TEMA 5

Espacios Vectoriales y Aplicaciones Lineales

5.1 Espacios Vectoriales. Bases

Como siempre $\mathbb{k}$ es un cuerpo. Un conjunto no vacío V es un $\mathbb{k}$–espacio vectorial si satisface las siguientes propiedades:

1. Existe una operación $+$ en V tal que $(V, +)$ es un grupo abeliano, es decir, la operación
   - es asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para cualesquiera $u, v, w \in V$,
   - es conmutativa: $u + v = v + u$ para cualesquiera $u, v \in V$,
   - tiene elemento neutro: existe $0 \in V$ tal que $0 + v = v + 0 = v$ para cualquier $v \in V$,
   - tiene elemento opuesto: para cualquier $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = (-v) + v = 0$.
2. Existe una acción de $\mathbb{k}$ sobre V denotada por yuxtaposición tal que
   - $a(u + v) = au + av$ para cualquier $a \in \mathbb{k}$ y cualesquiera $u, v \in V$,
   - $(a + b)u = au + bu$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{k}$ y cualquier $u \in V$,
   - $a(bu) = (ab)u$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{k}$ y cualquier $u \in V$,
   - $1u = u$ para cualquier $u \in V$.

Ya conocemos muchos ejemplos:

- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{k})$,
- $\mathbb{k}^n$,
- $\mathbb{k}[x]$,
- $\mathbb{k}[x]_m = \{p(x) \in \mathbb{k}[x] \mid \deg(p) \leq m\}$,
- el conjunto de las funciones reales definidas en un intervalo fijo sobre $\mathbb{R}$,
- soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

Proposición 1. *Sea V un $\mathbb{k}$–espacio vectorial. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{k}$ y $u, v \in V$ se tiene que:*

- $0u = 0$,
- $a0 = 0$,
- *si* $au = 0$ *entonces* $a = 0$ *o* $u = 0$,
- $-(au) = (-a)u = a(-u)$,
- $a(u - v) = au - av$,
- $(a - b)u = au - bu$.

Definición 2. Sean $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. Una *combinación lineal* de $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un vector de la forma

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i$$

donde $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$.

Un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ se dice *linealmente dependiente* si el vector 0 se puede escribir como una combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_n\}$ en la que no todos los escalares son cero, es decir,

$$\exists a_1, \dots, a_n \in \Bbbk \ \exists i_0 \in \{1, \dots, n\} \mid a_{i_0} \neq 0 \text{ y } a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0.$$

Un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ se dice *linealmente independiente* si no es linealmente dependiente, es decir,

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Proposición 3.
- *Si $0 \in \{v_1, \dots, v_n\}$ entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente.*
- *$\{v\}$ es linealmente independiente si y solo si $v \neq 0$.*
- *Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente entonces $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_r\}$ es linealmente dependiente.*
- *Si $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_r\}$ es linealmente independiente entoces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.*

Proposición 4. *Un conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente si y solo si uno de los vectores se puede escribir como combinación lineal de los demás.*

Definición 5. Se dice que $S \subseteq V$ es un *sistema de generadores* de V si todo vector de V se puede expresar como combinación lineal de un subconjunto finito de S.

Proposición 6. *Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores de V y v_i es combinación lineal de los demás, entonces $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ es un conjunto de generadores de V.*

Lema 7. *Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente y $\{u_1, \dots, u_s\}$ es un sistema de generadores entonces $m \leq s$.*

Definición 8. Una base de un espacio vectorial V es un subconjunto $B \subseteq V$ tal que

- B es linealmente independiente,
- B es sistema de generadores.

Teorema 9 (Teorema de la base). *Si un espacio vectorial V tiene una base formada por un número finito de vectores entonces todas las bases de V son finitas y tienen el mismo número de vectores.*

Definición 10. Si V tiene una base finita definimos la dimensión de V como

$$\dim(V) = \dim_{\Bbbk}(V) = |B|$$

donde B es una base cualquiera de V.

