Sistemas de equações lineares

Análise numérica

Prof. Darlan Nunes de Brito

Sistemas de equações lineares

- Um sistema de equações lineares pode ser representado na forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Matriz dos coeficientes

$$Ax = b$$ Vetor de termo independentes

Vetor solução

Número de soluções

- O número de soluções de um sistema linear pode ser determinado de acordo com o determinante da matriz dos coeficientes.
  - $\det(A) \neq 0$ – Solução única.
  - $\det(A) = 0$ – Infinitas ou nenhuma solução.
  - Quando o determinante for igual a zero o que pode determinar se o sistema tem infinitas ou nenhuma solução é o escalonamento da matriz dos coeficientes junto com o vetor de termos independentes.

Métodos para solução de sistemas lineares

- Métodos diretos
  - São aqueles em que a solução exata é obtida com um número finito de operações

- Métodos iterativos
  - A solução é obtida por meio de iterações. A precisão da solução é determinada de acordo com o número de iterações.

Sistemas triangulares

- São sistemas nos quais a matriz dos coeficientes A é triangular inferior ou superior;

Sistemas triangulares

- Inferior

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Neste sistema a solução pode ser calculada simplesmente por substituições sucessivas.

Algoritmo de substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$l_{11}x_1 = b_1$$

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = b_2$$

$$x_2 = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}}$$

Algoritmo de substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = b_3$$

$$x_3 = \frac{b_3 - (l_{31}x_1 + l_{32}x_2)}{l_{33}}$$

Algoritmo de substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}}$$

Algoritmo de substituições sucessivas

- Transformando em pseudocódigo

```
Algoritmo Substituições sucessivas
        Utilizado para soluções de sistemas triangulares
        Entrada:
                A – Matriz dos coeficientes
                b – Vetor de termos independentes
                n – Ordem do sistema
        Saída:
                x – Vetor solução
Para i = 1 até n faça
        soma = 0;
        Para j = 1 até i – 1 faça
                soma = soma + l(i,j)*x(j);
        Fim para
        x(i) = (b(i) - soma)/l(i,i);
Fim Para
```

Algoritmo de substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{l_{ii}}$$

Eliminação de Gauss

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1		1 -3 2	11	
2		-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	

Eliminação de Gauss

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1		1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	

Eliminação de Gauss

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1		1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	

Eliminação de Gauss

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1		1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4				$-m_{21}L_1 + L_2$

Eliminação de Gauss

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1		1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 2 3	7	$-m_{21}L_1 + L_2$

Eliminação de Gauss

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1		1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 2 3	7	$-m_{21}L_1 + L_2$
5				$-m_{31}L_1 + L_3$

Eliminação de Gauss

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1		1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 2 3	7	$-m_{21}L_1 + L_2$
5		0 6 -3	-15	$-m_{31}L_1 + L_3$

Eliminação de Gauss

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1		1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 2 3	7	$-m_{21}L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	-15	$-m_{31}L_1 + L_3$
6				

Eliminação de Gauss

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1		1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 2 3	7	$-m_{21}L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	-15	$-m_{31}L_1 + L_3$
6				$-m_{32}L_4 + L_5$

Eliminação de Gauss

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1		1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 2 3	7	$-m_{21}L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	-15	$-m_{31}L_1 + L_3$
6		0 0 -12	-36	$-m_{32}L_4 + L_5$

Eliminação de Gauss (Algoritmo)

Algoritmo Eliminação de Gauss

Objetivo: Determinar o sistema triangular superior

Entrada:

A – Matriz dos coeficientes

b – Vetor de termos independentes

n – Ordem do sistema

Saída:

A – Matriz dos coeficientes escalonada

b – Vetor de termos independentes ajustados

```
Para j = 1 até n - 1 faça
    Para i = j+1 até n faça
        m(i,j) = A(i,j)/A(j,j);
        Para k = 1 até n faça
            A(i,k) = -m(i,j)*A(j,k) + A(i,k);
        Fim para
        b(i) = -m(i,j)*b(j) + b(i);
    Fim para
Fim para
```

L	Multiplicador	A			b	Operação
1		1	-3	2	11	
2	$m_{21} = -2/1 = -2$	-2	8	-1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4	-6	5	29	
4		0	2	3	7	$-m_{21}L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0	6	-3	-15	$-m_{31}L_1 + L_3$
6		0	0	-12	-36	$-m_{32}L_4 + L_5$

