ÁRBOLES BINARIOS EQUILIBRADOS

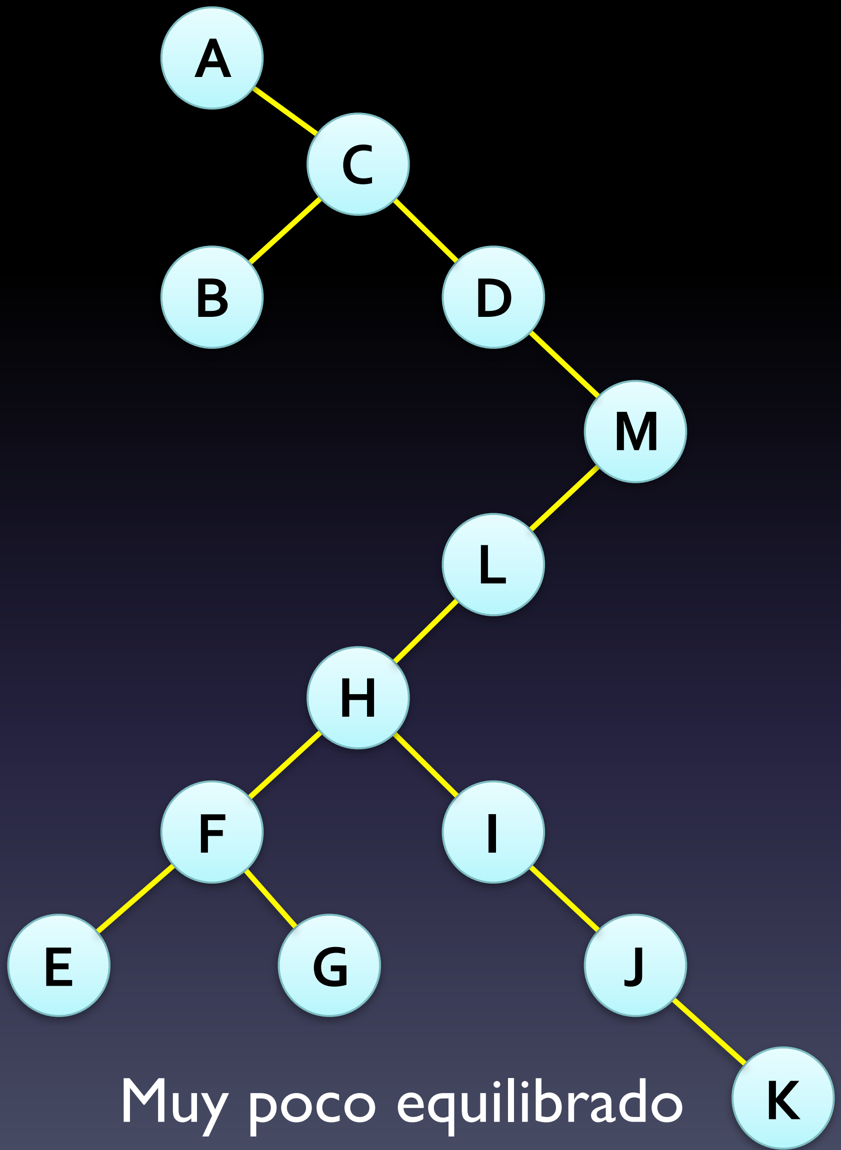
AVL

Motivación

- En ocasiones, la construcción de los ABB conduce a árboles con características muy pobres para la búsqueda
- Ejemplo: Construir un ABB con {A, C, D M, L, H, I, B, F, G, J, K, E}

IDEA

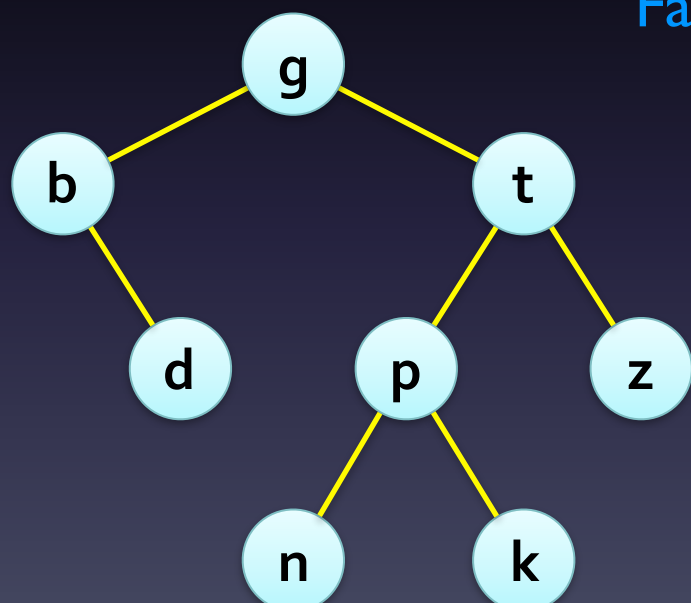
Construir ABB equilibrados, impidiendo que en ningún nodo las alturas de los subárboles izquierdo y derecho difieran en más de una unidad



