Simulación de Percolación en Redes 2D
Análisis del Algoritmo de Hoshen-Kopelman

Tu Nombre
Universidad Nacional de Colombia

10 de junio de 2025

Resumen

Este trabajo presenta una implementación computacional del proceso de percolación en redes bidimensionales utilizando el algoritmo de Hoshen-Kopelman. Se analizaron sistemas de diferentes tamaños ($L = 32, 64, 128, 256, 512$) para estudiar el comportamiento crítico cerca del umbral de percolación $p_c \approx 0{,}5927$. Los resultados muestran la formación de clusters percolantes y la dependencia del tamaño del sistema en las propiedades críticas.

1. Introducción

La teoría de percolación es un área fundamental de la física estadística que estudia la conectividad en sistemas aleatorios [1]. El problema clásico de percolación de sitios en una red cuadrada consiste en ocupar cada sitio independientemente con probabilidad p, y determinar si existe un camino conectado que atraviese todo el sistema [2].

El umbral de percolación crítico para una red cuadrada bidimensional es $p_c = 0{,}592746...$, valor que ha sido determinado con alta precisión tanto analítica como numéricamente [3]. Cerca de este valor crítico, el sistema exhibe comportamiento de escala caracterizado por exponentes críticos universales.

2. Metodología

2.1. Algoritmo de Hoshen-Kopelman

Para identificar eficientemente los clusters conectados, implementamos el algoritmo de Hoshen-Kopelman [4], que utiliza una estructura de datos Union-Find para mantener la conectividad de los sitios ocupados. Este algoritmo tiene complejidad temporal $O(N\alpha(N))$, donde α es la función inversa de Ackermann.

El algoritmo procede de la siguiente manera:

1. Recorrer la red sitio por sitio
2. Para cada sitio ocupado, verificar vecinos ya procesados
3. Asignar etiqueta de cluster según conectividad
4. Usar Union-Find para manejar fusiones de clusters

2.2. Parámetros de Simulación

Se realizaron simulaciones para tamaños de red $L \in \{32, 64, 128, 256, 512\}$ y probabilidades en el rango $p \in [0{,}4, 0{,}8]$ con incrementos de $\Delta p = 0{,}01$. Para cada configuración se promediaron $N_{\text{samples}} = 1000$ realizaciones independientes.

3. Resultados

3.1. Probabilidad de Percolación

La Figura 1 muestra la probabilidad de percolación $P(p, L)$ como función de p para diferentes tamaños de sistema. Se observa una transición abrupta cerca de p_c, que se vuelve más pronunciada para sistemas más grandes.

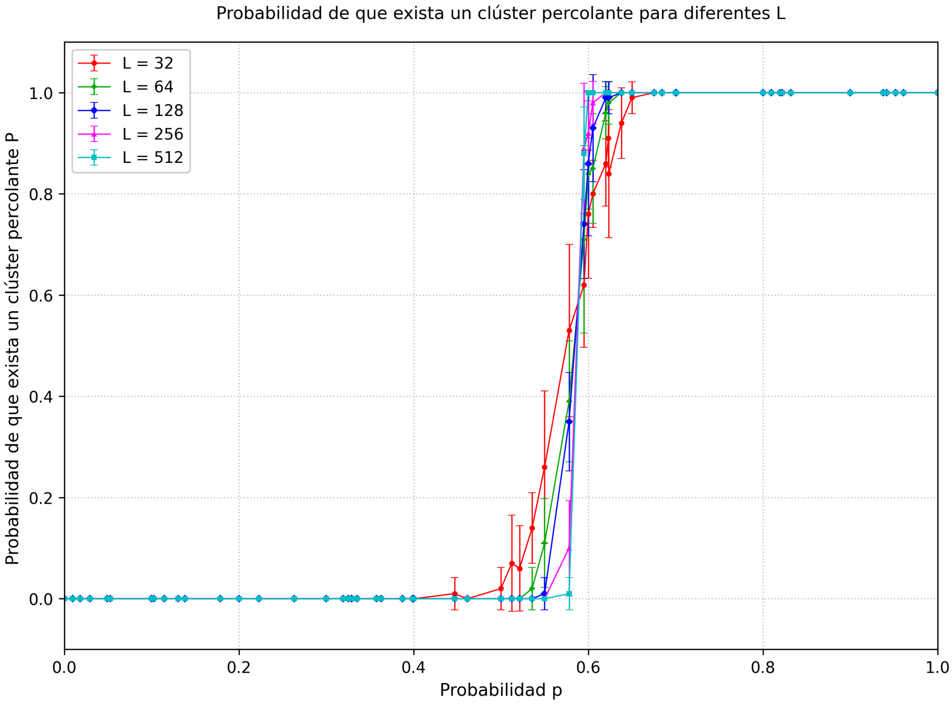

Figura 1: Probabilidad de percolación $P(p, L)$ en función de p para diferentes tamaños de red L. La transición se vuelve más abrupta al aumentar L.

