

杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	离散数学 2		考试日期	2020 年 1 月 日	成绩	
课程号	A0507042	教师号		任课教师姓名	陈勤, 袁友伟, 周丽, 吴向阳	
考生姓名		学号 (8 位)		年级		专业

一、判断题 (每题 2 分, 共 10 分)

- 二元关系 $\{< x, y > | x, y \in N, x \equiv y \pmod{3}\}$ 不是 $N \rightarrow N$ 函数。 ()
- 群中肯定没有零元。 ()
- 群中次数为 1 的元素只有一个。 ()
- p 阶图中最多有 $p-1$ 个割点。 ()
- 有割点的连通图不可能是哈密尔顿图。 ()

二、选择题 (每题 2 分, 共 20 分)

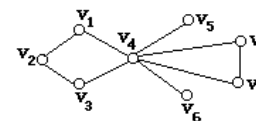
- 下列函数是双射的为 ()
A. $f: Z \rightarrow$ 偶数集, $f(x) = 2x$; B. $f: N \rightarrow N \times N$, $f(x) = \langle x, x+1 \rangle$;
C. $f: R \rightarrow Z$, $f(x) = [x]$ (取整数); D. $f: Z \rightarrow N$, $f(x) = |x|$
- 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 它的幂集在对称差运算 \oplus 下构成群 $\langle \rho(A), \oplus \rangle$, 则群方程 $\{1, 2\} \oplus x = \{1, 3\}$ 的解为 ()
A. $\{2, 3\}$; B. $\{1, 2, 3\}$; C. $\{1, 3\}$; D. \emptyset
- 一组学生进行扳手腕比臂力, 设 G 表示这组学生组成的集合, 定义 G 上的运算 $*$ 为:
 $\forall a, b \in G, a * b = (a, b \text{ 间扳手腕的胜者})$ 。则 $\langle G, * \rangle$ 是 ()
A. 半群 B. 幺半群 C. 群 D. 以上都不是
- 设 i 是虚数, $*$ 是复数的乘法运算, 则 $G = \{1, -1, i, -i\}, *$ 是群, 下列为 G 的子群的是 ()
A. $\langle \{1\}, * \rangle$ B. $\langle \{-1\}, * \rangle$ C. $\langle \{i\}, * \rangle$ D. $\langle \{-i\}, * \rangle$
- 在有理数集 Q 上定义的二元运算 $*$: $\forall x, y \in Q, x * y = x + y - xy$, 则 Q 中 ()。
A. 所有元素都有逆元; B. 有零元存在;
C. $\forall x \in Q, x \neq 1$ 时有逆元 $x^{-1} = \frac{1}{x}$; D. 所有元素都无逆元。
- 循环群 $\langle a^0, a^1, \dots, a^8 \rangle$ 的生成元数目有 () 个。
A. 1 B. 4 C. 6 D. 8
- 一棵树有 7 个 1 度节点, 3 个 3 度节点, 其余都是 4 度节点, 则该树有 () 个 4 度结

点。

- A. 1; B. 2; C. 3; D. 4。

13. 给定无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 如下图所示, 下面哪个边集不是边割集 ()。

- A. $\{< v_1, v_4 >, < v_3, v_4 >\}$;
B. $\{< v_1, v_4 >, < v_4, v_7 >\}$;
C. $\{< v_4, v_7 >, < v_4, v_8 >\}$;
D. $\{< v_1, v_2 >, < v_2, v_3 >\}$ 。



14. 一个边割集与任一生成树之间 ()。
A. 没有公共边; B. 偶数条公共边; C. 有一条公共边; D. 至少有一条公共边。
15. 下列无向图一定是树的是 ()
A. 连通图; B. 无回路但添加一条边则有回路的图;
C. 每对顶点之间都有通路的图; D. 有 n 个顶点, $n-1$ 条边的图

三、计算与证明题 (共 70 分)

16. (10 分) $\langle Z_6, +_6 \rangle$ 是一个群, 这里 $+_6$ 是模 6 加法, $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 试求出 $\langle Z_6, +_6 \rangle$ 的所有非平凡子群及这些子群的所有左陪集。

17. (12 分) 设有代数系统 $\langle G, * \rangle$, $*$ 是下表定义的运算。

*	a	b	c	d
a	c	a	d	b
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	b	d	a	c