Decomposição LU

- Podemos decompor uma matriz qualquer A no produto de duas outras, uma triangular inferior L (Lower) e outra triangular superior U (Upper).

$$A = LU$$

- Podemos usar esta propriedade para ajudar na solução de um sistema linear. Então vejamos:

$$Ax = b$$
$$LUx = b$$

- Podemos então fazer uma transformação de variáveis.

$$Ux = y$$
$$Ly = b$$

Decomposição LU

- Utilizamos a eliminação de Gauss para determinar a matrizes L e U:
  - A matriz L é obtida utilizando os multiplicadores.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

  - A matriz U é obtida utilizando a matriz A escalonada.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinantes

Propriedades

Propriedades do determinante

- Se duas linhas de matriz forem trocadas, então o determinante troca o sinal.
  - $\det(B) = (-1)^t \det(A)$ ⇒ onde t = número de trocas
- Se todos os elementos de uma linha de A forem multiplicados por uma constante k então o valor do determinante fica multiplicado pela mesma constante.
  - B(1,:) = kA(1,:) então det(B) = kdet(A)

Propriedades do determinante

- Se um múltiplo escalar de uma linha ou coluna de A for somado à outra linha ou coluna, respectivamente, então o determinante não se altera.

  B = A e $B(i,:) = A(i,:) + kA(l,:)$ com $l \neq i$ então det(B) = det(A)

- Se uma matriz for triangular

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- Se C = BA então

$$\det(C) = \det(A)\det(B)$$

Propriedades do determinante

- Utilizando estas propriedades é possível calcular o determinante facilmente dentro dos algoritmos de solução de sistemas lineares.

Propriedades do determinante

- Cálculo do determinante com decomposição LU
  - Usando a propriedade do determinante de uma matriz triangular

$$\det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$$

$$\det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Propriedades do determinante

- Usando a propriedade da multiplicação de matrizes e determinantes

$$\det(A) = \det(L)\det(U)$$

$\det(L) = 1$, $\det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

$$\det(A) = 1\prod_{i=1}^{n} u_{ii} \therefore \det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Eliminação de Gauss com pivotação

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1		1 -3 2	11	
2		-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1 -3 2	11	
2		-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/4 = -0{,}5$	-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/4 = -0{,}5$	-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	
1				$-m_{11}L_3 + L_1$

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/4 = -0{,}5$	-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	
1		0 -1,5 0,75	3,75	$-m_{11}L_3 + L_1$

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/4 = -0{,}5$	-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	
1		0 -1,5 0,75	3,75	$-m_{11}L_3 + L_1$
2				$-m_{21}L_3 + L_2$

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/4 = -0{,}5$	-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	
1		0 -1,5 0,75	3,75	$-m_{11}L_3 + L_1$
2		0 5 1,5	-0,5	$-m_{21}L_3 + L_2$

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/4 = -0{,}5$	-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	
1	$m_{12} = -1{,}5/5 = -0{,}3$	0 -1,5 0,75	3,75	$-m_{11}L_3 + L_1$
2		0 5 1,5	-0,5	$-m_{21}L_3 + L_2$

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/4 = -0{,}5$	-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	
1	$m_{12} = -1{,}5/5 = -0{,}3$	0 -1,5 0,75	3,75	$-m_{11}L_3 + L_1$
2		0 5 1,5	-0,5	$-m_{21}L_3 + L_2$
				$-m_{12}L_1 + L_2$

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/4 = -0{,}5$	-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	
1	$m_{12} = -1{,}5/5 = -0{,}3$	0 -1,5 0,75	3,75	$-m_{11}L_3 + L_1$
2		0 5 1,5	-0,5	$-m_{21}L_3 + L_2$
1		0 0 1,2	3,6	$-m_{12}L_1 + L_2$

Eliminação de Gauss com pivotação parcial

- Dispositivo prático

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

L	Multiplicador	A	b	Operação
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1 -3 2	11	
2	$m_{21} = -2/4 = -0{,}5$	-2 8 -1	-15	
3		4 -6 5	29	
1	$m_{12} = -1{,}5/5 = -0{,}3$	0 -1,5 0,75	3,75	$-m_{11}L_3 + L_1$
2		0 5 1,5	-0,5	$-m_{21}L_3 + L_2$
1		0 0 1,2	3,6	$-m_{12}L_1 + L_2$

$$\boldsymbol{p} = [3\ 2\ 1]$$

Solução de sistema linear com pivotação parcial

- Para iniciar o processo de solução do sistema linear baseado na decomposição da matriz dos coeficientes precisamos determinar uma matriz P.
- A matriz P é uma matriz identidade com as linhas na ordem do vetor p.
- Para o exemplo acima teríamos uma matriz P.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- O vetor p = [3 2 1] por isto a terceira linha foi trocada de lugar com a segunda.

