Soluciones de los ejercicios de la relación 3

Isabel M. Tienda Luna

En este documento presento las soluciones finales de los ejercicios propuestos de la relación 3 que dejé indicados para que vosotros hiciérais los cálculos. Es recomendable que intentéis hacer los cálculos vosotros antes de mirar las soluciones

1. Ejercicio 25

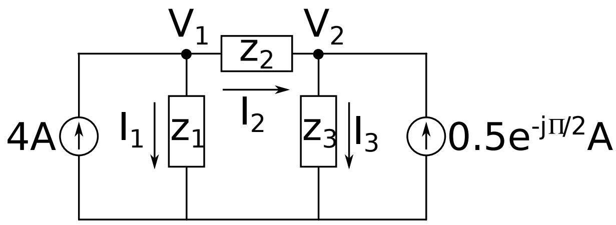

Figura 1: Circuito del ejercicio 25 tras simplicar las asociaciones en paralelo.

En el ejercicio 25 se pedía usar el método de nudos en el circuito de la figura 1 para calcular V_1 y V_2. En la figura 1, se presenta el ejercicio del problema 25 tras emplear el método de simplificación en el que se han asociado en paralelo algunas de las impedancias del circuito. Como resultado de aplicar las asociaciones de paralelo las impedancias Z_1, Z_2 y Z_3 son:

$$\begin{aligned} Z_1 &= (4-2j)\,\Omega \\ Z_2 &= (-10j)\,\Omega \\ Z_3 &= (2+4j)\,\Omega \end{aligned}$$

Además, en la figura 1 se han señalado las distintas intensidades de rama que se han usado para aplicar el método de nudos. En particular, estas intensidades tienen las siguientes expresiones en función de las incógnitad del problema (V_1 y V_2):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1}{Z_1} \\ I_2 &= \frac{V_1 - V_2}{Z_2} \\ I_3 &= \frac{V_2}{Z_3} \end{aligned}$$

Usando las expresiones anteriores, las ecuaciones resultantes de aplicar el método de nudos a los nudos 1 y 2 del circuito de la figura 1 son:

$$\begin{aligned} \text{Nudo 1} \quad &\rightarrow \quad 4A = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_1 - V_2}{Z_2} \\ \text{Nudo 2} \quad &\rightarrow \quad \frac{V_1 - V_2}{Z_2} = \frac{V_2}{Z_3} + 0{,}5e^{-j\pi/2}A \end{aligned}$$

sustituyendo los valores de las impedancias, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{aligned} \text{Nudo 1} \quad &\rightarrow \quad 4A = \frac{V_1}{(4-2j)\,\Omega} + \frac{V_1 - V_2}{(-10j)\,\Omega} \\ \text{Nudo 2} \quad &\rightarrow \quad \frac{V_1 - V_2}{(-10j)\,\Omega} = \frac{V_2}{(2+4j)\,\Omega} + 0{,}5e^{-j\pi/2}A \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} V_1 &= (7-8j)\,V = 10{,}63e^{-j0{,}85}V \\ V_2 &= (-2+10j)\,V = 10{,}20e^{j1{,}77}V \end{aligned}$$

Nota: En este ejercicio no nos dan los valores de la frecuencia angular ω de las fuentes y por eso el resultado se expresa a través de fasores. Como no sabemos el valor de ω, no podemos dar los valores de $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en forma de función seno o coseno.

2. Ejercicio 27

El ejercicio 27 es muy interesante porque se basa en el mismo circuito que el 25 pero esta vez piden calcular el equivalente Thevenin visto por el condensador de $-10j\Omega$. Como piden calcular el equivalente Thevenin visto por el condensador de $-10j\Omega$, para calcular tanto V_{th} como Z_{th} tenemos que quitar dicho condensador de nuestro circuito, dicho en otras palabras, ese

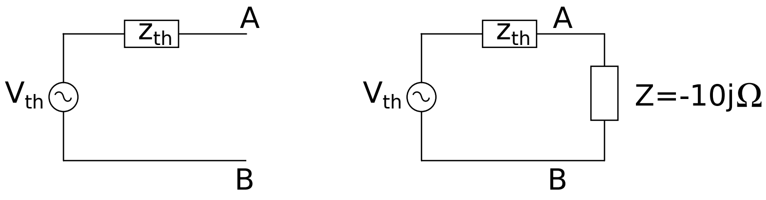

Figura 2: Equivalente Thevenin del ejercicio 27.

condensador es la impedancia de carga de nuestro circuito. Una vez calculado el equivalente Thevenin (izquierda figura 2), el circuito de partida será el equivalente Thevenin con la impedancia de carga conectada entre los puntos A y B (derecha figura 2). Comenzamos calculando la impedancia Thevenin

