Alumno:__________________________________ DNI:______________ Grupo: ____

# Lógica y Métodos Discretos

## Examen de Teoría

(05/07/2012)

**Ejercicio 1.** *Sea $x_n$ la sucesión definida por*

$$x_0 = 0; \qquad x_1 = \frac{4}{3}; \qquad x_n = x_{n-1} + 2 \cdot x_{n-2} + 2^n$$

1. *Calcula los términos $x_2, x_3, x_4$.*
2. *Encuentra una relación de recurrencia lineal homogénea para la sucesión $x_n$.*
3. *Calcula una expresión para el término general $x_n$.*
4. *Calcula $x_{10}$.*

**Solución:**

1. A partir de la definición de la sucesión calculamos:
   $x_2 = x_1 + 2 \cdot x_0 + 2^2 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{4}{3} + \frac{12}{3} = \frac{16}{3}$.
   $x_3 = x_2 + 2 \cdot x_1 + 2^3 = \frac{16}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} + 8 = \frac{16}{3} + \frac{8}{3} + \frac{24}{3} = \frac{48}{3} = 16$.
   $x_4 = x_3 + 2 \cdot x_2 + 2^4 = 16 + 2 \cdot \frac{16}{3} + 16 = \frac{48}{3} + \frac{32}{3} + \frac{48}{3} = \frac{128}{3}$.

2. Tenemos la relación $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} + 2^n$, que es válida para cualquier $n \geq 2$. Entonces tenemos también $x_{n-1} = x_{n-2} + 2x_{n-3} + 2^{n-1}$. Multiplicamos esta última por 2, y la restamos a la primera.

$$\begin{array}{rcccccc} x_n & = & x_{n-1} & + & 2x_{n-2} & + & 2^n \\ -2x_{n-1} & = & -2x_{n-2} & - & 4x_{n-3} & - & 2^n \\ \hline x_n - 2x_{n-1} & = & x_{n-1} - 2x_{n-2} & + & 2x_{n-2} - 4x_{n-3} & & \end{array}$$

   Es decir, $x_n - 3x_{n-1} + 4x_{n-3} = 0$, y ya tenemos una relación de recurrencia lineal homogénea.

3. La ecuación característica para esta relación de recurrencia es $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. Calculamos las raíces de este polinomio.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rr} & 1 & -2 \\ 2 & & 2 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

   Es decir, la ecuación característica tiene dos raíces, que son $x = -1$ con multiplicidad 1 y $x = 2$ con multiplicidad 2. La expresión general del término $x_n$ toma la forma $x_n = a \cdot (-1)^n + (b + cn) \cdot 2^n$.

   Evaluamos esta expresión para $n = 0, 1, 2$ y obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{array}{lcccccccc} n = 0 & \quad & 0 & = & a & + & b & & \\ n = 1 & & \frac{4}{3} & = & -a & + & 2b & + & 2c \\ n = 2 & & \frac{16}{3} & = & a & + & 4b & + & 8c \end{array}$$

   Ahora podríamos calcular la forma de Hermite de la matriz del sistema. Pero lo hacemos de otra forma. De la primera ecuación sacamos que $a = -b$. Sustituimos en las otras dos, y nos queda

$$\begin{array}{ccccc} \frac{4}{3} & = & 3b & + & 2c \\ \frac{16}{3} & = & 3b & + & 8c \end{array}$$

   Y restando ambas ecuaciones, sacamos que $\frac{12}{3} = 6c$, luego $c = \frac{2}{3}$.
   De ahí, tenemos que $\frac{4}{3} = 3b + \frac{4}{3}$, luego $b = 0$, y por tanto $a = 0$.

   Nos queda entonces que el término general de la sucesión es $x_n = \frac{2n}{3} \cdot 2^n = \frac{2^{n+1}n}{3}$.

4. $x_{10} = \frac{2^{11} \cdot 10}{3} = \frac{2048 \cdot 10}{3} = \frac{20480}{3}$.

**Ejercicio 2.** *Construye un grafo con 7 vértices, que tenga dos vértices de grado 2, uno de grado 3, tres de grado 4 y uno de grado 5.*

1. *¿Es dicho grafo plano?*
2. *¿Es conexo?*
3. *¿Tiene algún camino, o circuito de Euler? En caso afirmativo, da uno.*
4. *¿Cuál es su número cromático?*

**Solución:**

Tenemos la sucesión 5 4 4 4 3 2 2. Utilizamos el teorema de Havel-Hakimi, para comprobar que es una sucesión gráfica.

