2023 年「概率论 & 数理统计」杭州電子科技大学 期中回忆

考试时间：2023 年 12 月 3 日　　任课教师：基础数学教学团队

课程编号：A0714040　　解析制作：未央数学讲师 ctz

1. 选择题（每题 3 分，共 30 分）

题目 1　【 C 】

已知 A、B、C 为三个随机事件，则 A、B、C 至少一个发生的事件为

A. $\overline{ABC}$　　B. $\overline{ABC}$　　C. $A \cup B \cup C$　　D. ABC

题目 2　【 D 】

假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A) = 1$，则

A. A 是必然事件　　B. $P(B|\overline{A}) = 0$　　C. $B \subset A$　　D. $A \subset B$

分析与解 $P(B|A) = 1 \Rightarrow \dfrac{P(AB)}{P(A)} = 1 \Rightarrow P(AB) = P(A)$，所以 $A \subset B$. 故本题选择 D 项.

题目 3　【 D 】

在 100 以内的所有两位数中，任取一个数，则能被 2 或 3 整除的概率为

A. 1/6　　B. 1/4　　C. 1/3　　D. 2/3

分析与解 能被 2 整除的概率为 45/90，能被 3 整除的概率为 30/90，能被 6 整除的概率为 15/90，所以能被 2 或 3 整除的概率为 $P = P(2) + P(3) - P(6) = \dfrac{45+30-15}{90} = \dfrac{2}{3}$.

题目 4　【 C 】

随机变量 X 的期望 $E(X)$ 存在，则 $E[E(E(x))] =$

A. $E^3(X)$　　B. $E^2(X)$　　C. $E(X)$　　D. 无法确定

分析与解 设 $E(X) = a$，则 $E[E(X)] = E(a) = a$，$E[E(E(X))] = E(a) = a = E(X)$. 故本题选择 C 项.

题目 5 【 B 】

任意两事件 A 和 B，则下列关系正确的是

A. $(A-B)\cup B=A$ B. $AB\cup(A-B)=A$ C. $(A-B)-B=A$ D. $(AB\cup A)-B=A$

分析与解

A. $(A-B)\cup B=A\cup B$ B. $AB\cup(A-B)=(A\cup(A-B))\cap(B\cup(A-B))=A\cap(A\cup B)=A$

C. $(A-B)-B=(A-B)-(A-B)\cap B\neq A$ D. $(AB\cup A)-B=A-B\neq A$

题目 6 【 D 】

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}kx^2, & 0\le x<2\\ kx, & 2\le x\le 3\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

则常数 k 的值为

A. $1/31$ B. $3/31$ C. $2/31$ D. $6/31$

分析与解 归一化：$1=\int_0^2 kx^2\,\mathrm{d}x+\int_2^3 kx\,\mathrm{d}x=\left.\frac{kx^3}{3}\right|_0^2+\left.\frac{kx^2}{2}\right|_2^3=\frac{31}{6}k$，$k=\frac{6}{31}$. 故本题选择 D 项.

题目 7 【 B 】

设连续型随机变量 X 的概率密度函数和分布函数分别为 $f(x)$ 和 $F(x)$，则

A. $f(x)$ 可以是奇函数 B. $f(x)$ 可以是偶函数 C. $F(x)$ 可以是奇函数 D. $F(x)$ 可以是偶函数

分析与解

- 由于 $F(x)$ 为单调不减的连续函数，所以 $F(x)$ 不是奇偶函数.
- 由于 $f(x)$ 有正态分布函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$，所以 $f(x)$ 可以是偶函数. 故本题选择 B 项.

