CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. GRUPO A.

1. Demuestra que, para todo natural $n \geq 2$, se verifica que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Solución. Dado que se pretende demostrar una propiedad para todo natural mayor o igual a 2 se puede intentar hacerlo por inducción pero empezando en 2.

La propiedad que se pretende demostrar, para $n=2$, queda $1+\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ que es equivalente a que

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}+1 > 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow 2 > 1.$$

Por lo tanto la propiedad se cumple para $n=2$.

Supongamos ahora que, para cierto natural n, se cumple que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Si ahora trabajamos con $n+1$ en la parte de la izquierda queda

$$\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{>\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1},$$

y así queda demostrada la propiedad para el natural $n+1$, es decir

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}.$$

2. Demuestra que, si n es un número impar, entonces el número $n(n^2-1)$ es divisible por 24.

Solución. Otra propiedad relativa a los naturales. En este caso lo que ocurre es que se pide demostrar una propiedad para los impares, pero se puede hacer también una demostración por inducción. Se me ocurre hacerlo de dos formas, ambas muy parecidas. Veamos,

   (a) El problema es equivalente a demostrar que si $n \in \mathbb{N}$ entonces el número $(2n-1)((2n-1)^2-1)$ es divisible por 24.

(b) También se puede razonar de la siguiente forma: demostrar la propiedad que se pide en el enunciado para $n = 1$ y, supuesto que se verifica para cierto natural n, demostrar que se verifica también para $n+2$.

En cualquier caso los cálculos son muy parecidos. Veamos la primera forma propuesta.

Para $n = 1$ el número $(2\times 1-1)((2\times 1-1)^2-1) = 0$ que es divisible por 24.

Supongamos ahora que, para cierto n se cumple que $(2n-1)((2n-1)^2-1)$ es divisible por 24 y veamos qué ocurre cuando sustituimos n por $n+1$. En este caso nos queda

$$(2n+1)((2n+1)^2-1) = ((2n-1)+2)((2n+1)^2-1) =$$

$$(2n-1)(((2n-1)+2)^2-1)+2(4n^2+4n) = (2n-1)((2n-1)^2+4+4(2n-1)-1)+$$

$$8n^2+8n = (2n-1)((2n-1)^2-1)+(2n-1)(8n)+8n^2+8n = (2n-1)((2n-1)^2-1)+24n^2;$$

el primer sumando es divisible por 24 por la hipótesis de inducción y el segundo sumando es, trivialmente, también divisible por 24, con lo que hemos terminado.

3. Calcula el límite de la sucesión

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\right\}.$$

Solución.

Esta sucesión, en la que aparece la raíz n-ésima se puede manipular para aplicarle el criterio de la raíz. Tenemos

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\right\} = \left\{\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}}\right\}.$$

Si llamamos $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}$ tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)(n+3)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)n^n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)(n+1)^{(n+1)}} = \frac{(2n+1)(2n+2)n^n}{(n+1)(n+1)^{(n+1)}} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

la sucesión $\left\{\dfrac{2(2n+1)}{n+1}\right\} = \left\{\dfrac{4n+2}{n+1}\right\}$ converge a 4 mientras que la sucesión $\left\{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\right\}$ presenta una indeterminación de la forma 1^∞ con lo que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\} = e^L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left\{n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)\right\} = L,$$

pero $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n\left(\dfrac{n}{n+1}-1\right)\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left\{n\left(\dfrac{-1}{n+1}\right)\right\} = -1$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\right\} = e^{-1}$. Concluyendo, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\right\} = \frac{4}{e}.$$

4. Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como

$$x_1 = \frac{1}{2},$$
$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

(b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

(c) Calcula el límite de la sucesión $\left\{(x_n^2-3)^{\frac{1}{2x_n-4}}\right\}$.

Solución.

(a) Para ver que la sucesión es monótona veamos qué ocurre con los primeros términos. $x_1 = 1/2$ y entonces $x_2 = \sqrt{2+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} > \frac{1}{2}$, así que $x_2 > x_1$.

Supongamos que para cierto natural n se verifica que $x_{n+1} > x_n$, sumando 2 en ambos miembros y aplicando raíz cuadrada a ambos miembros de la desigualdad (es evidente que los dos son positivos) ésta no varía, así que tenemos que $\sqrt{2+x_{n+1}} > \sqrt{2+x_n}$, es decir, que $x_{n+2} > x_{n+1}$ y esto es la demostración por inducción de que la sucesión es creciente.