Solução do sistema linear com pivotação parcial

- Fazendo a transformação de variáveis

$$PA = LU$$

- Multiplicando por P o sistema Ax=b

$$PAx = Pb$$

$$LUx = Pb$$

- Fazendo a mudança de variáveis

$$Ly = Pb$$

$$Ux = y$$

Solução do sistema linear com pivotação parcial

- Montando a matriz L
  - Os valores de m_{ij} são dados tais que j é a posição da coluna do elemento e i = p(k) onde k é o número da linha.
- Para o exemplo anterior temos:

$$p = [3\ 2\ 1]$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{m_{i1}} & 1 & 0 \\ \boldsymbol{m_{i1}} & \boldsymbol{m_{i2}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{m_{i1}} \therefore i = p(2) = 2 \ \therefore \boldsymbol{m_{21}}$$

$$\boldsymbol{m_{i1}} \therefore i = p(3) = 1 \ \therefore \boldsymbol{m_{11}}$$

$$\boldsymbol{m_{i2}} \therefore i = p(3) = 1 \ \therefore \boldsymbol{m_{12}}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{m_{21}} & 1 & 0 \\ \boldsymbol{m_{11}} & \boldsymbol{m_{12}} & 1 \end{bmatrix}$$

Solução do sistema linear com pivotação parcial

- Para o exemplo anterior

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{m_{21}} & 1 & 0 \\ \boldsymbol{m_{11}} & \boldsymbol{m_{12}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-0,5} & 1 & 0 \\ \mathbf{0,25} & \mathbf{-0,3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix}$$

