

# Notas para una licenciatura

José Julián Villalba Vásquez

July 22, 2022

ESTA INTRODUCCIÓN HA PASADO POR VARIAS REESCRITURAS si llevo bien la cuenta, esta debería ser la cuarta, un cambio de enfoque, un cambio de trabajo y un cambio de universidad han sido los motivos principales, y creo que cada uno a dejado su impronta en el tono de lo que aquí esta escrito, aportando un poco cada una a lo que son y representan estas notas.

Empece a escribir esto mientras estudiaba matemáticas en la USB, al principio por el entusiasmo de haber aprendido  $\text{\LaTeX}$  y la triste realidad de que mi letra deja mucho que desear, tomaba un libro y transcribía teoremas, pruebas y definiciones y en proceso me los iba memorizando, además de quedarme unas bonitas notas que luego revisar y compartir. Después de hacer esto con un par de libros me di cuenta de que tenía ya bastante material, y empecé a agregar pequeñas notas entre los teoremas y definiciones, notas históricas, pequeñas explicaciones, y poquito a poquito lo que empezó como un seco conjunto de notas, se volvió algo mucho mas interesante, esta fue la primera reescritura. Ya un tiempo después, medio peleado con la universidad tome un trabajo como programador y aprendí las arcanas artes de la programación web me convencí de que tenía que hacer mi libro accesible desde la web, que podía de agregar contenido interactivo y mejorar la presentación, que el contenido de lo merecía y podía, esto supuso una segunda reescritura. Finalmente y en la etapa en la que me encuentro al escribir esta cuarta introducción decidí cambiar de universidad, y en el ínterin también se me daño mi computadora, así que una nueva reescritura se hizo necesaria, una que como nuevo elemento introduce que ya por fin me decidí a publicar esto.

Así hay algunas cosas importantes que señalar, este trabajo es por sobretodo *amateur* hecha por amor al contenido, con seriedad si, pero con poco profesionalismo, nadie a verificado este trabajo, y por tanto advierto a todos mis incautos lectores que lo que lean a pesar de mis mejores esfuerzos puede estar plagado de mentiras. Con esto no espero asustar a nadie, de verdad no creo que las situación sea tan mala, pero para leer este texto hace falta tener siempre en mente que fue escrito por un *estudiante mientras estudiaba* y eso tiene sus riesgos. También invito a quien descubra algún error, impresión o tenga alguna sugerencia a hacérmelo saber, el código fuente del libro esta publicado en github (), donde puedes abrir un “Issue” con las observaciones que creas pertinentes, con gusto las revisaré.

Es posible que te hayas dado cuenta de que el indice del libro esta incompleto, e incluso te pudo haber hecho gracia lo ambicioso del proyecto, a mí me lo hace cada cierto tiempo, pero es que este libro es, y siempre sera un proyecto incompleto, hace un rato acepte su naturaleza, y ahora ya solo sigo con ella, tal vez en el mismo espíritu que Donald Knut con  $\text{\TeX}$ , y es que este libro es un diario intelectual cuyos horizontes se van expandiendo en la misma medida, que voy descubriendo nuevas temas. Y como diario también es algo muy personal, así que por favor no te asustes si consigues algo que no tiene nada ver con el tema, algún poema, canción o vídeo puede que se te atravesase de cuando en vez sin mucha relación con el tema, aunque intento que esto se mantenga en las notas a al margen del libro.

## Part I

# Primer trimestre



## Chapter 1

# Fundamentos de las matemáticas

LAS MATEMÁTICAS SON COMPLICADAS, DISCULPA QUE SEA con lo que empiece pero es verdad. Seguramente mas de una vez te hayas cruzado con alguien que te diga que no las entiende, o es mas puede que tu mismo les tengas “miedo” por no decir algo mas, no voy a invalidar estas opiniones achacándoselas al sistema educativo, o las herencias culturales, porque si bien creo que ayudan al sentimiento de temor, las matemáticas son complicadas y por eso vale la pena estudiarlas.