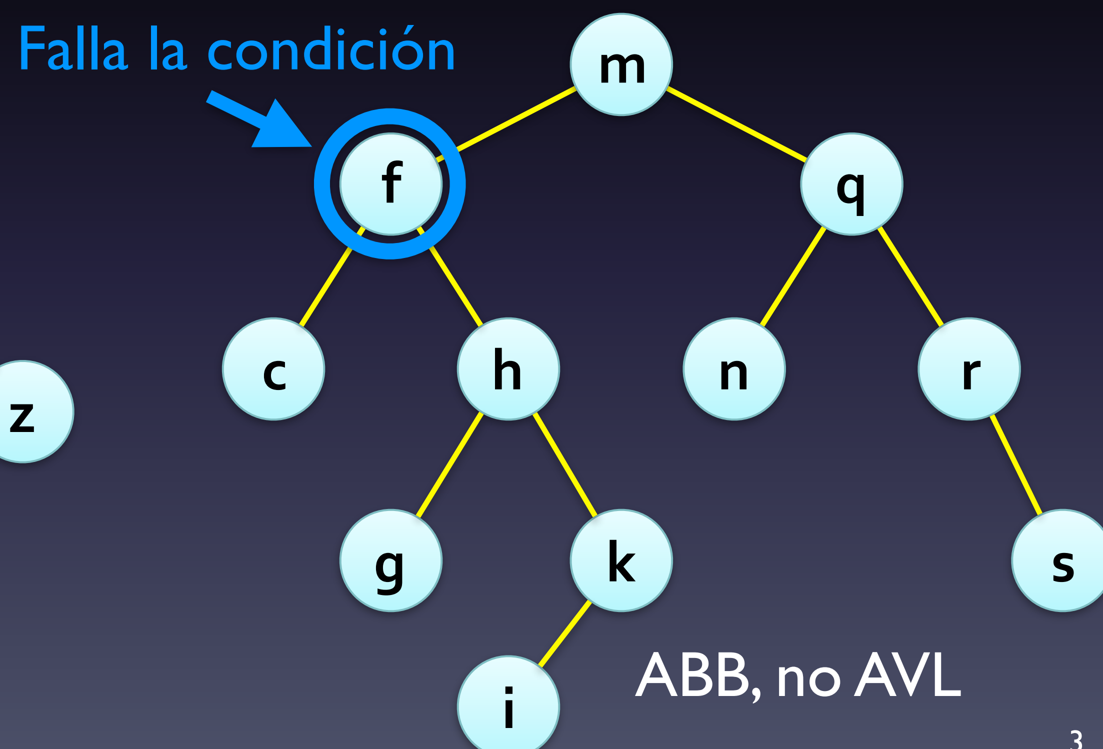
Muy poco equilibrado

Árboles AVL

- Diremos que un árbol binario ABB es un AVL (o que está equilibrado en el sentido de Addelson-Velski-Landis) si para cada uno de sus nodos se cumple que las alturas de sus dos subárboles difieren como máximo en 1
- Ejemplo:



AVL (ABB + Equilibrio)



ABB, no AVL

Eficiencia

- La altura de un árbol AVL está acotada por

$$\log_2(n+1) \leq h \leq 1.44 \log_2(n+2) - 0.33$$

- La altura de un AVL (esto es, la longitud de sus caminos de búsqueda) con n nodos nunca excede al 44% de la altura de un árbol completamente equilibrado con n nodos

- Consecuencia: en el peor de los casos, la búsqueda se puede realizar en $O(\log_2 n)$

Árboles AVL

- Nos interesan funciones para las operaciones de:
  - Pertenencia
  - Inserción
  - Borrado

- Debemos tener en cuenta que tendremos que diseñar funciones auxiliares que permitan realizar estas operaciones manteniendo el árbol equilibrado

Equilibrio en inserciones y borrados

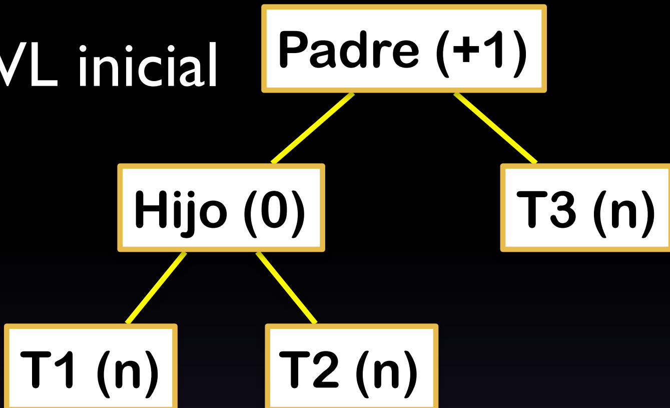
- **Idea:** Usar un campo altura en el registro que represente cada uno de los nodos del AVL para determinar el factor de equilibrio (diferencia de altura entre los subárboles izquierdo y derecho), de forma que cuando esa diferencia sea >1 se hagan los reajustes necesarios en los punteros para que tenga una diferencia de alturas ≤1
- Vamos a verlo en una serie de ejemplos en los que mostraremos todos los casos posibles

Equilibrio en inserciones y borrados

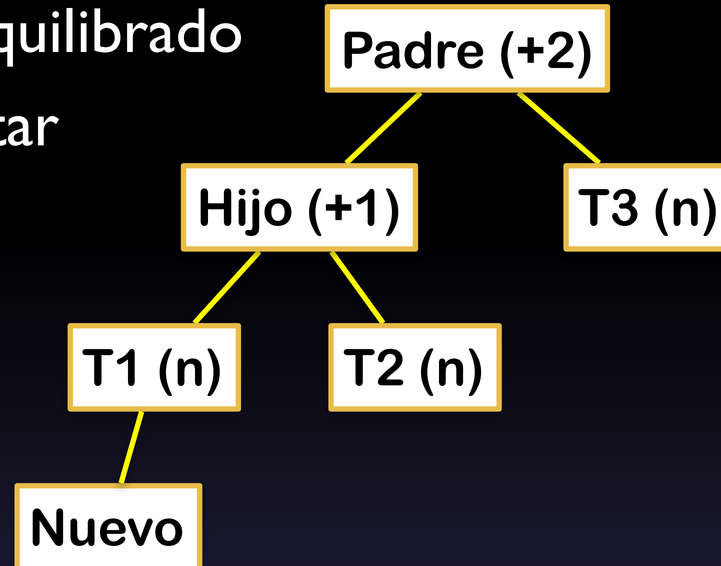
- Notaremos los subárboles como T_k, anotando entre paréntesis su altura
- Notaremos el factor de equilibrio como un valor con signo ubicado entre paréntesis junto a cada padre o hijo
- Las dos situaciones posibles que pueden representarse son:
  - Rotaciones simples
  - Rotaciones dobles