Cálculo do determinante

- De acordo com a decomposição pela eliminação de Gauss com pivotação

$$PA = LU$$

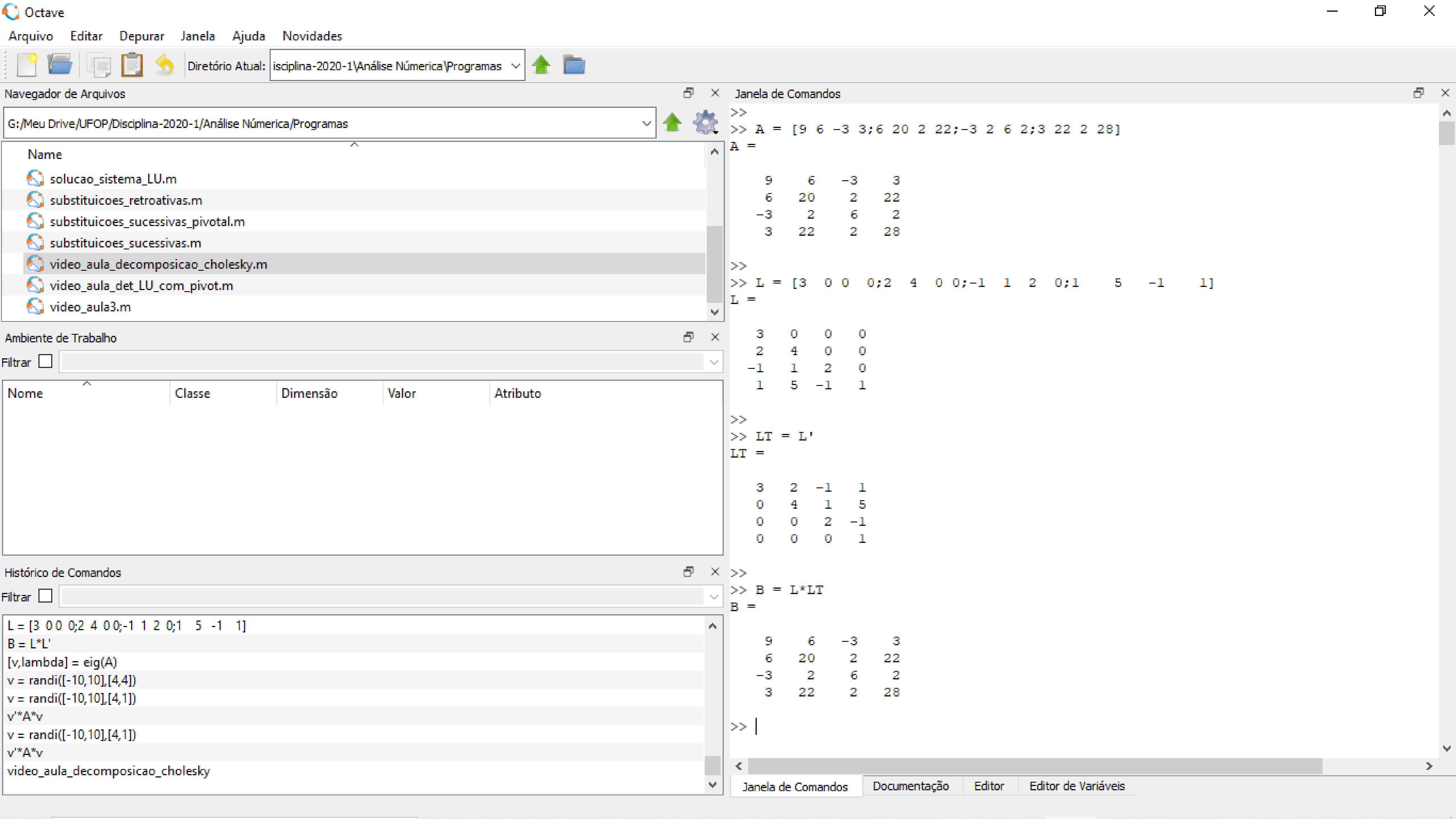
$$\det(PA) = \det(LU)$$

- Usando as propriedades de determinante

$$\det(A) = \frac{\det(L)\det(U)}{\det(P)}$$

$$\det(L) = \prod l_{ii} = 1$$

$$\det(U) = \prod u_{ii}$$


Octave
Arquivo Editar Depurar Janela Ajuda Novidades
Diretório Atual: isciplina-2020-1\Análise Númerica\Programas
Navegador de Arquivos
G:/Meu Drive/UFOP/Disciplina-2020-1/Análise Númerica/Programas
Name
solucao_sistema_LU.m
substituicoes_retroativas.m
substituicoes_sucessivas_pivotal.m
substituicoes_sucessivas.m
video_aula_decomposicao_cholesky.m
video_aula_det_LU_com_pivot.m
video_aula3.m
Ambiente de Trabalho
Filtrar
Nome Classe Dimensão Valor Atributo
Histórico de Comandos
Filtrar
L = [3 0 0 0;2 4 0 0;-1 1 2 0;1 5 -1 1]
B = L*L'
[v,lambda] = eig(A)
v = randi([-10,10],[4,4])
v = randi([-10,10],[4,1])
v'*A*v
v = randi([-10,10],[4,1])
v'*A*v
video_aula_decomposicao_cholesky
Janela de Comandos
>>
>> A = [9 6 -3 3;6 20 2 22;-3 2 6 2;3 22 2 28]
A =
9 6 -3 3
6 20 2 22
-3 2 6 2
3 22 2 28
>>
>> L = [3 0 0 0;2 4 0 0;-1 1 2 0;1 5 -1 1]
L =
3 0 0 0
2 4 0 0
-1 1 2 0
1 5 -1 1
>>
>> LT = L'
LT =
3 2 -1 1
0 4 1 5
0 0 2 -1
0 0 0 1
>>
>> B = L*LT
B =
9 6 -3 3
6 20 2 22
-3 2 6 2
3 22 2 28
>>
Janela de Comandos Documentação Editor Editor de Variáveis

Decomposição de Cholesky

- Utilizada quando a matriz dos coeficientes é simétrica e definida positiva.