3.2. Tamaño del Cluster Percolante

El tamaño relativo del cluster percolante $S(p, L)$ se muestra en la Figura 2. Para $p > p_c$, este tamaño escala aproximadamente como $(p - p_c)^\beta$ donde $\beta \approx 5/36$ es el exponente crítico teórico [1].

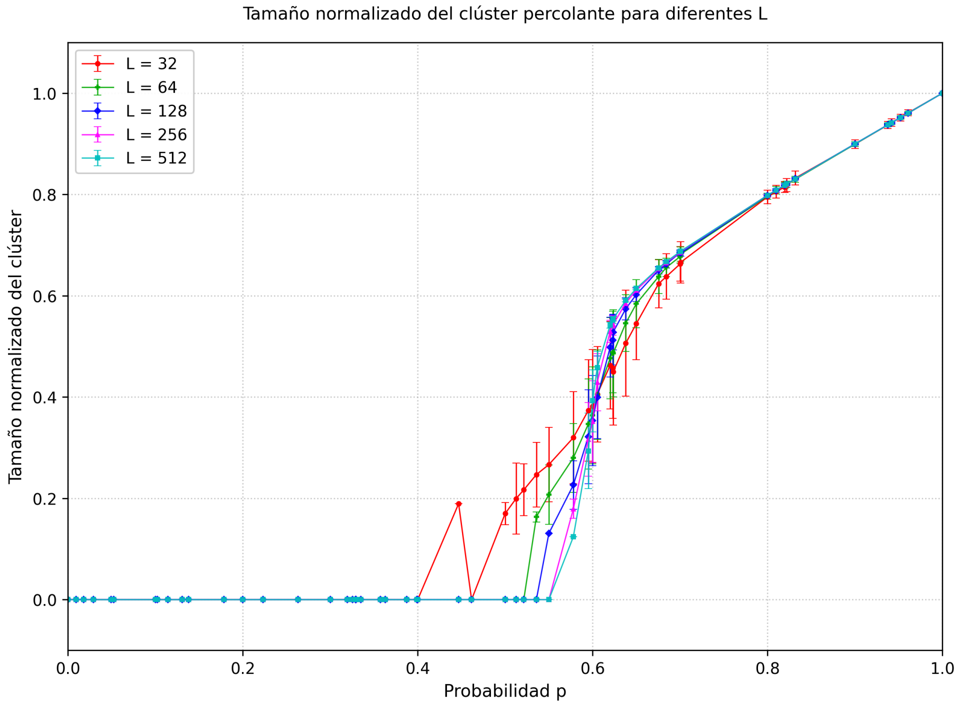

Figura 2: Tamaño relativo del cluster percolante $S(p, L)$ como función de p. Se observa el comportamiento de ley de potencias cerca del punto crítico.

3.3. Visualización de Clusters

Las Figuras 3 y 4 muestran configuraciones típicas del sistema para diferentes valores de p, ilustrando la formación y evolución de clusters conectados.

