



分布估计算法中差分采样策略的研究

董兵

周爱民 副教授

华东师范大学
计算机科学软件工程学院

2017年2月



- 1 绪论
- 2 研究背景
- 3 基于差分采样的单目标优化
- 4 基于差分采样的多目标优化
- 5 总结和展望



1 绪论

- 研究目的和意义
- 主要研究内容

2 研究背景

- 分布估计算法
- 差分进化

3 基于差分采样的单目标优化

- 全局单目标优化问题
- 基于差分采样的单目标分布估计算法
- 实验分析

4 基于差分采样的多目标优化

- 连续多目标问题
- 基于差分采样的多目标分布估计算法
- 实验分析

5 总结和展望



演化算法是一种基于种群的启发式优化算法，是隶属于演化计算的人工智能算法。

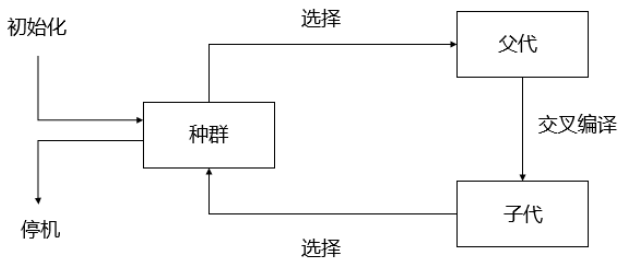


Figure 1: 演化算法流程图



分布估计算法是一种新型的演化算法，传统的分布估计算法主要由三个步骤组成：建模、采样、选择。

本文的研究目的是利用**差分采样策略**来取代分布估计算法传统的建模采样，从而提高算法的性能。

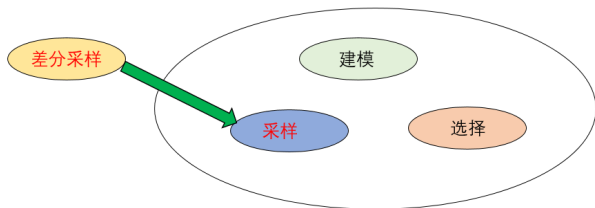


Figure 2: 分布估计算法



1 绪论

- 研究目的和意义
- 主要研究内容

2 研究背景

- 分布估计算法
- 差分进化

3 基于差分采样的单目标优化

- 全局单目标优化问题
- 基于差分采样的单目标分布估计算法
- 实验分析

4 基于差分采样的多目标优化

- 连续多目标问题
- 基于差分采样的多目标分布估计算法
- 实验分析

5 总结和展望



- 受差分进化启发，提出一种基于差分进化的采样策略，即差分采样策略。
- 对于单目标优化问题，利用基于特征向量的差分进化去改进采样，通过expensive Local Search进一步改进解集质量，提出基于差分采样的单目标分布估计算法。
- 对于多目标优化问题，利用差分采样策略去改进RM-MEDA的采样，提出基于差分采样的多目标分布估计算法。



1 绪论

- 研究目的和意义
- 主要研究内容

2 研究背景

- 分布估计算法
- 差分进化

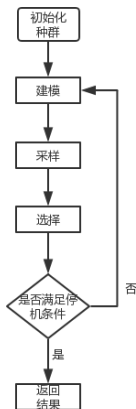
3 基于差分采样的单目标优化

- 全局单目标优化问题
- 基于差分采样的单目标分布估计算法
- 实验分析

4 基于差分采样的多目标优化

- 连续多目标问题
- 基于差分采样的多目标分布估计算法
- 实验分析

5 总结和展望



- 分布估计算法主要有三个主要步骤：建模、采样、选择
- 传统的分布估计算法通过从建立的概率模型中采样产生新的个体

Figure 3: 分布估计算法流程

研究现状:

根据问题的不同类型，可以将分布估计算法分成以下几类：

- 基于离散变量的分布估计算法
- 基于遗传编程的分布估计算法
- 多目标分布估计算法



1 绪论

- 研究目的和意义
- 主要研究内容

2 研究背景

- 分布估计算法
- 差分进化

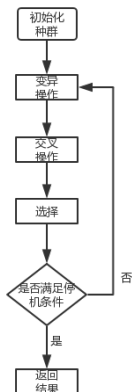
3 基于差分采样的单目标优化

- 全局单目标优化问题
- 基于差分采样的单目标分布估计算法
- 实验分析

4 基于差分采样的多目标优化

- 连续多目标问题
- 基于差分采样的多目标分布估计算法
- 实验分析

5 总结和展望



- 变异操作：产生变异向量
常用的变异策略：

- $DE/rand/1$
- $DE/best/1$
- $DE/rand/2$
- $DE/best/2$
- $DE/current-to-best/1$
- $DE/current-to0rand/1$