- Diz que uma matriz A simétrica e definida positiva pode ser decomposta na multiplicação de uma matriz triangular inferior pela sua transposta.

$$A = LL^T$$

Octave

Arquivo Editar Depurar Janela Ajuda Novidades

Diretório Atual: isciplina-2020-1\Análise Númerica\Programas

Navegador de Arquivos

G:/Meu Drive/UFOP/Disciplina-2020-1/Análise Númerica/Programas

Name

- solucao_sistema_LU.m
- substituicoes_retroativas.m
- substituicoes_sucessivas_pivotal.m
- substituicoes_sucessivas.m
- video_aula_decomposicao_cholesky.m
- video_aula_det_LU_com_pivot.m
- video_aula3.m

Ambiente de Trabalho

Filtrar

Nome	Classe	Dimensão	Valor	Atributo

Histórico de Comandos

Filtrar

```
v = randi([-10,10],[4,4])
v = randi([-10,10],[4,1])
v'*A*v
v = randi([-10,10],[4,1])
v'*A*v
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
```

Janela de Comandos

```
>> v = [2;-8;9;5];
>> q = v'*A*v
q =  394
>> v = [2;1;-6;5];
>> q = v'*A*v
q =  1204
>> [v,lambda] = eig(A)
v =

  -0.414868  -0.384199  -0.810303   0.153894
   0.706425  -0.285147  -0.105080   0.639228
  -0.290570  -0.791545   0.534695   0.055920
  -0.494385   0.380183   0.215564   0.751383

lambda =

Diagonal Matrix

    0.25720          0          0          0
          0    4.30373          0          0
          0          0   10.95961          0
          0          0          0   47.47946

>>
```

Janela de Comandos Documentação Editor Editor de Variáveis

Decomposição de Cholesky

- Determinando os elementos de L.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Decomposição de Cholesky

- Determinando os elementos de L.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ \boxed{l_{41} \quad l_{42} \quad l_{43} \quad l_{44}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} \end{bmatrix}$$

$$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = a_{44}$$

$$l_{44}^2 = a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)$$

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)}$$

Decomposição de Cholesky

- Determinando os elementos de L.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)}$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}^2} \, , j = 1,2,\cdots,n$$

Decomposição de Cholesky

- Determinando os elementos de L.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & \boxed{a_{43}} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} = a_{43}$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}}$$

Decomposição de Cholesky

- Determinando os elementos de L.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}}$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}} \; j = 1,2,\cdots,n-1 \text{ e } i = j+1, j+2, \cdots, n$$

Solução do sistema linear com decomposição de Cholesky

- Forma do sistema linear

$$LL^T x = b$$

$$L^T x = y$$

$$Ly = b$$

Cálculo do Determinante

- Usando as propriedades de determinante

$$A = LL^T$$

$$\det(A) = \det(L)\det(L^T)$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii} \prod_{i=1}^{n} l_{ii} \therefore \det(A) = \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right)^2$$

Octave

Arquivo Editar Depurar Janela Ajuda Novidades

Diretório Atual: isciplina-2020-1\Análise Númerica\Programas

Navegador de Arquivos

G:/Meu Drive/UFOP/Disciplina-2020-1/Análise Númerica/Programas

Name

- solucao_sistema_LU.m
- substituicoes_retroativas.m
- substituicoes_sucessivas_pivotal.m
- substituicoes_sucessivas.m
- video_aula_decomposicao_cholesky.m
- video_aula_det_LU_com_pivot.m
- video_aula3.m

Ambiente de Trabalho

Filtrar

Nome	Classe	Dimensão	Valor	Atributo

Histórico de Comandos

Filtrar

```
v = randi([-10,10],[4,1])
v'*A*v
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
```

Janela de Comandos

```
>> [A,Det,Info] = cholesky(A)
LA =

    3    6   -3    3
    2    4    2   22
   -1    1    2    2
    1    5   -1    1

Det =  576
Info = 0
>> L = tril(LA);
>> b = [12;64;4;82];
>> y = substituicoes_sucessivas(L,b)
>> x =  substituicoes_retroativas(L',y)
x =

   2
  -3
   1
   5

>> A\b
ans =

   2
  -3
   1
   5

>> 
```

Janela de Comandos Documentação Editor Editor de Variáveis

Métodos Iterativos Estacionários

Métodos Iterativos Estacionários

- Nestes métodos partimos de uma solução inicial x^0 e construímos uma sequência $x^1, x^2, \cdots, x^k$ que deve convergir para a solução exata x^* do sistema.
- Seja M uma matriz de iteração e $\boldsymbol{c}$ um vetor constante qualquer. Um método iterativo pode ser definido como

$$x^{k+1} = Mx^k + \boldsymbol{c}$$

- Um método definido desta forma é dito estacionário quando M for fixa durante todo o processo de determinação da solução.