Rotación simple a la derecha

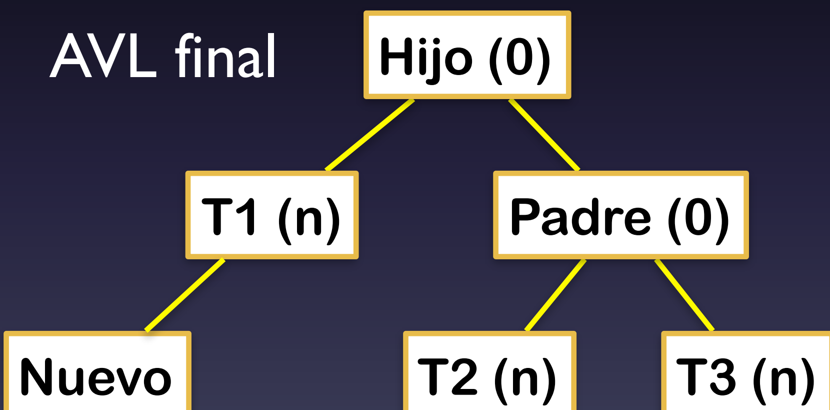
AVL inicial



AVL desequilibrado tras insertar



AVL final



Reajustes necesarios para la rotación

padre→izqda = hijo→drcha

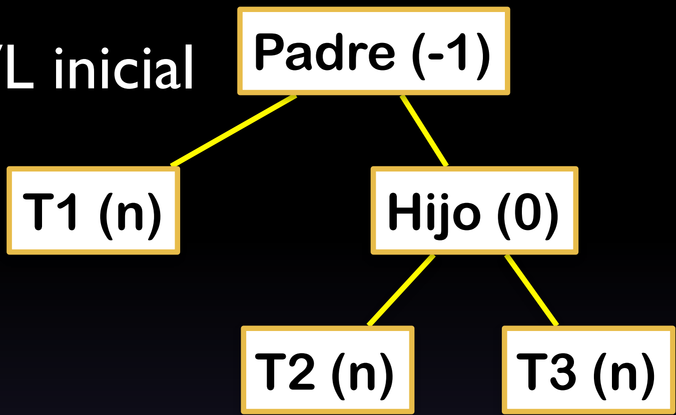
hijo→drcha = padre

a) Se preserva el inorden

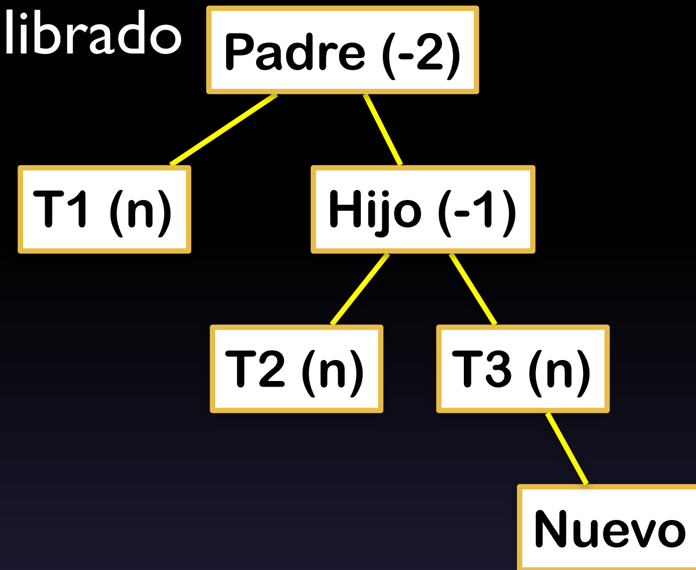
b) Altura del árbol final = altura arbol inicial