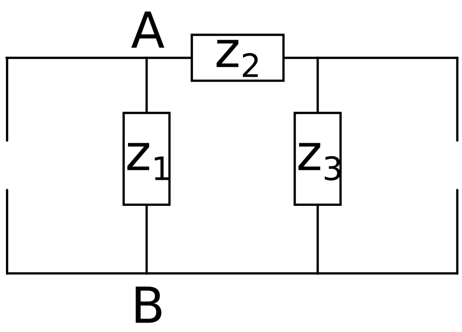

Figura 3: Cálculo de la impedancia Thevenin en el ejercicio 27.

siguiendo los criterios explicados en clase de manera que el circuito a resolver es el que aparece en la figura 3. Donde los valores de las impedancias que aparecen son:

$$\begin{aligned} Z_1 &= (5)\,\Omega \\ Z_2 &= (-10j)\,\Omega \\ Z_3 &= (2+4j)\,\Omega \end{aligned}$$

Notar aquí que Z_1 es simplemente la resistencia de 5Ω porque el condensador de $-10j\Omega$ se ha eliminado del circuito para calcular el equivalente al ser un elemento de carga.

Analizando la figura 3 puede verse que la impedancia total entre los puntos A y B es la asociación en paralelo de Z_1 con el serie de Z_2 y Z_3 $(Z_2 + Z_3)$:

$$Z_{th} = \frac{Z_1(Z_2+Z_3)}{Z1+(Z_2+Z_3)} = (2{,}9412 - 1{,}7647j)\,\Omega = 3{,}43e^{-j0{,}54}\Omega$$

Para calcular la V_{th} es necesario resolver el circuito y calcular la diferencia de

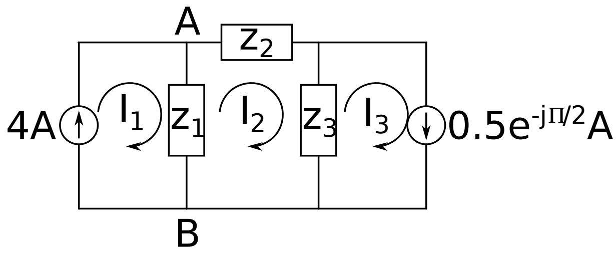

Figura 4: Cálculo de la V_{th} usando el método de mallas en el ejercicio 27.

potencial entre los puntos A y B. Para ello, de nuevo, tenemos que eliminar del circuito el condensador de $-10j\Omega$ por lo que $Z_1 = (5)\,\Omega$. El circuito a resolver es el que aparece en la figura 4. Para calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B usaremos ahora el método de mallas. En la figura 4 se han pintado los sentidos de las intensidades de cada una de las mallas. El resultado de aplicar dicho método es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Malla 1} &\rightarrow I_1 = 4A \\
\text{Malla 2} &\rightarrow 0 = Z_1 I_2 - Z_1 I_1 + Z_2 I_2 + Z_3 I_2 - Z_3 I_3 \\
\text{Malla 3} &\rightarrow I_3 = 0{,}5e^{-j\pi/2}A
\end{aligned}$$

Si sustituimos ahora los valores de I_1 e I_3 en la ecuación para la malla 2 y despejamos I_2,

$$I_2 = \frac{Z_1 I_1 + Z_3 I_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = (1{,}8824 + 1{,}4706j)\,A = 2{,}39e^{j0{,}66}A$$

Finalmente, para calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B aplicamos la Ley de Ohm a la impedancia Z_1

$$V_{th} = V_A - V_B = (I_1 - I_2)Z_1 = (10{,}5880 - 7{,}3530j)V = 12{,}89e^{-j0{,}61}V$$

Por último, el ejercicio nos pide comprobar que si al equivalente Thevenin le conectamos entre los puntos A y B el condensador de valor $-10j\Omega$ (derecha de la figura 2) y calculamos el valor de la diferencia de potencial entre sus extremos, recuperamos el valor de V_1 calculado en el ejercicio 25.

Si nos fijamos en el circuito a analizar ahora (derecha de la figura 2), para calcular la diferencia de potencial entre los extremos del condensador de ($Z = (-10j)\Omega$) necesitamos conocer la intensidad que circula por el circuito. Como en el circuito hay dos elementos en serie ($Z = (-10j)\Omega$ y Z_{th}), la Ley de Ohm aplicada a la asociación en serie de los dos nos permite calcular la intensidad que circuila por los mismos:

$$I = \frac{V_{th}}{Z_{th} + Z} = (0{,}8 + 0{,}7j)A$$

Finalmente, para calcular la diferencia de potencial entre los extremos de la impedancia $Z = (-10j)\Omega$, se aplica la Ley de Ohm a esa impedancia:

$$IZ = (0{,}8 + 0{,}7j)A \cdot (-10j)\Omega = (7 - 8j)\,V = 10{,}63e^{-j0{,}85}V$$

como puede verse, la diferencia de potencial calculada coincide (como debe de ser) con el valor que obtuvimos en el ejercicio 25 para V_1 ya que V_1 es la diferencia de potencial entre los extremos de las impedancias de 5Ω y $(-10j)\Omega$ en el circuito total.

