Ejemplo de resolución de circuitos en corriente alterna: Principio de Superposición

Isabel M. Tienda Luna

En este documento analizaremos cómo solucionar ejercicios de circuitos en corriente alterna usando el Principio de Superposición.

1. Enunciado del problema

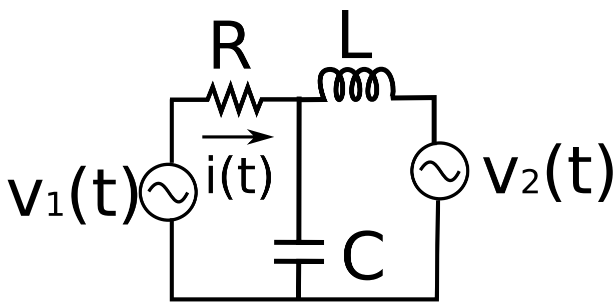

Figura 1: Circuito a resolver.

El objetivo de este ejercicio es calcular la intensidad de corriente ($i(t)$) que atraviesa la resistencia R del circuito de la figura 1 teniendo en cuenta que: $R = 1k\Omega$, $L = 1mH = 10^{-3}H$, $C = 2nF = 2{\cdot}10^{-9}F$, v_1(t)=$10\cos(10^6\frac{rad}{s}t)V$ y v_2(t)=$3\cos(2\,10^6\frac{rad}{s}t+\frac{\pi}{6})V$.

Como en el circuito hay dos fuente de tensión que trabajan a distinta frecuencia angular ($\omega_1 = 10^6\frac{rad}{s}$ y $\omega_2 = 2\,10^6\frac{rad}{s}$), la única posibilidad que tenemos para resolver el problema es usar el Principio de Superposición. Según este principio, la intensidad a calcular ($i(t)$) se obtiene como la suma de las intensidades calculadas en circuitos donde sólo hay una fuente funcionando. Estos circuitos pueden verse en las figuras 2 y 3. Por tanto, el problema de calcular $i(t)$ se divide en dos problemas más sencillos: el cálculo de $i_1(t)$ y el cálculo de $i_2(t)$. Una vez obtenidas $i_1(t)$ e $i_2(t)$, $i(t)$ se calcula simplemente sumándolas: $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

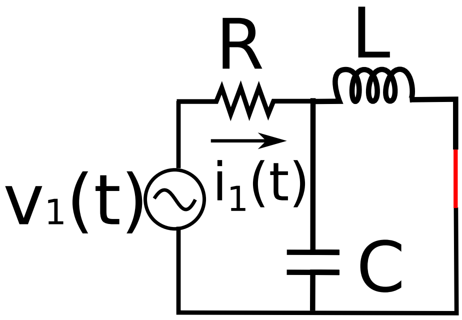

Figura 2: Circuito donde se han anulado todas las fuentes menos $v_1(t)$.

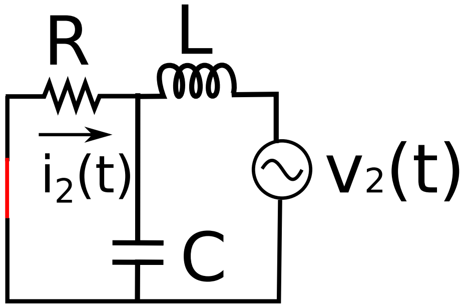

Figura 3: Circuito donde se han anulado todas las fuentes menos $v_2(t)$.

2. Solución del circuito de la figura 2.

Como en el circuito de la figura 2 sólo hay una fuente de tensión ($v_1(t)$), tenemos una única frecuencia definida ($\omega_1 = 10^6 \frac{rad}{s}$). El primer paso será usar esa frecuencia para calcular las impedancias asociadas a cada uno de los elementos que hay en el circuito (R, L y C) para poder resolverlo usando la Ley de Ohm Generalizada y no tener que utilizar ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
Z_R &= R = 1k\Omega = 10^3\Omega = 1000\Omega \qquad (1)\\
Z_L &= j\omega L = j\,10^6\frac{rad}{s}\,10^{-3}H = j\,10^3\Omega = 10^3 e^{j\frac{\pi}{2}}\Omega = 1000e^{j\frac{\pi}{2}}\Omega\\
Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\,10^6\frac{rad}{s}\,2\,10^{-9}F} = -j\,0{,}5\,10^3\Omega = 0{,}5\,10^3 e^{-j\frac{\pi}{2}}\Omega = 500e^{-j\frac{\pi}{2}}\Omega
\end{aligned}$$

El segundo paso es calcular el fasor que resenta la única fuente presente en el circuito de la figura 2. Como v_1(t)=10 $\cos(10^6 \frac{rad}{s} t)V$, $v_1(t)$ puede verse como la parte real del número complejo $10e^{j(10^6 \frac{rad}{s} t)}V$. Este número complejo tiene una parte independiente del tiempo (10V) y otra que depende del tiempo ($e^{j(10^6 \frac{rad}{s} t)}$). A la parte independiente del tiempo se le llama FASOR.

