

Programming assignment

利用 Neural Network 探討 $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ 及其導數 $f'(x)$ 在區間 $[-1, 1]$ 的擬合能力，並透過訓練一個 Feedforward Neural Network 來評估模型的表現。

● Method

■ 資料準備

1. 訓練資料: 在 $[-1, 1]$ 區間內隨機生成 200 個點作為訓練集。
2. 驗證資料: 在 $[-1, 1]$ 區間內均勻生成 100 個點作為驗證集。
3. 標籤生成: 將訓練集與驗證集的 x 值分別代入 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 的公式，得到對應的函式值與導數值作為訓練目標。

■ 架構

1. 輸入層: 1 個神經元，接收 x 。
2. 隱藏層 1: 64 個神經元，使用 Tanh 作為激活函數。
3. 隱藏層 2: 64 個神經元，使用 Tanh 作為激活函數。
4. 輸出層: 1 個神經元，輸出擬合值 $\hat{f}(x)$ 。

■ Loss Function

使用 Composite MSE。

此損失由兩部分加權組成：

函式損失: 預測函式值 $\hat{f}(x)$ 與真實函式值 $f(x)$ 之間的 MSE。

導數損失: 預測導數值 $\hat{f}'(x)$ 與真實導數值 $f'(x)$ 之間的 MSE。

總損失計算公式為: $L_{total} = L_{func} + 0.1 * L_{deriv}$

■ Optimizer

使用 Adam

■ Config

Batch size: 未分批。

Epochs: 20000

Learning Rate: 初始值為 0.001，並使用指數學習率排程器 (ExponentialLR, gamma=0.9995) 進行衰減。

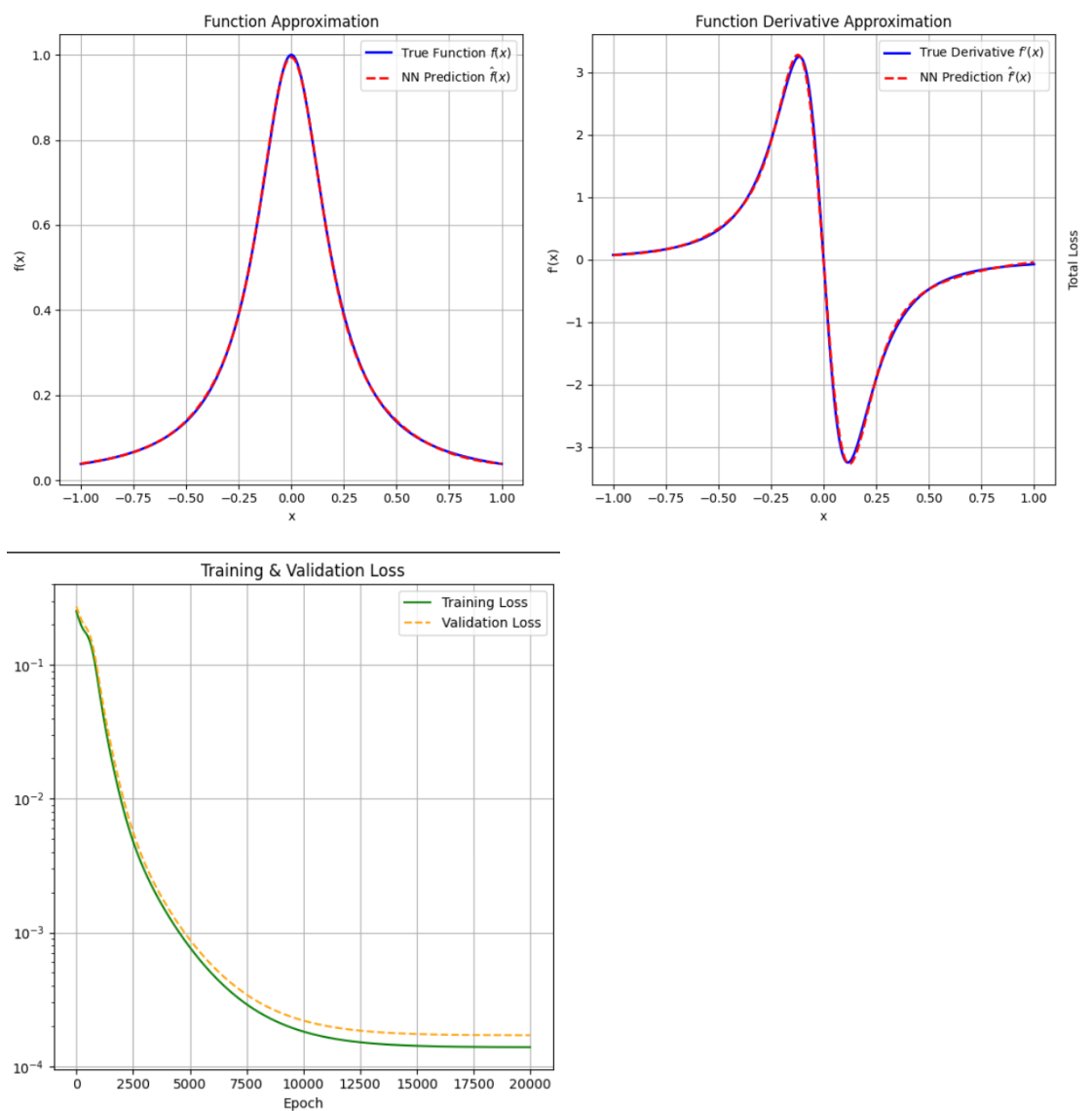
■ 結果

Function Approximation MSE : 0.00000489

Function Approximation Max Error: 0.00567654

Derivative Approximation MSE : 0.00166790

Derivative Approximation Max Error: 0.14897598



從兩圖的結果可以看到，預測結果與真實的函式及其導數幾乎完全重疊。

模型表現很好，無 overfitting 的問題。

第三張損失曲線圖中可以看到，訓練損失與驗證損失同步下降並穩定收斂。

誤差極低，更加證明擬合很成功。