Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

05/09/2012

Alumno:____ Grupo:____ DNI:_____________

Ejercicio 1.

Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *En* $X \times X$ *definimos la relación de equivalencia* $(a, b)R(c, d)$ *si* $a+b = c+d$. *Entonces el cardinal del conjunto cociente es:*

1. 81.
2. 18.
3. 17.
4. 22.

Ejercicio 2.

Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *la aplicación dada por* $f(m, n) = (m + n, m \cdot n)$. *Entonces:*

1. f *es inyectiva y sobreyectiva.*
2. f *es inyectiva pero no sobreyectiva.*
3. f *no es inyectiva pero sí es sobreyectiva.*
4. f *no es inyectiva ni sobreyectiva.*

Ejercicio 3. *Sean* A *y* B *dos conjuntos tales que*

$$A \setminus B = \{1, 3, 7, 11\} \quad B \setminus A = \{2, 6, 8\} \quad A \cap B = \{4, 9\}$$

Entonces

1. $A = \{1, 3, 4, 7, 9, 11\}$ *y* $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$
2. $A = \{1, 3, 7, 9, 11\}$ *y* $B = \{2, 4, 6, 8\}$
3. $A = \{1, 3, 7, 8\}$ *y* $B = \{2, 4, 6, 8, 9, 11\}$
4. $A = \{1, 3, 2, 4, 6, 7, 8\}$ *y* $B = \{1, 3, 2, 4, 6, 9, 11\}$

Ejercicio 4. *Dado el sistema de congruencias*

$$\begin{cases} 13x \equiv 21 \pmod{30} \\ 8x \equiv 6 \pmod{35} \end{cases}$$

1. *El sistema no tiene solución.*
2. *El sistema tiene una solución comprendida entre 1000 y 1500.*
3. *El sistema tiene dos soluciones comprendidas entre 1000 y 1500.*
4. *El sistema tiene tres soluciones comprendidas entre 1000 y 1500.*

Ejercicio 5. *La ecuación* $112x + 76y = 3000$

1. *tiene* 237 *soluciones tales que* $500 \leq x \leq 5000$.
2. *tiene una única solución tal que* $500 \leq x \leq 5000$.
3. *no tiene solución porque* $mcm(112, 76)$ *no divida a* 3000.

4. no tiene solución pues mcd$(112, 76)$ *no tiene inverso módulo* 3000.

Ejercicio 6. *Sea* $a = 24^{1234}$. *La congruencia* $ax \equiv 6 \mod 11$ *tiene como solución a:*

1. $x = 3$.
2. $x = 7$.
3. $x = 10$.
4. $x = 2$.

Ejercicio 7. *Determina cuál de los siguientes anillos es un cuerpo.*

1. $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+1}$.
2. $\mathbb{Z}[x]$.
3. $\mathbb{Q}[x]$.
4. $\mathbb{R}[x]_{x^4+x+1}$.

Ejercicio 8. *Sea* $A = \mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x+1}$, *y* $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in A$. *Entonces:*

1. $p(x)$ *no tiene inverso, ya que no es irreducible.*
2. $p(x)$ *tiene inverso y vale* x^3.
3. $p(x)$ *no tiene inverso, pues* $p(1) = 0$.
4. $p(x)$ *tiene inverso y vale* $x^3 + x + 1$.

Ejercicio 9. *El polinomio* $p(x) = x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 5$

1. *Es reducible en* $\mathbb{Z}_2[x]$.
2. *Es irreducible en* $\mathbb{Z}_3[x]$.
3. *Es irreducible en* $\mathbb{Z}_5[x]$.
4. *Es reducible en* $\mathbb{Z}_7[x]$.

Ejercicio 10. *El determinante de la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *con coeficientes en* $\mathbb{Z}_5$ *es*

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

Ejercicio 11. *Dados los sistemas de ecuaciones con coeficientes en* $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & + & (b+5)z & = & 5b+4 \\ x & + & 3y & + & (b+2)z & = & 2b+4 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 5b \end{array} \right.$$

1. *Son equivalentes para* $b = 3$.
2. *Son equivalentes para* $b = 4$.
3. *Son equivalentes para* $b = 5$.
4. *No son equivalentes para ningún valor de* b.

Opción 2: El ejercicio este ya está corregido. El primer sistema es compatible determinado. Sin embargo, para aligerar un poco las cuentas, podríamos poner sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Por ejemplo:

Dados los sistemas de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & + & 5y & = & 2 \\ 2x & + & 4y & = & 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & (2b+5)y & = & 5b+5 \\ x & + & (b+3)y & = & 3b+6 \end{array}\right.$$

1. Son equivalentes para $b = 2$.
2. Son equivalentes para $b = 4$.
3. Son equivalentes para $b = 6$.
4. No son equivalentes para ningún valor de b.

