
ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Convocatoria Febrero 2012

Alumno: _____ DNI: _____

(07/02/2012)

Ejercicio 1. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Q}

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & b \\ x & + & by & + & z & = & a \end{array}$$

- (a) Si $a = b = 1$ el sistema es incompatible.
- (b) Existen valores de a y b para los que el sistema es compatible determinado.
- (c) El sistema es siempre compatible indeterminado.
- (d) El sistema es compatible indeterminado si, y sólo si, $a \cdot b = 1$.

Ejercicio 2. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$. Entonces el determinante de A vale:

- (a) 4.
- (b) 3.
- (c) 0.
- (d) 1.

Ejercicio 3. Sea $A = \mathbb{Z}_5[x]_{x^4+3x^3+3x^2+x+2}$, y sea $p(x) = x^2 + 1 \in A$. Entonces:

- (a) $p(x)$ no tiene inverso en A pues $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 2$ tiene a $x = 1$ como raíz.
- (b) $p(x)$ tiene inverso en A y vale $2x^3 + x^2 + 4x + 1$.
- (c) $p(x)$ tiene inverso en A y vale $x^3 + x^2 + 4x + 2$.
- (d) $p(x)$ no tiene inverso en A pues $x^2 + 1$ no es irreducible.

Ejercicio 4. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + 3y, 7x + z)$

- (a) f es inyectiva.
- (b) f no es sobreyectiva.
- (c) El núcleo de f tiene dimensión 2.
- (d) Una base de la imagen es $\{(1, 0); (0, 1)\}$.

Ejercicio 5. ¿Para cuál de los siguientes cuerpos el polinomio $p(x) = x^6 - 1$ verifica que $\text{mcd}(p(x), p'(x)) \neq 1$?

- (a) $K = \mathbb{Z}_7$.
- (b) $K = \mathbb{Q}$.

(c) $K = \mathbb{Z}_5$.

(d) $K = \mathbb{Z}_3$.

Ejercicio 6. En \mathbb{Z}_{12} definimos la relación de equivalencia xRy si $x^2 = y^2$. Entonces el cardinal del conjunto cociente vale:

(a) 1

(b) 12

(c) 4

(d) 6

Ejercicio 7. Dado el conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ donde $u_1 = (3, 1, 5, 2)$, $u_2 = (4, 2, 1, 6)$ y $u_3 = (6, 1, 1, 6)$ son tres vectores de $(\mathbb{Z}_7)^4$.

(a) Los vectores $\{u_1, u_2, u_3, u_1 + u_2 + u_3\}$ forman una base de $(\mathbb{Z}_7)^4$.

(b) S puede ser ampliado a una base añadiéndole el vector $(1, 1, 1, 1)$.

(c) Los vectores de S son linealmente independientes.

(d) S no puede ser ampliado a una base pues los vectores de S son linealmente dependientes.

Ejercicio 8. Sean A y B dos matrices cuadradas 2×2 con coeficientes reales tales que

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

(a) No existen matrices con las condiciones que nos da el enunciado.

(b) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$.

(c) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$.

(d) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9. De los siguientes anillos, indica cuál es un cuerpo con 125 elementos:

(a) $\{a(x) \in \mathbb{Z}_5[x] : \text{gr}(a(x)) \leq 124\}$.

(b) $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x+1}$.

(c) $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x^2+4}$.

(d) $\mathbb{Z}_3[x]_{x^5+x^2+2}$.

Ejercicio 10. Sea U_1 el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^4$ generado por $\{(1, 2, 0, 2); (0, 1, 4, 0)\}$ y U_2 el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^4$ de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + 3z + 5t = 0 \\ 3x + t = 0 \end{cases}$. Una base de $U_1 + U_2$ es

(a) $\{(1, 2, 3, 1); (2, 0, 2, 5); (1, 0, 0, 4)\}$.

(b) $\{(1, 0, 0, 4); (0, 1, 0, 6); (1, 1, 0, 3)\}$.

(c) $\{(1, 2, 3, 1); (2, 0, 2, 5)\}$.

(d) $\{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$.

Ejercicio 11. ¿Para que valor de m no es verdad que $3^6 \equiv 9 \pmod{m}$?

(a) $m = 14$.

- (b) $m = 12$.
- (c) $m = 10$.
- (d) $m = 8$.

Ejercicio 12. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. El cardinal del conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$ es:

- (a) 7^2 .
- (b) 2^7 .
- (c) 2^{12} .
- (d) 12^2 .

Ejercicio 13. Sea $V = (\mathbb{Z}_{11})_2[x]$, es decir, el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes en \mathbb{Z}_{11} , y sea $D : V \rightarrow V$ la aplicación derivada. Entonces:

- (a) $\{x\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x^2\}$ una base de la imagen.
- (b) $\{1\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x\}$ una base de la imagen.
- (c) $\{0\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x, x^2\}$ una base de la imagen.
- (d) $\{7\}$ es una base del núcleo de D y $\{6 + 3x, 9 + 10x\}$ una base de la imagen.

Ejercicio 14. Dado el sistema de congruencias

$$\begin{aligned} 22x &\equiv 26 \pmod{36} \\ 13x &\equiv 38 \pmod{51} \end{aligned}$$

- (a) No tiene solución pues 22 no tiene inverso módulo 36.
- (b) Tiene cuatro soluciones comprendidas entre 1000 y 2000.
- (c) Tiene una única solución comprendida entre 1000 y 2000.
- (d) No tiene solución pues 51 y 36 no son primos relativos.

Ejercicio 15. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$. Entonces A^{105} vale

- (a) La matriz identidad.
- (b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
- (c) A .
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 16. Sea U el subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_5)^4$ generado por los vectores $(1, 0, 1, 2)$; $(0, 4, 1, 1)$. Las ecuaciones cartesianas de U son:

- (a) $\begin{cases} 3x + y + z + t = 1 \\ x + 4y + 4z = 0 \end{cases}$.
- (b) $\{ 4x + 2y + 3z + 4t = 0 \}$.
- (c) $\begin{cases} x + z + 4t = 0 \\ 2x + 4y + 4t = 0 \\ 3x + 4y + 2z + 3t = 0 \end{cases}$.
- (d) $\begin{cases} x + 4y + 4z = 0 \\ 3x + 3y + 4z + 4t = 0 \end{cases}$.

Ejercicio 17. El resto de dividir 5514^{1838} entre 7 es:

- (a) 6.
- (b) 3.
- (c) 1.
- (d) 4.

Ejercicio 18. ¿Cuál de las siguientes reglas define una aplicación $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$?

- (a) $f(n) = \frac{n^3 + 5n^2 + 6n}{6}$.
- (b) $f(n) = n^2 - 1$.
- (c) $f(n) = n^2 - 60n + 800$.
- (d) $f(n) = \frac{n^3 + 6n^2 + 8n}{3}$.

Ejercicio 19. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$.

Entonces:

- (a) A tiene dos valores propios distintos, y es diagonalizable.
- (b) A tiene tres valores propios distintos, y por tanto es diagonalizable.
- (c) A tiene un único valor propio.
- (d) A tiene dos valores propios distintos, y no es diagonalizable.

Ejercicio 20. Disponemos de 45 billetes de 20 euros, y 18 billetes de 50 euros. ¿De cuántas formas distintas podemos conseguir 1110 euros?

- (a) 7.
- (b) 5.
- (c) 11.
- (d) 9.