Las matemáticas son complicadas de una forma diferente a la filosofía, la física, la economía, o cualquier otra disciplina que se te ocurra, en muchos sentidos la matemática es única en sus complicaciones. Para empezar mucha de la dificultad de las matemáticas no radica en su complejidad sino en su simpleza, si tu le preguntas a tres expertos en economía política: ¿Cuál es el mejor sistema económico? seguramente obtendrás tres respuestas distintas, todas muy bien argumentadas y ninguna aparentemente equivocada, en cambio le preguntas a cualquiera cuanto es  $2 + 2$  y puedes esperar 4 como respuesta con la seguridad de que cualquier otra está equivocada. Si bien este ejemplo puede parecer tendencioso, arreglado para dejar mal a las ciencias sociales, demuestra una de las principales características de la matemática la **falsabilidad**



## Chapter 2

# Geometría euclidiana I

¿QUIENES FUERON LOS PRIMEROS EN ESTUDIAR MATEMÁTICAS? Los primeros textos “matemáticos” son de Mesopotamia y Egipto, los papiros de de Ahmes y de Moscú son los documentos matemáticos mas antiguos conocidos, datados alrededor del 1870 a.c. y 1550 a.c respectivamente.

Sin embargo,





## Chapter 3

# Cálculo diferencial en una variable real

NO EXAGERAMOS CUANDO DECIMOS QUE CON EL CÁLCULO se inician las matemáticas modernas, el genio de dos grandes matemáticos que cada uno por su parte logra unir dos problemas aparentemente inconexos, brindando una nueva herramienta con la que trabajar cantidades “infinitamente pequeñas” e “infinitamente grandes”.



Part II

Segundo trimestre



## Chapter 4

# Calculo integral en una variable I

YA HEMOS RESUELTO LA PRIMERA MITAD DEL PROBLEMA y hemos sentado las bases para abordar la segunda ¡Finalmente podremos hallar el área debajo de una curva, dada su expresión! Parece poco pero este hecho tal ves trivial nos dará acceso a otras muchas herramientas con las que atacar otros problemas.



## Chapter 5

# Geometría euclidiana II

EN LAS PUERTAS DE LA ACADEMIA DE PLATÓN se leía: “Que no entre nadie que no conozca la geometría”, una advertencia que podía parecer excesiva para aquellos que se acercaban a ella para tan solo discutir metafísica, estética o política, anteponiendo la geometría a estas disciplinas. Pero como hemos venido viendo, no es el contenido de la geometría lo que la hace especial sino el método, cuyo poder apenas ahora empezaremos a ver en su totalidad, ahora que ya hemos sentado bases para poder explorar construcciones mas complejas.





## Chapter 6

# Geometría y álgebra lineal

YA PARA EL SIGLO 17 LOS MÉTODOS SINTÉTICOS DE LA GEOMETRÍA no eran suficientes para abordar los nuevos problemas, fue Rene Descartes el primero en proponer una forma de abordarlos realizando “cálculos geométricos” con su novedoso sistema de coordenadas, al introducir esta nueva herramienta podemos replantear muchos de resultados de la geometría euclidiana simplificando algunos y complicando otros, mostrándonos como cada problema tiene requiere su propio lenguaje.



## Part III

# Tercer trimestre



## Chapter 7

# Geometria proyectiva y no euclidea



## Chapter 8

# Cálculo integral en una variable II





## Chapter 9

# Herramientas y software matemático

ES BASTANTE POSIBLE QUE ESTÉS LEYENDO ESTO en una pantalla, ya sea de un teléfono o de computadora y te puedo asegurar que yo lo escribí en una. La computación ha revolucionado la muchas cosas, entre ellas la practica matemática y aprender a utilizarlas de forma efectiva para visualizar, plantear y solucionar problemas es indispensable.



## Chapter 10

# Fundamentos del álgebra

HASTA AHORA HEMOS DEJADO DE LADO el otro gran continente de las matemáticas el álgebra, tal ves por alguna vendetta histórica o de los analistas o por simple continuidad pero se sigue enseñando análisis primero.



## Part IV

# Cuarto trimestre



## Chapter 11

# Teoría de números

EL PRIMER ACERCAMIENTO DE TODOS O CASI TODOS con la matemática son los números, aprender a sumar, restar, multiplicar y dividir son conocimientos básicos para (casi) todos, y sin embargo hasta ahora no hemos tratado a los números como protagonistas, tan solo como actores de reparto representando otras obras.