- 交叉操作：利用交叉算子结合变异向量和目标向量来产生实验向量。
- 选择：利用一对一的竞争机制从目标向量和试验向量中挑选个体。

Figure 4: 差分进化流程



差分进化自从提出后，就受到了工业界以及学业界的广泛专注。根据差分进化解决的问题类型，可以将差分进化分为以下几种类型：

- 针对连续单目标优化问题的差分进化算法
- 针对约束优化的差分进化算法
- 针对多目标优化问题的差分进化算法



1 绪论

- 研究目的和意义
- 主要研究内容

2 研究背景

- 分布估计算法
- 差分进化

3 基于差分采样的单目标优化

- 全局单目标优化问题
- 基于差分采样的单目标分布估计算法
- 实验分析

4 基于差分采样的多目标优化

- 连续多目标问题
- 基于差分采样的多目标分布估计算法
- 实验分析

5 总结和展望



单目标优化问题几乎出现在科学和工程应用的各个领域。单目标优化问题的目标函数一般是非凸函数，并且在可行区域内具有很多的局部极小值或者极大值。本文研究的单目标优化问题针对的是连续空间的全局优化问题，即是求目标函数的最小值或者最大值。

对于全局优化问题在本文做出以下定义：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t. } & x \in [a_i, b_i]^n \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ 是决策变量向量， $[a_i, b_i]^n$ 是搜索空间区域， $f: R^n \rightarrow R$ 则是目标函数。



- 1 绪论
 - 研究目的和意义
 - 主要研究内容
- 2 研究背景
 - 分布估计算法
 - 差分进化
- 3 基于差分采样的单目标优化
 - 全局单目标优化问题
 - 基于差分采样的单目标分布估计算法
 - 实验分析
- 4 基于差分采样的多目标优化
 - 连续多目标问题
 - 基于差分采样的多目标分布估计算法
 - 实验分析
- 5 总结和展望



```

1 初始化种群  $Pop(t) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$  ( $N$  是种群大小)
2 while not terminate do
3    $v_{i,G} = x_{r1,G} + F \cdot (x_{r2,G} - x_{r3,G})$ 
4   if rand() <  $p$  then
5     if rand()  $\leq CR$  then
6        $u_{i,G} = v_{i,G}$ 
7     else
8        $u_{i,G} = x_{i,G}$ 
9     end
10  else
11    求得  $x_{i,G}$  的特征向量矩阵  $E$ , 令  $E'$  为特征向量矩阵的逆矩阵。
12     $x'_{i,G} = E' \cdot x_{i,G}$ 
13     $v'_{i,G} = E' \cdot v_{i,G}$ 
14    if rand()  $\leq CR$  then
15       $u'_{i,G} = v'_{i,G}$ 
16    else
17       $u'_{i,G} = x'_{i,G}$ 
18    end
19     $u_{i,G} = E \cdot u'_{i,G}$ 
20  end
21  if  $f(u_{i,G}) \leq f(x_{i,G})$  then
22     $x_{i,G+1} = u_{i,G}$ 
23  else
24     $x_{i,G+1} = x_{i,G}$ 
25  end
26   $t = t + 1$ 
27 end
  
```

- DE-EIG算法是基于特征向量的差分进化算法，其主要贡献是在一个旋转的坐标空间对个体进行交叉操作，这样可以利用旋转空间中种群的协方差矩阵的特征向量信息。
- 这样在保证种群的多样性的同时，能够有效地引导种群向全局最优演化。

Figure 5: DE-EIG算法



```

1 在可行的搜索空间内构建一个随机种群 $Pop(t)$ 
2 while not terminate do
3   构建概率模型:
4    $p_k(x) = \prod_{i=1}^n \mathcal{N}(x_i; \mu_i, \sigma_i)$ 
5   对于所有  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\hat{r}^{bc}$  生一个试验向量  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 
6   if rand() < CRP then
7      $u = \frac{(x_i)_t + (x_d)_t}{2} + F \cdot [(x_d)_j - (x_i)_j + (x_b)_j - (x_c)_j]$ 
8   else
9      $u$  根据  $\mathcal{N}(x_i; \mu_i, \sigma_i)$  采样  $\hat{r}^{bc}$  生
10  end
11 if  $f(u) < f(x_i)$  then
12    $x_i^{t+1} = u$ 
13 else
14    $x_i^{t+1} = x_i^t$ 
15 end
16  $t = t + 1$ 
17 end

