



HDU 数学营

2015-2016 杭州电子科技大学 高数上 B 期末考试题及答案

(2016 年 1 月 21 日)

一、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

1. 下列各式中正确的是 ().

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e$

2. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 与无穷小 $1-x$ 等价的是 ().

A. $1-x^3$

B. 3

C. 2

D. 1

3. 设 $f'(a)=3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x)-f(a)}{3x} = ().$

A. 3

B. -3

C. 1

D. -1

4. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$, 则 $f'(x) = ().$

A. $\frac{1}{x}$

B. $x \ln x - x + C$

C. $-\frac{1}{x^2}$

D. e^{x^2}

5. 已知曲线 $y = x^2 + ax + 1$ 与 $y = e^x$ 在 $x=0$ 处相切, 则 $a = ().$

A. 1

B. -1

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

6. 下列反常积分中收敛的是 ().

A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$

D. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$

二、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

7. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$ 8. $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}.$ 9. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = (y+3)\sin x$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$ 10. 函数 $f(x) = e^{2x} - 2x$ 的单调递增区间是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、计算分析题

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} (a \neq 0)$.

12. 设 $y = x e^y + 1$, 求 $y'|_{x=0}$.

13. 设 $y = e^{x \sin x}$, 求微分 dy .

14. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}} dt}{\int_0^x t(t - \sin t) dt}$.

16. 求曲线 $y = \ln(1 + x^2)$ 的凹凸区间和拐点.

四、综合题

17. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$.

18. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$, 求 $\int_1^3 f(x-2)dx$, .

19. 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$ 的通解.

五、应用计算题

20. 设直线 $y = ax$ ($0 < a < 2$) 与抛物线 $y = x^2$ 所围成图形的面积为 S_1 , 它们与直线 $x = 2$ 所围成图形的面积为 S_2 .

(1) 求 a 的值, 使得 $S = S_1 + S_2$ 最小, 并求 S 的最小值;

(2) 求 S 取最小值时所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周生成的旋转体的体积.

六、证明题

21. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明: 在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使得 $\int_a^\xi [f(x)]^2 dx = \int_\xi^b [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

如若想知道每道题的答案与具体解析, 请关注知乎 ID: 她的糖。