

得分

一、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

- 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的一阶导数 $f'(x_0)=0$ 是函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 取得极值的 ()
(A)充分条件 (B)必要条件 (C)充要条件 (D)既非充分也非必要条件
- 设函数有连续的导函数, 则下列 4 个命题中, 错误的命题一共有 ()
1)若 $\int f(x)dx = g(x)$, 则 $f(x) = g'(x)$ 2) $(\int f(x)dx)' = f(x)$
3) $\int (f(x))'dx = f(x)$ 4) $f(x)dx = d[\int f(x)dx]$
(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个
- 已知 $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x$, 则 $f(x) = ()$.
(A) $x - \frac{1}{2}x^2 + C$ (B) $x + \frac{1}{2}x^2 + C$ (C) $x^2 + \frac{1}{2}x + C$ (D) $x^2 - \frac{1}{2}x + C$
- 设 $f(x) = \int_0^x \sin^2 t dt$, $g(x) = x^3$, 则当 $x \rightarrow 0$, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ()
(A) 等价无穷小 (B) 高阶无穷小 (C) 同阶, 但非等价无穷小 (D) 低阶无穷小

5. $y = \frac{1}{x}$, $y = x$ 及 $x = 2$ 所围的平面图形面积为

(A) $\int_0^1 x dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ (B) $\int_1^2 (\frac{1}{x} - x) dx$ (C) $\int_{\frac{1}{2}}^1 (y - \frac{1}{y}) dy$ (D) $\int_1^2 (x - \frac{1}{x}) dx$

6. 曲线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 0 到 1 的一段弧长是

(A) $\frac{3}{2}(2^{\frac{3}{2}} - 1)$ (B) $\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} + 1)$ (C) $\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1)$ (D) $\frac{3}{2}(2^{\frac{3}{2}} + 1)$

7. 定积分 $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = ()$

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) 1 (D) 2

8. 关于反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 敛散性下列结论正确的是:

(A) $p > 1$ 收敛 (B) $p > -1$ 收敛 (C) $p < 1$ 收敛 (D) $p < -1$ 收敛

二、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

得分

9. $\int_{-2021}^{2021} \frac{1}{1+x^2} \sqrt{1+\sin^2 x} \arctan x dx =$

10. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = x(y-1)$ 的通解为:

11. 设 $y = \sin[f(x^2)]$, 其中 f 是可导函数, 则微分 $dy =$

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 2x}{x^2}, & x < 0 \\ a \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$

三、

1. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3 - \int_0^x e^t dt - y + 1 = 0$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

2. 求 $\int \frac{2x-3}{x^2-2x+3} dx$

3. 已知 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx = x + C$, 求 $\int \frac{dx}{f(x)}$.

4. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$.

四、1. 求 $f(x) = \int_0^{x^2} (\frac{3}{2} - \frac{t}{2}) dt$ 的凹凸区间和拐点.

2. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x+1}{x})^{ax} = \int_{-\infty}^a te^t dt$, 求常数 a .

3. 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$

4. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

五、过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成的平面图形 D . 试求: (1) 曲线 $y=\ln x$ 过坐标原点的切线方程.

(2) D 的面积,

(3) D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

六、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是连续且单调的函数, 证明: $(a+b) \int_a^b f(x) dx \leq 2 \int_a^b xf(x) dx$.