ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Convocatoria Febrero 2011 (01/02/2011)

Alumno:________________________________ **Grupo:**_____ **DNI:**__________

Ejercicio 1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $P = \{2, 3, 5, 7\}$. En $\mathcal{P}(X)$ definimos la relación de equivalencia

$$ARB \text{ si, y sólo si, } A \setminus P = B \setminus P$$

Entonces el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R$ tiene cardinal

(a) 64.

(b) 4.

(c) 16.

(d) 10.

Justifica la respuesta.

Ejercicio 2.

1. Resuelve el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{rcll} 5x & \equiv & 3 & (\text{mód } 6) \\ x & \equiv & 4 & (\text{mód } 7) \\ 4x & \equiv & 6 & (\text{mód } 9) \end{array}\right\}$$

2. Calcula, si existe, el inverso para el producto de 295 en $\mathbb{Z}_{1274}$.

Ejercicio 3. Resuelve en $\mathbb{Z}_5[x]$ la ecuación

$$(x^2 + 1) \cdot u(x) + (3x + 2) \cdot v(x) = x + 1$$

Ejercicio 4. Sean U el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^4$ generado por los vectores $u_1 = (3, 5, 2, 3)$, $u_2 = (1, 6, 3, 4)$ y $u_3 = (6, 4, 4, 4)$; y sea W el subespacio dado por las ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & 5z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 6z & + & 5t & = & 0 \end{array}\right.$.

Entonces una base de $U \cap W$ es:

a) $\{(5, 2, 1, 6)\}$.

b) $\{(6, 1, 1, 1)\}$.

c) $\{(5, 2, 1, 6), (6, 1, 1, 1)\}$.

d) $\{(1, 2, 1, 4), (1, 1, 1, 2)\}$.

Justifica la respuesta.

Ejercicio 5. Sea el espacio vectorial $V = (Z_5)^3$ y sea U el subespacio vectorial de V generado por por $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 1)$.

¿Para cuál de los siguientes subespacios vectoriales W de V se verifica que $V = U \oplus W$?

a) $W = \langle (3,4,3) \rangle$.

b) $W = \langle (2,1,3), (3,4,2) \rangle$.

c) $W = \langle (2,3,1), (4,1,2) \rangle$.

d) $W = \left\{ (x,y,z) \in V : \begin{array}{r} 4x+2y=0 \\ x+4z=0 \end{array} \right\}$.

Justifica la respuesta.

Ejercicio 6. Da una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ que verifique que el vector $(1,2,-1)$ pertenezca al núcleo de f, que $f(1,-1,0) = (3,1,2)$ y que $\mathrm{Im}(f)$ sea el subespacio de ecuación $x - y - z = 0$.

Calcula la matriz de f en la base $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$

Ejercicio 7. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 4 \\ 3x & + & (a+2)y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Discútelo según el valor del parámetro a.

Si para $a = 4$ es compatible, resuélvelo.

Ejercicio 8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$. Estudia si A es diagonalizable, y en caso afirmativo, calcula una matriz regular P y una matriz diagonal D tal que $P \cdot D \cdot P^{-1}$ sea igual a A.