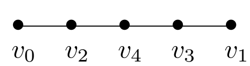
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 |
| | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| | | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| | | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | 0 | 1 | 1 |
| | | | | 1 | 1 | 0 |
| | | | | | 0 | 0 |

Hemos llegado a la sucesión 0 0 que es gráfica. Vamos recorriendo la sucesión hacia arriba, construyendo el grafo. Partimos con un grafo con dos vértices de grado cero.

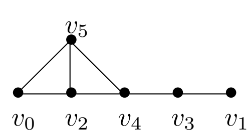

Pasamos a la sucesión 1 1 0. Para eso, añadimos un vértice $v_2$, de grado 1 que unimos a uno de los de grado cero.


Ahora nos vamos a la sucesión 1 1 1 1, que se obtiene añadiendo un vértice de grado 1 ($v_3$) que unimos a uno de grado cero.

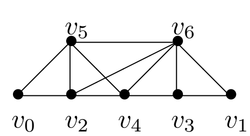

Continuamos con la sucesión 2 2 2 1 1, que se obtiene añadiendo un nuevo vértice de grado 2 que unimos a dos vértices de grado 1. Estos dos vértices van a ser $v_2$ y $v_3$.




El siguiente paso es la sucesión 3 3 3 2 2 1. El grafo se obtiene añadiendo un vértice de grado 3 que unimos a dos de grado 2 ($v_2$ y $v_4$) y a uno de grado 1 ($v_0$).




Y por último, añadimos un vértice de grado 5 que unimos a todos los vértices salvo a $v_0$.



Y ya tenemos nuestro grafo. Respondemos a las cuestiones.

1. El grafo es plano. Bastaría dibujar el lado que une $v_2$ con $v_6$ sin que corte a los otros lados. Puede verse que esto es posible.

2. El grafo es conexo, pues para cada dos vértices hay un camino que los une.

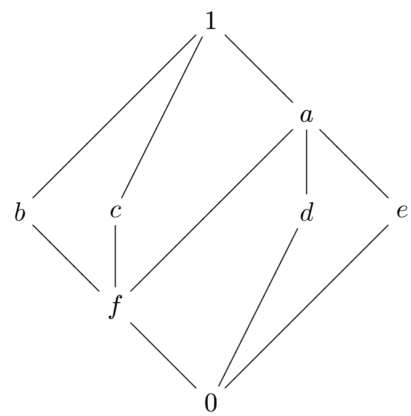
3. El grafo no tiene circuito de Euler, pues tiene dos vértices de grado impar. Pero por ese motivo, y por ser conexo, el grafo sí tiene un camino de Euler. Debe empezar en un vértice de grado impar, y acabar en el otro de grado impar. Un tal camino puede ser

$$v_3 v_1 v_6 v_5 v_2 v_5 v_4 v_6 v_3 v_1 v_2 v_6$$

4. Podemos ver como los vértices $v_2$, $v_4$, $v_5$ y $v_6$ están todos unidos entre sí. Por tanto, en una coloración del grafo, deben tener colores distintos. Por tanto, el número cromático es como mínimo 4. Al ser un grafo plano, sabemos que no es mayor que 4, luego el número cromático del grafo es 4.

**Ejercicio 3.** *Sea $L$ el conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse es*

Figura 1:




1. *Comprueba que es un retículo.*
2. *Estudia si es distributivo.*
3. *Calcula todos los elementos que tienen complemento. ¿Forman estos elementos un subrretículo?*
4. *Sea $S = \{a, b, c, f\}$. Calcula los elementos notables de este conjunto (cotas superiores, cotas inferiores, supremo, ínfimo, máximo, mínimo, elementos maximales y elementos minimales).*

**Solución:**

1. Hay que comprobar que dados dos elementos cualesquiera $x$ e $y$, existe su supremo y su ínfimo. Si de esos dos elementos uno de ellos es mayor o igual que el otro, el supremos es el más grande y el ínfimo es el más chico. Por ejemplo, si tomamos $x = 0$, $y = a$; $x = f$, $y = c$; etcétera.

   Entonces hemos de comprobar qué ocurre si tomamos dos elementos $x$ e $y$ de forma que ni $x$ sea menor o igual que $y$ ni lo contrario.

   Por ejemplo, $x = f$, $y = d$. En este caso, el supremo es $a$ y el ínfimo 0. Igual si tomamos $f, e$ ó $d, e$.

