

杭州电子科技大学学生考试卷 (A) 卷

考试课程	高等数学甲 (1)		考试日期	2014年1月12日		成绩	
课程号	A0714011	教师号		任课教师姓名			
考生姓名		学号 (8位)		年级		专业	

题号	一	二	三			四				五		六		七	八
			1	2	3	1	2	3	4	1	2	1	2		
得分															

得分	
----	--

一、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

1. $f'(x_0)=0$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值存在的 (D)
 (A) 充分条件; (B) 必要条件; (C) 充分必要条件; (D) 既非充分也非必要条件.

2. 设函数 $y=(\sin x^4)^2$, 则导数 $\frac{dy}{dx} = (C)$
 (A) $4x^3 \cos(2x^4)$; (B) $2x^3 \cos(2x^4)$; (C) $4x^3 \sin(2x^4)$; (D) $2x^3 \sin(2x^4)$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, $\Delta y = f(a+h) - f(a)$, 则当 $h \rightarrow 0$ 时必有 (D)
 (A) dy 是 h 的等价无穷小量; (B) $\Delta y - dy$ 是 h 的同阶无穷小量;
 (C) dy 是 h 的高阶无穷小量; (D) $\Delta y - dy$ 是 h 的高阶无穷小量.

4. 当 $x \rightarrow 3^-$ 时, 下列函数中为无穷小量的是 (A)

- (A) $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}$; (B) $f(x) = \ln(3-x)$; (C) $f(x) = \sin \frac{1}{x-3}$; (D) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$.

5. $x=0$ 是 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ 的 (D) (可参考 18 年第 9 题)

(A) 连续点; (B) 可去间断点; (C) 跳跃间断点; (D) 第二类间断点.

6. 下列反常积分中收敛的是 (B)

- (A) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$; (B) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$; (C) $\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$; (D) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

得分	
----	--

二、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

1. 设 $y = e^{x \sin x}$, 则 y 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的微分等于 $e^{\frac{\pi}{2}} dx$.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{2x}, & x < 0 \\ a + e^{2x}, & x \geq 0 \end{cases}$, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = -\frac{3}{2}$.

3. 不定积分 $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = -\sin \frac{1}{x} + C$.

4. 微分方程 $y'' + \frac{1}{x} y' - x = 0$ 的通解为 $\frac{1}{9} x^3 + C_1 \ln |x| + C_2$.

三、小型计算题 (共 3 小题, 每小题 4 分, 共 12 分)

1. 求曲线 $y = 2 \ln x + x^2 + 3$ 平行于直线 $y = 4x + 1$ 的切线方程

得分	
----	--

解 $y' = \frac{2}{x} + 2x$

$\frac{2}{x} + 2x = 4 \quad x=1$

切点 $M_0(1, 4)$

切线方程 $y - 4 = 4(x - 1)$

即 $4x - y = 0$

得分 2. 隐函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^x - e^y = \sin(xy)$ 确定, 求 $y'(0)$.

解 $e^x - e^y = \sin(xy)$ 两边同时对 x 求导

$$e^x - e^y y' = \cos(xy)(y + xy')$$
 (1)
 又 $x=0$ 时 $y=0$ (2)
 代入 (1) 解得 $y'(0) = 1$

得分 3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{2}{x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{x} \ln(x + e^x)}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(x + e^x)}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1 + e^x}{x + e^x}}{1}}$$

$$= e^4$$

四、计算题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

得分 1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$.

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{c + 9x}{-4(\pi - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(5x^2)}{8}$$

$$= -\frac{1}{8}$$

得分 2. $y = \cos \frac{x^2}{1+x}$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1}$ 的值.

解 $y' = -\sin \frac{x^2}{1+x} \cdot \left(\frac{x^2}{1+x} \right)'$

$$= -\sin \frac{x^2}{1+x} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = -\frac{3}{4} \sin \frac{1}{2}$$

得分 3. 求曲线 $y = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的凹凸区间和拐点.

解 $y' = x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$

$$y'' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2x+1}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

 令 $y'' = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ $y'' \Big|_{x=0}$ 不存在
 $x < -\frac{1}{2}$ $y'' < 0$ $\therefore (-\infty, -\frac{1}{2})$ 为 y 的凹区间
 $x > -\frac{1}{2}$ $y'' > 0$ $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ 为 y 的凸区间
 且 $x=0$ 为拐点 $M(-\frac{1}{2}, \frac{5}{24}(-\frac{1}{2})^{\frac{5}{3}})$ 为拐点

得分 4. 求定积分 $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

解 $x = a \sin t$, $x=0$ 时 $t=0$; $x=a$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$= \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt$$

$$= \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du$$

$$= \frac{a^4}{16} [u - \frac{1}{2} \sin 2u]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi a^4}{16}$$

五、计算题 (共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)。

得分 1. 求定积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2} dx$.