Teorema 11. *En un espacio vectorial, de cada sistema de generadores finito puede extraerse una base.*

Teorema 12. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ un conjunto linealmente independiente. Existen vectores $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ tales que $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V.*

Corolario 13. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. Son equivalentes:*

(1) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente,

(2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es sistema de generadores de V,

(3) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V.

Proposición 14. *Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de un $\Bbbk$–espacio vectorial V. Entonces todo vector se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores de B.*

Si $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base y $v \in V$ entonces existe un único $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n$ tal que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Se suele denotar

$$x_B = (x_1, \dots, x_n),$$

y $(x_1, \dots, x_n)$ se llaman las coordenadas de x en la base B. La aritmética del espacio vectorial se recupera a partir de las coordenadas:

- $(x + y)_B = x_B + y_B$,
- $(\lambda x)_B = \lambda x_B$.

Proposición 15. *Sea V un $\mathbb{k}$–espacio vectorial y sea B una base. Un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ es linealmente independiente si y solo si la matriz que tiene por columnas (o por filas) las coordenadas de los vectores $\{v_1, \dots, v_r\}$ respecto de B tiene rango r.*

Teorema 16 (Cambio de base)**.** *Sean $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dos bases de V. Sea $M_{B'B}$ la matriz que tiene como columnas las coordenadas de los vectores de B' en la base B, es decir*

$$M_{B'B} = ((e'_1)_B | \dots | (e'_n)_B).$$

Entonces para todo vector $v \in V$ se tiene

$$v_B = M_{B'B} v_{B'}.$$

$$M_{B''B} = M_{B'B} M_{B''B'}, \qquad M_{B'B}^{-1} = M_{BB'}.$$

5.2 Subespacios vestoriales

Definición 17. Un subconjunto no vacío U de un $\mathbb{k}$–espacio vectorial V es un subespacio vectorial si

- U es cerrado para sumas: $\forall u, v \in U$, $u + v \in U$,
- U es cerrado para producto de escalares: $\forall u \in U$ y $\forall \lambda \in \mathbb{k}$, $\lambda u \in U$.

Proposición 18. *Sea V un $\mathbb{k}$–espacio vectorial. Para $\varnothing \neq U \subseteq V$ son equivalentes:*

1. *U es un subespacio vectorial,*
2. *$\forall u, v \in U$ y $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}$, $\lambda u + \mu v \in U$,*
3. *U es cerrado para combinaciones lineales.*

Dado $S \subseteq V$ denotamos $\langle S \rangle$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S, es decir,

$$\langle S \rangle = \{a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n \mid a_i \in \mathbb{k}, s_i \in S, i = 1, \dots, n\}$$

Proposición 19. *$\langle S \rangle$ es el menor subespacio vectorial que contiene a S. Se llama el subespacio vectorial generado por S.*

Proposición 20. *Sea V un $\mathbb{k}$–espacio vectorial de dimensión n y sea B una base de V. Sea $U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ y sea A la matriz $r \times n$ sobre $\mathbb{k}$ que tiene por filas las coordenadas de los vectores $u_1, \dots, u_r$ en la base B. Entonces*

- $\operatorname{rango}(A) = \dim U$,
- *las filas no nulas de la forma de Hermite de A son las coordenadas en B de una base de $\langle u_1, \dots, u_r \rangle$.*

Sea V un subespacio vectorial de dimensión n y sea B una base de V. Sea $U = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ un subespacio vectorial de V. Las coordenadas de los vectores $\{u_1, \ldots, u_r\}$ en B las denotamos por

$$(u_i)_B = (c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ni}) \quad 1 \leq i \leq r.$$

Por tanto, si $x \in U$ tenemos que $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r$ y si sus coordenadas en B son $x_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ éstas deben verificar

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix} \lambda_2 + \cdots + \begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{nr} \end{pmatrix} \lambda_r,$$

o equivalentemente

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + \cdots + c_{1r}\lambda_r \\ x_2 = c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + \cdots + c_{2r}\lambda_r \\ \qquad \vdots \\ x_n = c_{n1}\lambda_1 + c_{n2}\lambda_2 + \cdots + c_{nr}\lambda_r. \end{array} \right. \tag{9}$$

Las ecuaciones (9) reciben el nombre de *ecuaciones implícitas o paramétricas* de U. Estas ecuaciones permiten producir todos vectores de U a partir de todos los posibles valores asignables a los parámetros. Es inmediato calcular unas ecuaciones paramétricas a partir de un sistema de generadores de U y viceversa.