Rotación simple a la izquierda

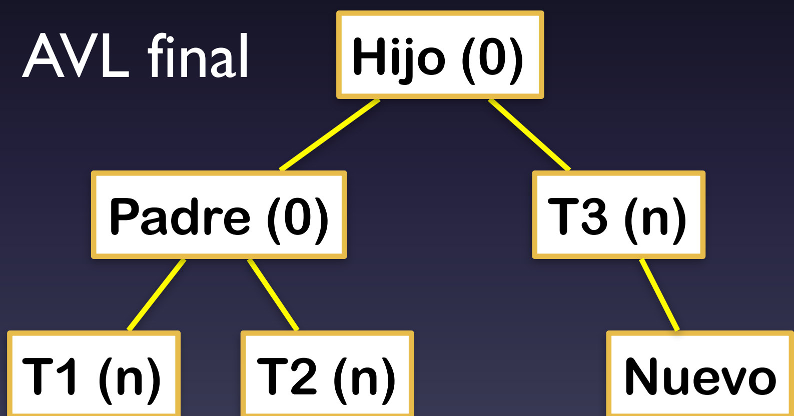
AVL inicial



AVL desequilibrado tras insertar



AVL final



Reajustes necesarios para la rotación

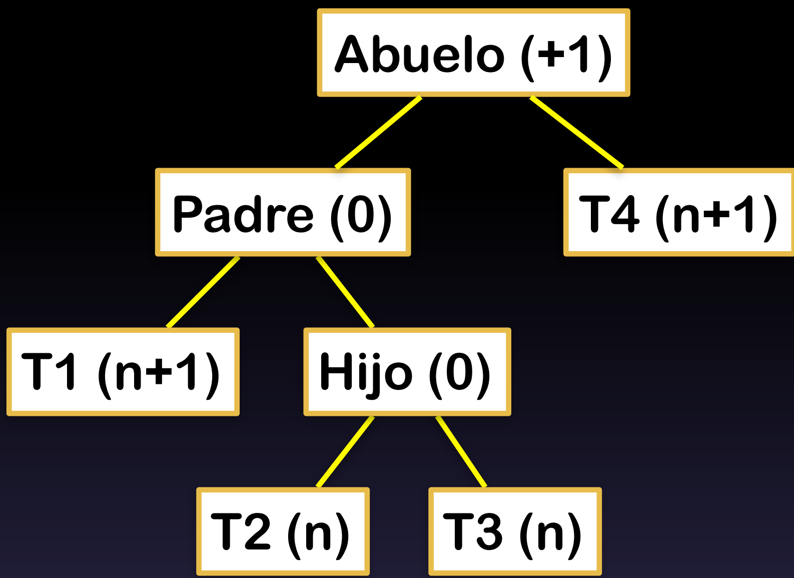
padre→drcha = hijo→izqda

hijo→izqda = padre

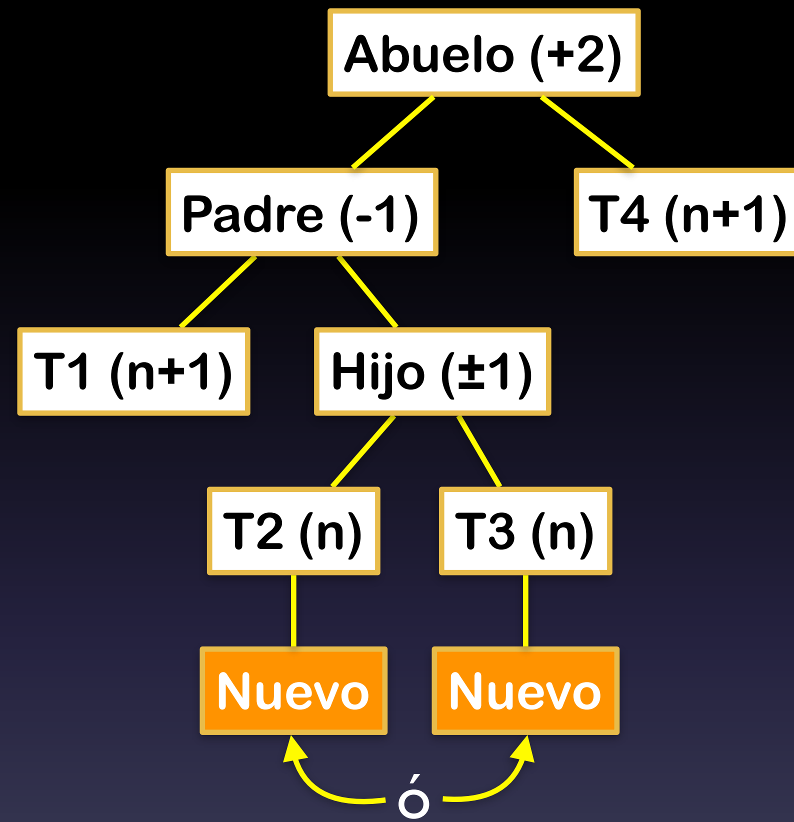
a) Se preserva el inorden

b) Altura del árbol final = altura arbol inicial