Condição de convergência

- Teorema
  - O método iterativo converge com qualquer valor inicial x^0 se e somente se, $\rho(M) < 1$, sendo $\rho(M)$ o raio espectral da matriz de iteração M.

- O cálculo do raio espectral pode ser mais caro que o cálculo da solução. Podemos então utilizar o critério das linhas para os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

Condição suficiente de convergência

- Teorema
  - É condição suficiente para a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes A seja diagonal estritamente dominante, ou seja,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, i = 1,2,\cdots,n$$

Critério de parada

- Com a sequência gerada pelo método iterativo, convergente, então

$$\lim_{k \to \infty} x^k = x^*$$

- Para $k > 0$ a solução é obtida com exatidão crescente.
- Critérios de parada

$$\frac{\left\| x^k - x^{k+1} \right\|}{\left\| x^k \right\|} \leq \varepsilon$$

$$k \leq k_{max}$$

Critério de parada

- A norma adotada pode ser a infinita

$$\frac{\max\limits_{1 \le i \le n} \left| x_i^k - x_i^{k-1} \right|}{\max\limits_{1 \le i \le n} \left| x_i^k \right|}$$

Método de JAcobi

- Incialmente faremos seguinte decomposição da matriz A

$$A = D + E + F$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando ao sistema

$$Ax = b$$

$$(D + E + F)x = b$$

$$Dx + (E + F)x = b$$

$$Dx = b - (E + F)x$$

- Se existir a inversa de D então

$$x^{k+1} = [-D^{-1}(E + F)]x^k + D^{-1}b$$

- Ou seja

$$x^{k+1} = Jx^k + C$$

Método de Jacobi na forma matricial

- Manuseando a equação anterior temos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ \cdots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix}}_{x^{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -{}^{a_{12}}/_{a_{11}} & -{}^{a_{13}}/_{a_{11}} & \cdots & -{}^{a_{1n}}/_{a_{11}} \\ -{}^{a_{21}}/_{a_{22}} & 0 & -{}^{a_{23}}/_{a_{22}} & \cdots & -{}^{a_{2n}}/_{a_{22}} \\ -{}^{a_{31}}/_{a_{33}} & -{}^{a_{32}}/_{a_{33}} & 0 & \cdots & -{}^{a_{3n}}/_{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -{}^{a_{n1}}/_{a_{nn}} & -{}^{a_{n2}}/_{a_{nn}} & -{}^{a_{n3}}/_{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{J} \begin{bmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \\ \cdots \\ x_n^{k} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{b_1}/_{a_{11}} \\ {}^{b_2}/_{a_{22}} \\ {}^{b_3}/_{a_{33}} \\ \vdots \\ {}^{b_n}/_{a_{nn}} \end{bmatrix}}_{C}$$

Método de Jacobi na forma equações

- Podemos também expressar o método na forma de equações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^k + b_n\right)$$

- Iniciando fazendo $x^0 = 0$

$$x_i^0 = c_i \text{ então } x_i^1 = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

- Então

$$x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Octave

Arquivo Editar Depurar Janela Ajuda Novidades

Diretório Atual: isciplina-2020-1\Análise Númerica\Programas

Navegador de Arquivos

G:/Meu Drive/UFOP/Disciplina-2020-1/Análise Númerica/Programas

Name
- solucao_sistema_LU.m
- substituicoes_retroativas.m
- substituicoes_sucessivas_pivotal.m
- substituicoes_sucessivas.m
- video_aula_decomposicao_cholesky.m
- video_aula_det_LU_com_pivot.m
- video_aula3.m