题目 8 【 A 】

设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，且 $P(X\le 1,Y\le -1)=1/4$，则 $P(X>1,Y>-1)$ 等于

A. $1/4$ B. $1/2$ C. $3/4$ D. $1/16$

分析与解

- $P(A)=P(X\le q)=P\left(\frac{X-0}{6}\le\frac{1}{6}\right)=\Phi\left(\frac{1}{6}\right)$.
- $P(B)=P(Y\le -1)=P\left(\frac{Y-0}{6}\le -\frac{1}{6}\right)=\Phi\left(-\frac{1}{6}\right)=1-\Phi\left(\frac{1}{6}\right)$.
- $P(X>1,Y>-1)=P(\overline{AB})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-\Phi\left(\frac{1}{6}\right)-1+\Phi\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

题目 9 【 C 】

设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=0.4$，则 $P(X<0)$ 为

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

分析与解

- 由于 $f(1+x)=f(1-x)$，所以 $f(x)$ 关于 $X=1$ 对称，$P(x\le 1)=P(x<1)=0.5$.
- 由于 $P(0<x<2)=0.4$，所以 $P(0<x<1)=0.2$，$P(x<0)=P(x<1)-P(0\le x<1)=0.5-0.2=0.3$. 故本题选择 C 项.

题目 10 【 B 】

已知随机变量 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，则参数 n，p 的值为

A. $n=4$，$p=0.6$　　B. $n=6$，$p=0.4$　　C. $n=8$，$p=0.3$　　D. $n=24$，$p=0.1$

分析与解 $E(X)=np=2.4$，$D(X)=np(1-p)=1.44$. 联立解得 $n=6$，$p=0.4$. 故本题选择 B 项.

2. 填空题（每题 3 分，共 15 分）

题目 11

设随机变量 X，Y 相互独立，且有 $E(X)=2$，$E(Y)=1$，$D(X)=D(Y)=1$，由切比雪夫不等式估计得 $P(|X-2Y|\ge 5)=$ 0.2 .（结果用小数表示）

分析与解

- 设 $Z=X-2Y$，所以 $E(Z)=E(X)-2E(Y)=0$，$D(Z)=D(X)+4D(Y)=5$.
- $P(|X-2Y|\ge 5)\le \dfrac{D(Z)}{5^2}=\dfrac{1}{5}=0.2$.

题目 12

随机变量 X 得概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，$Y$ 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $(X\le 1/3)$ 出现的次数. 求 $P(Y=2)=$ 8/243（结果用分数表示）.

分析与解

由于 $P\left(X\le\dfrac{1}{3}\right)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{1}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{3}} 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{9}$，又 $Y\sim B\left(3,\dfrac{1}{9}\right)$ 得 $P(Y=2)=C_3^2\left(\dfrac{1}{9}\right)^2\cdot\dfrac{8}{9}=\dfrac{8}{243}$.

题目 13

设 $X\sim\pi(1)$，则 $F(2)=$ $5/2\mathrm{e}$.

分析与解 $F(2)=1/\mathrm{e}+1/\mathrm{e}+1/2\mathrm{e}=5/2\mathrm{e}$.

题目 14

设事件 A, B, C 两两互斥，$P(A) = 0.2$，$P(B) = 0.3$，$P(C) = 0.4$，则 $P[(A \cup B) - C] = \underline{0.5}$.

分析与解

- $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing \Rightarrow (A \cup B) \cap C = \varnothing$.
- $(A \cup B) - C = (A \cup B) - (A \cup B) \cap C = A \cup B$.
- $P[(A \cup B) - C] = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5$.

题目 15

已知随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，则期望 $E\left(3e^{-\frac{x}{2}} + 1/2\right) = \underline{25/2}$.

分析与解

$$P(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \text{ 所以 } E\left(3e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} \cdot \left(3e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{25}{2}.$$

3. 计算题（共 55 分）

题目 16

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且分布律如下

X	0	1	2	3
P	1/3	1/3	1/6	1/6

Y	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

1. 关于 X 和 Y 的联合分布律.
2. 关于 XY 的分布律.
3. $P(Y < 1 | X = 0)$.
4. $Cov(X - Y)$.
5. ρ_{XY}.

分析与解

1.

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

2. 令 $Z = XY$，Z 可取 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Z	-3	-2	-1	0	1	2	3
P	1/24	1/24	1/12	2/3	1/12	1/24	1/24

3. 由于 X, Y 相互独立

$$P\{Y < 1 | X = 0\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

4. 由于 X, Y 相互独立

$$\begin{aligned} Cov(X, -Y) &= E(-XY) - E(X)E(-Y) \\ &= E(X)E(Y) - E(XY) = 0 \end{aligned}$$

5. $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$.