Rotación doble a la derecha



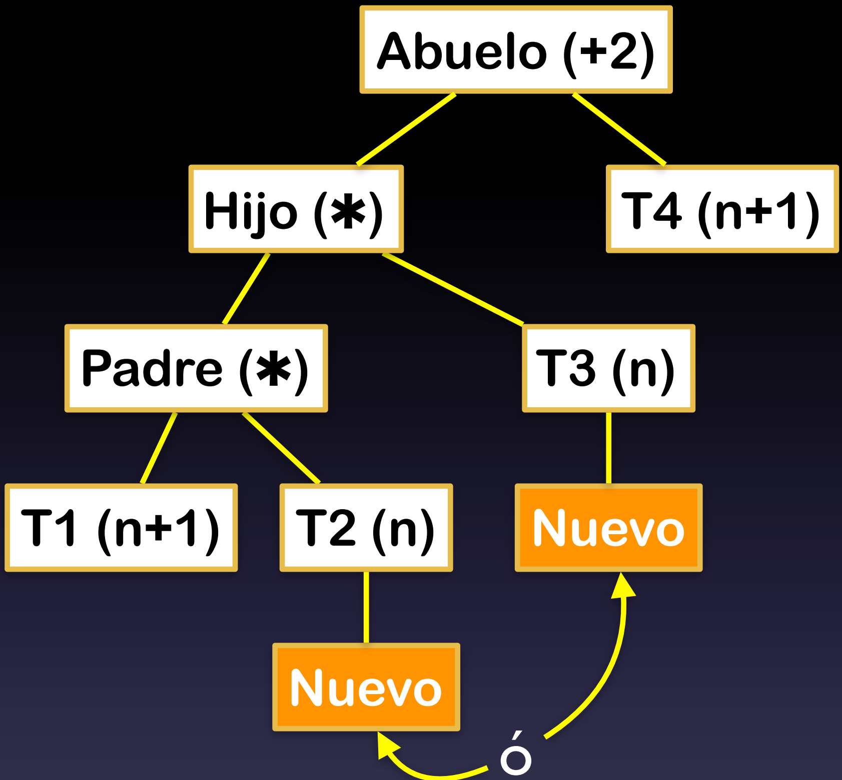
AVL inicial



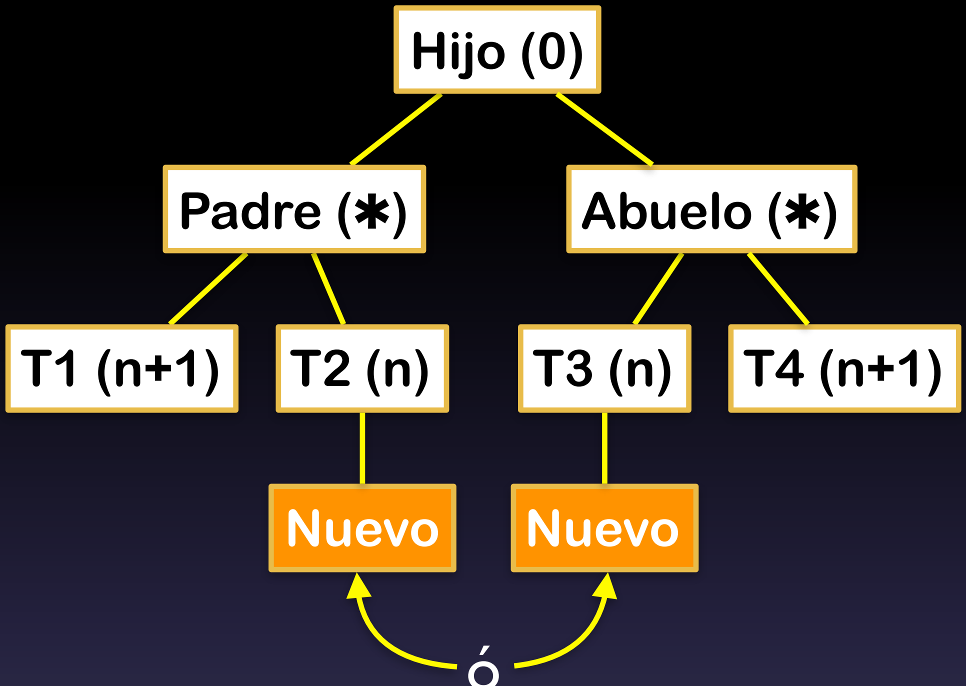
AVL desequilibrado

tras insertar

Rotación doble a la derecha

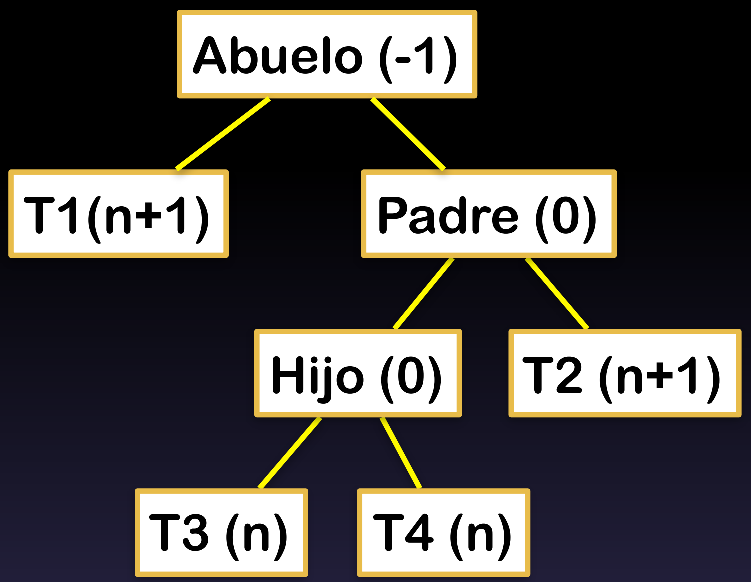


Rotación simple a izquierda en padre

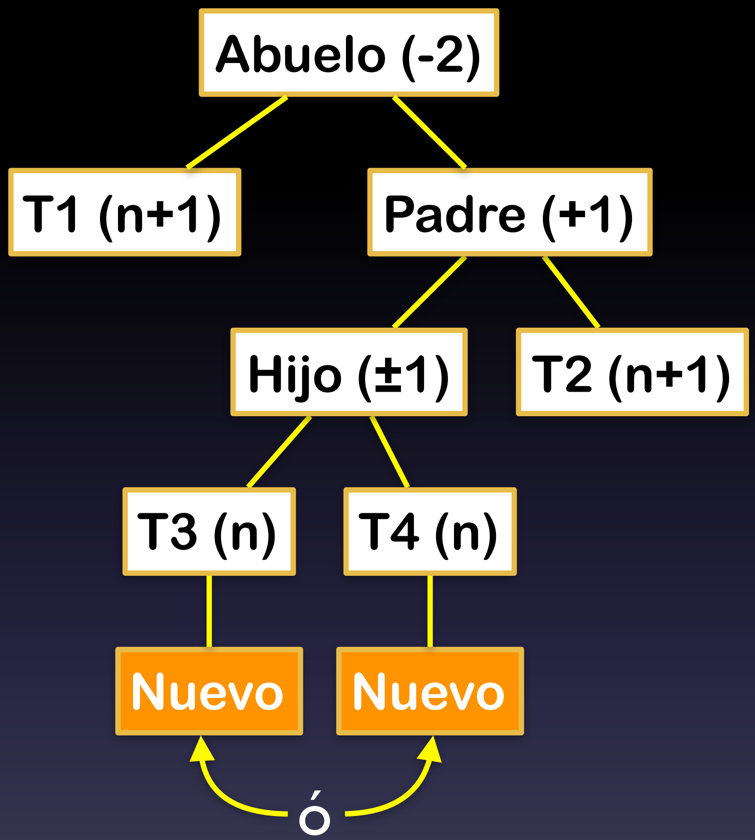


Rotación simple a derecha en abuelo

