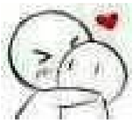

20 年杭州電子科技大學高数下 A 期末考答案

（2020.6）

本次码字与排版，均由知乎 ID:她的糖（QQ：1138472374）完成。由于其水平有限，难免会出现一些编排上的小错误，敬请各位同学批评指正。

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 向量$\vec{a}=(6,-1,2)$在向量$\vec{b}=(7,-4,4)$上的投影为（ B ）.

A. 3　　B. 6　　C. -2　　D. -4

2. 直线$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$和平面$3x-2y+7z-8=0$的位置关系是$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x}=$（ B ）.

A. 平行　　B. 垂直　　C. 斜交　　D. 直线在平面上

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}=$（ C ）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

4. 二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处的偏导数存在是函数在该点连续的（ D ）.

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 以上都不对

5. 函数$z=z(x,y)$由方程$z^3-3xyz=a^3$所确定，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（ A ）.

A. $\dfrac{yz}{z^2-xy}$　　B. $\dfrac{yz}{xy-z^2}$　　C. $\dfrac{xy-z^2}{yz}$　　D. $\dfrac{z^2-xy}{yz}$

6. 已知$\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\pi$，其中$D:x^2+y^2\leqslant a^2$，则$a=$（ D ）.

A. 1　　B. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$　　C. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$　　D. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

7. 设α为常数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n}{n^3}-\dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{n}}\right)$（ C ）.

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 敛散性与α有关　　D. 发散

8. 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$在$(-\infty,\infty)$内和函数为（ A ）.

A. e^{-x^2}　　B. $-e^{-x^2}$　　C. e^{x^2}　　D. $-e^{x^2}$

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9\. 函数$u=2xy+2z$在点$(1,1,2)$处的方向导数的最大值为 $\underline{\quad 2\sqrt{3} \quad}$.

10\. 交换积分次序$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{2-x^2} f(x,y)\,dy=\underline{\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx}$.

11\. 设L为$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为$a$，则$\oint_L (3x^2-4xy+2y^2)\,ds=\underline{\quad 6a \quad}$.

12\. 设$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$，则其以$2\pi$为周期的傅里叶级数在点$x=\pi$收敛于 $\underline{\quad \dfrac{\pi^2}{2} \quad}$.

三、简单计算题（本题共 4 小题，每题 6 分，共 24 分）

13\. 设$z=x\ln(x+\ln y)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$和$dz$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(x+\ln y)+\frac{x}{x+\ln y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{(x+\ln y)y}$$

$$dz=\left[\ln(x+\ln y)+\frac{x}{x+\ln y}\right]dx+\left[\frac{x}{(x+\ln y)y}\right]dy$$

14\. 求曲线$\begin{cases}x^2+z^2=10\\ y^2+z^2=10\end{cases}$在点$(1,1,3)$处的切线和法平面.

切线：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$

法平面：$3x+3y-z-3=0$

15. 求$\iint_D \frac{x^2}{y^3}dxdy$，其中$D$由$x=2$，$y=\sqrt{x}$，$xy=1$围成.

$$原式=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\frac{x^2}{y^3}dy=\frac{47}{20}$$

16. 设$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中$L$是沿着曲线$y=\sqrt{2x-x^2}$从点$(0,0)$到点$(1,1)$的一段弧，证明积分与路径无关，并求积分值.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$原式=\int_0^1[x^2-x-(x+\sin^2 x)]dx=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2$$

四、计算题（本题共 3 小题，17 题 8 分，18-19 题各 9 分，共 26 分）

17. 求双曲抛物面 $z=xy$ 被柱面 $x^2+y^2=2$ 所截得的面积.

$$S=\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{2}{3}\pi\left(3\sqrt{3}-1\right)$$

18. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}$ 的收敛域与和函数.

收敛域为 $(-2,2)$，和函数为 $\frac{2}{(2-x)^2}, x\in(-2,2)$

18、(1) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ ………………… 2 分

故 $R=2$，当 $x=\pm2$ 时，级数发散．收敛域为 $(-2,2)$ ………………… 2 分

(2) $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x^n)'=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n})'$ ……………………… 2 分

$=\left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)'=\left(\frac{x}{2-x}\right)'=\frac{2}{(2-x)^2}$，$x\in(-2,2)$ ……………………… 3 分

19. 求平面 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

$\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{35}{12}\right)$

标答是用拉乘做的，也可以画图根据几何意义直接判断出该点

2

19、设所求点为 (x,y,z) ，目标函数 $d=|z|$ 2分

建立辅助函数 $L=z^2+\lambda(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1)+\mu(x^2+y^2-1)$ ，.................. 2分

可得 $\begin{cases} L_x=\frac{1}{3}\lambda+2\mu x=0 \\ L_y=\frac{1}{4}\lambda+2\mu y=0 \\ L_z=2z+\frac{1}{5}\lambda=0 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ 2分

解得，$x=\frac{4}{5},y=\frac{3}{5},z=\frac{35}{12}$ 或 $x=-\frac{4}{5},y=-\frac{3}{5},z=\frac{85}{12}$ 2分

故所求点为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$ 1分

五、综合题（本题 9 分）

20. 求 $\iint_{\Sigma}(z^2-1)xdydz+xydzdx+zdxdy$，其中 $\Sigma: x^2+y^2=z(0\leqslant z\leqslant 4)$ 取下侧.

补面用高斯公式，48π

20、作辅助面 $\Sigma_1: z=4,(x^2+y^2\le 4)$，取上侧. Σ 和 Σ_1 围成 Ω. 1分

利用高斯公式，得

$$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}(z^2-1)xdydz+xydzdx+zdxdy=\iiint_{\Omega}(z^2+x)dv=\iiint_{\Omega}z^2dv$$ ，................ 3分

而 $\iiint_{\Omega}z^2dv=\int_0^4 z^2dz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^4 z^2\pi zdz=64\pi$， 2分

又因为 $\iint_{\Sigma_1}(z^2-1)xdydz+xydzdx+zdxdy=\iint_{D_{xy}}4dxdy=16\pi$， 2分

故原式=48π 1分

六、分析（本题 5 分）

21. 已知阿贝尔判别法是这样描述的：设$\{b_n\}$为单调有界的数列，且$\sum\limits_{n=1}^{n}a_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{n}a_nb_n$收敛.

下面试讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\,(p\in R)$的敛散性，如果收敛请判断绝对收敛与条件收敛.

21、解答要点

① $p\le 0$，通项$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\ne 0$，故级数发散；…………….1 分

② $p>1$，$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|=\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}<\dfrac{1}{n^p}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$收敛，故级数绝对收敛；…….1 分

③ $0<p\le 1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$收敛，而数列$\left\{\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right\}$是单减有下界（极限为 1），由阿贝尔判别法，得 题中级数收敛，……………………………………………… 2 分

另外由于$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|\Big/\dfrac{1}{n^p}\to 1\ (n\to\infty)$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$发散，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$发散，

所以，题中级数为条件收敛。……………………………………………… 1 分