- (1) 请说明 $\langle G, * \rangle$ 是群, 并给出理由。(4 分)
- (2) 求出各元素的次数。(4 分)
- (3) $\langle G, * \rangle$ 是否为循环群? 给出理由。如是循环群, 则给出所有生成元。(4 分)
18. (9 分) 设 $\langle G, * \rangle$ 是半群, e_l 是左单位元且 $\forall x \in G, \exists \hat{x} \in G$, 使得 $\hat{x} * x = e_l$, 证明:
- (1) (3 分) $\forall a, b, c \in A$, 若 $a * b = a * c$ 则 $b = c$
- (2) (6 分) $\langle G, * \rangle$ 是群 (可利用 (1) 的结论)。

座位号：

19. (10 分) 设有 A, B, C, D, E, F, G 七个人,

(1) 假设每两个人之间都会说某一种语言, 而每一种语言恰好有两个人会说, 请问他们总共会说几种语言? 请给出理由。(5 分)

(2) 假如他们会讲的语言如下: A : 英, B : 汉、英, C : 英、西班牙、俄, D : 日、汉, E : 德、西班牙, F : 法、日、俄, G : 法、德, 能否将这七个人的座位安排在圆桌旁, 使得每个人均能与他旁边的人交谈? 请说明理由。(5 分)

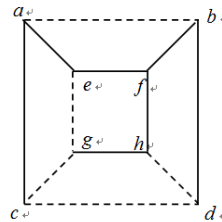
20. (7 分) 证明: 若 n 个节点的连通图中恰有 $n-1$ 条边, 则图中至少有一个结点度数为 1。

21. (12 分) 如图所示一简单图 G (边包含实线边和虚线边)

(1) 求此图的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$ (4 分)。

(2) 请问此图至少要增加多少条边才能成为欧拉图, 并说明理由。(4 分)。

(3) 此图的生成树如图中实线部分所示, 求枝 ef 的基本割集和弦 cg 的基本回路 (4 分)。

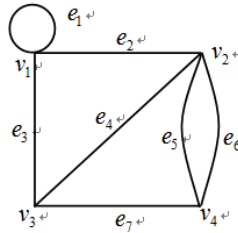


22. (10 分) 设有如下图 $G=(V, E)$, $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E=\{e_1, \dots, e_7\}$

(1) 求 G 的邻接矩阵和关联矩阵 (以下标顺序排列); (4 分)

(2) 求 G 中 v_1 到 v_3 长度为 3 的通路有多少条; (4 分)

(3) 求 G 中经过 v_2 的长度小于等于 3 回路有多少条。(2 分)



杭州电子科技大学学生答题卷（A）卷

考试课程	离散数学 2		考试日期	2020 年 1 月 日		成 绩	
课程号	A0507042	教师号		任课教师姓名		陈勤, 袁友伟, 周丽, 吴向阳	
考生姓名		学号 (8 位)		年 级		专 业	

一、判断题 (每格 2 分, 共 10 分)

1	√	2	×	3	√	4	×	5	√
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

二、选择题 (每格 2 分, 共 20 分)

6	A	7	A	8	B	9	A	10	B
11	C	12	A	13	B	14	D	15	B

三、计算与证明题 (共 70 分)

16 (10 分) 解: 非平凡子群有: $H_1 = \{0, 3\}$ 和 $H_1 = \{0, 2, 4\}$ (每个 2 分, 共 4 分)

H_1 的左陪集有三个, 分别为 $0H_1 = \{0, 3\}$, $1H_1 = \{1, 4\}$, $2H_1 = \{2, 5\}$ 。(共 3 分, 错一个扣 1 分)

H_2 的左陪集有两个, 分别为 $0H_2 = \{0, 2, 4\}$, $1H_2 = \{1, 3, 5\}$ 。(共 3 分, 错一个扣 1 分, 错 2 个得 0 分)

17 (12 分)

(1) i) 从运算表可看出 G 中任意两个元素都可以进行 $*$ 运算, 并且运算结果满足封闭性;

ii) 由表中的运算结果可验证 $*$ 运算满足结合律。

iii) $\because \forall x \in G, x * b = b * x = x$, 所以 b 是 $\langle G, * \rangle$ 中的单位元。

iv) 由运算表可看出 $a^{-1} = d, b^{-1} = b, c^{-1} = c, d^{-1} = a$, 因而任意元素都有逆元。

综合以上四条知 $\langle G, * \rangle$ 是群。(每条 1 分, 共 4 分)

(2) $|a| = 4, |b| = 1, |c| = 2, |d| = 4$ (每个 1 分, 共 4 分)

(3) 是循环群 (1 分),

因为 a 和 d 的次数是 4, 等于群元素的个数, 因而 $G = \langle a \rangle$ 和 $G = \langle d \rangle$ 。(1 分)。

