k en ij y la cobertura asignada a dicha antena en st
  ANTENA(i,j)   Sólo puede haber una antena por
  celda

  FUERA(i,j,k,s,t) Fuera del rango de la antena de
  tipo k situada en ij la cobertura es nula
  VOLUMEN(i,j,k) Una antena de tipo k situada en ij
  no puede atender m-s llamadas que su capacidad máxima
  DEMANDA(s,t) La suma de las coberturas
  suministradas por las antenas en el rango de st no pueden
  superar la demanda en dicho punto
;

  FOM          .. VFO =E= LambdaG*g -
  LambdaX*sum( (i,j,k), D(k)*x(i,j,k) ) ;
  GANANCIAS   .. g =E= F*L*sum( (i,j,k,s,t) ,
  z(i,j,k,s,t) ) ;
  LOCALIZACION .. x(i,j,k) - B(i,j) =L= 0 ;
  AMORTIZACION .. E*P*g =G= sum(k, D(k)*sum(
  (i,j),x(i,j,k) ) ) ;
  TRADXZ(i,j,k,s,t) .. z(i,j,k,s,t)*L =L=
  x(i,j,k)*C(k) ;
  ANTENA(i,j)$B(i,j)) .. sum( k , x(i,j,k) ) =L= 1 ;

  FUERA(i,j,k,s,t)$(( (Ord(s) <
  Ord(i)-R(k)) OR (Ord(s) > Ord(i)+R(k))) ) OR ((Ord(t) -
  < Ord(j)-R(k)) OR (Ord(t) > Ord(j)+R(k))) OR ((Ord(s) -
```

```


$$\text{ord}(i) + \text{ord}(t) - \text{ord}(j) < -R(k) \text{ OR } (\text{ord}(s) - \text{ord}(i) + \text{ord}(t) - \text{ord}(j) > R(k)) \text{ AND } B(i,j) \text{ .. } z(i,j,k,s,t) = L = 0;$$


$$\text{VOLUMEN}(i,j,k) \$ (B(i,j)) \text{ .. } \text{sum}((s,t) \$ ((\text{ord}(s) >= \text{ord}(i) - R(k)) \text{ AND } (\text{ord}(s) <= \text{ord}(i) + R(k))) \text{ AND } ((\text{ord}(s) >= \text{ord}(j) - R(k)) \text{ AND } (\text{ord}(t) <= \text{ord}(j) + R(k))) \text{ AND } (\text{ord}(s) - \text{ord}(i) + \text{ord}(t) - \text{ord}(j) >= -R(k)) \text{ AND } (\text{ord}(s) - \text{ord}(i) + \text{ord}(t) - \text{ord}(j) <= R(k))) \text{ .. } z(i,j,k,s,t) ) * L = L = C(k);$$