Para resolver el circuito de la figura 2 usaremos este fasor que llamaremos V_1 ($V_1 = 10V$) para trabajar con la fuente y representarla en las ecuaciones.

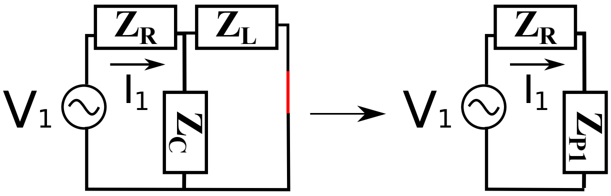

Figura 4: Circuito donde se han anulado todas las fuentes menos $v_1(t)$ usando impedancias y fasores.

Usando el fasor para la fuente (V_1) y las impedancias para el resto de los elementos (Z_R, Z_L, Z_C), el circuito de la figura 2 queda representado por el circuito de la izquierda de la figura 4. En esta figura, I_1 es el fasor que representa la intensidad que circula a través de la impedancia Z_R. Para calcular I_1 podemos usar cualquiera de los métodos que estudiamos en el tema de corriente continua para resolver circuitos. Por ejemplo, en este caso utilizaremos un método de simplificación en el que vamos a simplificar el circuito de la izquierda de la figura 4 asociando las dos impedancias que están en paralelo (Z_L y Z_C). Si llamamos Z_{P1} a la impedancia de la asociación, su valor se calcula como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{P1}} &= \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \\ Z_{P1} &= \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = 333j\Omega = 333e^{j\frac{\pi}{2}}\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

Una vez calculado el valor de Z_{P1}, ya tenemos todos los datos necesarios para calcular I_1 aplicando la Ley de Mallas al circuito de la derecha de la figura 4:

$$V_1 = I_1 Z_R + I_1 Z_{P1} \tag{3}$$

y, finalmente, de la ecuación anterior puede despejarse el valor de I_1:

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_R + Z_{P1}} = \frac{10V}{1000\Omega + 333j\Omega} = (0{,}009 - 0{,}003j)A = 0{,}0095e^{-j0{,}32}A \tag{4}$$

¿Hemos terminado ya el ejercicio? No, ahora hay que añadir la dependencia temporal al fasor, o lo que es lo mismo, hay que multiplicar el fasor I_1 por $e^{j(10^6 \frac{rad}{s} t)}$ para obtener el número complejo completo que representa a la intensidad $i_1(t)$ que circula a través de la resistencia:

$$i_1(t) = 0{,}0095e^{-j0{,}32}e^{j(10^6 \frac{rad}{s} t)}A = 0{,}0095e^{j(10^6 \frac{rad}{s} t - 0{,}32)}A \tag{5}$$

¿Hemos terminado ya el ejercicio? Aún no, ahora me tengo que quedar con la parte real o imaginaria del número complejo anterior. **¿Con cuál?** Para elegir tengo que mirar la fuente que hay en el circuito. Esa fuente es v_1(t)=$10\cos(10^6\frac{rad}{s}t)V$. Como $v_1(t)$ es de tipo coseno, me tendré que quedar con la parte real del número complejo de la ecuación 5. De esta forma la intensidad que estoy buscando es:

$$i_1(t) = 0{,}0095\cos(10^6\frac{rad}{s}t - 0{,}32)A \tag{6}$$

3. Solución del circuito de la figura 3.

Como en el circuito de la figura 3 sólo hay una fuente de tensión ($v_2(t)$), tenemos una única frecuencia definida ($\omega_2 = 2\ 10^6\frac{rad}{s}$). El primer paso será usar esa frecuencia para calcular las impedancias asociadas a cada uno de los elementos que hay en el circuito (R, L y C) para poder resolverlo usando la Ley de Ohm Generalizada y no tener que utilizar ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned} Z_R &= R = 1k\Omega = 10^3\Omega = 1000\Omega \\ Z_L &= j\omega L = j2\ 10^6\frac{rad}{s}\ 10^{-3}H = j2\ 10^3\Omega = 2\ 10^3 e^{j\frac{\pi}{2}}\Omega = 2000e^{j\frac{\pi}{2}}\Omega \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\ 10^6\frac{rad}{s}\ 2\ 10^{-9}F} = -j\ 0{,}25\ 10^3\Omega = 0{,}25\ 10^3 e^{-j\frac{\pi}{2}}\Omega = 250e^{-j\frac{\pi}{2}}\Omega \end{aligned} \tag{7}$$

