ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

Convocatoria Febrero 2011

Alumno:____ **DNI:**____________

(01/02/2011)

I. Informática   I.T.I. Gestión   I.T.I. Sistemas

Ejercicio 1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $P = \{2, 3, 5, 7\}$. En $\mathcal{P}(X)$ definimos la relación de equivalencia

$$ARB \text{ si, y sólo si, } A \setminus P = B \setminus P$$

Entonces el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R$ tiene cardinal

(a) **64**.

(b) 4.

(c) 16.

(d) 10.

Solución:

Puesto que $A \setminus P = A \cap P'$ y $P' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ la respuesta es $2^6 = 64$. Veamos porqué. Para esto vamos a calcular algunas clases de equivalencia:

$[\emptyset] = \{B \subseteq X : BR\emptyset\} = \{B \subseteq X : B \cap P' = \emptyset\} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \cdots\}$

Es decir, en la clase del conjunto vacío están todos los subconjuntos de P. Al hacer la intersección de cualquiera de estos con P' nos da el conjunto vacío.

$[\{1\}] = \{B \subseteq X : B \cap P' = \{1\}\} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \cdots\}$

En $[\{1\}]$ están todos los subconjuntos de X que se obtienen uniéndole el elemento 1 a los subconjuntos de P. En total, la clase $[\{1\}]$ tiene 16 elementos.

Podemos ver como cada clase de equivalencia tiene 16 elementos. Como $\mathcal{P}(X)$ tiene 1024, el número de clases de equivalencia es $\frac{1024}{16} = 64$.

O si queremos, la clase de equivalencia de A está determinada por $A \cap P'$, que es un subconjunto de P'. Como P' tiene 64 subconjuntos, el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R$ tiene cardinal 64.

Ejercicio 2. Dada la aplicación $f : \mathbb{Z}_{100} \to \mathbb{Z}_{100}$ definida como $f(x) = 12x + 35$ entonces:

a) f es inyectiva pero no sobreyectiva.

b) **f no es ni inyectiva ni sobreyectiva.**

c) f es biyectiva.

d) f no es inyectiva, pero sí es sobreyectiva.

Solución:
La aplicación no es inyectiva, pues $f(0) = 35$ y $f(25) = 12 \cdot 25 + 35 = 335 = 35$.
Es decir, dos elementos distintos tienen la misma imagen.
La aplicación no es sobreyectiva. Por ejemplo, vamos a ver que no existe $x \in \mathbb{Z}_{100}$ tal que $f(x) = 0$.
Si $f(x) = 0$ entonces $12x + 35 = 0$, $12x = 65$. Y ahora tendríamos que resolver $12x \equiv 65(\text{mód } 100)$, que no tiene solución, pues $\mathtt{mcd}(12, 100) = 4$, que no divide a 65.

También podría razonarse que si la aplicación fuera sobreyectiva, y va de un conjunto finito (de cardinal 100) en sí mismo, entonces sería también inyectiva, y ya hemos visto que no lo es.

Ejercicio 3. Sea $\sigma = (1\,2\,3\,7\,5)[(2\,1\,3\,4)(3\,9\,2\,5)]^{-1} \in S_{10}$. Entonces σ^{10001} vale:

(a) $(7\,5\,3\,2\,4\,1\,9)$.

(b) (**4 3 7 1 2 5 9**).

(c) $(1\,7\,3)(9\,5\,2\,4)$.

(d) $(9\,7\,1\,2\,4)(5\,3)$.

Solución:

Tenemos que $\sigma = (1\ 2\ 3\ 7\ 5)[(2\ 1\ 3\ 4)(3\ 9\ 2\ 5)]^{-1} = (1\ 2\ 3\ 7\ 5)(3\ 9\ 2\ 5)^{-1}(2\ 1\ 3\ 4)^{-1} = (1\,2\,3\,7\,5)(5\,2\,9\,3)(4\,3\,1\,2)$

Ahora escribimos σ como producto de ciclos disjuntos. Calculamos la imagen de cada uno de los elementos.

La imagen de 1 por $(4\,3\,1\,2)$ es 2; la imagen de 2 por $(5\,2\,9\,3)$ es 9; y la imagen de 9 por $(1\,2\,3\,7\,5)$ es 9. Por tanto, la imagen de 1 por σ vale 9.

Repitiendo el proceso con 9, nos queda que su imagen es 7. Y así podemos ver que $\sigma = (1\,9\,7\,5\,3\,2\,4)$.

σ es un ciclo de longitud 7, luego σ tiene orden 7. Puesto que $10001 = 1428 \cdot 7 + 5$, se tiene que $\sigma^{10001} = \sigma^5$. Por tanto,

$\sigma^{10001} = (1\ 2\ 5\ 9\ 4\ 3\ 7)$, que vemos que coincide con la respuesta b) (notemos que al ser σ un ciclo, es lo mismo $(1\,2\,5\,9\,4\,3\,7)$ que $(4\,3\,7\,1\,2\,5\,9)$).