3. Ejercicio 28

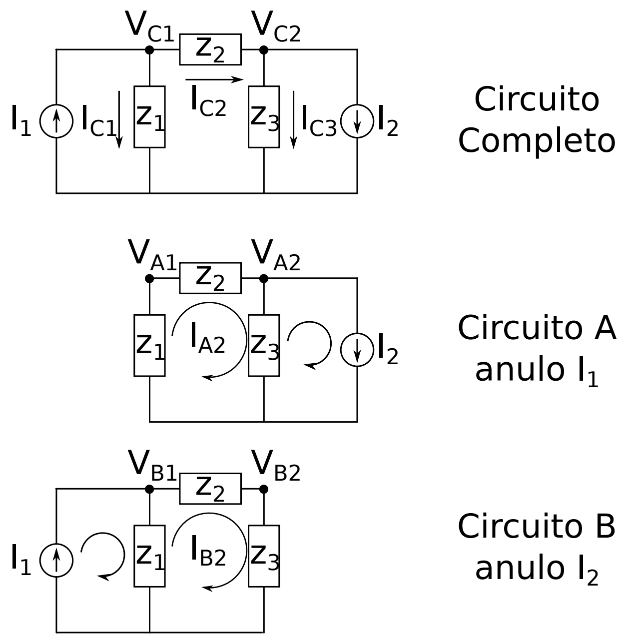

Figura 5: Circuitos a analizar en el problema 28. El superior es el circuito completo, en el central se ha anulado la fuente I_1 y en el de abajo se ha anulado la fuente I_2.

En el ejercicio 28, como las dos fuentes de corriente presentes en el mismo tienen distinta ω, lo único que podemos utilizar para resolver es el Principio de Superposición. Según este principio, la intensidad que circuila por Z_2 en el circuito completo ($i_{C2}(t)$ en la figura 5) es la suma de $i_{A2}(t)$ (donde se ha anulado la fuente I_1) y de $i_{B2}(t)$ (donde se ha anulado la fuente I_2).

Para hacer el cálculo de $i_{A2}(t)$ e $i_{B2}(t)$ utilizaremos fasores. Hay distintas formas de calcular I_{A2} e I_{B2}. En clase usamos métodos de simplificación para asociar las impedancias de los circuitos de las figuras central e inferior de la figura 5. Otra posibilidad es usar la equivalencia entre fuentes de tensión y de corriente. También podemos usar el método de mallas (sólo tenemos dos mallas en cada uno) o el método de nudos (sólo tenemos dos nudos esenciales) en los circuitos A y B.

3.1. Analizamos el circuito A

En el circuito A se ha anulado la fuente I_1 así que como sólo tenemos la fuente I_2, la frecuencia a usar para calcular las impedancias es $\omega = 5rad/s$. Por tanto:

$$\begin{aligned} Z_1 &= -j\Omega \\ Z_2 &= 10\Omega \\ Z_3 &= -0{,}4j\Omega \end{aligned}$$

Si usamos el análisis de mallas,

$$\begin{aligned} &\text{Malla 1} \quad \rightarrow \quad 0 = Z_1 I_{A2} + Z_2 I_{A2} + Z_3 I_{A1} - Z_3 I_2 \\ &\text{Malla 2} \quad \rightarrow \quad I_2 = 2A \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$I_{A2} = \frac{Z_3 I_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = (0{,}01 - 0{,}08j)A = 0{,}08e^{-j1{,}43}A$$

Por tanto:

$$i_{A2}(t) = 0{,}08\cos(5t - 1{,}43)A$$

3.2. Analizamos el circuito B

En el circuito A se ha anulado la fuente I_2 así que como sólo tenemos la fuente I_1, la frecuencia a usar para calcular las impedancias es $\omega = 3rad/s$. Por tanto:

$$\begin{aligned} Z_1 &= -1{,}67j\Omega \\ Z_2 &= 10\Omega \\ Z_3 &= -0{,}67j\Omega \end{aligned}$$

Si usamos el análisis de mallas,

$$\begin{aligned} &\text{Malla 1} \quad \rightarrow \quad I_1 = 3A \\ &\text{Malla 2} \quad \rightarrow \quad 0 = Z_1 I_{B2} + Z_2 I_{B2} + Z_3 I_{B1} - Z_1 I_1 \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$I_{B2} = \frac{Z_1 I_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = (0{,}11 - 0{,}48)A = 0{,}49e^{-j1{,}34}A$$

Por tanto:

$$i_{B2}(t) = 0{,}49\cos(3t - 1{,}34)A$$

3.3. Usamos el Principio de Superposición

Según el Principio de Superposición

$$i_2(t) = i_{A2}(t) + i_{B2}(t) = 0{,}08\cos(5t - 1{,}43)A + 0{,}49\cos(3t - 1{,}34)A$$