```

- DE/EDA是一种结合差分进化和分布估计算法来解决全局连续优化问题。
- DE/EDA通过利用分布估计算法可以提取种群全局信息和差分进化可以提取种群查分信息的优点，是一种非常具有研究前景的算法。

Figure 6: DE/EDA算法

expensive Local Search

利用 $Converge(\theta, t, t_e)$ 函数来判断解是否收敛

$$\Delta f = \frac{|f_{t-50}^1 - f_t^1|}{\max\{|f_{t-50}^1|, |f_t^1|\} + \varepsilon} \quad (2)$$

$$\Delta x = \frac{|c_{t-50} - c_t|}{\max\{c_t, c_{t-50}\} + \varepsilon} \quad (3)$$

- Δf 表示在近50代中最好的评价值的比率的降低
- $f_t^1 = \min_{x \in pop_t}$ 是在代数 t 时最好的目标函数值。
- Δx 表示在近50代中种群覆盖区域的变化比率
- $c_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\max_{x \in pop} - \min_{x \in pop})$, $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-50}$ 。
- 通过将 $\min\{\Delta f, \Delta x\}$ 和给定的阈值 θ 进行比较, 皆可以判断解是否收敛。为了提高算法的运行效率, 每两次 expensive LS 至少间隔50代。



```

1 初始化种群  $Pop(t) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$  ( $N$ 是种群的大小)
2 while not terminate do
3   构建概率模型:
4    $p(x) = \prod_{i=1}^n \mathcal{N}(x_i; \mu_i, \sigma_i)$ 
5   根据下面的流程产生新的实验向量  $u_{i,G}$ :
6   if  $rand() < CRP$  then
7     | 根据DE-EIG采样得到  $u_{i,G}$ 
8   else
9     | 根据概率模型  $p(x)$  采样得到  $u_{i,G}$ 
10  end
11  if  $f(u_{i,G}) < f(x_{i,G})$  then
12    |  $x_{i,G+1} = u_{i,G}$ 
13  else
14    |  $x_{i,G+1} = x_{i,G}$ 
15  end
16  if  $Coverage(\theta, G, G_e)$  then
17    | 执行expensive LS
18  end
19   $t = t + 1$ 
20 end
  
```

- 为了增加种群的多样性，通过利用随机参数来设置 CRP ，可以提高算法对于大多数问题的鲁棒性。
- 在基于DE/EDA算法框架的基础上，利用DE-EIG进行采样，同时结合expensive LS 进一步提高解集质量，提出基于差分采样的单目标分布估计算法。

Figure 7: 基于差分采样的单目标分布估计算法



1 绪论

- 研究目的和意义
- 主要研究内容

2 研究背景

- 分布估计算法
- 差分进化

3 基于差分采样的单目标优化

- 全局单目标优化问题
- 基于差分采样的单目标分布估计算法
- 实验分析

4 基于差分采样的多目标优化

- 连续多目标问题
- 基于差分采样的多目标分布估计算法
- 实验分析

5 总结和展望

实验设置:

- 测试题中所有种群维度都设置为30.所有算法都会在每一个测试题上独立运行50 次，体积条件是450000函数评估。
- JADE: 参数设置为: $N = 150, p = 0.05, c = 0.1, F = 0.5$ and $CR = 0.9$
- DE/EDA: $N = 150, F = 0.5$ and $CRP = 0.9$ 。
- EDA/DE-EIG: $CRP = 0.5, F = 0.5, CR = 0.6, \theta = 0.1$; 控制坐标旋转的参数 p 设置为0.5; 种群的大小 N 设置为150。对于expensive LS的相关参数的设置，与EDA/LS中的参数设置相同。