Rotación doble a la izquierda

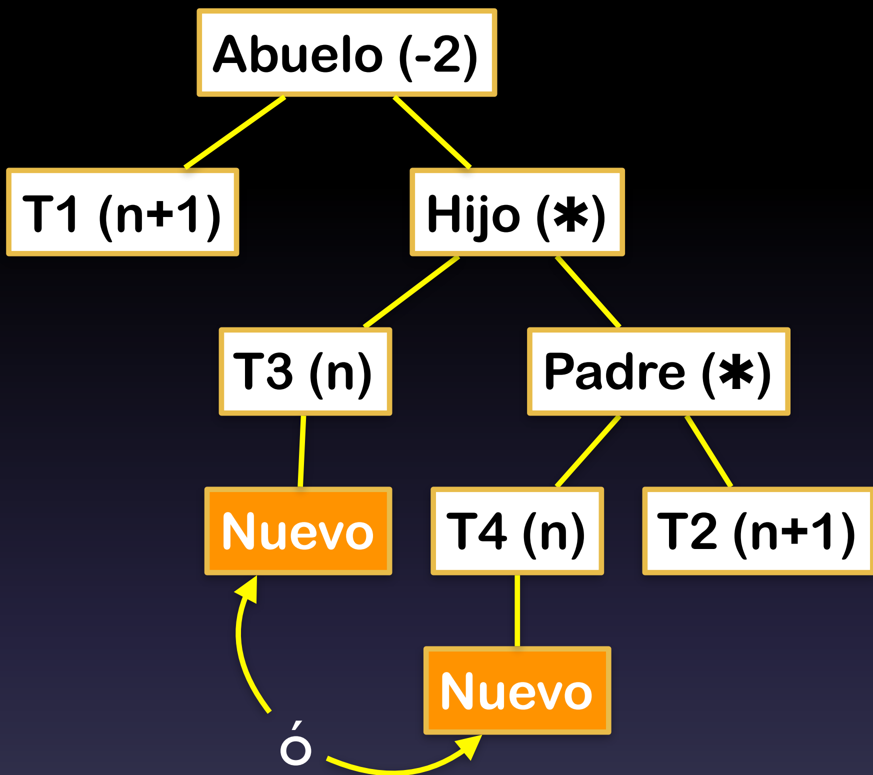


AVL inicial

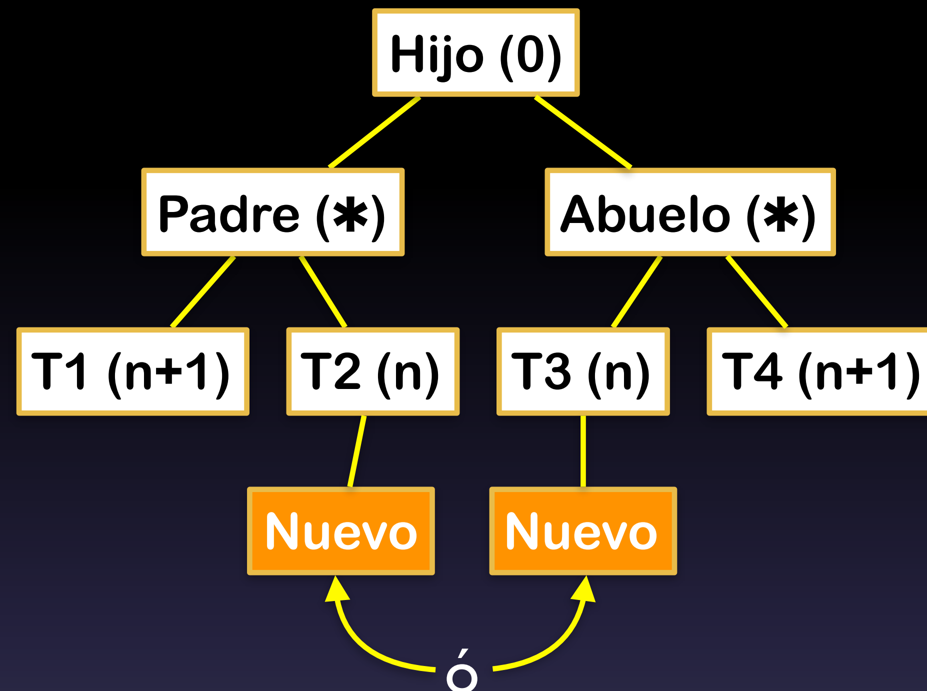


AVL desequilibrado tras insertar

Rotación doble a la izquierda



Rotación simple a derecha
en padre



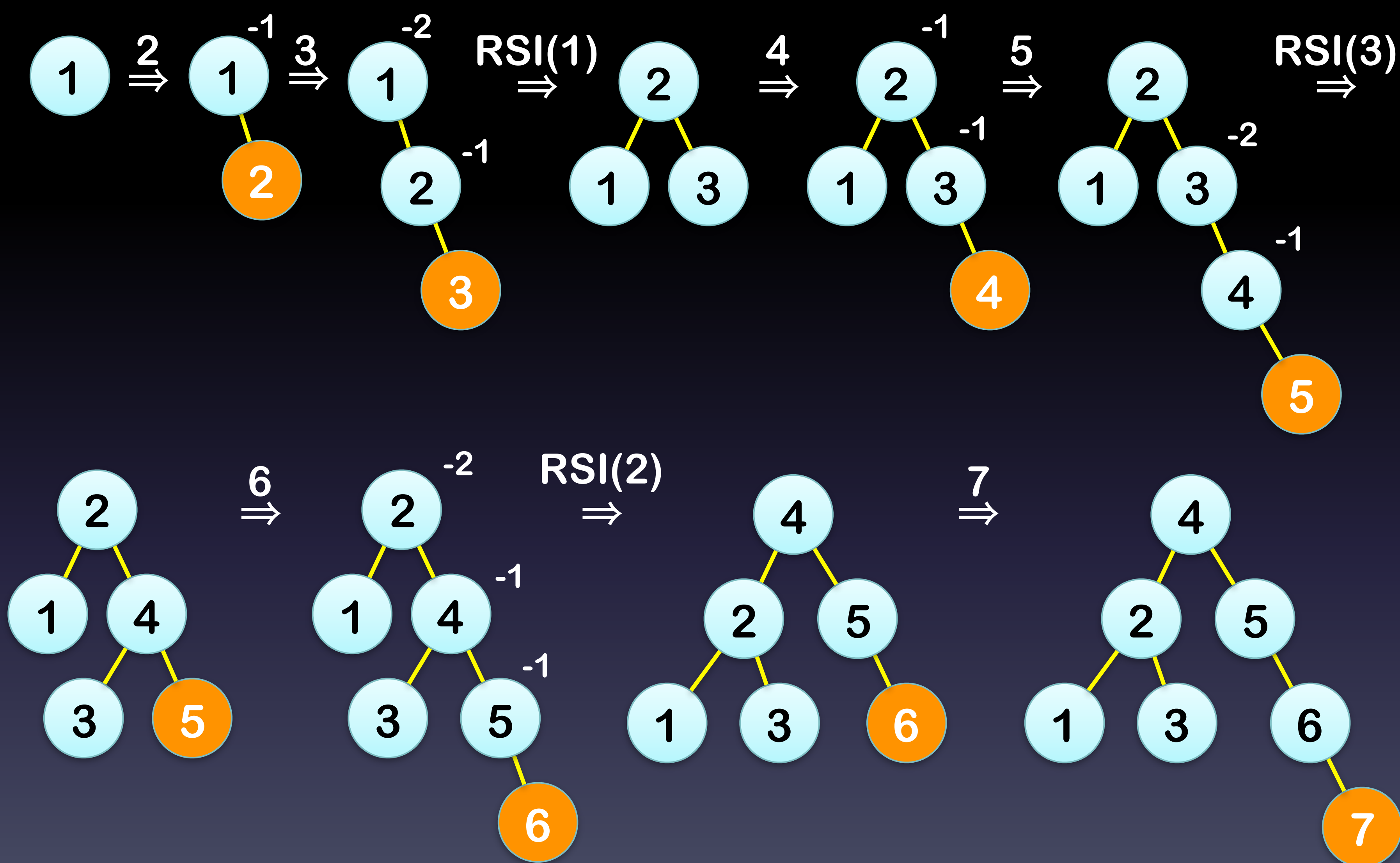
Rotación simple a izquierda
en abuelo

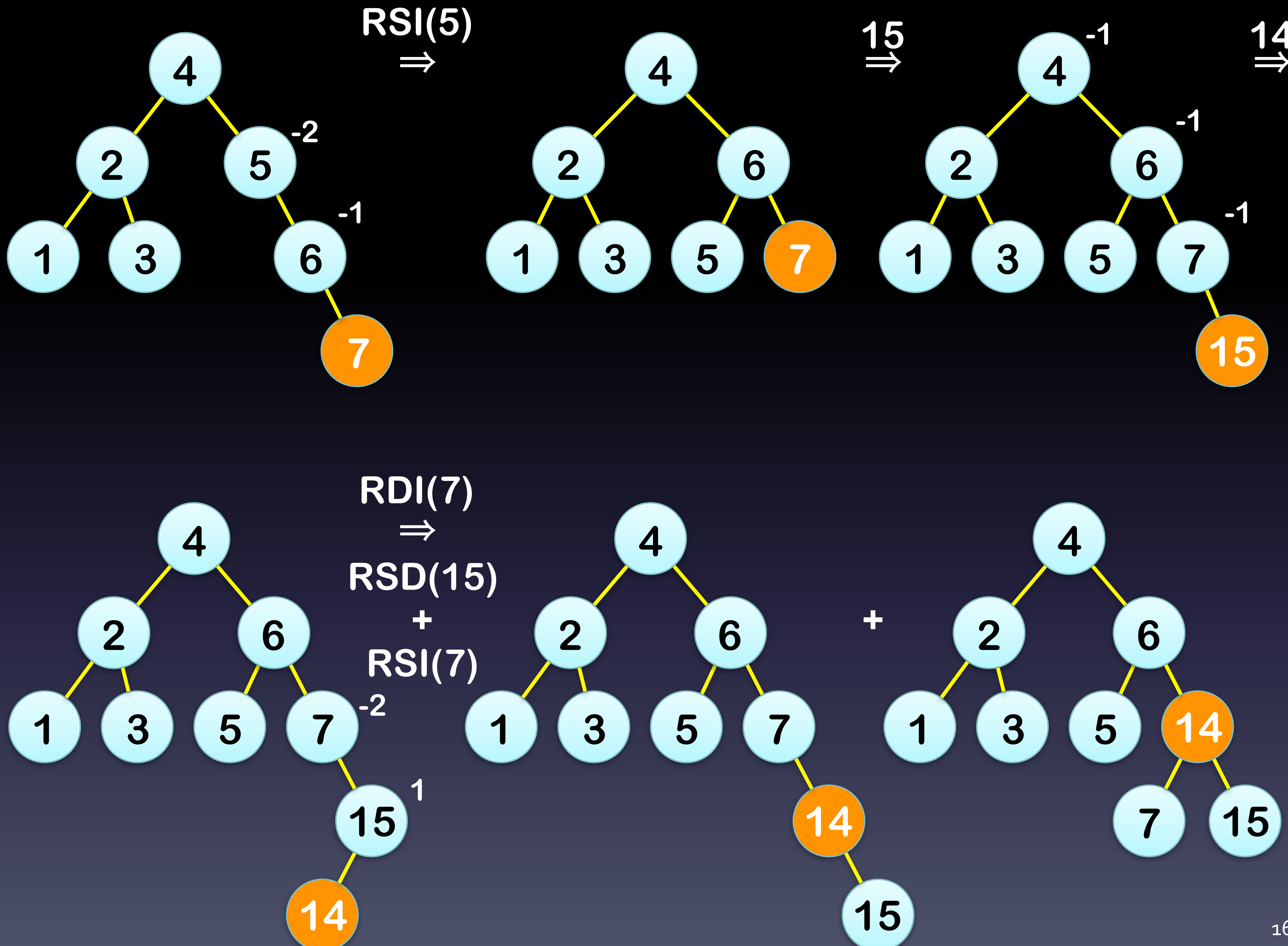
¿Qué rotación utilizar?

