



HDU 数学营

## 15 年 杭州电子科技大学 高数上 A 期中考试题

(2015 年 11 月 28 日)

广告位: 代找各类电子书, 5r/本, QQ: 1138472374

## 一、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{2}{x}}{\tan x} = ( \quad )$ .

- A. 1                      B. 2                      C. 0                      D. 不存在

2.  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  在区间  $(2, +\infty)$  内是 (      ).

- A. 单调增加且是凹的      B. 单调减少且是凹的      C. 单调增加且是凸的      D. 单调减少且是凸的

3. 设  $f(x) = \begin{cases} \cos x + x \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $x=0$  是  $f(x)$  的 (      ).

- A. 振荡间断点              B. 可去间断点              C. 跳跃间断点              D. 连续点

4. 设  $f(x)$  可导,  $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$ , 则  $f(0) = 0$  是  $F(x)$  在  $x=0$  处可导的 (      ) 条件.

- A. 充要                      B. 充分但不必要              C. 必要但不充分              D. 既非充分又非必要

5. 当  $x \rightarrow 0$  时, 变量  $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$  是 (      ).

- A. 无穷小                      B. 无穷大                      C. 有界但不是无穷小              D. 无界但不是无穷大

6. 已知函数  $f(x)$  在  $x=0$  某邻域内有定义, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  (      ).

- A. 是比  $x$  高阶的无穷小              B. 是比  $x$  低阶的无穷小  
C. 与  $x$  是同阶的无穷小              D. 与  $x$  是等价的无穷小

7. 设直线  $y = 3x + b$  是曲线  $y = x^2 + 1$  上某点的切线, 则  $b = ( \quad )$ .

- A.  $\frac{3}{2}$                       B.  $-\frac{5}{4}$                       C.  $-\frac{5}{2}$                       D.  $-\frac{9}{4}$

8. 设函数  $f(x)$  满足  $f'(0) = f''(0) = 0$  且  $f'''(0) > 0$ , 则 (      ).

- A.  $f'(0)$  是  $f'(x)$  的极大值              B.  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值  
C.  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值              D.  $(0, f(0))$  是  $f(x)$  的拐点

## 二、填空题 ( 本题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分 )

9. 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{3^x - 1}{\ln(1+x)}, & x < 0 \\ x^2 + a, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $R$  上连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x+1} \right)^{4x+4} =$  \_\_\_\_\_.

11. 设  $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{2tx}$ , 则  $f'(2) =$  \_\_\_\_\_.

12. 设  $y = e^{x^2 \arctan x}$ , 则  $dy|_{x=1} =$  \_\_\_\_\_.

## 三、( 共 3 题, 每题 5 分, 共 15 分 )

13. 设  $y = \ln \sqrt{2-x^2}$ , 求  $y'$  和  $y''$ .

14. 求  $f(x) = \sin x \cos x$  的  $2m+1$  阶麦克劳林公式 (要求带佩亚诺余项).

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$ .

**四、( 本题 6 分 )**

16. 求  $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$  的凹凸区间与拐点.

**五、( 共 2 题，每题 5 分，共 10 分 )**

17. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $\ln y = xe^y - 1$  所确定，求  $y''(0)$ .

18. 设  $\begin{cases} x = 2\ln \cot t \\ y = \tan t \end{cases}$ ，求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}}$ .

## 六、( 本题 7 分 )

19. 证明不等式: 当  $0 < x < 1$  时,  $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$ .

## 七、( 本题 8 分 )

20.  $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 期中  $f(x)$  具有二阶连续导数, 且  $g(0) = 1$ ,  $g'(0) = -1$ , 试求  $f'(x)$  的表达式, 并讨论  $f'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的连续性.

**八、( 本题 9 分 )**

21. 试在椭圆  $x^2 + 3y^2 = 12$  内作底边与椭圆的长轴平行的内接等腰三角形，求三角形面积的最大值.

**九、( 本题 5 分 )**

22. 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a)f(b) > 0$ ,  $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ , 试证明:

对任意实数  $k$ , 至少存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = kf(\xi)$ .

## 参考答案如下:

如若想知道每道题的具体解析, 请关注知乎 ID: 她的糖。

### 一、选择题

C B D A D A B D

### 二、填空题

9.  $\ln 3$

10.  $e^8$

11. 24

12.  $\frac{\pi+1}{2}e^{\frac{\pi}{4}}dx$

### 三、简单计算题

13.  $y' = \frac{x}{x^2-2}, y'' = -\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2}$

14.  $x - \frac{2^2}{3!}x^2 + \frac{2^4}{5!}x^5 - \frac{2^6}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^m 2^{2m}}{(2m+1)!}x^{2m+1} + o(x^{2m+1})$

15.  $-\frac{1}{6}$

### 四、

16. 凹区间  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$  凸区间  $(-\infty, -1), \left(-1, \frac{1}{2}\right]$  拐点  $\left(2, \frac{4}{9}\right)$

### 五、

17.  $e^{\frac{2}{e}-1} + 2e^{\frac{2}{e}-2}$

18.  $\frac{1}{4}$

### 六、

19. 略

### 七、

20.  $f'(x) = \begin{cases} \frac{(g'(x) + e^{-x})x - (g(x) - e^{-x})}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}[g''(0) - 1], & x = 0 \end{cases}$

### 八、

21. 9

### 九、

22. 略