   Si tomamos $x = b$ e $y = c$, el supremo vale 1 y el ínfimo $f$. E igual si tomamos $b, a$ ó $c, a$.

   Si tomamos $x = b$ e $y = d$ el supremo vale 1 y el ínfimo vale 0. Lo mismo si tomamos $x = b$, $y = e$; $x = c$, $y = d$; $x = c$, $y = e$.

   Con esto queda visto que el conjunto anterior es un retículo.

2. Fácilmente se ve que no es distributivo, pues, por ejemplo, $\{a, d, e, f, 0\}$ forma un subrretículo que es isomorfo al diamante. E igual para $\{1, a, b, c, f\}$. También puede comprobarse viendo que $b \vee (c \wedge a) = b \vee f = b$, mientras que $(b \vee c) \wedge (b \vee a) = 1 \wedge 1 = 1$.

3. Con las comprobaciones que hemos hecho al principio, hemos visto que los elementos $\{0, 1, b, c, d, e\}$ tienen complemento (por ejemplo, $b$ tiene complemento, que podría ser $d$ ya que $b \vee d = 1$ y $b \wedge d = 0$. También $e$ podría ser un complemento de $b$.

   Por otra parte, $a$ no tiene complemento, pues los únicos elementos $x$ para los que $a \vee x = 1$ son $x = 1$, $x = b$ y $x = c$. Y el ínfimo de $a$ con ninguno de esos no vale 0.

   De la misma forma, se ve que $f$ no tiene complemento.

   Es decir, los elementos con complemento son $\{0, b, c, d, e, 1\}$. Esto no es un subrretículo, ya que, por ejemplo, $b \wedge c = f$ que no pertenece a ese subconjunto.

4. Se tiene:

Cotas superiores: $\{1\}$
Supremo: 1
Elementos maximales: $\{a, b, c\}$
Máximo: No tiene

Cotas inferiores: $\{f, 0\}$.
Ínfimo: $f$.
Elementos minimales: $\{f\}$.
Mínimo: $f$.

**Ejercicio 4.** *Dada la función booleana $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ dada por*

$$f(x, y, z, t) = x + (y\,\overline{z}) + t \downarrow (x \downarrow z)$$

1. *Calcula la forma normal canónica disyuntiva de $f$ y la forma normal canónica conjuntiva de $\overline{f}$.*
2. *Simplifica la expresión de $f$ obtenida en el apartado anterior.*
3. *Expresa $f$ usando únicamente las operaciones suma y complementario.*

**Solución:**

$$\begin{aligned} f &= x + (y\,\overline{z}) + t \downarrow (x \downarrow z) \\ &= x + (y\,\overline{z}) + \overline{t + (x \downarrow z)} \\ &= x + (y\,\overline{z}) + \overline{t + \overline{x + z}} \\ &= x + (y\,\overline{z}) + \overline{t}\,(x + z) \\ &= x + (y\,\overline{z}) + \overline{t}\,x + \overline{t}\,z. \end{aligned}$$

1. A partir de la expresión anterior, podemos representar $f$ como sigue:

| | $\overline{x}\,\overline{y}$ | $\overline{x}\,y$ | $x\,y$ | $x\,\overline{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{z}\,\overline{t}$ | | 1 | 1 | 1 |
| $\overline{z}\,t$ | | 1 | 1 | 1 |
| $z\,t$ | | | 1 | 1 |
| $z\,\overline{t}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

Luego la forma canónica disyuntiva de $f$ es

$$f(x,y,z,t) = \overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,y\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,t + x\,y\,\overline{z}\,t + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t + x\,y\,z\,t + x\,\overline{y}\,z\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + \overline{x}\,y\,z\,\overline{t} + x\,y\,z\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$$

Vamos a expresar $\overline{f}$ en forma normal conjuntiva. Supongamos por un momento que $f$ fuera la función $f(x, y, z) = x\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$. Entonces:
$\overline{f(x,y,z)} = \overline{x\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}} = \overline{x\,\overline{y}\,z} \cdot \overline{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}} = (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (x + y + z)$.
Que sería la forma normal canónica conjuntiva de $\overline{f}$ (producto de maxterm).
Vemos como cada minterm en la expresión de $f$ se traduce en un maxterm en la expresión de $\overline{f}$.
Por tanto,

$$\begin{aligned} \overline{f}(x,y,z,t) = {} & (x+\overline{y}+z+t)(\overline{x}+\overline{y}+z+t)(\overline{x}+y+z+t)(x+\overline{y}+z+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+z+\overline{t})(\overline{x}+y+z+\overline{t}) \\ & (\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})(\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{t})(x+y+\overline{z}+t)(x+\overline{y}+\overline{z}+t)(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+t)(\overline{x}+y+\overline{z}+t) \end{aligned}$$