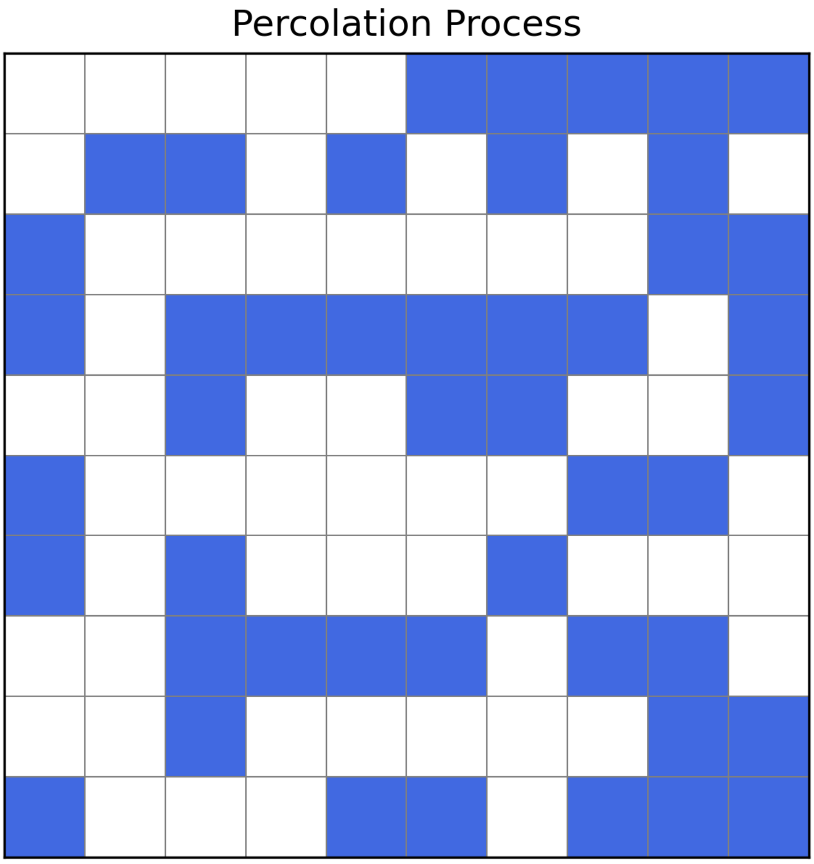

Figura 3: Visualización de una configuración típica de percolación mostrando sitios ocupados (negro) y vacíos (blanco) para $p = 0{,}6$.

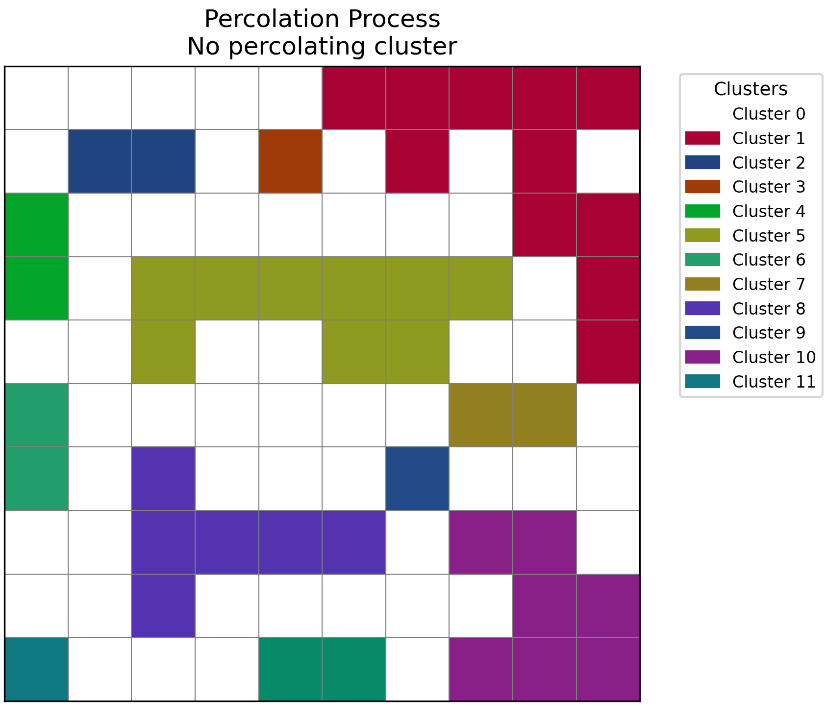

Figura 4: Identificación de clusters individuales con diferentes colores. El cluster percolante se muestra en rojo.

4. Análisis de Escalamiento

El comportamiento crítico se caracteriza por leyes de escalamiento de la forma:

$$P(p, L) \sim L^{-\beta/\nu} f_P\left((p - p_c)L^{1/\nu}\right) \tag{1}$$

$$S(p, L) \sim (p - p_c)^{\beta} g_S\left((p - p_c)L^{1/\nu}\right) \tag{2}$$

donde $\nu \approx 4/3$ es el exponente de longitud de correlación y f_P, g_S son funciones de escalamiento universales [5].

5. Conclusiones

La implementación del algoritmo de Hoshen-Kopelman permite estudiar eficientemente el fenómeno de percolación en sistemas bidimensionales. Los resultados confirman:

- El valor crítico $p_c \approx 0{,}5927$ para percolación de sitios en red cuadrada
- Comportamiento de escalamiento finito consistente con la teoría
- Formación de un cluster percolante dominante para $p > p_c$
- Dependencia del tamaño del sistema en las propiedades críticas

Este estudio proporciona una base sólida para investigaciones más avanzadas en teoría de percolación y fenómenos críticos.

6. Agradecimientos

Agradecemos al profesor del curso de Introducción a la Computación Científica de Alto Rendimiento por su guía en este proyecto.

Referencias

[1] Dietrich Stauffer and Amnon Aharony. *Introduction to percolation theory*. CRC press, 2nd edition, 1994.

[2] Geoffrey Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Science & Business Media, 1999.

[3] Harry Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals 1/2. *Communications in Mathematical Physics*, 74(1):41–59, 1980.

[4] Joseph Hoshen and Raoul Kopelman. Percolation and cluster distribution. i. cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm. *Physical Review B*, 14(8):3438–3445, 1976.

[5] John Cardy. Scaling and renormalization in statistical physics. *Cambridge University Press*, 1992.