Al ser creciente, para ver que está acotada solamente tendremos que demostrar que está mayorada ya que minorada lo está claramente. Para encontrar una cota superior vamos a suponer, por un momento, que efectivamente la sucesión está mayorada. Entonces sabemos que es convergente pero además sabemos que el límite, al que llamaremos L, es el supremo de los términos de la sucesión y, por tanto, un mayorante de ésta (de hecho, el mínimo de los mayorantes). Si esto ocurre se tiene que la sucesión $\{x_{n+1}\}$ también converge a L pero, por otro lado, $\{x_{n+1}\} = \{\sqrt{2+x_n}\}$ debe converger a $\sqrt{2+L}$. Así $L = \sqrt{2+L}$ y, elevando al cuadrado, nos queda $L^2 = 2+L$, ecuación que tiene como soluciones $L=2$ y $L=-1$. Al ser la sucesión de términos positivos -1 no puede ser el límite asi que $L=2$.

Bueno, veamos que efectivamente la sucesión está mayorada por 2. Lo haremos por inducción. Se tiene que $x_1 = 1/2 < 2$ y, si suponemos que para cierto natural n se tiene que $x_n < 2$, entonces $2+x_n < 4$ y $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{4} = 2$ y ya tenemos la demostración de que la sucesión está mayorada.

(b) En el apartado anterior hemos demostrado que la sucesión es monótona y acotada y entonces sabemos que es convergente. Pero el cálculo del límite ya lo hemos hecho en el apartado anterior, en el penúltimo párrafo. Así que la sucesión converge a 2.

(c) Según el apartado anterior la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite 2 así que el límite que se nos pide presenta una indeterminación de la forma 1^∞. Utilizando la regla del número e tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(x_n^2-3)^{\frac{1}{2x_n-4}}\right\} = e^L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n^2-4}{2x_n-4}\right\} = L,$$

pero

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n^2-4}{2x_n-4}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(x_n+2)(x_n-2)}{2(x_n-2)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n+2}{2}\right\} = 2,$$

y el límite buscado es $\lim_{n\to\infty}\left\{(x_n^2-3)^{\frac{1}{2x_n-4}}\right\} = e^2$.

5. Estudia la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 2} \log(1+\frac{1}{n})\log\left(1+\frac{1}{(\log(n))^2}\right).$$

Solución. Hemos visto en clase que si $\{x_n\}$ es una sucesión divergente entonces $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\right\} = e$ y por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log\left(1+\frac{1}{x_n}\right)}{\frac{1}{x_n}}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{x_n\log\left(1+\frac{1}{x_n}\right)\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\right\} = 1.$$

Este resultado nos proporciona la sucesiòn con la que comparar el término general de la serie a estudiar.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log(1+\frac{1}{n})\log\left(1+\frac{1}{(\log(n))^2}\right)}{\frac{1}{n(\log(n))^2}}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\log\left(1+\frac{1}{(\log(n))^2}\right)^{(\log(n))^2}\right\} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}\lim_{n\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{(\log(n))^2}\right)^{(\log(n))^2}\right\} = 1\times 1 = 1,$$

por lo tanto la serie que se nos pide que estudiemos si es convergente lo será si, y sólo si, lo es la serie

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log(n))^2}$$

que ya la hemos estudiado en clase. Como el término general de dicha serie, es decir, la sucesión $\left\{\frac{1}{n(\log(n))^2}\right\}$ es decreciente y convergente a 0 se le puede aplicar el criterio de condensación y entonces la serie $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log(n))^2}$ es convergente si, y sólo si, lo es la serie

$$\sum_{n\geq 2}\frac{2^n}{2^n(\log(2^n))^2} = \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2(\log(2))^2}$$

que es un múltiplo de la serie armónica de índice 2 y, por tanto, convergente como ella. Así concluimos que la serie que se nos pedía estudiar si era convergente lo es.

6. Estudia si es convergente la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{n+3}{2^n}$. En caso de que sea convergente calcula su suma.

Solución.

Aplicando el criterio del cociente, si llamamos $\{a_n\} = \left\{\frac{n+3}{2^n}\right\}$ tendremos que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+4)2^n}{(n+3)2^{n+1}}\right\} = \frac{1}{2} < 1$$

y la serie es convergente.

La serie es del tipo aritmético-geométrica asi que, si llamamos $S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+3}{2^n}$, tendremos que $\frac{1}{2S} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+3}{2^{n+1}} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n+2}{2^n}$.

Si restamos ambas expresiones tendremos que

$$\frac{S}{2} = S - \frac{1}{2S} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+3}{2^n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n+2}{2^n} = \frac{4}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n+3}{2^n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n+2}{2^n} =$$

$$2 + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(n+3)-(n+2)}{2^n} = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 2 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - (1+\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$$

ya que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$. Entonces tenemos que

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+3}{2^n} = 5$$

.

Granada, 29 de noviembre de 2012