题目 17

有三个罐子，1 号罐装有 2 红 1 黑共 3 个球，2 号罐装有 3 红 1 黑共 4 个球，3 号罐装有 2 红 2 黑共 4 个球. 某人从中随机取一罐，再从中任意取一球，已知取到是红球，问该红球取自 1 号罐的概率是多少?

分析与解

设事件 A 为取到红球，随机变量 X 表示取到第 X 号罐，$X=1,2,3$. 由题意得

$$\begin{cases} P\{A|X=1\}=\dfrac{2}{3} \\ P\{A|X=2\}=\dfrac{3}{4} \\ P\{A|X=3\}=\dfrac{1}{2} \\ P\{X=1\}=P\{X=2\}=P\{X=3\}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

所以取到红球的概率为

$$P(A)=P\{A|X=1\}P\{X=1\}+P\{A|X=2\}P\{X=2\}+P\{A|X=3\}P\{X=3\}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{23}{36}$$

该红球取自 1 号罐的概率是

$$P\{X>1|A\}=\frac{P\{X=1\cap A\}}{P(A)}=\frac{P\{A|X=1\}\cdot P\{X=1\}}{P(A)}=\frac{2/9}{23/36}=\frac{8}{23}$$

题目 18

设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(X)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ 0.3, & -1\le x<0 \\ 0.8, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$

1. X 的概率分布律.
2. $Y=X^2+1$ 的概率分布律.
3. $D(Y+1)$.

分析与解

1. $P\{X=-1\}=0.3$, $P\{X=0\}=0.8-0.3=0.5$, $P\{X=1\}=1-0.8=0.2$.
2. Y 可取 0, 1. $P\{Y=0\}=P\{X=0\}=0.5$, $P\{Y=1\}=P\{X=1\cup X=-1\}=0.2+0.3=0.5$.

Y	0	1
P	0.5	0.5

3. $Y\sim b(1,0.5)$, $\begin{cases} n=1 \\ p=0.5 \end{cases}$ ，所以 $D(Y+1)=D(Y)=np(1-p)=0.25$.

题目 19

设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}2xye^{-x^2-y}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$.

1. 求 $f_x(x)$ 和 $f_y(y)$.
2. X、Y 是否相互独立？说明理由.
3. 求 $f_{Y|X}(y|x)$;
4. 求 $E(2X-Y)$.

分析与解

1. $$f_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^{\infty} 2xye^{-x^2-y}\,dy \xlongequal{\text{Integration by parts}} 2xe^{-x^2} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}.$$
$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^{\infty} ye^{-y}\cdot 2xe^{-x^2}\,dx \xlongequal{\text{Integration by parts}} ye^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}.$$
2. 当 $x>0\cup y>0$ 时，$f(x,y)=2xye^{-x^2-y}=f_X(x)\cdot f_Y(y)$.
   当 $x\le 0\cup y\le 0$ 时，$f(x,y)=0=f_X(x)\cdot f_Y(y)$. 所以 X、Y 相互独立.
3. 由于 X、Y 相互独立，所以 $f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$.
4. $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx=\int_0^{\infty} 2x^2e^{-x^2}\,dx=-xe^{-x^2}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2e^{-y}\,dy=\int_0^{\infty} y^2e^{-y}\,dy=\left(y^2e^{-y}+2ye^{-y}+2e^{-y}\right)\Big|_0^{\infty}=-2$$
$$E(2X-Y)=2E(X)-E(Y)=\sqrt{\pi}+2$$

题目 20

设随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$, $x,y\in\mathbb{R}$. 令 $Z=X-Y$, 证明：Z 的密度函数 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}(z+y,y)\,dy$.

分析与解

证明.

$$P(z<Z<z+dz)=P(z<X-Y<z+dz)=\iint\limits_{z<X-Y<z+dz} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$
$$\xlongequal[v=y]{u=x-y} f_Z(z)\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_z^{z+dz} f_{X,Y}(u+v,v)\,du\,dv$$

利用 $\int_z^{z+dz} f_{X,Y}(u+v,v)\,du=dz\cdot f(z+v,v)$ 得

$$f_Z(z)\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z+v,v)\,dv=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y,y)\,dy$$ Q.E.D.