生成元有 a 和 d 。(每个 1 分, 共 2 分)

18 (9 分)

(1) $\forall a, b, c \in G$, 如果 $a * b = a * c$, 根据已知条件知 $\exists \hat{a} \in G$, 使得 $\hat{a} * a = e_l$

$\therefore \hat{a} * (a * b) = \hat{a} * (a * c)$, 即 $(\hat{a} * a) * b = (\hat{a} * a) * c$, 得 $e_l * b = e_l * c$

$\therefore b = c$

(3 分)

(2) i) $\forall x \in G$, 由已知条件知 $\exists \hat{x} \in G$, 使得 $\hat{x} * x = e_l$ 。

$\therefore \hat{x} * (x * e_l) = (\hat{x} * x) * e_l = e_l * e_l = e_l = \hat{x} * x$

再由 (1) 的结论知 $x * e_l = x$, 所以 e_l 也是右单位元, 所以 e_l 就是单位元 e 。(3 分)

ii) $\forall x \in G$, 由已知条件知 \hat{x} 是 x 的左逆元,

又 $\hat{x} * (x * \hat{x}) = (\hat{x} * x) * \hat{x} = e * \hat{x} = \hat{x} = \hat{x} * e$, 再由 (1) 结论知 $x * \hat{x} = e$

$\therefore \hat{x}$ 也是 x 的右逆元,

$\therefore \hat{x}$ 是 x 的逆元。(3 分)

综合 i)ii)知 $\langle G, * \rangle$ 是群。

座位号：

19 (10 分)

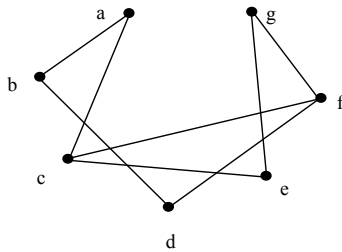
(1) 将 A, B, C, D, E, F, G 七个人表示为图中的 7 个顶点，由于每一种语言恰好有两个人会说，因此每种语言可表示为连接这两个人的边 (2 分)。

因为任意两人间都会说某种语言，所以在图中任意两个节点间都有边相连，因此此图为完全图。(2 分) 完全图中边的数量就是语言的数量，因此他们共会说 $7 \times 6 \div 2 = 21$ 种语言。(1 分)

(2) 将 A, B, C, D, E, F, G 七个人表示为图中的 7 个顶点，若两人都会讲同一种语言，则其间连一条边。得到的图如下图所示。(1 分)

此图为哈密顿图 (1 分)，因为存在哈密顿回路 $ABDFGECA$ (1 分)。

因此只要按照此哈密顿回路的顺序将它们安排在圆桌就坐，则每个人与左右两边的人在图中都有边相连，即他们都有共同语言可以交谈。(1 分)



20 (7 分)

证明：用反证法证明。

设 $G = \langle V, E \rangle$ 中 $|V| = n$, $|E| = n - 1$ 。

由握手定理知： $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 2n - 2$ 。(2 分)

如果假设图中至多一个节点度数为 1，则 G 中其余 $n - 1$ 个节点的度数都大于等于 2，因此节点度数之和 $\sum_{v \in V} d(v) \geq 1 + 2(n - 1) = 2n - 1 > 2n - 2$ ，与握手定理矛盾，因此假设不成立，因而至少有两个节点度数为 1。(5 分)

21 (12 分)

(1) $\kappa(G) = 3$, $\lambda(G) = 3$ 。(每个 2 分，共 4 分)

(2) 需至少增加 4 条边。(2 分)

因为此图有 8 个奇点，因此如果要让此图成为欧拉图，则需将每个奇点变为偶点。因此至少需要在 8 个奇点间两两配对加一条边，因此需要 4 条边。(2 分)

(3) 枝 ef 所在的基本割集为 $\{ef, ab, eg, cg, cd\}$ 。(2 分)

弦 cg 所在的基本回路是 $cghfeac$ 。(2 分)

22 (10 分)

(1) 邻接矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2 分) 关联矩阵： $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2 分)

(2) $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (1 分) $A^3 = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 8 & 6 \\ 11 & 7 & 9 & 15 \\ 8 & 9 & 7 & 9 \\ 6 & 15 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ (1 分)

因此 v_1 到 v_3 长度为 3 的通路有 8 条。(2 分)

(3) 经过 v_2 的长度小于等于 3 回路有 $6 + 7 = 13$ 条。(2 分)