2. Para simplificar la expresión de $f$, lo hacemos con el mapa de Karnaugh.

| | $\overline{x}\,\overline{y}$ | $\overline{x}\,y$ | $x\,y$ | $x\,\overline{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{z}\,\overline{t}$ | | 1 | 1 | 1 |
| $\overline{z}\,t$ | | 1 | 1 | 1 |
| $z\,t$ | | | 1 | 1 |
| $z\,\overline{t}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

Es decir, $f(x,y,z,t) = x + y\,\overline{z} + z\,\overline{t}$.

3. Para expresar $f$ usando únicamente sumas y complementos, tenemos en cuenta que $y\,\overline{z} = \overline{\overline{y\,\overline{z}}} = \overline{\overline{y}+z}$, y de la misma forma, $z\,\overline{t} = \overline{\overline{z}+t}$.

   Por tanto, $f(x,y,z,t) = x + \overline{\overline{y}+z} + \overline{\overline{z}+t}$.

**Ejercicio 5.** *Tenemos 7 velas. Tres con forma de* 1*, dos con forma de* 2 *una con forma de* 5 *y una con forma de* 8*.*

1. *¿Cuántos números podemos formar con las 7 velas?.*
2. *¿Cuántos de ellos tienen juntos el 5 y el 8?.*
3. *¿Cuántos hay que tengan juntos un 1 y un 5?.*
4. *¿Cuántos números hay que sean mayores que 5000000?.*
5. *¿Cuántos hay en los que se alternan cifras pares con cifras impares?.*

*En todos los apartados de este ejercicio, en cada número hay que usar las 7 velas.*

**Solución:**

1. Lo que tenemos es que ordenar los elementos $1,1,1,2,2,5,8$. El número posible de ordenaciones es $\frac{7!}{3!2!} = \frac{5040}{12} = 420$.

2. Si queremos que estén juntos el 5 y el 8, puede ser que esté delante el 5 del 8, o que esté delante el 8 del 5. En el primer caso, lo que tenemos es que ordenar los elementos $1,1,1,2,2,58$. Las formas de ordenarlo son $\frac{6!}{3!2!} = \frac{720}{12} = 60$. De la misma forma, salen 60 formas de ordenar las velas de forma que esté el 8 seguido del 5. En total, hay 60+60=120.

3. Ordenamos los elementos $15,1,1,2,2,8$, que podemos hacerlo de $\frac{6!}{2!2!} = \frac{720}{4} = 180$. De la misma forma hay 180 formas de ordenar $51,1,1,2,2,8$, lo que se traduce en ordenar las velas de forma que aparezca el 5 delante de un 1.

   Sin embargo, las que tienen la secuencia 151 las hemos contado 2 veces. Ordenaciones con esa secuencia hay $\frac{5!}{2} = 60$. Luego podemos formar un total de $180 + 180 - 60 = 300$ números en los que aparece el 5 junto a un 1.

4. Si son mayores que 5000000, quiere decir que la cifra de la izquierda, bien es 5, bien es 8. Números que podemos formas con las velas en los que la cifra de la izquierda es 5 hay $\frac{6!}{3!2!} = 60$, e igual si queremos que la cifra de la izquierda sea 8. En total, hay 120 números mayores que 5000000.

5. Si se alternan cifras pares e impares, como hay 4 cifras impares y 3 cifras pares, la única posibilidad es que vayan de la forma IPIPIP.

   Ordenamos las cifras impares, que son $1,1,1,5$. Esto lo podemos hacer de 4 formas ($\frac{4!}{3!}$), y ordenamos las cifras pares, que son $2,2,8$. Esto lo podemos hacer de 3 formas.

   Por tanto, la forma de ordenar las velas de forma que se alternen las cifras pares con las impares es $4 \cdot 3 = 12$.

**Ejercicio 6.** *Sea $\alpha = a \to (b \wedge \neg c)$ y $\beta = (a \leftrightarrow \neg b) \vee c$. Encuentra una fórmula $\gamma$ tal que para cualquier interpretación se verifique que $I(\gamma) = I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta)$. Calcula la forma clausular de $\gamma$.*

**Solución:**

Se tiene que $I(\gamma) = I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = I(\alpha)(1 + I(\beta)) = I(\alpha)I(\neg\beta) = I(\alpha \wedge \neg\beta)$.