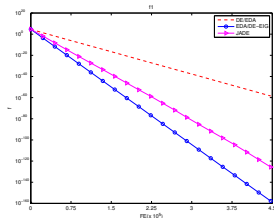
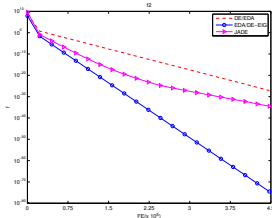
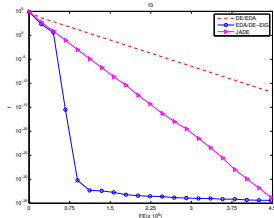
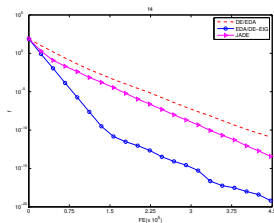
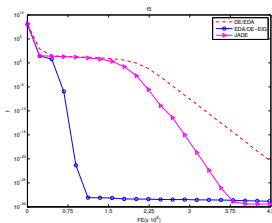
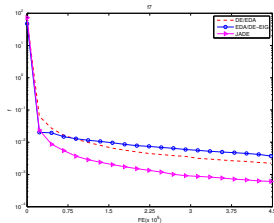
(a) f_1 (b) f_2 (c) f_3 (d) f_4 (e) f_5 (f) f_7

Figure 8: 在 $f_1 - f_{13}$ 中除了 f_6 的 12 个测试题上目标函数平均值的折线图

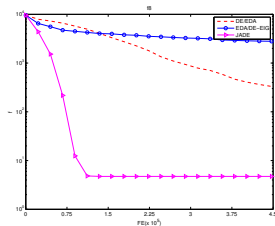
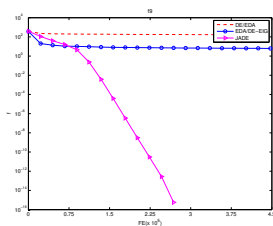
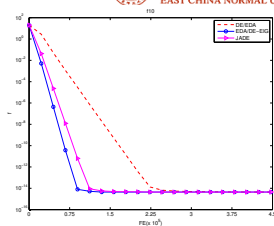
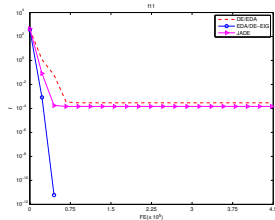
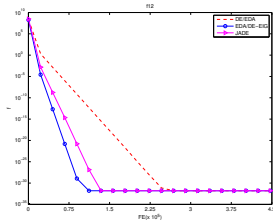
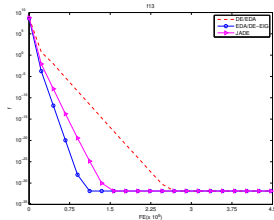
(a) f_8 (b) f_9 (c) f_{10} (d) f_{11} (e) f_{12} (f) f_{13}

Figure 9: 在 $f_1 - f_{13}$ 中除了 f_6 的 12 个测试题上目标函数平均值的折线图



	EDA/DE-EIG	JADE	DE/EDA
$f1$	1.54e-159 ± 5.11e-159	$3.90e-127 \pm 2.74e-126(+)$	$1.39e-59 \pm 2.58e-59(+)$
$f2$	1.02e-75 ± 7.46e-76	$2.60e-35 \pm 1.64e-34(+)$	$5.15e-28 \pm 4.68e-28(+)$
$f3$	4.01e-35 ± 8.47e-35	$7.79e-35 \pm 2.51e-34(\sim)$	$1.23e-12 \pm 1.20e-12(+)$
$f4$	5.01e-20 ± 3.06e-19	$3.15e-14 \pm 6.42e-14(+)$	$9.90e-12 \pm 2.69e-11(+)$
$f5$	$1.46e-29 \pm 2.62e-29$	3.85e-30 ± 9.58e-30(-)	$3.37e-21 \pm 8.66e-21(+)$
$f6$	0.00e+00 ± 0.00e+00	$0.00e+00 \pm 0.00e+00(\sim)$	0.00e+00 ± 0.00e+00(∼)
$f7$	$3.60e-03 \pm 1.00e-03$	6.01e-04 ± 2.23e-04(-)	$2.20e-03 \pm 5.59e-04(-)$
$f8$	$2.79e+03 \pm 5.02e+02$	4.74e+00 ± 2.34e+01(-)	$1.82e+03 \pm 6.72e+02(-)$
$f9$	$6.23e+00 \pm 2.21e+00$	0.00e+00 ± 0.00e+00(-)	$1.54e+02 \pm 1.96e+01(+)$
$f10$	4.44e-15 ± 0.00e+00	$4.44e-15 \pm 0.00e+00(\sim)$	4.44e-15 ± 0.00e+00(∼)
$f11$	0.00e+00 ± 0.00e+00	$1.48e-04 \pm 1.05e-03(\sim)$	$2.96e-04 \pm 1.46e-03(\sim)$
$f12$	1.57e-32 ± 5.53e-48	$1.57e-32 \pm 5.53e-48(\sim)$	1.57e-32 ± 5.53e-48(∼)
$f13$	1.35e-32 ± 1.11e-47	$1.35e-32 \pm 1.11e-47(\sim)$	1.35e-32 ± 1.11e-47(∼)
		3(+)6(∼)4(-)	6(+)5(∼)2(-)