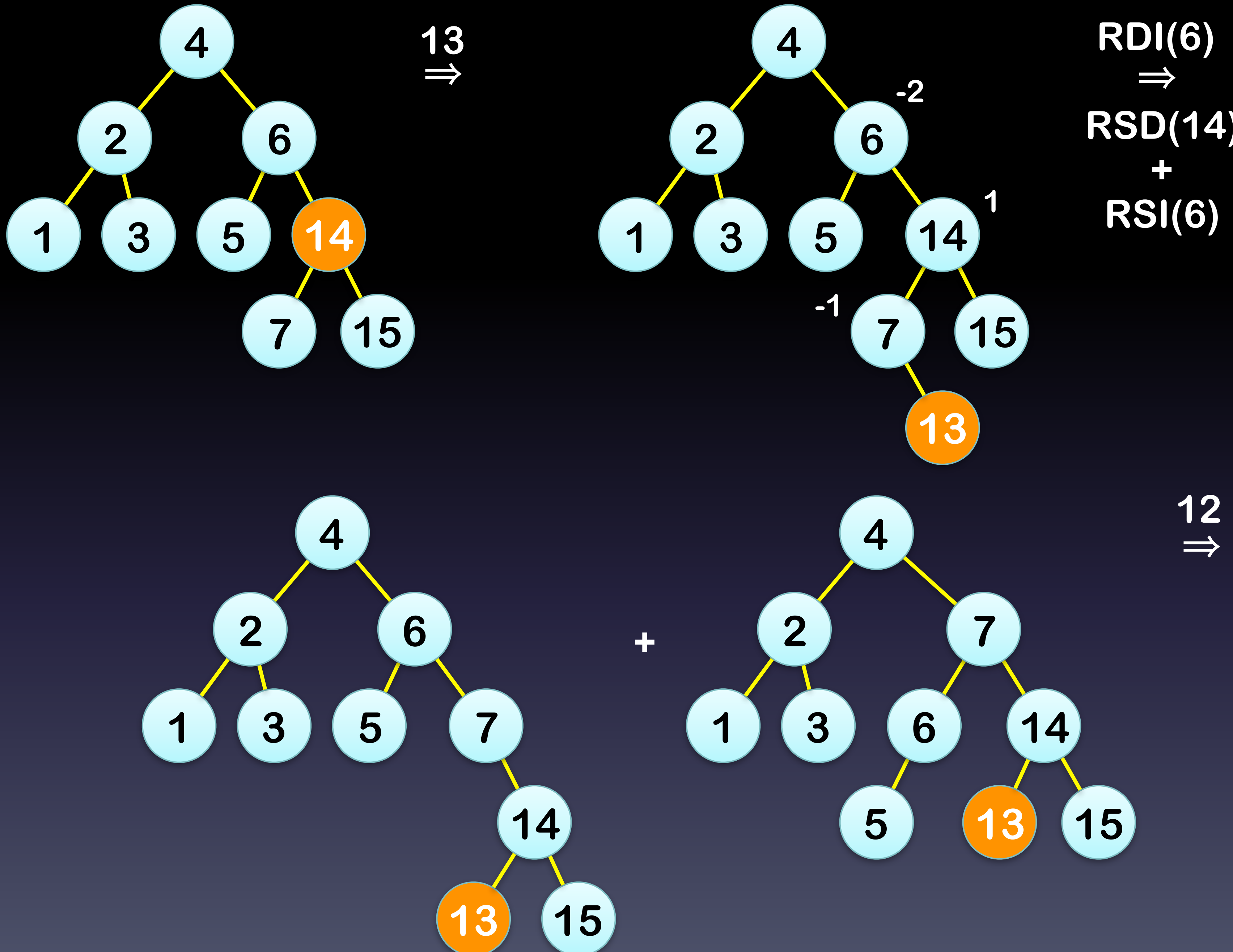
Si la inserción se realiza en:

- el hijo izquierdo del hijo izquierdo del nodo desequilibrado $\Longrightarrow$ RSD
- el hijo derecho del hijo derecho del nodo desequilibrado $\Longrightarrow$ RSI
- el hijo derecho del hijo izquierdo del nodo desequilibrado $\Longrightarrow$ RDD
- el hijo izquierdo del hijo derecho del nodo desequilibrado $\Longrightarrow$ RDI

