

Examen prueba

Recordad que este examen es para medir vuestro nivel, no tiene sentido hacer trampas, solo os engañáis a vosotros. Cuando me entreguéis el exámen hacedlo con este folio delante y todos los folios que uséis grapados o unidos de alguna forma. Suerte!

Ejercicio 1: Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ dos aplicaciones tales que $g \circ f = 1_X$. Demuestre que f es inyectiva y g es sobreyectiva:

Ejercicio 2: A partir del conjunto \mathbb{Z} con el orden usual, consideramos el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ordenado con el orden del producto. Calcule los elementos distinguidos del subconjunto

$$S = (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x| + |y| = 3.$$

Ejercicio 3: Responde a las siguientes preguntas:

- ¿Tiene la ecuación $9x + 2 = 2x + 7$ solución en \mathbb{Z}_{121} ? Dar las soluciones si existen.
- Resuelve la ecuación diofántica $137x - 144y = 3$.
- Si A y B son dos subconjuntos de X , comprobar que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ sustituyendo las expresiones donde aparecen los operadores diferencia por otras equivalentes y a continuación usando algunas leyes del álgebra de conjuntos.

Ejercicio 4: Consideremos $\mathbb{Z}_{11}[X]$. Sea $p(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 51 \in \mathbb{Z}_4[X]$.

1. Estudia si $p(x)$ es o no irreducible.
2. ¿Es $\frac{\mathbb{Z}_4}{p(x)}$ un cuerpo? ¿Cuántos elementos tiene?
3. Calcular el inverso de $3x^2 + 10x + 9$ en $\frac{\mathbb{Z}_4}{p(x)}$.
4. Demuestre que el conjunto de los números primos es infinito.

Ejercicio 5: Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{5, 6, 7\}$. Definimos en $A \times B \times C$ la relación de equivalencia:

$$(a, b, c)R(a', b', c') \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c = a' + b' + c'$$

Demuestra que es una relación de equivalencia y calcula el conjunto cociente, dando explícitamente todos sus elementos y calculando su cardinal.

Ejercicio 6: Tres agricultores dividieron equitativamente el arroz que habían cultivado en común. Para venderlo fueron a mercados diferentes, donde se usaban diferentes medidas de peso, además todos ellos usaron carretas en las que podían transportar un máximo de 1000 libras. En el primer mercado, la medida era de 11 libras, en el segundo de 14 y en el tercero de 15. Cada agricultor vendió todo lo que pudo en medidas enteras y, cuando volvieron al hogar, el primero llevaba 5 libras de arroz, el segundo 6 y el tercero 4. ¿Cuánto arroz habían cultivado entre los 3?