Ejercicio 4. Di qué vale $a \in \mathbb{Z}_{11}$ para que los sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & 2z & + & t & = & 0 \\ 3x & + & y & + & az & + & 2t & = & 5 \\ 4x & & & + & 8z & + & t & = & 3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 4y & + & 8z & + & 3t & = & 3 \\ 2x & + & y & & & + & t & = & 5 \\ & & y & + & 7z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right\}$$

sean equivalentes:

(a) 4.

(b) 10.

(c) **2**.

(d) 1.

Solución:
Tomamos el segundo sistema, escribimos la matriz ampliada y calculamos su forma normal de Hermite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(9)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(7)]{E_{12}(7)}$$

$$\xrightarrow[E_{32}(7)]{E_{12}(7)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(9)]{E_{13}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Hacemos lo mismo con el primer sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & a & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a+5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a+5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a+5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Si $a + 5 = 7$ tenemos que ambas matrices son iguales, luego ambos sistemas son equivalentes. Vemos que entonces que para $a = 2$ los dos sistemas son equivalentes.

Ejercicio 5. Sea $X \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

a) $X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-25}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{-23}{11} & \frac{-3}{11} \end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{X^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$.

d) La matriz X no es regular.

Solución:

$X\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = X^{-1}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = X^{-1}$

Entonces:

$X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & -22 \\ 11 & -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Y vemos como la opción correcta es la c).

Ejercicio 6. Sean $U = L[(3,5,2,3),(1,6,3,4),(6,4,4,4)]$ y $W \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & 5z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 6z & + & 5t & = & 0 \end{array} \right.$ dos subespacios de $(\mathbb{Z}_7)^4$.

Entonces una base de $U \cap W$ es:

a) $\{(\mathbf{5},\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{6})\}$.

b) $\{(6,1,1,1)\}$.

c) $\{(5,2,1,6),(6,1,1,1)\}$.

d) $\{(1,2,1,4),(1,1,1,2)\}$.

Solución:

Calculamos una base de U. Para eso, escribimos una matriz cuyas columnas son un sistema de generadores de U, y hallamos su forma de Hermite por columnas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego las ecuaciones paramétricas de U son

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & a & & \\ y & = & & & b \\ z & = & 3a & & \\ t & = & 2a & + & 5b \end{array} \right. \text{ lo que nos da } \left\{ \begin{array}{ccccc} z & = & 3x & & \\ t & = & 2x & + & 5y \end{array} \right.$$

Si nos fijamos, el vector $(6,1,1,1)$ no cumple la ecuación $z = 3x$, luego eso nos descarta las opciones b) y c). Como el vector $(1,1,1,2)$ tampoco cumple esa ecuación, descartamos la opción d). Nos queda entonces la opción a).

Vamos a comprobar que $(5,2,1,6) \in U \cap W$.

Pertenece a U, ya que $5 = 3 \cdot 1$ y $6 = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2$.

Pertenece a W, ya que $2 \cdot 5 + 2 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 6 = 10 + 2 + 5 + 18 = 35 = 0$ y $5 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 6 = 5 + 8 + 6 + 30 = 49 = 0$.

También puede hacerse calculando las ecuaciones cartesianas de $U \cap W$. Para eso, tomamos el sistema formado por las ecuaciones de U y las de W, y calculamos la forma normal de Hermite de su matriz de coeficientes.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que nos dice que las ecuaciones de $U \cap W$ son $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 5t & = & 0 \\ & y & & + & 2t & = & 0 \\ & & z & + & t & = & 0 \end{array} \right.$

Entonces $\mathrm{dim}(U \cap W) = 4 - 3 = 1$ y una base podemos obtenerla dándole a t el valor 6, y nos queda el vector $(5,2,1,6)$.

Ejercicio 7. Sean $B_1 = \{(1,0,1,0);\ (0,1,0,0);\ (1,0,0,1);\ (1,1,1,1)\}$ y $B_2 = \{(0,1,1,1);\ (1,0,1,0);\ (1,0,1,1);\ (0,0,1,1)\}$ dos bases de $(\mathbb{Z}_2)^4$. Sea u el vector cuyas coordenadas en la base B_1 son $(1,0,1,1)$. Entonces, las coordenadas de u en la base B_2 son:

(a) $(0,0,0,1)$.

(b) $(1,1,0,0)$.

(c) $(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0})$.

(d) $(1,1,1,1)$.

Solución:
El vector u, como tiene coordenadas $(1,0,1,1)$ en la base B_1 es el vector
$u = 1\cdot(1,0,1,0) + 0\cdot(0,1,0,0) + 1\cdot(1,0,0,1) + 1\cdot(1,1,1,1) = (1,1,0,0)$.
Ahora escribimos ese vector como combinación lineal de los vectores de B_2.
$(1,1,0,0) = a\cdot(0,1,1,1) + b\cdot(1,0,1,0) + c\cdot(1,0,1,1) + d\cdot(0,0,1,1)$, lo que nos da el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} & & b & + & c & & & = & 1 \\ a & & & & & & & = & 1 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ a & & & + & c & + & d & = & 0 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación deducimos que $a = 1$. Restando la tercera y la cuarta vemos que $b = 0$. Por tanto, con la primera sacamos que $c = 1$. Como la suma de los cuatro coeficientes vale cero, d tiene que valer 0.

