



HDU 数学营

2014-2015 杭州电子科技大学 高数上 A 期末考试题及答案

(2015 年 1 月 16 日)

广告位: 代找各类电子书, 5r/本, QQ: 1138472374

一、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

- 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则 $|f(x)|$ 在 $x = x_0$ 处 ().
A. 必可导 B. 连续但不一定可导 C. 一定不可导 D. 不一定连续
- 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 则 $f(x) =$ ().
A. $\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + C$ B. $x - \frac{1}{2}x^2 + C$ C. $\sin x - \cos x + C$ D. $\frac{1}{2}x^2 - x + C$
- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的 ().
A. 等价无穷小 B. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小
C. 高阶无穷小 D. 低阶无穷小
- 设 $I_1 = \int_{-1}^1 x \cos x dx$, $I_2 = \int_{-1}^1 (x + x^2) dx$, $I_3 = \int_{-1}^1 (x - x^2) dx$, 则有 ().
A. $I_1 < I_3 < I_2$ B. $I_1 < I_2 < I_3$ C. $I_3 < I_1 < I_2$ D. $I_3 < I_2 < I_1$
- 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x f(x-t) dt =$ ().
A. $f(x)$ B. $-f(x)$ C. $2f(x)$ D. $-2f(x)$
- 下列反常积分中收敛的是 ().
A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$ D. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$

二、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

- 设直线 $y = 3x + b$ 为曲线 $y = x^2 + 1$ 上某点的切线, 则 $b =$ _____.
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{2\sin x}, & x < 0 \\ a + e^{2x}, & x \geq 0 \end{cases}$, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.
- 函数 $f(x) = e^{2x} - 2x$ 的单调递增区间是 _____.
- 微分方程 $\frac{dy}{dx} = x(y-3)$ 的通解是 _____.

三、小型计算题 (共 3 小题, 每小题 4 分, 共 12 分)

11. 设 $y = (1 + x^2)\arctan x$, 求 y 在 $x = 1$ 处的微分.

12. 隐函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln y = x e^y - 1$ 确定, 求 $y'(0)$.

13. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$, 求 a 的值.

四、计算题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

14. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$.

15. 设 $\begin{cases} x = a(1 - \cos t) \\ y = a \sin t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

16. 求曲线 $y = \ln(3 + x^2)$ 的凹凸区间和拐点.

17. 求定积分 $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$.

五、计算题 (共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

18. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1 + x^2)} dx$.

19. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$, 求 $\int_{-4}^{-2} f(x+3) dx$.

六、(共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

20. 设 $y = \int_{x^2}^0 x \cos t dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

21. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ 的通解.

七、应用计算题

22. 已知抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 将两坐标轴和抛物线 $y = 4 - x^2 (x \geq 0)$ 所围成的平面区域 D 分成面积相等的左右两部分区域 D_1, D_2 (相对意义上),

(1) 求 a 的值;

(2) 分别求区域 D_1, D_2 绕 x 轴旋转一周生成的旋转体的体积.

六、证明题

23. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是连续且递增的函数, 试证明:

$$(a+b) \int_a^b f(x) dx \leq 2 \int_a^b xf(x) dx.$$

参考答案

如若想知道每道题的具体解析, 请关注知乎 ID: 她的糖。

1-6: B B C C A C

7. $-\frac{5}{4}$

8. $-\frac{3}{2}$

9. $[0, +\infty)$

10. $3 + Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

11. $dy|_{x=1} = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)dx$

12. $y'(0) = e^{\frac{1}{e}-1}$

13. $-2\ln 2$

14. $-\frac{1}{6}$

15. $-\frac{1}{a\sin^3 t}$

16. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 凹区间, *others* 为凸区间, $(\pm\sqrt{3}, \ln 6)$ 为两个拐点

17. $2(\sqrt{3}-1)$

18. $-\frac{1}{x} - \arctan x + C$

19. $\frac{1}{3} + e$

20. $-\sin x^2 - 2x^2 \cos x^2$

21. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - x e^{2x}$

22. $\frac{16\pi}{3}$

23. 略