

**Cálculo**  
**1ºE Grado en Ingeniería Informática**  
**Primer Parcial (Tipo II)**  
**Curso 2014/2015**

1. (3 puntos) Se considera la función  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$ .

- a) ¿Existe algún  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?
- b) ¿Es estrictamente monótona la función  $f$ ?
- c) Calcula la imagen de  $f$ .

**Solución:**

- a) Para responder a la pregunta vamos a ver si hay algún punto en el que la recta tangente tenga pendiente cero (así sería horizontal). Es decir, vamos a buscar algún punto en el que la función derivada se anule (la función dada es derivable por ser composición de derivables). Calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{\frac{(1-x)^2+1}{(1-x)^2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2 + 1}.$$

Es evidente que la derivada no se anula nunca; por tanto, no existe ningún punto del dominio donde la recta tangente sea horizontal.

- b) La derivada de  $f$  es positiva (todos sus factores lo son). En consecuencia, la función es estrictamente creciente en  $] -\infty, 1[$  y también en  $]1, +\infty[$ .
- c) Para calcular la imagen descomponemos el dominio en la unión de  $] -\infty, 1[$  y  $]1, +\infty[$ .

$$f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = f(]-\infty, 1[) \cup f(]1, +\infty[) = ] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)[ \cup ] \lim_{x \rightarrow 1+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

Hemos aplicado en cada subintervalo la continuidad y monotonía creciente de la función  $f$ . Para terminar, calculamos los límites planteados:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Por tanto, la imagen es  $]0, \frac{\pi}{2}[ \cup ]-\frac{\pi}{2}, 0[ = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \setminus \{0\}$ .

2. **(2 puntos)** De todos los rectángulos de perímetro 20, halla las dimensiones de aquél cuya diagonal es mínima.

**Solución:** Llamemos  $x$  e  $y$  a los lados del rectángulo dado. Sabemos que su perímetro es 20; esto es:  $2x + 2y = 20 \Leftrightarrow y = 10 - x$ . La diagonal que hay que minimizar se puede interpretar como la hipotenusa del triángulo rectángulo que divide por la mitad al rectángulo. Es claro que esta hipotenusa es  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Por tanto, la función a minimizar es:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (10 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$$

Esta función se podría definir en todo  $\mathbb{R}$ , pero como  $x$  e  $y$  representan dimensiones, consideramos como dominio de  $f$  el intervalo  $[0, 10]$ . Al ser un intervalo compacto, vamos a calcular los puntos críticos en el interior. Para ello calculamos la derivada de  $f$ :

$$f'(x) = \frac{4x - 20}{2\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}$$

Por tanto,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \in ]0, 10[$ . Para finalizar, evaluamos  $f$  en los extremos del intervalo y comparamos con  $f(5)$ :

$$f(0) = 10 = f(10) > f(5) = \sqrt{50}$$

Concluimos entonces que el mínimo absoluto de  $f$  se alcanza en  $x = 5$ . Así que la solución del problema es que los lados del rectángulo (cuadrado, más bien) sean iguales a 5.

3. **(2.5 puntos)** Prueba que, para todo  $x > 0$ , se verifica la desigualdad:

$$\frac{3}{2}x^2 - 6 \log(x) > \frac{1}{2}.$$

**Solución:** Para comprobar la desigualdad planteada, estudiamos la función siguiente:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6 \log(x) - \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Tendremos que probar que  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ .

Se trata de una función continua y derivable en su dominio. Calculamos su derivada y puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{6}{2}x - \frac{6}{x} = 3x - \frac{6}{x} = \frac{3x^2 - 6}{x} = 3 \frac{(x^2 - 2)}{x} = 3 \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x}$$

Por tanto,  $f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$ . Nos quedamos con la solución positiva ( $x = \sqrt{2}$ ).

Estudiamos los intervalos de monotonía determinados por el punto crítico. Esto es:

$$0 < x < \sqrt{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente}$$

$$x > \sqrt{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}$$

Por tanto, en el punto  $x = \sqrt{2}$  se alcanza un mínimo relativo, que, al ser el único punto crítico de  $f$  en  $\mathbb{R}^+$ , se convierte en el mínimo absoluto. Además,  $f(\sqrt{2}) = \frac{5}{2} - 3\log(2)$  que es positivo. Por tanto, la imagen de la función verifica:

$$f(x) \geq f(\sqrt{2}) > 0, \forall x > 0.$$

Y en consecuencia la desigualdad planteada es cierta.

4. (2.5 puntos) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{-x} - 1}{1 + x^2} \right)^{1/\sin^2(x)}.$$

**Solución:** El límite pedido presenta una indeterminación del tipo “ $1^\infty$ ”.

Aplicamos la regla del número  $e$ . Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{-x} - 1}{1 + x^2} \right)^{1/\sin^2(x)} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x)} \left( \frac{e^x + e^{-x} - 1}{1 + x^2} - 1 \right) = L.$$

Para resolver el límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x)} \left( \frac{e^x + e^{-x} - 1}{1 + x^2} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 1 - 1 - x^2}{(1 + x^2) \sin^2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

Hemos apartado el factor  $1/(1 + x^2)$  que no tiende a cero (tiende a 1). Así que nos dedicamos al segundo límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{\sin^2(x)}$$

que presenta una indeterminación del tipo “ $0/0$ ”. Aplicamos entonces la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2 \sin(x) \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

Obsérvese que hemos aplicado la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas.

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{-x} - 1}{1 + x^2} \right)^{1/\sin^2(x)} = e^0 = 1.$$

Granada, 28 de noviembre de 2014