Es decir, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ y $d = 0$. La respuesta es entonces la c).

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $(1,2,-1) \in N(f)$, $f(1,-1,0) = (3,1,2)$ e $Im(f)$ es el subespacio de ecuación $x - y - z = 0$. Entonces, la matriz de f en la base $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ podría ser:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Vamos a calcular las coordenadas del vector $(1,2,-1)$ en la base B.
$(1,2,-1) = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (1,1,0) + c \cdot (1,1,1)$.

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 1 \\ & & b & + & c & = & 2 \\ & & & & c & = & -1 \end{array}\right\}$$

Por tanto $c = -1$, $b = 2 - c = 3$ y $a = 1 - b - c = -1$.

Si $A = M_B(f)$ y $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, entonces, como v son las coordenadas del vector $(1,2,-1)$ en la base B, el producto $A \cdot v$ nos da las coordenadas del vector $f(1,2,-1)$ en la base B.

Pero como el vector $(1,2,-1) \in N(f)$, $f(1,2,-1) = (0,0,0)$. Por tanto, $A \cdot v$ debe valer cero.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y vemos como sólo puede ser la opción c).

Ejercicio 9. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ la aplicación lineal dada por $f(x, y, z) = (3x + y + z, x + 2y + 4z, 3x + y + 4z, 4x + 3y + 4z)$. Entonces:

(a) $B_{N(f)} = \{(2, 4, 0), (1, 1, 1)\}$ es una base del núcleo de f y $B_{Im(f)} = \{(1, 2, 1, 3), (2, 3, 3, 3)\}$ es una base de la imagen de f.

(b) $B_{N(f)} = \{(1, 2, 0)\}$ es una base del núcleo de f y $B_{Im(f)} = \{(1, 2, 1, 3), (4, 1, 1, 2)\}$ es una base de la imagen de f.

(c) $B_{N(f)} = \{(2, 4, 0)\}$ es una base del núcleo de f y $B_{Im(f)} = \{(1, 2, 1, 3), (2, 3, 3, 3), (4, 1, 1, 2)\}$ es una base de la imagen de f.

(d) **$\mathbf{B_{N(f)}} = \{(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{0})\}$ es una base del núcleo de f y $\mathbf{B_{Im(f)}} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3})\}$ es una base de la imagen de f**.

Solución:

Puesto que $\dim(N(f)) + \dim(Im(f))$ debe valer 3, podemos descartar las opciones a) y c). Nos quedan entonces la b) y la d).

Lo que diferencia a ambas opciones es, que en la b) se afirma que el vector $(4, 1, 1, 2)$ pertenece a la imagen de f, mientras que en la d) se afirma que el vector $(2, 3, 3, 3)$ pertenece a la imagen de f.

Vamos a calcular una base de la imagen, y a partir de ella sus ecuaciones cartesianas. Los vectores $f(1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0)$ y $f(0, 0, 1)$ forman un sistema de generadores de $Im(f)$. Formamos la matriz cuyas columnas son estos vectores y realizamos transformaciones elementales por columnas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego las ecuaciones paramétricas de $Im(f)$ son $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & a & & \\ y & = & & & b \\ z & = & 3a & + & 4b \\ t & = & 2a & + & 3b \end{array} \right.$

Las ecuaciones cartesianas son entonces: $\left\{ \begin{array}{rcrcr} z & = & 3x & + & 4y \\ t & = & 2x & + & 3y \end{array} \right.$

Tomamos el vector $(4, 1, 1, 2)$, y vemos que

$3x + 4y = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 12 + 4 = 16 = 1 = z$, pero

$2x + 3y = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 8 + 3 = 11 = 1 \neq t$.

Sin embargo, si tomamos el vector $(2, 3, 3, 3)$ vemos que

$3x + 4y = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 6 + 12 = 18 = 3 = z$, y

$2x + 3y = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13 = 3 = t$.

Por tanto, el vector $(2, 3, 3, 3) \in Im(f)$, y la respuesta correcta es la d).

Ejercicio 10. Sean $U = L[(2,1,3),(4,3,5)]$ y $W \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array} \right.$ dos subespacios de $(\mathbb{Z}_7)^3$. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_7)$ una matriz que tiene a U como subespacio propio de valor propio 3 y a W como subespacio propio de valor propio 5. Entonces A es la matriz:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 6 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Solución:
En primer lugar calculamos una base del subespacio W.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego nos queda $W \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$ Una base de W la obtenemos dándole, por ejemplo, a z el valor 1 y nos queda $B_W = \{(4,4,1)\}$.

Entonces, si $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, es decir, la matriz cuyas columnas forman una base de vectores propios de A se tiene que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, donde D es la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Por tanto, $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$P \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

$P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto, la opción correcta es la c).