Por tanto, tomamos $\gamma = \alpha \wedge \neg\beta$ y ya tenemos la fórmula $\gamma$.

Calculamos su forma clausular. Para eso, lo hacemos por separado. Por una parte, hacemos la forma clausular de $\alpha$ y por otra la de $\neg\beta$.

| | |
|---|---|
| $a \to (b \wedge \neg c)$ | $\neg((a \leftrightarrow \neg b) \vee c)$ |
| $\neg a \vee (b \wedge \neg c)$ | $\neg((a \to \neg b) \wedge (\neg b \to a)) \wedge \neg c$ |
| $(\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg c)$ | $(\neg(a \to \neg b) \vee \neg(\neg b \to a)) \wedge \neg c$ |
| | $(\neg(\neg a \vee \neg b) \vee \neg(b \vee a)) \wedge \neg c$ |
| | $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \wedge \neg c$ |
| | $(a \vee \neg a) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg a) \wedge (b \vee \neg b) \wedge \neg c$ |
| | $(a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg a) \wedge \neg c$ |

Por tanto, la forma clausular de $\gamma = \alpha \wedge \neg\beta$ vale

$$(\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg a) \wedge \neg c = (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b) \wedge \neg c$$

**Ejercicio 7.** *Sea* $\alpha = \neg\exists x\forall y(P(x,y) \to P(x,x)) \wedge \forall x\forall y\forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$.
*Estudia si* $\alpha$ *es universalmente válida, satisfacible y refutable o contradicción.*

**Solución:**
En primer lugar, transformamos ligeramente la fórmula $\alpha$ (esto no es necesario).
$\neg\exists x\forall y(P(x,y) \to P(x,x)) \wedge \forall x\forall y\forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$
$\forall x\exists y\neg(P(x,y) \to P(x,x)) \wedge \forall x\forall y\forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$
$\forall x\exists y\neg(\neg P(x,y) \vee P(x,x)) \wedge \forall x\forall y\forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$
$\forall x\exists y(P(x,y) \wedge \neg P(x,x)) \wedge \forall x\forall y\forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$
Tomamos una estructura. Por ejemplo, la siguiente:
Dominio: $\mathbb{N}$
Predicado: $P(x,y) \equiv x = y$.
E interpretamos la fórmula.
La primera parte $\forall x\exists y(P(x,y) \wedge \neg P(x,x))$ ,es falsa, ya que para cualquier $x$, $P(x,x)$ es verdadera (pues $x = x$), luego $\neg P(x,x)$ es falsa, y por tanto, $P(x,y) \wedge \neg P(x,x)$ es falsa.

Como la fórmula $\alpha$ es conjunción de $\forall x\exists y(P(x,y) \wedge \neg P(x,x))$ y otra fórmula, deducimos que en esta estructura la fórmula es falsa.

Por tanto, $\alpha$ es refutable.

Buscamos ahora una estructura donde $\alpha$ sea verdad. Para eso, necesitamos que para cualquier x, $P(x,x)$ sea falso (es decir, $\neg P(x,x)$ es cierto). Tomamos
Dominio: $\mathbb{N}$
Predicado: $P(x,y) \equiv x < y$.
Y ahora tenemos que sea quien sea $x$, puedo tomar $y = x + 1$ y se tiene que $P(x,y)$ es verdad, y $\neg P(x,x)$ es verdad. Por tanto, para cualquier $x$ existe $y$ tal que $P(x,y)$ y $\neg P(x,x)$ son ciertos. Es decir, $\forall x\exists y(P(x,y) \wedge \neg P(x,x))$ es cierta en esta estructura.

La otra parte de la fórmula es $\forall x\forall y\forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$, es decir, para cualquier $x, y, z$ números naturales se tiene que $x < y$ e $y < z$ implica $x < z$. Esto sabemos que es verdad, luego esta parte de la fórmula se interpreta como cierta.

Puesto que $\alpha$ es la conjunción de estas dos partes, y ambas son ciertas en esta estructura, $\alpha$ se interpreta como cierta en esta estructura.

Por tanto, $\alpha$ es satisfacible.

Hemos visto pues que $\alpha$ es satisfacible y refutable.