Ambiente de Trabalho

Filtrar

Nome	Classe	Dimensão	Valor	Atributo

Histórico de Comandos

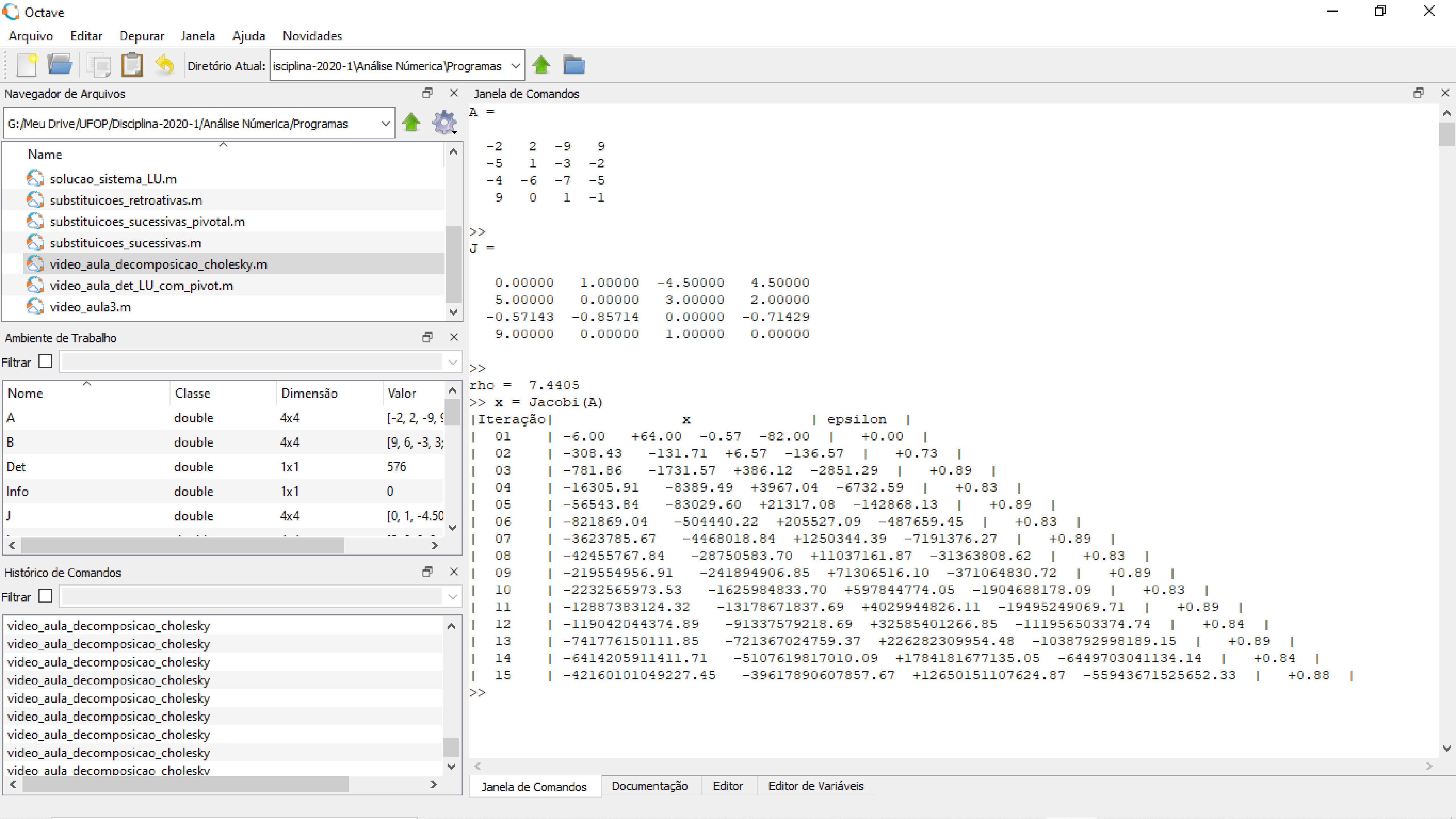
Filtrar

video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky

Janela de Comandos

```
>> A = [-2 2 -9 9;-5 1 -3 -2;-4  -6  -7  -5;9   0   1  -1]
A =

  -25    2   -9    9
   -5   11   -3   -2
   -4   -6  -17   -5
    9    0    1  -21

>>
J =

   0.00000   0.08000  -0.36000   0.36000
   0.45455   0.00000   0.27273   0.18182
  -0.23529  -0.35294   0.00000  -0.29412
   0.42857   0.00000   0.04762   0.00000

>>
rho =  0.61297
>> x = Jacobi(A)
|Iteração|                x                  | epsilon  |
|   01   | -0.48   +5.82  -0.24  -3.90  |   +0.00  |
|   02   | -1.34   +4.83  -1.03  -4.12  |   +0.21  |
|   03   | -1.21   +4.18  -0.41  -4.53  |   +0.07  |
|   04   | -1.63   +4.33  -0.10  -4.44  |   +0.02  |
|   05   | -1.70   +4.25  -0.08  -4.61  |   +0.04  |
|   06   | -1.77   +4.19  +0.02  -4.64  |   +0.01  |
|   07   | -1.82   +4.18  +0.07  -4.66  |   +0.01  |
|   08   | -1.85   +4.16  +0.09  -4.68  |   +0.00  |
|   09   | -1.87   +4.15  +0.11  -4.69  |   +0.00  |
|   10   | -1.88   +4.15  +0.12  -4.70  |   +0.00  |
|   11   | -1.88   +4.14  +0.12  -4.70  |   +0.00  |
|   12   | -1.89   +4.14  +0.13  -4.71  |   +0.00  |
|   13   | -1.89   +4.14  +0.13  -4.71  |   +0.00  |
|   14   | -1.89   +4.14  +0.13  -4.71  |   +0.00  |
|   15   | -1.89   +4.14  +0.13  -4.71  |   +0.00  |
>>
```