Figure 10: 基于差分采样的单目标分布估计算法



1 绪论

- 研究目的和意义
- 主要研究内容

2 研究背景

- 分布估计算法
- 差分进化

3 基于差分采样的单目标优化

- 全局单目标优化问题
- 基于差分采样的单目标分布估计算法
- 实验分析

4 基于差分采样的多目标优化

- 连续多目标问题
- 基于差分采样的多目标分布估计算法
- 实验分析

5 总结和展望



现实生活中的问题往往具有多个目标，而每个目标之间的最优值往往是冲突的。在本文中，假设多目标问题中的每个问题都是最小化问题，则做出以下定义：

$$\begin{aligned} \min \quad & F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \Omega \end{aligned} \quad (4)$$

其中， $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ 是决策变量向量， $\Omega = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset R^n$ 表示可能的搜索空间区域， $f_i: R^n \rightarrow R, i = 1, \dots, m$ 是一个连续的目标函数， $F(x)$ 则是相应的目标函数向量。



在多目标优化问题中，多个目标相互之间往往是冲突的，从而导致无法在满足所有约束条件下使得所有目标函数都能够达到全局最优解，但是存在一组Pareto最优解。

对于此，做出以下定义：令 $a, b \in R^n$ ，当 $a_i \leq b_i \wedge a \neq b$ ，且 $i = 1, \dots, n$ ，则称 a 支配 b 。向量 $x^* \in \Omega$ 即是公式 4 的 Pareto 最优解，如果不存在 $x \in \Omega$ 使得 $F(x)$ 支配 $F(x^*)$ 。 $F(x^*)$ 被称为 Pareto 最优目标向量。所有的 Pareto 最优解的集合就是 Pareto 最优解集（PS），对应的最优向量的集合则成为 Pareto 前端（PF）。



在一般条件下，根据Karush-Kuhn-Tucker 可以推导出：连续多目标问题在决策空间中的Pareto set 是一个连续分段的 $(m-1)$ 维的流形体 (m 是目标数)。对于一个成功的多目标演化算法 (multiobjective evolutionary algorithm, MOEA) 来说，独立的个体应该是在决策空间中分散在Pareto set 附近，如图 11 所示。

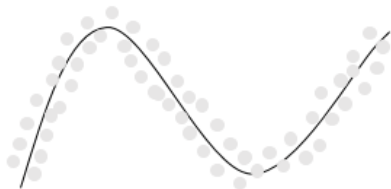


Figure 11: 连续多目标问题决策空间中个体的分布情况



对于连续多目标问题，在决策空间中，种群中的个体如果越接近Pareto set，则越容易进行问题的求解。因此，假设种群中的个体为随机向量 $\xi \in R^D$ 的观测值， ξ 的中央部分就是Pareto set。并且因为在连续多目标问题中，Pareto set是一个m-1维的流体，那么 ξ 则可以由公式 5表示：

$$\xi = \zeta + \epsilon \quad (5)$$

ζ 相当于是均匀分布在m-1维流体附近的个体， ϵ 是均值为0的n维的噪音向量。



1 绪论

- 研究目的和意义
- 主要研究内容

2 研究背景

- 分布估计算法
- 差分进化

3 基于差分采样的单目标优化

- 全局单目标优化问题
- 基于差分采样的单目标分布估计算法
- 实验分析

4 基于差分采样的多目标优化

- 连续多目标问题
- 基于差分采样的多目标分布估计算法
- 实验分析

5 总结和展望



```

1 初始化一个随机种群 $Pop(0)$ ，并且设置 $t = 0$ 。
2 while 没有达到停机条件 do
3   建模：建立一个概率模型 $\xi$ 来表示在随机种群 $Pop(t)$ 中的个体。
4   采样：通过上述的概率模型进行采样得到新的解集 $Q$ 。
5   选择：从 $Q \cup Pop(t)$ 中挑选出 $N$ 个个体来组成一个新的种群 $Pop(t+1)$ 。
6    $t = t + 1$ 
7 end
  