Ejercicio 12. *Consideremos el sistema con coeficientes en* $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & \lambda \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda \end{array}\right\}$$

Entonces:

1. *El sistema es compatible para* $\lambda \neq -2$
2. *El sistema es compatible determinado si, y sólo si,* $\lambda < 0$
3. *El sistema es compatible determinado si, y sólo si,* $\lambda > 0$
4. *El sistema es compatible determinado para todos los valores de* λ.

Ejercicio 13. *Sea* $U = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 : \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & 4z & = & 0 \\ x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right\}$. *Una base de* U *es:*

1. $\{(0,1,1);\ (2,1,0)\}$.
2. $\{(0,1,1)\}$.
3. $\{(2,2,1)\}$.
4. $\{(2,1,0);\ (1,4,0)\}$.

Ejercicio 14. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión* n*, y* U *y* W *dos subespacios vectoriales distintos, ambos de dimensión* $n-1$. *Entonces:*

1. $\dim(U \cap W) = n - 1$.
2. $\dim(U \cap W) = 1$.
3. $\dim(U \cap W) = n - 2$.
4. $\dim(U \cap W) = 0$.

Ejercicio 15. *Sea* $V = \{a(x) \in \mathbb{Z}_2[x] : gr(a(x)) \leq 3\}$*, y* $p_1(x) = x^3 + x + 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$, $p_3(x) = x^3 + x^2 + x$ *y* $p_4(x) = x^2 + 1$ *elementos de* V. *Entonces:*

1. *Forman una base de* V.
2. *Son linealmente dependientes, pues el segundo es combinación lineal del resto.*
3. *Son un sistema de generadores de* V.
4. *Son linealmente dependientes, pues el tercero es combinación lineal del resto.*

Ejercicio 16. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la aplicación lineal definida por* $f(x,y,z) = (x+y, x+z, 2x+y+z)$. *Las ecuaciones cartesianas del subespacio* $Im(f)$ *son:*

1. $x + y - z = 0$.
2. $\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{array}$.
3. $\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}$.
4. *Puesto que* $dim(Im(f)) = 3$*, no tiene ecuaciones cartesianas.*

Ejercicio 17. *Sea* $f : (\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^4$ *la aplicación lineal definida por las condiciones* $f(1,0) = (1,2,0,5)$ *y* $f(0,1) = (2,2,4,2)$*, y sea* $g : (\mathbb{Z}_7)^4 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ *la aplicación lineal dada por* $g(x,y,z,t) = (x+4y+z+3t, 2x+y+5t)$*. Sea* U *el núcleo de* g *y* V *la imagen de* f*. Una base de* $U + V$ *es*

1. $\{(1,0,4,4),\ (1,0,3,1),\ (0,1,5,4)\}$.
2. $\{(1,2,0,5),\ (2,2,4,2),\ (1,0,3,1),\ (0,1,5,4)\}$.
3. $\{(1,2,0,5),\ (2,2,4,2),\ (1,4,1,3),\ (2,1,0,5)\}$.
4. $\{(1,2,0,5),\ (2,2,4,2),\ (1,1,2,3)\}$.

Ejercicio 18. *Sea* $f : V \to V'$ *una aplicación lineal tal que* $dim(N(f)) = dim(Im(f))$*. Entonces podemos asegurar que:*

1. $V = V'$.
2. $dim(V)$ *es par.*
3. $dim(V')$ *es par.*
4. $dim(V + V')$ *es par.*

Ejercicio 19. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7)$.

1. *A tiene tres valores propios distintos, por tanto es diagonalizable.*
2. *A tiene dos valores propios distintos y es diagonalizable.*
3. *A tiene dos valores propios distintos y no es diagonalizable.*
4. *A no tiene valores propios.*

Ejercicio 20. *Sea* $A \in M_4(\mathbb{Z}_5)$ *una matriz con dos valores propios,* 1 *y* 3 *y tal que los subespacios propios son* $V_1 = L[(1,2,1,1)]$ *(es decir, el subespacio generado por el vector* $(1,2,1,1)$*) y* $V_3 \equiv x+y+z+2t = 0$*. Entonces, el polinomio característico de A vale:*

1. $\lambda^2 + \lambda + 3$.
2. $\lambda^4 + \lambda^2 + \lambda + 2$.
3. $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3$
4. *Los datos que tenemos no nos permiten determinar cuál es el polinomio característico de A, pues nos falta la multiplicidad algebraica de los valores propios.*