Por otra parte las ecuaciones (9) pueden verse como las soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo. Decimos que un sistema de ecuaciones homogéneo forma unas *ecuaciones explícitas o cartesianas* de U si su conjunto de soluciones constituyen unas ecuaciones paramétricas de U.

Sean

$$\left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \tag{10}$$

unas ecuaciones cartesianas de U.

¿Cómo podemos calcular unas ecuaciones paramétricas (9) de U a partir de unas ecuaciones cartesianas (10) de U? Este paso es sencillo, resolviendo el sistema dado por (10). De esta forma podemos construir un sistema de generadores y una base de U.

¿Cómo podemos calcular unas ecuaciones cartesianas (10) de U a partir de unas ecuaciones paramétricas (9) de U? Consideremos las variables de (9) como parámetros y viceversa, es decir, consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{r} c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + \cdots + c_{1r}\lambda_r = x_1 \\ c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + \cdots + c_{2r}\lambda_r = x_2 \\ \vdots \\ c_{n1}\lambda_1 + c_{n2}\lambda_2 + \cdots + c_{nr}\lambda_r = x_n \end{array} \right. \tag{11}$$

o en forma matricial

$$C\Lambda = X.$$

Los elementos de U son aquellos para los cuales el sistema de ecuaciones (11) tiene solución, es decir, aquellos para los cuales rango(C) = rango$(C|X)$. Por tanto, si calculamos transformaciones sobre las filas para calcular el rango tenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & x_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nr} & x_n \end{array} \right) \sim_f \left(\begin{array}{c|c} H & * \\ \hline & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ 0 & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \right)$$

donde H es la forma de Hermite de C (o cualquier matriz escalonada equivalente a C). Unas ecuaciones cartesianas de U vienen dadas al hacer cero las últimas filas por debajo de H, es decir,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Proposición 21. *Sea V un $\mathbb{k}$–espacio vectorial de dimensión n y sea U un subespacio vectorial de V. Sean $AX = 0$ y $X = C\Lambda$ ecuaciones cartesianas y paramétricas respectivamente de U. Entonces:*

- $\dim U + \operatorname{rango}(A) = n$,
- $\dim U = \operatorname{rango}(C)$.

Proposición 22. *Sean U y W dos subespacios vectoriales de un $\mathbb{k}$–espacio vectorial V.*

- *$U \cap W$ es un subespacio vectorial de V, el mayor subespacio vectorial contenido en U y W.*
- *El conjunto $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ es un subespacio vectorial de V, el menor subespacio vectorial que contiene tanto a U como a W. Se llama la suma de U y W.*

Proposición 23. *Si $U = \langle S \rangle$ y $W = \langle T \rangle$ entonces $U + W = \langle S \cup T \rangle$.*

Proposición 24. *Sea V un $\mathbb{k}$–espacio vectorial de dimensión n y sean U y W subespacios vectoriales. Sean*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ b_{p1}x_1 + \cdots + b_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

ecuaciones cartesianas de U y W respectivamente. Entonces unas ecuaciones cartesianas de $U \cap W$ son

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \cdots + b_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

Definición 25. Sea V un $\mathbb{k}$–espacio vectorial y sean U y W subespacios vectoriales. Decimos que la suma de U y W es directa si $U \cap W = \{0\}$. En este caso la suma se denota $U + W = U \oplus W$.

Proposición 26. *Sea V un $\mathbb{k}$–espacio vectorial de dimensión n y sean U y W subespacios vectoriales tales que $U \cap W = \{0\}$. Si B es una base de U y C una base de W entonces $B \cup C$ es una base de $U \oplus W$.*

Proposición 27 (Fórmula de las dimensiones)**.** *Sea V un $\mathbb{k}$–espacio vectorial de dimensión n y sean U y W subespacios vectoriales. Entonces*

$$\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W).$$

5.3 Aplicaciones lineales

Definición 28. Una aplicación $f : V \to V'$ entre $\mathbb{k}$–espacios vectoriales V y V' se dice *lineal* si

(1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in V$,

(2) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$, $\forall \lambda \in \Bbbk$, $\forall u \in V$.