```

Figure 12: RM-MEDA

- 根据连续多目标问题以上的特性，基于规律模型的多目标分布算法（RM-MEDA）算法被提出用于解决连续多目标问题。
- 在每一次迭代中，通过局部主成分分析（LPCA）在决策空间中的区域建立概率分布模型，然后通过使用拉丁实验设计采样得到新的子代种群。
- RM-MEDA 采用基于非劣排序的方法来挑选个体来产生新的种群。



假设 ξ 由 k 个流体 M^1, \dots, M^k 组成, 每一个流体是一个超矩形。通过LPCA 将种群划分为 k 个聚类: C_1, \dots, C_k 。令 S 为 R^n 的有限子集, 则定义子集 C 的均值为:

$$\bar{x} = \frac{1}{|C|} \sum_{x \in C} x \quad (6)$$

接着求得集合 C 里面个体的协方差矩阵:

$$Cov = \frac{1}{|C| - 1} \sum_{x \in C} (x - \bar{x})(x - \bar{x})^T \quad (7)$$

第 i 个主成分 U^i 是协方差矩阵 Cov 中第 i 个最大的特征值对应的特征向量。接着, C 中个体的 $(m-1)$ 维的主子空间仿射可以定义为:

$$\left\{ x \in R^n, x = \bar{x} + \sum_{i=1}^{m-1} \theta_i \cdot U^i, \theta_i \in R, i = 1, \dots, m-1 \right\} \quad (8)$$



LPCA通过最小化以下误差函数的最小值来将种群划分聚类:

$$\sum_{j=1}^k \sum_{x \in C_j} d(x, A_j^{m-1})^2 \quad (9)$$

其中 A_j^{m-1} 是聚类个体的 $(m-1)$ 维主子空间仿射, $d(x, A_j^{m-1})$ 是 \bar{x} 和它在 A_j^{m-1} 上投影的欧式距离。

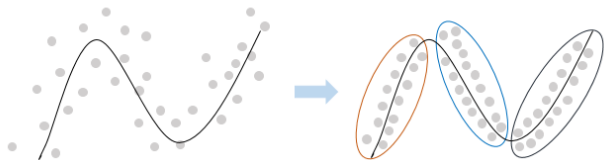


Figure 13: LPCA划分聚类过程

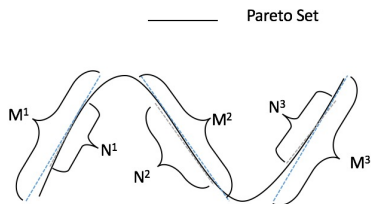


Figure 14: 通过缩放比例来覆盖Pareto set

- 在每一个聚类之中， N^k 用来表示聚类中的Pareto set， M^k 则用来覆盖每个聚类中的Pareto set。
- 为了能够覆盖聚类中的Pareto set，RM-MEDA通过设置一个缩放比例用来覆盖聚类中的Pareto set。但是这个缩放比例依赖于具体的问题，对于不同的问题，其表现也不尽相同。



- 1 对于每个给定的聚类求得相应的协方差矩阵 C 并进行分解操作:

$$C = EDE^T$$

E 是协方差矩阵 C 的特征向量矩阵, D 是由特征值组成的对角矩阵。

- 2 对于聚类中每一个个体 x , 将其映射到隐空间中:

$$y = x \cdot R.$$

R 是特征向量矩阵 E 中前 $(m-1)$ 个主要成分。

- 3 在隐空间中对于种群个体进行变异操作:

$$y' = y_{r_1} + \text{rand} \cdot (y_{r_2} - y_{r_3}) + F \cdot (y_{r_2} - y_{r_3})$$

- 4 将 y' 映射到原始的决策空间

$$x' = y' \cdot R^T.$$

- 5 返回产生的新的个体

$$x'' = x' + \varepsilon'$$

ε' 是一个服从分布 $N(0, \sigma_\varepsilon I)$ 的高斯噪音 ($\tau \in \{1, 2, \dots, K\}$ 是一个随机产生的整数)