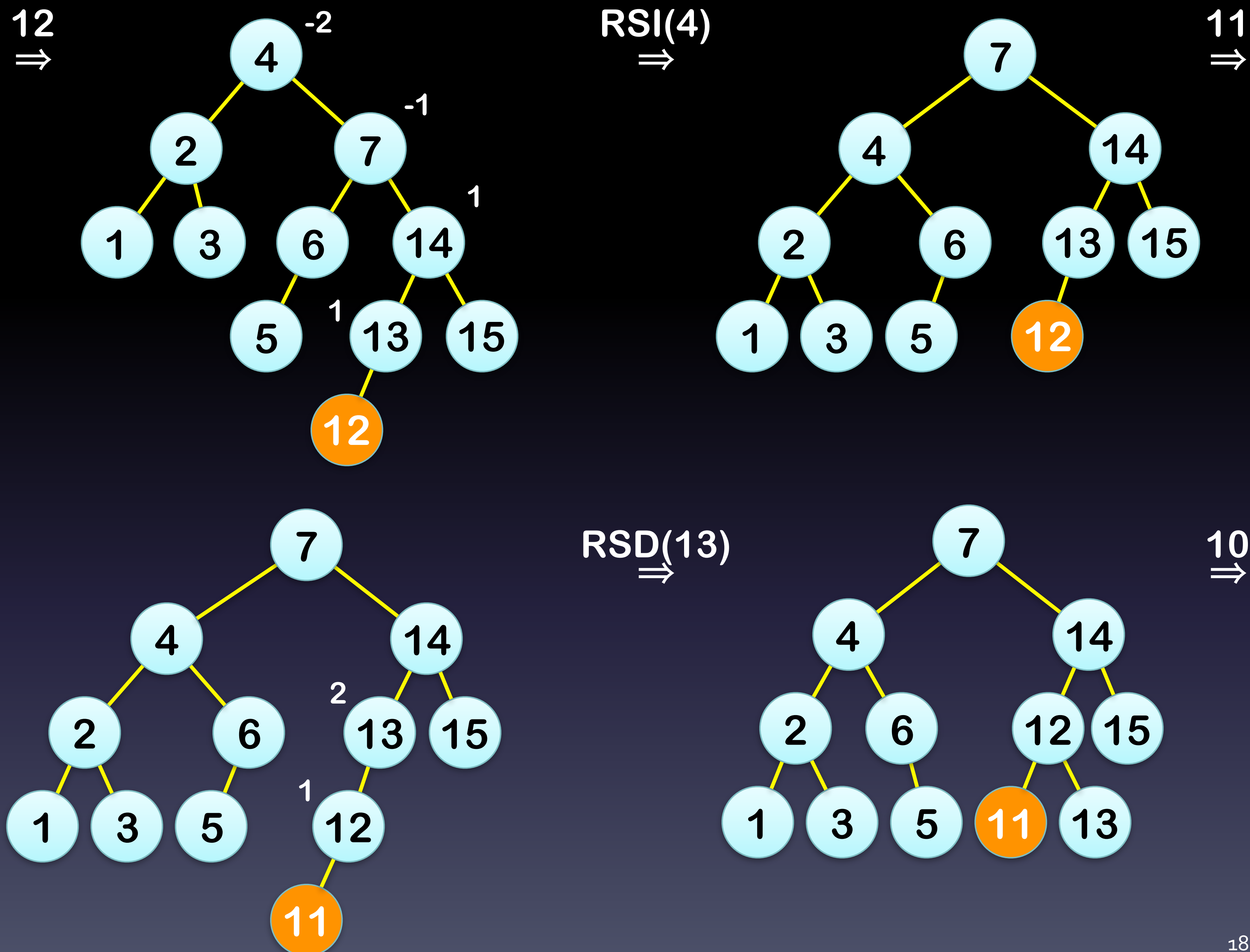
Ejemplo

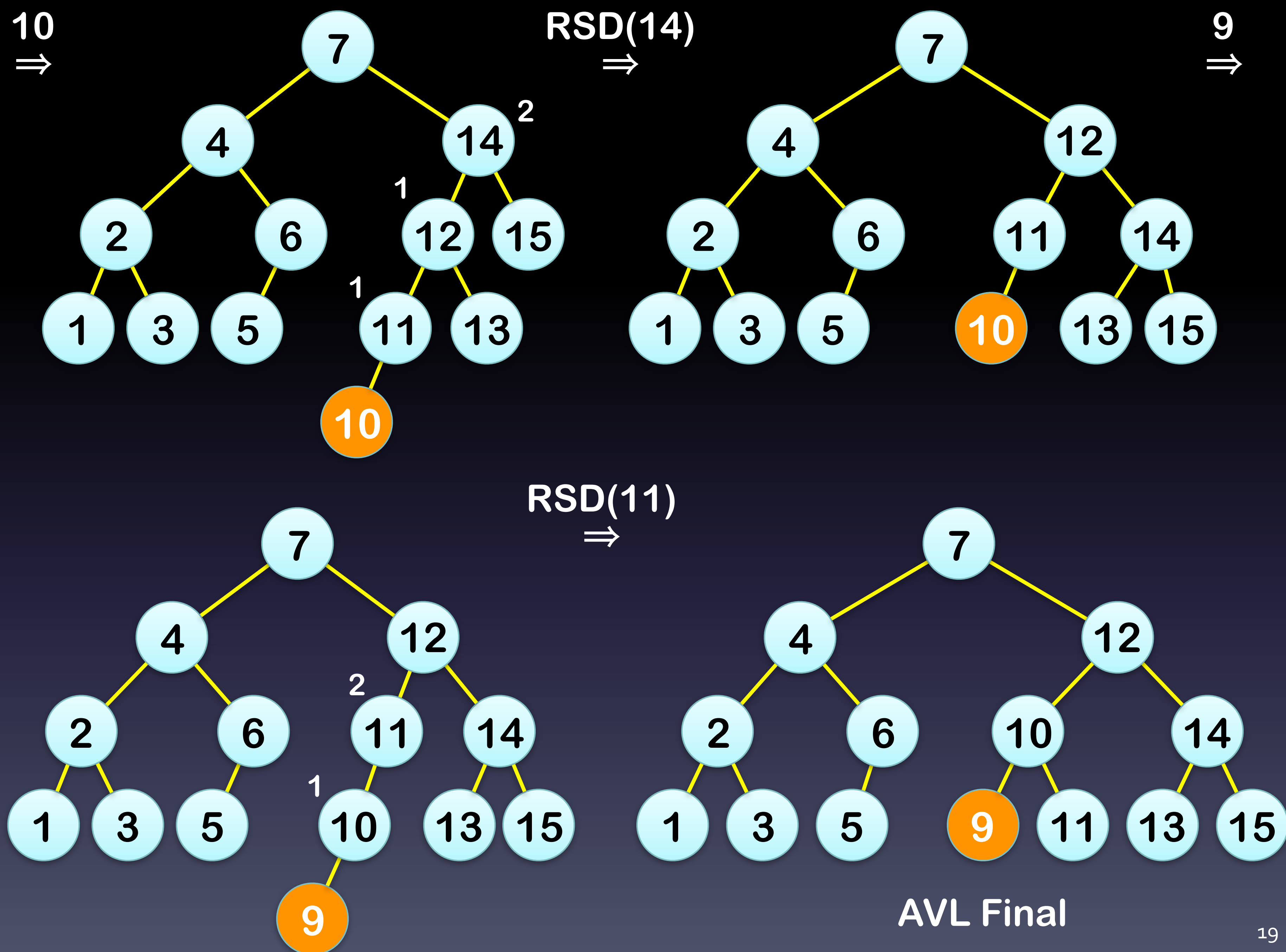

1
2
1
-1
3
-2
1
2
-1
3
RSI(1)
2
1
3
4
-1
2
1
-1
3
4
5
2
1
-2
3
-1
4
5
RSI(3)
2
1
4
3
5
6
-2
2
1
-1
4
3
-1
5
6
RSI(2)
4
2
5
1
3
6
7
4
2
5
1
3
6
7


RSI(5)
⇒
15
⇒
14
⇒
RDI(7)
⇒
RSD(15)
+
RSI(7)
+



13 ⇒
-2
1
-1
RDI(6)
⇒
RSD(14)
+
RSI(6)
+
12 ⇒


12 ⇒
RSI(4) ⇒
11 ⇒
RSD(13) ⇒
10 ⇒


10 ⇒
RSD(14) ⇒
9 ⇒
RSD(11) ⇒
AVL Final