O equivalentemente si

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v),\ \ \forall \lambda, \mu \in \Bbbk,\ \ \forall u, v \in V.$$

Proposición 29. *Cualquier aplicación lineal $f : V \to V'$ verifica*

1. $f(0) = 0$,
2. $f(-u) = -f(u)$,
3. $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$ *para cualesquiera* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$ $u_1, \ldots, u_n \in V$.

Lema 30. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y sea U un subespacio vectorial de V. Entonces $f(U)$ es un subespacio vectorial de V'. En particular* $\operatorname{im} f$ *es un subespacio vectorial de V'.*

Lema 31. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y sea $S \subseteq V$. Entonces $f(\langle S \rangle) = \langle f(S) \rangle$. En particular, si S es un sistema de generadores de V entonces* $\operatorname{im} f$ *está generado por $f(S)$.*

Como consecuencia de los resultados anteriores podemos determinar si una aplicación lineal es sobreyectiva calculando la dimensión de $\operatorname{im} f$ y comparándola con la dimensión de V'. Además

Lema 32. *Una aplicación lineal $f : V \to V'$ es sobreyectiva si y solo si para cada sistema de generadores $S \subseteq V$, $f(S)$ es un sistema de generadores de V'.*

Definición 33. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Se define el núcleo de f como $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$.

Lema 34. *Una aplicación lineal $f : V \to V'$ es inyectiva si y sólo si* $\ker f = \{0\}$.

Lema 35. *Una aplicación lineal $f : V \to V'$ es inyectiva si y sólo si para cualquier conjunto $\{u_1, \ldots, u_r\}$ linealmente independiente el conjunto $\{f(u_1), \ldots, f(u_r)\}$ es también linealmente independiente.*

Sean $f, g : V \to V'$ aplicaciones lineales, y sea $\lambda \in \Bbbk$. Las siguientes aplicaciones son también lineales:

- Suma:

$$\begin{aligned} f + g : V &\longrightarrow V' \\ v &\longmapsto (f+g)(v) = f(v) + g(v) \end{aligned}$$

- Producto por escalar:

$$\begin{aligned} \lambda f : V &\longrightarrow V' \\ v &\longmapsto (\lambda f)(v) = \lambda f(v) \end{aligned}$$

Proposición 36. *Dados dos espacios vectoriales V y V', el conjunto* $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, V')$ *de todas las aplicaciones lineales de V en V' es un espacio vectorial.*

Proposición 37. *La composición de aplicaciones lineales es una aplicación lineal, es decir, si $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ son aplicaciones lineales entonces $g \circ f = gf : V \to V''$ es lineal.*

Proposición 38. *Si una aplicación lineal $f : V \to V'$ es biyectiva entonces $f^{-1} : V' \to V$ es también una aplicación lineal.*

Dos espacios vestoriales V y V' se dicen *isomorfos* si existe una aplicación lineal biyectiva entre ellos. Las aplicaciones lineales biyectivas se llaman *isomorfismos*. Similarmente las aplicaciones lineales inyectivas se llaman *monomorfismos* y las aplicaciones lineales sobreyectivas se llaman *epimorfismos*.

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y sean $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ bases de V y V' respectivamente. Para cada $1 \leq j \leq n$ la imagen del correspondiente vector de B se escribe como combinación lineal de los vectores de B', es decir,

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \cdots + a_{mj}e'_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_j.$$

Sea $M_{BB'}(f)$ la matriz que tiene por columnas las coordenadas de las imágenes por f de los vectores de B respecto de B', es decir,

$$M_{BB'}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right)$$

Lema 39. *En la situación anterior, para cualquier vector $v \in V$ si las coordenadas*[1] *de v con respecto a B son $v_B = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces las coordenadas de $f(v)$ con respecto a B' son*

$$f(v)_{B'} = M_{BB'}(f)v_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Corolario 40. *Para conocer una aplicación lineal basta con conocer las imágenes de los vectores de una base del dominio.*