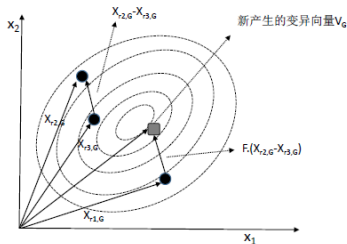


Figure 15: 差分采样策略

Figure 16: 变异策略

- 通过特征向量将种群转换到隐空间中, 在隐空间中利用新型的变异策略完成变异操作, 在将种群映射到原始空间中。
- 利用差分采样策略来取代分布估计算法中原有的建模采样。



1 绪论

- 研究目的和意义
- 主要研究内容

2 研究背景

- 分布估计算法
- 差分进化

3 基于差分采样的单目标优化

- 全局单目标优化问题
- 基于差分采样的单目标分布估计算法
- 实验分析

4 基于差分采样的多目标优化

- 连续多目标问题
- 基于差分采样的多目标分布估计算法
- 实验分析

5 总结和展望

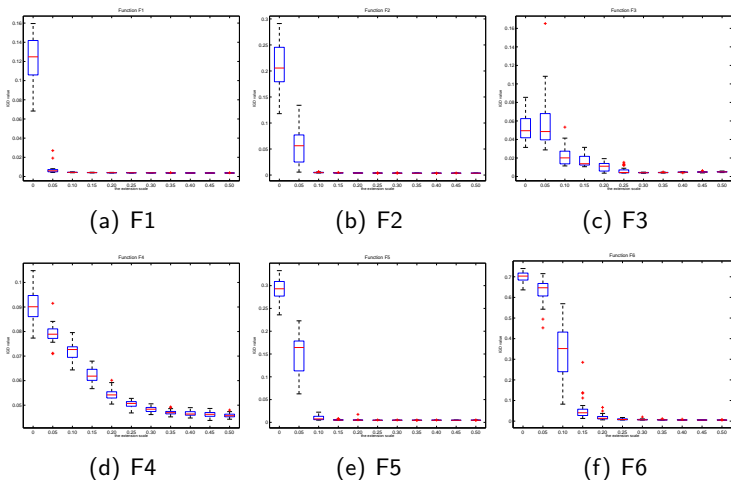


Figure 17: 不同缩放因子下, RM-MEDA的IGD指标的箱线图

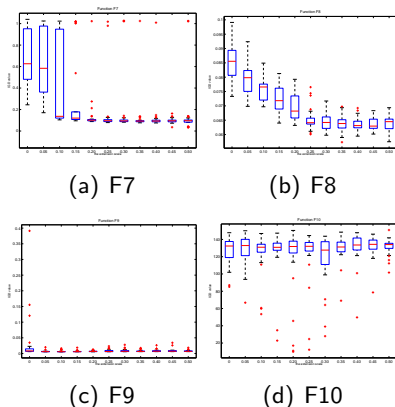


Figure 18: 不同缩放因子下, RM-MEDA的IGD指标的箱线图

- 如果不设置缩放因子, 那么RM-MEDA表现则不是很好
- 缩放因子设置的越大, 则RM-MEDA表现得更优秀
- 对于设置较大的缩放因子也可能会造成性能的不稳定
- 总的来说, 如何在实践中设置一个最佳的缩放因子还是比较困难的。

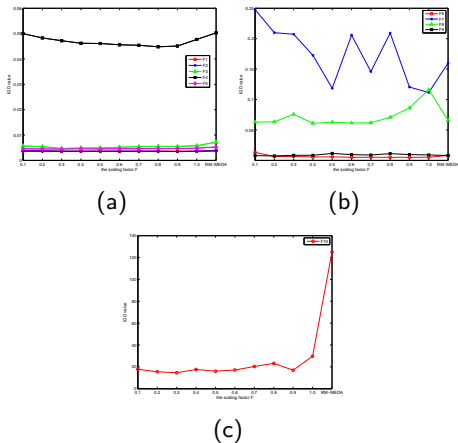


Figure 19: 不同缩放因子下, DES-RM-MEDA的性能比较

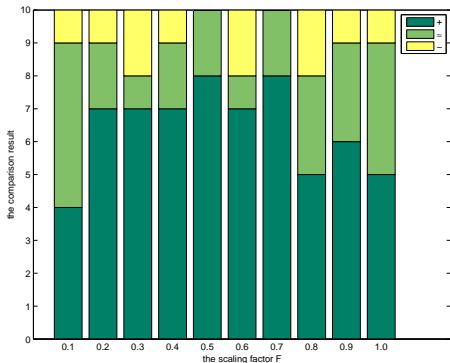
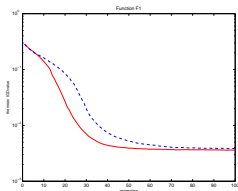
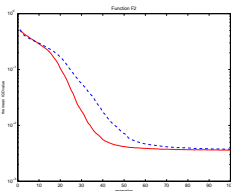