## Chapter 12

# Cálculo diferencial multivariable



## Chapter 13

# Computo científico I

ANTES DE LAS COMPUTADORAS DANIEL FERGUSON HABIA CALCULADO 620 decimales del número  $\pi$ , actualmente el record de digitos del número  $\pi$  calculados esta por el orden de los 62.8 trillones de digitos y fue calculado en “apenas” 108 dias mientras que el resultado de Ferguson llevo unos 15 años.



Part V

Quinto trimestre



## Chapter 14

# Cálculo integral multivariable





## Chapter 15

# Álgebra lineal I

### 15.1 Espacios vectoriales

**Definición 1** (Espacio vectorial). Sea  $\mathbb{F}$  un conjunto de escalares (usualmente  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) y sea  $\mathcal{V}$  un conjunto con dos operaciones llamadas **adición** y **adición escalar**. Representamos la adición de  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$  como  $\vec{v} + \vec{w}$ , y la multiplicación de  $c \in \mathbb{F}$  y  $\vec{v}$  como  $c\vec{v}$ .

Si las siguientes condiciones se cumplen para todos  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathcal{V}$  y para todos  $c, d \in \mathbb{F}$ , entonces decimos que  $\mathcal{V}$  es un **espacio vectorial** y llamamos a sus elementos **vectores**:

1.  $\vec{a} + \vec{b} \in \mathcal{V}$ .
2.  $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ .
3.  $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{z} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{z})$ .
4. Existe un elemento  $\vec{0} \in \mathcal{V}$  tal que  $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ .
5. Para todo vector  $\vec{v} \in \mathcal{V}$  existe  $-\vec{v} \in \mathcal{V}$  tal que  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ .
6.  $c\vec{v} \in \mathcal{V}$ .
7.  $c(\vec{v} + \vec{w}) = c\vec{v} + c\vec{w}$ .
8.  $(c + d)\vec{v} = c\vec{v} + d\vec{v}$ .
9.  $c(d\vec{v}) = (cd)\vec{v}$ .
10.  $1\vec{v} = \vec{v}$ .

**Teorema 1.** Suponga que  $\mathcal{V}$  es un espacio vectorial y  $\vec{v} \in \mathcal{V}$ , entonces:

$$0\vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (-1)\vec{v} = -\vec{v}.$$

*Proof.* Para mostrar que  $0\vec{v} = \vec{0}$ , usaremos con cuidado varias propiedades de la definición de espacio vectorial 1:

$$\begin{aligned} 0\vec{v} &= 0\vec{v} + \vec{0} \\ &= 0\vec{v} + (0\vec{v} + (-0\vec{v})) \\ &= (0\vec{v} + 0\vec{v}) + (-0\vec{v}) \\ &= (0 + 0)\vec{v} + (-0\vec{v}) \\ &= 0\vec{v} + (-0\vec{v}) \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Ahora que sabemos que  $0\vec{0}$ , probar que  $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$  es mas sencillo: □

## Chapter 16

# Computo científico II



Part VI

Sexto trimestre



## Chapter 17

# Teoría de conjuntos

21





## Chapter 18

# Algebra lineal II



## Chapter 19

# Matemáticas discretas



## Chapter 20

# Topologia I



## Part VII

# Séptimo trimestre





## Chapter 21

# Análisis real I



## Chapter 22

# Teoría de grupos



## Chapter 23

# Combinatoria



## Chapter 24

# Algoritmos y estructuras I





**Part VIII**

**Octavo trimestre**



## Chapter 25

# Ecuaciones diferenciales ordinarias



## Chapter 26

# Analysis real II



## Chapter 27

# Probabilidades





## Chapter 28

# Topologia II



## Chapter 29

# Metodos numericos



## Part IX

# Noveno trimestre



## Chapter 30

# Algoritmos y estructuras-II





## Chapter 31

# Analisis en varias variables



## Chapter 32

# Teoria de anillos



## Chapter 33

# Estadística



## Chapter 34

# Procesos estocásticos





Part X

Décimo trimestre



## Chapter 35

# Geometria diferencial



## Chapter 36

# Analisis complejo



## Part XI

# Onceavo trimestre





## Chapter 37

# Teoria de la medida



## Part XII

# Doceavo trimestre



## Chapter 38

# Analisis armonico



## Part XIII

# Treceavo trimestre





## Part XIV

# Catorceavo trimestre



## Chapter 39

# Analisis funcional



## Chapter 40

# Ecuaciones diferenciales parciales



## Part XV

# Quinceavo trimestre