$$\text{DEMANDA}(s,t) \text{ .. } \text{sum}((i,j,k) \$ ((\text{ord}(i) >= \text{ord}(s) - R(k)) \text{ AND } (\text{ord}(i) <= \text{ord}(s) + R(k))) \text{ AND } ((\text{ord}(j) >= \text{ord}(t) - R(k)) \text{ AND } (\text{ord}(j) <= \text{ord}(t) + R(k))) \text{ AND } (\text{ord}(s) - \text{ord}(i) + \text{ord}(t) - \text{ord}(j) >= -R(k)) \text{ AND } (\text{ord}(s) - \text{ord}(i) + \text{ord}(t) - \text{ord}(j) <= R(k))) \text{ .. } B(i,j) \text{ .. } z(i,j,k,s,t) ) * L = L = A(s,t);$$


```

MODEL AntenasHexagonales / FOM, GANANCIAS, LOCALIZACION, AMORTIZACION, TRADXZ, FUERA, VOLUMEN, DEMANDA, ANTENA /

SOLVE AntenasHexagonales USING MIP MAXIMIZING VFO

DISPLAY g.1, x.1, z.1;

Análogamente al caso con coordenadas rectangulares, en hexagonales se proporciona un ejemplo con una baja demanda que permite visualizar y observar el correcto funcionamiento del modelo. Esto queda reflejado en la figura 2, en la que se representa tanto la demanda de cada una de las celdas como el lago que es equivalente al empleado en el ejemplo anterior.

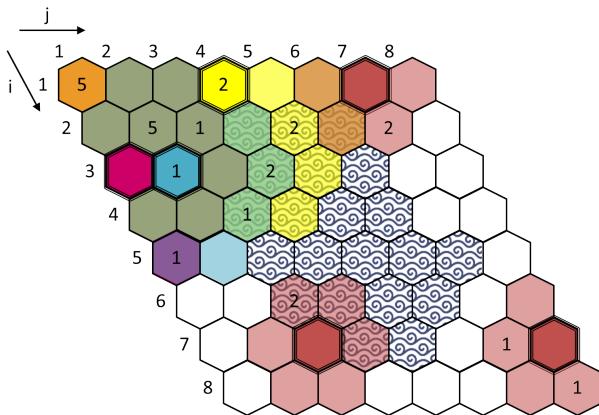


Fig. 2. Distribución de antenas malla hexagonal

Simultáneamente, se representan las antenas con sus áreas de cobertura igual que antes, diferenciando entre los distintos tipos de antenas de borde resaltado y sus zonas de cobertura mediante transparencias superpuestas. Se puede notar que se emplean los tres tipos de antenas radiales disponibles, siendo empleada las antenas de mayor radio en la zona de mayor demanda y las antenas pequeñas en la zonas de demanda aislada.

La tabla 2 presentada a continuación refleja la distribución de los lotes de llamadas entre las antenas, permitiéndonos analizar la correcta asignación de la demanda presente.

| Tipo de Antena | X | Y | S | T | Lotes de llamadas |
|----------------|---|---|---|---|-------------------|
| R1 | 1 | 7 | 2 | 7 | 2 |
| | 7 | 3 | 6 | 3 | 2 |
| | 7 | 8 | 7 | 7 | 1 |
| | | | 8 | 8 | 1 |
| R2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| | | | 5 | 1 | 1 |
| | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| R3 | 3 | 4 | 3 | 4 | 1 |
| | | | 4 | 3 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 |
| | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 2 | 5 | 2 | 5 | 2 |
| | 3 | 4 | 3 | 4 | 1 |

Tabla 2. Asignación de coberturas en malla hexagonal

Tal y como sucedía en el ejemplo anterior se produce un reparto uniforme de los tipos de antena empleados, siendo la magnitud y concentración de la demanda lo que rige el uso de un tipo frente a otro. Adicionalmente, se puede comprobar que en este caso también se satisface toda la demanda, ya que la suma de todos los lotes distribuidos corresponde con las demandas presentes en el mapa de llamadas empleado.

De forma similar al ejemplo previo, el lago juega un rol principal limitando las posibilidades de colocación de las antenas forzando a obtener una solución óptima.

Por último, las ganancias obtenidas en la solución del modelo son $g = 780\text{€}$, mientras que los costes son $\text{Costes} = 26.000\text{€}$, por lo que los beneficios en el plazo establecido serán $\text{Beneficios} = g \cdot P \cdot E - \text{Costes} = 67.600\text{€}$. Como se puede observar el beneficio es mayor frente a una demanda similar.

VII. CONCLUSIONES

Lo primero a remarcar es que se ha logrado el objetivo propuesto, obteniendo un modelo que consigue resolver el caso planteado introduciendo una cantidad mínima de hipótesis, siendo lo más fiel a la realidad posible, tal y como se pretendía.

El modelo obtenido como ya se ha comentado no sólo maximiza las ganancias de la compañía sino que se preocupa de maximizar los beneficios de la misma, un factor mucho más relevante desde el punto de vista de la firma.

El primer modelo desarrollado garantiza la obtención de una solución óptima al problema que se plantea en el enunciado. La distribución de antenas obtenida con la resolución garantiza el máximo aprovechamiento de la inversión realizada.

Los parámetros introducidos modifican el tipo de antenas que se escogen para cubrir la demanda de llamadas. De esta manera en ambos casos el cociente $\frac{D_k}{C_k}$, nos indica el coste relativo de lote por antena. Este factor es crucial ya que de no ser similar entre las antenas disponibles el modelo rápidamente seleccionará aquella en la que el cociente sea claramente inferior y realizará la asignación de las antenas empleando únicamente antenas de dicho tipo.

En el enunciado propuesto esta característica se cumplía, pero en la ampliación se pudo comprobar mediante ensayos que es necesario que este factor no diverja en gran medida de un tipo de antena a otro, por lo que fue necesario un estudio previo de los parámetros que conseguían un modelo real y consistente.

También se ha podido observar, la presencia de un accidente geográfico tal como un lago no supone la imposibilidad dar servicio a la posible demanda que pueda surgir dentro de él. De esta forma, si fuera preferible dejar libre de antenas una zona determinada aunque se posible la colocación de las mismas, se puede llevar a cabo.

Por último, podemos ver la comparación del modelo de celdas rectangulares frente a la ampliación en la que se emplean celdas hexagonales. Tal y como se ha comentado, para poder comparar la eficiencia de los modelos fue necesario que coste por lote de llamadas cubiertas fuese el aproximadamente el mismo, mostrando así el comportamiento de un tipo de distribución frente a otro.

Este análisis ha sido ya realizado para cada uno de los modelos, reflejado en los beneficios de la compañía. Como las demandas no eran iguales es necesario relativizar los valores obtenidos en los costes de las antenas.

Una vez obtenidas las medidas relativas para cada modelo, se puede comprobar que el modelo hexagonal consigue obtener un coste relativo inferior respecto al de las celdas rectangulares. Esto se comprobó con diversos mapas y distribuciones de demanda y salvando excepciones en los que la geometría del caso favorecía a la malla rectangular, en general, la geometría hexagonal supone una solución mejor y más acorde con la realidad física.

REFERENCIAS

- [1] "Aspectos matemáticos de la telefonía celular", por Héctor Lomelí Ortega, 2003
- [2] "Hexagonal Grids", por Red Blob Games
<http://www.redblobgames.com/grids/hexagons/>
- [3] "A GAMS Tutorial", por Richard E. Rosenthal
<http://www.gams.com/dd/docs/gams/Tutorial.pdf>
- [4] "GAMS – A User's Guide", por Richard E. Rosenthal
<http://www.gams.com/dd/docs/bigdocs/GAMSSUsersGuide.pdf>