Proposición 41. *Sean $f, f_1, f_2 : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ aplicaciones lineales, $\lambda \in \Bbbk$ y sean B, B' y B'' bases de V, V' y V'' respectivamente. Entonces:*

$$M_{BB'}(f_1 + f_2) = M_{BB'}(f_1) + M_{BB'}(f_2),$$
$$M_{BB'}(\lambda f) = \lambda M_{BB'}(f),$$
$$M_{BB''}(g \circ f) = M_{B'B''}(g)M_{BB'}(f).$$

Lema 42. *Sean B_1 y B_2 bases de un espacio vectorial V. Entonces $M_{B_1B_2} = M_{B_1B_2}(\mathrm{id}_V)$.*

Corolario 43. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y sean B_1, B_2 y B'_1, B'_2 bases de V y V' respectivamente. Entonces*

$$M_{B_2B'_2}(f) = M_{B'_1B'_2}M_{B_1B'_1}(f)M_{B_2B_1}$$

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y sean $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ bases de V y V' respectivamente. Sea

$$M_{BB'}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right)$$

Proposición 44. *Las columnas de $M_{BB'}(f)$ son las coordenadas en B' de un sistema de generadores de* $\operatorname{im} f$. *En particular* $\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rango}(M_{BB'}(f))$.

Proposición 45. *La matriz $M_{BB'}(f)$ es la matriz de coeficientes de unas ecuaciones cartesianas de* $\ker f$. *En particular* $\dim \ker f = n - \operatorname{rango}(M_{BB'}(f))$.

Corolario 46. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces* $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$.

[1] Las coordenadas las escribiremos indistintamente como filas o como columnas según nos interese.

5.5 Diagonalización

Definición 47. Dos matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ se dicen *semejantes* si existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ tal que $M = PNP^{-1}$.

Proposición 48. *Dos matrices M, N son semejantes si y solo si existen bases B_1 y B_2 en un espacio vectorial V y una aplicación lineal $f : V \to V$ tales que $M = M_{B_1B_1}(f)$ y $N = M_{B_2B_2}(f)$, en cuyo caso $P = M_{B_2B_1}$.*

Definición 49. Una matriz cuadrada se dice diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

Diagonalizar una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ consiste en comprobar que es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar matrices $D, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ tales que D es diagonal, P es regular y $A = PDP^{-1}$.

Vamos a responder a esas preguntas.

Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal.

Definición 50. Decimos que $\lambda \in \mathbb{k}$ es un *valor propio* de f si existe un vector $v \neq 0$ tal que $f(v) = \lambda v$.

Sea

$$V_\lambda = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

Definición 51. Dado un valor propio $\lambda \in \mathbb{k}$ llamamos a V_λ el *subespacio propio* asociado al valor propio λ. Los elementos no nulos de V_λ se llaman *vectores propios* de valor propio λ.

Sea V un espacio vectorial tal que $\dim V = n$. Sea B una base de V. Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal y sea $A = M_{BB}(f)$. En vista de lo anterior, λ es un valor propio para f si y solo si $\mathrm{rango}(A - \lambda I_n) < n$, o equivalentemente

Lema 52. *λ es un valor propio para f si y solo si* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Proposición 53. *Los valores propios de f son las raíces del polinomio $p(x) = \det(A - xI_n)$. Dicho polinomio recibe el nombre de* polinomio característico.

Lema 54. *Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{k}$ valores propios de una aplicación lineal $f : V \to V$. Entonces $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.*

Teorema 55. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ y sea $f : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ la aplicación lineal asociada a A. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{k}$ los valores propios de f. A es diagonalizable si y solo si $n = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_s}$. En este caso, si $B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_s}$ son bases de $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_s}$ respectivamente, entonces $B = B_{\lambda_1} \cup \cdots \cup B_{\lambda_s}$ es una base de V formada por vectores propios y*

$$A = P \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_{n_s} \end{array}\right) P^{-1}$$

donde $n_i = \dim V_{\lambda_i}$ para todo $1 \leq i \leq s$ y $P = M_{BB_c}$.