El segundo paso es calcular el fasor que resenta la única fuente presente en el circuito de la figura 3. Como v_2(t)=$3\cos(2\ 10^6\frac{rad}{s}t + \frac{\pi}{6})V$, $v_2(t)$ puede verse como la parte real del número complejo $3e^{j(2\ 10^6\frac{rad}{s}t+\frac{\pi}{6})}V$. Este número complejo tiene una parte independiente del tiempo ($3e^{j\frac{\pi}{6}}V$) y otra que depende del tiempo ($e^{j(2\ 10^6\frac{rad}{s}t)}$). A la parte independiente del tiempo se le llama FASOR. Para resolver el circuito de la figura 3 usaremos este fasor que llamaremos V_2 ($V_2 = 3e^{j\frac{\pi}{6}}V$) para trabajar con la fuente y representarla en las ecuaciones.

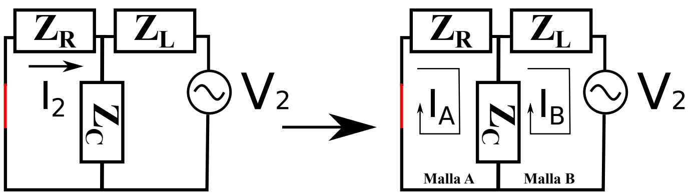

Figura 5: Circuito donde se han anulado todas las fuentes menos $v_2(t)$ usando impedancias y fasores.

Usando el fasor para la fuente (V_2) y las impedancias para el resto de los elementos (Z_R, Z_L, Z_C), el circuito de la figura 3 queda representado por el circuito de la izquierda de la figura 5. Para calcular el fasor que representa la intensidad que circula a través de la impedancia Z_R (I_2) podemos usar cualquiera de los métodos que estudiamos en el tema de corriente continua para resolver circuitos. Por ejemplo, en este caso utilizaremos el Método de Mallas. Como puede verse en cualquiera de los circuitos de la figura 5, el circuito a resolver tiene 2 mallas independientes. Una vez dibujadas las intensidades de cada una de estas mallas (que llamaremos I_A e I_B como puede verse en el circuito de la derecha de la figura 5), podemos escribir las ecuaciones para cada malla:

$$\begin{aligned} \text{Malla A} \quad &\Rightarrow \quad 0 = I_A Z_R + I_A Z_C - I_B Z_C \\ \text{Malla B} \quad &\Rightarrow \quad V_2 = I_B Z_L + I_B Z_C - I_A Z_C \end{aligned} \tag{8}$$

Las soluciones del anterior sistema de ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \text{Malla A} \quad &\Rightarrow \quad I_A = (-0{,}0003 - j0{,}0003)A = 0{,}0004e^{-j2{,}34}A \\ \text{Malla B} \quad &\Rightarrow \quad I_B = (0{,}0009 - j0{,}0014)A = 0{,}0017e^{-j1{,}01}A \end{aligned} \tag{9}$$

y como por la resistencia sólo pasa la intensidad de la Malla 1, $I_2 = I_A = (-0{,}0003 - j0{,}0003)A = 0{,}0004e^{-j2{,}34}A$.

¿Hemos terminado ya el ejercicio? No, ahora hay que añadir la dependencia temporal al fasor, o lo que es lo mismo, hay que multiplicar I_2 por $e^{j(2\,10^6 \frac{rad}{s} t)}$ para obtener el número complejo completo que representa a la intensidad $i_2(t)$ que circula a través de la resistencia:

$$i_2(t) = 0{,}0004e^{-j2{,}34} e^{j(2\,10^6 \frac{rad}{s} t)} A = 0{,}0004e^{j(2\,10^6 \frac{rad}{s} t - 2{,}34)} A \tag{10}$$

¿Hemos terminado ya el ejercicio? No, ahora me tengo que quedar con la parte real o imaginaria del número complejo anterior. **¿Con cuál?** Para elegir tengo que mirar la fuente que hay en el circuito. Esa fuente es v_2(t)=$3\cos(2\,10^6 \frac{rad}{s} t + \frac{\pi}{6})V$. Como $v_2(t)$ es de tipo coseno, me tendré que quedar con la parte real del número complejo de la ecuación 10. De esta forma la intensidad que estoy buscando es:

$$i_2(t) = 0{,}0004 \cos(2\,10^6 \frac{rad}{s} t - 2{,}34)A \tag{11}$$

4. Aplicamos el Principio de Superposición

Una vez resueltos los circuitos de las figuras 2 y 3 y calculadas $i_1(t)$ e $i_2(t)$, el Principio de Superposición nos garantiza que:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \left(0{,}0095 \cos(10^6 \frac{rad}{s} t - 0{,}32) + 0{,}0004 \cos(2\,10^6 \frac{rad}{s} t - 2{,}34)\right) A \tag{12}$$