解 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2} dx = - \int_0^1 \ln(1+x) d(2+x)^{-1} \dots 1'$
 $= - \left[\frac{\ln(1+x)}{2+x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2+x} \cdot \frac{1}{1+x} dx \right] 2'$
 $= - \frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \frac{1}{2+x} \cdot \frac{1}{1+x} dx$
 $= - \frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} \right) dx \dots 1'$
 $= - \frac{\ln 2}{3} + \ln(1+x) \Big|_0^1 - \ln(2+x) \Big|_0^1 1'$
 $= \frac{5}{3} \ln 2 - \ln 3 \dots 1'$

得分 2. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数, 且满足 $\int_0^x t f(x-t) dt = e^{2x} - 2x - 1$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解 $\int_0^x t f(x-t) dt \xrightarrow{x-t=u} \int_0^x (x-u) f(u) du$
 $= x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du \dots 1'$

\therefore 原式可改写为
 $x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du = e^{2x} - 2x - 1 \dots 1'$

$\int_0^x f(u) du = 2e^{2x} - 2 \dots 1'$

$f(x) = 4e^{2x} \dots 1'$

六、(共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)。

得分 1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x (e^t - 1) dt}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 问 a 取何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

解 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \dots 1'$
 $a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \cdot 1}{2x} = 0 \dots 2'$
 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\int_0^x (e^t - 1) dt}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1) dt}{x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \cdot 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot 1}{3x^2} = \frac{1}{3} \dots 3'$

得分 2. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ 的通解.

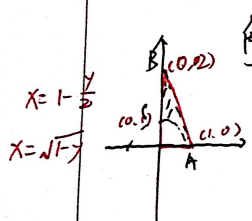
解 齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (1)$
 特征方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (2)$
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ 为 (1) 通解
 $\therefore xe^{2x}$ 且 $\lambda = 2$ 是特征根且 $\lambda = 2$ 为重根
 $y^* = x(ax+b)e^{2x}$
 \therefore 设 $y^* = x(ax+b)e^{2x}$
 $\therefore y^* = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{2x}$
 故通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{2x} \dots 3'$

得分

七、应用题 [本题 9 分]

已知平面区域 D 由抛物线 $y=1-x^2$ 及其在点 $(1,0)$ 处的切线和 y 轴围成，试求 (1) 平面区域 D 的面积；

(2) 平面区域 D 分别绕 x 轴、 y 轴旋转一周生成的旋转体的体积。



解 易求 $y=1-x^2$ 在 $(1,0)$ 处切线方程 $y' = -2x|_{x=1} = -2$
 $y-0 = -2(x-1)$ 即 $y = -2x+2$
 (1) D 的面积 $S = \int_0^1 (1-x^2 - (-2x+2)) dx = \frac{1}{3}(x-1)^3|_0^1 = \frac{1}{3}$

D 绕 x 轴旋转一周生成旋转体体积为：

$$\begin{aligned} V_{x轴} &= \int_0^1 [\pi(-2x+2)^2 - \pi(1-x^2)^2] dx = \frac{2}{3}\pi \\ &= \pi \int_0^1 (-4x^2 + 8x - 4 + 1 - 2x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \left[-\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + x - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{5}\pi \end{aligned}$$

D 绕 y 轴旋转一周生成旋转体体积为：

$$\begin{aligned} V_y &= \int_0^1 2\pi x (-2x+2 - 1+x^2) dx = \frac{2}{3}\pi \\ &= 2\pi \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

得分

八、证明题 [本题 5 分]

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 具有连续的导函数 $f'(x)$ ，且 $f(a)=f(b)=0$ ，试证明不等式

$$4 \int_a^b |f(x)| dx \leq M(b-a)^2 \quad \left(\text{其中 } M = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \right).$$

证明 任取 $x \in (a,b)$ ， $f(x)$ 在 $[a,x]$ 和 $[x,b]$

上分别应用 Lagrange

$$f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a)$$

$$f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b)$$

$$|f(x)| = |f'(\xi_1)| |x-a| \leq M(x-a)$$

$$|f(x)| = |f'(\xi_2)| |x-b| \leq M(b-x)$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \dots$$

$$\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x) dx$$

$$= \frac{M}{2} (x-a)^2 \Big|_a^{\frac{a+b}{2}} - \frac{M}{2} (b-x)^2 \Big|_{\frac{a+b}{2}}^b$$

$$= \frac{M(b-a)^2}{4}$$

$$\text{故 } 4 \int_a^b |f(x)| dx \leq M(b-a)^2.$$