**Ejercicio 8.** *Considera las siguientes fórmulas:*

- $\alpha_1 = \exists y \forall x(Q(x,y) \to R(x))$
- $\alpha_2 = \exists x \neg P(x,x) \to \forall x \forall y Q(x,y)$
- $\alpha_3 = \forall x \forall y(P(x,y) \to Q(f(x),y))$
- $\alpha_4 = \forall x(R(f(x)) \to P(x,a))$
- $\beta = \exists x(P(a,x) \wedge Q(f(x),x))$.

*Demuestra que* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vDash \beta$.

*¿Es posible encontrar una deducción lineal-input de la cláusula vacía?. Razona la respuesta.*

**Solución:**

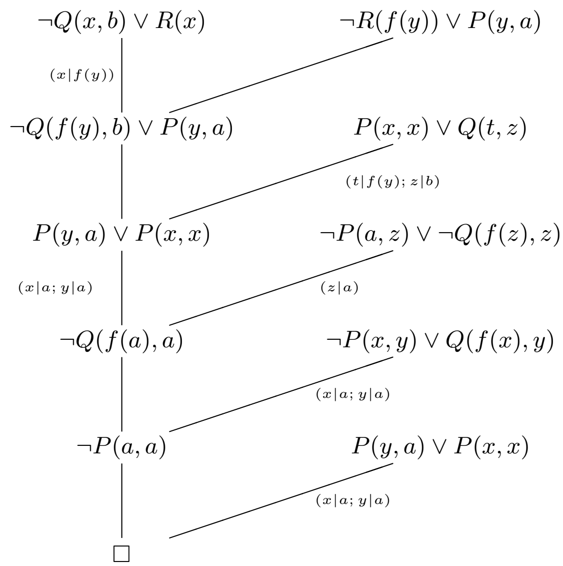
Calculamos una forma clausular de $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, $\neg\beta$.

- $\alpha_1$.
  $\exists y \forall x(Q(x,y) \to R(x))$.
  $\forall x(Q(x,b) \to R(x))$.
  $\forall x(\neg Q(x,b) \vee R(x))$.
- $\alpha_2$.
  $\exists x \neg P(x,x) \to \forall x \forall y Q(x,y)$.
  $\neg \exists x \neg P(x,x) \vee \forall x \forall y Q(x,y)$.
  $\forall x \neg\neg P(x,x) \vee \forall x \forall y Q(x,y)$.
  $\forall x P(x,x) \vee \forall y \forall z Q(y,z)$.
  $\forall x \forall y \forall z(P(x,x) \vee Q(y,z))$.
- $\alpha_3$.
  $\forall x \forall y(P(x,y) \to Q(f(x),y))$.
  $\forall x \forall y(\neg P(x,y) \vee Q(f(x),y))$.
- $\alpha_4$.
  $\forall x(R(f(x)) \to P(x,a))$.
  $\forall x(\neg R(f(x)) \vee P(x,a))$.
- $\neg\beta$.
  $\neg \exists x(P(a,x) \wedge Q(f(x),x))$.
  $\forall x \neg(P(a,x) \wedge Q(f(x),x))$.
  $\forall x(\neg P(a,x) \vee \neg Q(f(x),x))$.

Tenemos ahora que demostrar que el conjunto de cláusulas

$$\Gamma = \{\neg Q(x,b) \vee R(x);\ P(x,x) \vee Q(y,z);\ \neg P(x,y) \vee Q(f(x),y);\ \neg R(f(x)) \vee P(x,a);\ \neg P(a,x) \vee \neg Q(f(x),x)\}$$

es insatisfacible. Para ello, buscamos una deducción de la cláusula vacía.




Y al llegar a la cláusula vacía deducimos que el conjunto $\Gamma$ es insatisfacible, lo que se traduce en que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vDash \beta$.

No es posible obtener la cláusula vacía con una deducción lineal-input, ya que al hacer una resolvente con alguna de las cláusulas de $\Gamma$ no puede salir la cláusula vacía, pues para conseguirla tendríamos que eliminar dos literales distintos al hacer una resolvente. Por ejemplo, en una resolvente con la segunda cláusula se podrían ir el predicado $P$ o el predicado $Q$, pero no los dos.

Significa esto que en algún momento, para llegar a la cláusula vacía, tendremos que usar alguna cláusula que no esté en el conjunto $\Gamma$ (por ejemplo, en la resolución que hemos dado, la última resolvente (cláusula vacía) se ha obtenido a partir de dos cláusulas ninguna de las cuales pertenece a $\Gamma$.