

# Examen prueba

Recordad que este examen es para medir vuestro nivel, no tiene sentido hacer trampas, solo os engañáis a vosotros. Cuando me entreguéis el exámen hacedlo con este folio delante y todos los folios que uséis grapados o unidos de alguna forma. Suerte!

**Ejercicio 1:** Sea  $f : \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$  la aplicación definida como:

$$f(x) = (x \bmod 9, x \bmod 10)$$

Estudia si  $f$  es inyectiva y/o sobreyectiva.

**Ejercicio 2:** -se junta un grupo de nueve amigos que deciden ordenarse por altura y peso, es decir, una persona está por delante de otra si es más alta y pesa más. En la siguiente tabla indicamos la altura y el peso de cada uno de los miembros:

Nombre	Peso	Altura
Antonio	1'8m	80 kg
Borja	1'7m	71 kg
Carlos	1'78m	72 kg
David	1'9m	86 kg
Esteban	1'87m	81 kg
Fernando	1'72m	83 kg
Gerardo	1'71m	76 kg
Héctor	1'81m	84 kg
Ignacio	1'85m	76 kg

Representar en un diagrama a los 9 amigos tal y como quedarían ordenados. Consideremos el conjunto formado por aquellos cuyo nombre empieza en vocal: indica quienes serían las cotas, el supremo y el ínfimo, mayor y menor, así como los elementos maximales y minimales.

**Ejercicio 3:** Responde a las siguientes preguntas:

- ¿Tiene la ecuación diofántica  $213x + 185y = 111$  solución? En caso afirmativo proporcionar la solución general.
- ¿Existe inverso de 185 en  $\mathbb{Z}_{213}$ ? ¿Y el de 71? Explique el por qué de que existan o no y hállese.
- ¿Existe algún número natural  $n \geq 1$  tal que  $97^n = 1 \pmod{213}$ ? ¿Y tal que  $75^n = 1$ ? En el caso en el que existan, proporcionar alguno.

**Ejercicio 4:** Consideremos  $\mathbb{Z}_3[X]$ . Sea  $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ .

1. Estudia si  $p(x)$  es o no irreducible.
2. Calcula un representante  $q(x)$  de  $[x^7 + 2x^3 + x + 2]$ , como clase de  $\frac{\mathbb{Z}_3}{p(x)}$ , que tenga grado menor que 4.
3. Decide si existe el inverso de  $q(x)$  y, en caso de que exista, calcúlalo.
4. ¿Cuántos elementos de  $\frac{\mathbb{Z}_3}{p(x)}$  tienen inverso?

**Ejercicio 5:** Sea  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  y  $R$  la relación de equivalencia en  $X$  definida por:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad 4|x + 3y$$

Demuestra que es una relación de equivalencia y calcula el conjunto cociente, dando explícitamente todos sus elementos.

**Ejercicio 6:** Tres agricultores dividieron equitativamente el arroz que habían cultivado en común. Para venderlo fueron a mercados diferentes, donde se usaban diferentes medidas de peso, además todos ellos usaron carretas en las que podían transportar un máximo de 1000 libras. En el primer mercado, la medida era de 11 libras, en el segundo de 14 y en el tercero de 15. Cada agricultor vendió todo lo que pudo en medidas enteras y, cuando volvieron al hogar, el primero llevaba 5 libras de arroz, el segundo 6 y el tercero 4. ¿Cuánto arroz habían cultivado entre los 3?