HDU 数学营

19 年杭州電子科技大学高数上期中考试题（AB 同卷）

（2019 年 11 月 24 日）

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 下列函数无界的是（　　）.

A. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$x\in R$

B. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

C. $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

D. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x\in(0,1)$

2. 函数$f(x)=\arctan\dfrac{1}{1-x}$，当$x\to 1$的极限值为（　　）.

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $-\dfrac{\pi}{2}$　　C. 0　　D. 不存在

3. 当$x\to 0$时，$f(x)=1-\cos x$与$g(x)=x\ln(1+ax)$是等价无穷小，则$a=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. 1

4. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^x, & x<0\\ x^2+1, & x\geqslant 0\end{cases}$，则$x=0$是$f(x)$的（　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 无穷间断点

5. 已知$y=\sin x$，则$y^{(9)}=$（　　）.

A. $\sin x$　　B. $\cos x$　　C. $-\sin x$　　D. $-\cos x$

6. 设$f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则$f(x)$在$x=0$处（　　）.

A. 连续但不可导　　B. 可导但导函数不连续　　C. 可导且导函数连续　　D. 不连续不可导

7. 设$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2}=-2$，则在$x=1$处必有（　　）.

A. 函数$f(x)$导数存在，且$f'(1)\neq 0$

B. $f(x)$取得极大值

C. $f(x)$取得极小值

D. 不连续不可导

8. 设常数$k>0$，函数$f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$在$(0,+\infty)$内零点个数为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9. 已知$f(x)$可导，函数$y=f\left(e^{x^2}\right)$的微分$dy=$__________.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$，则$b=$__________.

11. 曲线$y=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$的水平渐进线为__________.

12. 函数$y=\ln(1-x)$的带有佩亚诺余项的 5 阶麦克劳林公式为__________.

三、计算分析题（13-14 题共 5 小题，其余每题 6 分，共 28 分）

13. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$.

14. 已知函数$y=x^{\frac{1}{x}}\,(x>0)$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

15. 设函数$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$所确定，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$与$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

16. 求由$\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$所确定函数的一阶导数$\dfrac{dy}{dx}$和二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

17. 设区间$[0,1]$上$f''(x)>0$，试比较$f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$的大小关系.

四、综合题（本题共 3 小题，每题 7 分，共 21 分）

18. 已知函数$f(x)=2x^2-\ln x$，求该函数的单调区间与极值，并确定该函数的凹凸区间.

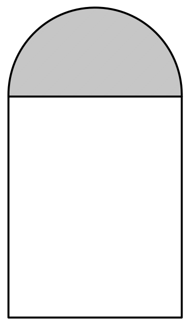
19. 已知周期为5的函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且在$x=0$的某领域内满足$f(1)-3f(1-x)=6x+o(x)$，

求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

20. 当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，证明$\sin x+\tan x>2x$.

五、应用计算题（本题 9 分）

21. 一个窗户的下部为矩形，配以透明玻璃，窗户的上部为半圆形，它的直径等于矩阵的底，配以彩色玻璃。已知窗户的框架的总长为定长L，彩色玻璃透光亮度为透明玻璃的一半，试问矩阵的底a和高h各位何值时，透光的亮度最大.



六、证明题（本题 5 分）

22. 已知$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$F(x)=(x-a)^2 f(x)$，证明：

存在$\xi\in(a,b)$，使得$F''(\xi)=0$.

参考答案如下：

如若想知道每道题的具体解析，请关注知乎 ID：她的糖。

一、选择题

C　D　A　C　B　C　B　C

二、填空题

9. $2xe^{x^2}f'\left(e^{x^2}\right)dx$　　10. $-2\ln 2$

11. $y=0$　　12. $-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5+o(x^5)$

三、计算分析题

13. $\frac{1}{2}$

14. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

15. $-\frac{1}{e}$　$\frac{1}{e^2}$

16. $\frac{1}{t}$　$-\frac{1+t^2}{t^3}$

17. $f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$

四、综合题

18. 单调增区间：$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 单调减区间：$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

极小值$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln 2$　凹区间为$(0,+\infty)$

19. $2x-y-12=0$

20. 略

五、应用计算题

21. $L=2a+2h+\frac{1}{2}\pi a$　$a=\frac{4}{3\pi+16}L$　$R=\frac{1}{2}\frac{\pi+8}{3\pi+16}L$

六、证明题

22. 略