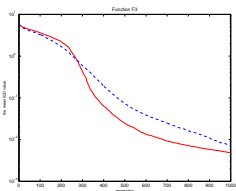
Figure 20: Wilcoxon's rank test 层叠柱状图



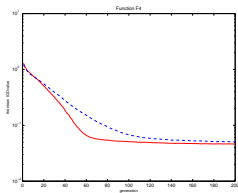
(a) F1



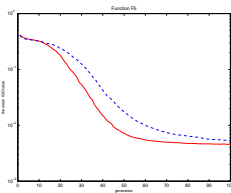
(b) F2



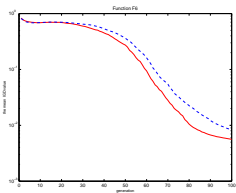
(c) F3



(d) F4



(e) F5



(f) F6

Figure 21: IGD指标均值趋势图。实线表示DES-RM-MEDA，虚线表示RM-MEDA。

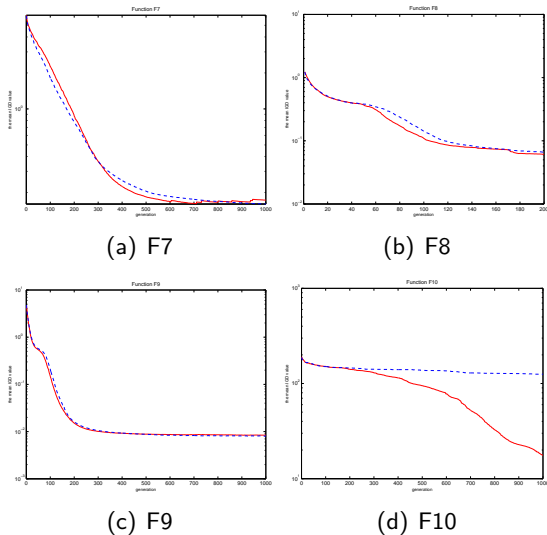


Figure 22: IGD指标均值趋势图

- 两个目标的测试题，DES-RM-MEDEA在测试题 $F1, F2, F3, F6, F10$ 5个测试题上，无论是下降趋势还是最终结果都具有优势。对于 $F9$,两个算法的表现几乎一致。在 $F7$ 上，其表现在后阶段表现不太稳定。
- 三个目标的测试题，DES-RM-MEDA在下降趋势和最终结果都处于领先。



1 绪论

- 研究目的和意义
- 主要研究内容

2 研究背景

- 分布估计算法
- 差分进化

3 基于差分采样的单目标优化

- 全局单目标优化问题
- 基于差分采样的单目标分布估计算法
- 实验分析

4 基于差分采样的多目标优化

- 连续多目标问题
- 基于差分采样的多目标分布估计算法
- 实验分析

5 总结和展望



- 本文针对分布估计算法中的采样，提出了差分采样策略，对于单目标优化问题 and 多目标优化问题分别提出了基于差分采样的单目标分布估计算法和基于差分采样的多目标分布估计算法。通过综合的实验分析对比，差分采样策略对于提高分布估计算法性能具有重大意义。

当然本文的工作还有一些不足之处，因此做以下几点展望：

- 将差分采样策略应用于其它多目标优化算法
- 进一步优化EDA/DE-EIG算法
- 对于DE/EDA算法中，分布估计算法和差分进化的资源分配是一个值得继续探索的话题

Thanks!

- B. Dong, A. Zhou, and G. Zhang, A Hybrid Estimation of Distribution Algorithm with Differential Evolution for Global Optimization, 2016 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI), 2016.
- B. Dong, A. Zhou, and G. Zhang, Sampling in Latent Space for a Multiobjective Estimation of Distribution Algorithm, 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2016.