Janela de Comandos | Documentação | Editor | Editor de Variáveis



Octave
Arquivo Editar Depurar Janela Ajuda Novidades
Diretório Atual: isciplina-2020-1\Análise Númerica\Programas
Navegador de Arquivos
G:/Meu Drive/UFOP/Disciplina-2020-1/Análise Númerica/Programas
Name
solucao_sistema_LU.m
substituicoes_retroativas.m
substituicoes_sucessivas_pivotal.m
substituicoes_sucessivas.m
video_aula_decomposicao_cholesky.m
video_aula_det_LU_com_pivot.m
video_aula3.m
Ambiente de Trabalho
Filtrar
Nome Classe Dimensão Valor
A double 4x4 [-2, 2, -9, 9
B double 4x4 [9, 6, -3, 3;
Det double 1x1 576
Info double 1x1 0
J double 4x4 [0, 1, -4.50
Histórico de Comandos
Filtrar
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
video_aula_decomposicao_cholesky
Janela de Comandos
A =
-2 2 -9 9
-5 1 -3 -2
-4 -6 -7 -5
9 0 1 -1
>>
J =
0.00000 1.00000 -4.50000 4.50000
5.00000 0.00000 3.00000 2.00000
-0.57143 -0.85714 0.00000 -0.71429
9.00000 0.00000 1.00000 0.00000
>>
rho = 7.4405
>> x = Jacobi(A)
Iteração	x	epsilon
01	-6.00 +64.00 -0.57 -82.00	+0.00
02	-308.43 -131.71 +6.57 -136.57	+0.73
03	-781.86 -1731.57 +386.12 -2851.29	+0.89
04	-16305.91 -8389.49 +3967.04 -6732.59	+0.83
05	-56543.84 -83029.60 +21317.08 -142868.13	+0.89
06	-821869.04 -504440.22 +205527.09 -487659.45	+0.83
07	-3623785.67 -4468018.84 +1250344.39 -7191376.27	+0.89
08	-42455767.84 -28750583.70 +11037161.87 -31363808.62	+0.83
09	-219554956.91 -241894906.85 +71306516.10 -371064830.72	+0.89
10	-2232565973.53 -1625984833.70 +597844774.05 -1904688178.09	+0.83
11	-12887383124.32 -13178671837.69 +4029944826.11 -19495249069.71	+0.89
12	-119042044374.89 -91337579218.69 +32585401266.85 -111956503374.74	+0.84
13	-741776150111.85 -721367024759.37 +226282309954.48 -1038792998189.15	+0.89
14	-6414205911411.71 -5107619817010.09 +1784181677135.05 -6449703041134.14	+0.84
15	-42160101049227.45 -39617890607857.67 +12650151107624.87 -55943671525652.33	+0.88
>>
Janela de Comandos Documentação Editor Editor de Variáveis

Método de Gauss-Seidel

- Partimos da mesma decomposição

$$A = D + E + F$$

- O sistema linear fica da seguinte forma

$$(D + E + F)x = b$$

$$(D + E)x = -Fx + b$$

- A iteração é obtida pela fórmula de recorrência

$$x^{k+1} = [(D + E)^{-1}]x^k + (D + E)^{-1}b$$

$$x^{k+1} = Sx^k + C$$

Método de Gauss-Seidel

- Na forma de equações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1\right)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2\right)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n\right)$$

Método de Gauss-Seidel

- Valor inicial

$$x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

FIM