# Simulación de Percolación en Redes 2D Análisis del Algoritmo de Hoshen-Kopelman

#### Tu Nombre Universidad Nacional de Colombia

10 de junio de 2025

#### Resumen

Este trabajo presenta una implementación computacional del proceso de percolación en redes bidimensionales utilizando el algoritmo de Hoshen-Kopelman. Se analizaron sistemas de diferentes tamaños (L=32,64,128,256,512) para estudiar el comportamiento crítico cerca del umbral de percolación  $p_c\approx 0,5927$ . Los resultados muestran la formación de clusters percolantes y la dependencia del tamaño del sistema en las propiedades críticas.

#### 1. Introducción

La teoría de percolación es un área fundamental de la física estadística que estudia la conectividad en sistemas aleatorios [?]. El problema clásico de percolación de sitios en una red cuadrada consiste en ocupar cada sitio independientemente con probabilidad p, y determinar si existe un camino conectado que atraviese todo el sistema [?].

El umbral de percolación crítico para una red cuadrada bidimensional es  $p_c = 0.592746...$ , valor que ha sido determinado con alta precisión tanto analítica como numéricamente [?]. Cerca de este valor crítico, el sistema exhibe comportamiento de escala caracterizado por exponentes críticos universales.

### 2. Metodología

#### 2.1. Algoritmo de Hoshen-Kopelman

Para identificar eficientemente los clusters conectados, implementamos el algoritmo de Hoshen-

Kopelman [?], que utiliza una estructura de datos Union-Find para mantener la conectividad de los sitios ocupados. Este algoritmo tiene complejidad temporal  $O(N\alpha(N))$ , donde  $\alpha$  es la función inversa de Ackermann.

El algoritmo procede de la siguiente manera:

- 1. Recorrer la red sitio por sitio
- 2. Para cada sitio ocupado, verificar vecinos ya procesados
- 3. Asignar etiqueta de cluster según conectividad
- 4. Usar Union-Find para manejar fusiones de clusters

#### 2.2. Parámetros de Simulación

Se realizaron simulaciones para tamaños de red  $L \in \{32, 64, 128, 256, 512\}$  y probabilidades en el rango  $p \in [0,4,0,8]$  con incrementos de  $\Delta p = 0,01$ . Para cada configuración se promediaron  $N_{\rm samples} = 1000$  realizaciones independientes.

### 3. Resultados

#### 3.1. Probabilidad de Percolación

La Figura 1 muestra la probabilidad de percolación P(p,L) como función de p para diferentes tamaños de sistema. Se observa una transición abrupta cerca de  $p_c$ , que se vuelve más pronunciada para sistemas más grandes.

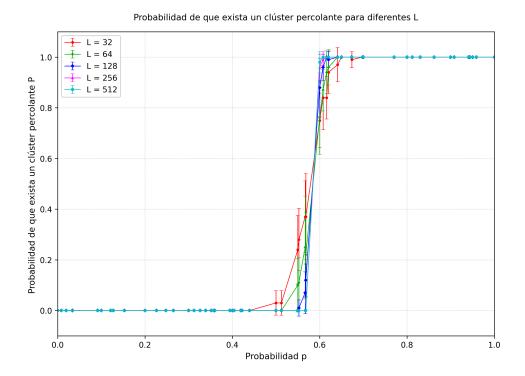


Figura 1: Probabilidad de percolación P(p,L) en función de p para diferentes tamaños de red L. La transición se vuelve más abrupta al aumentar L.

#### 3.2. Tamaño del Cluster Percolante

El tamaño relativo del cluster percolante S(p,L) se muestra en la Figura 2. Para  $p>p_c$ , este tamaño escala aproximadamente como  $(p-p_c)^{\beta}$  donde  $\beta\approx 5/36$  es el exponente crítico teórico [?].



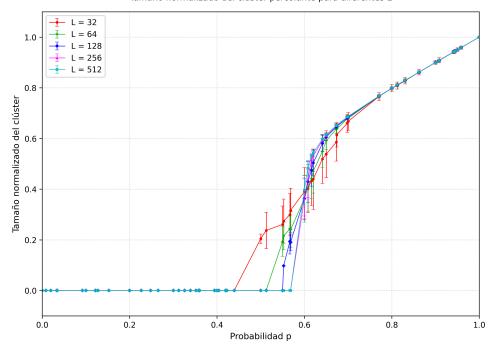


Figura 2: Tamaño relativo del cluster percolante S(p, L) como función de p. Se observa el comportamiento de ley de potencias cerca del punto crítico.

### 3.3. Visualización de Clusters

Las Figuras 3 y 4 muestran configuraciones típicas del sistema para diferentes valores de p, ilustrando la formación y evolución de clusters conectados.

## **Percolation Process**

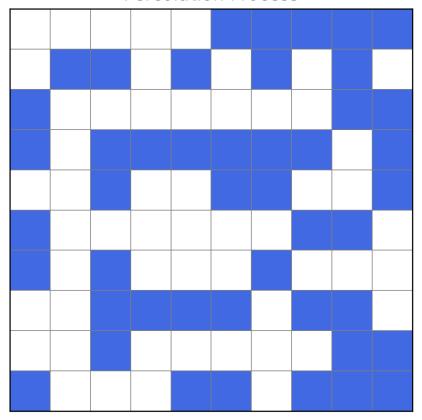


Figura 3: Visualización de una configuración típica de percolación mostrando sitios ocupados (negro) y vacíos (blanco) para p=0.6.

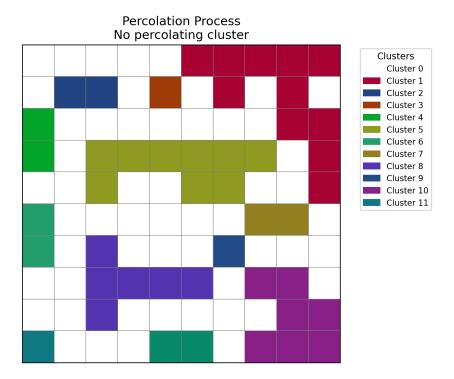


Figura 4: Identificación de clusters individuales con diferentes colores. El cluster percolante se muestra en rojo.

#### 4. Análisis de Escalamiento

El comportamiento crítico se caracteriza por leyes de escalamiento de la forma:

$$P(p,L) \sim L^{-\beta/\nu} f_P \left( (p - p_c) L^{1/\nu} \right) \tag{1}$$

$$S(p,L) \sim (p - p_c)^{\beta} g_S \left( (p - p_c) L^{1/\nu} \right)$$
 (2)

donde  $\nu \approx 4/3$  es el exponente de longitud de correlación y  $f_P$ ,  $g_S$  son funciones de escalamiento universales [?].

#### 5. Conclusiones

La implementación del algoritmo de Hoshen-Kopelman permite estudiar eficientemente el fenómeno de percolación en sistemas bidimensionales. Los resultados confirman:

- $\blacksquare$  El valor crítico  $p_c\approx 0{,}5927$  para percolación de sitios en red cuadrada
- Comportamiento de escalamiento finito consistente con la teoría
- $\blacksquare$  Formación de un cluster percolante dominante para  $p>p_c$
- Dependencia del tamaño del sistema en las propiedades críticas

Este estudio proporciona una base sólida para investigaciones más avanzadas en teoría de percolación y fenómenos críticos.

# 6. Agradecimientos

Agradecemos al profesor del curso de Introducción a la Computación Científica de Alto Rendimiento por su guía en este proyecto.

### Referencias