

## Prueba de clase 27 de Marzo de 2015

Alumno: \_\_\_\_\_ D.N.I.: \_\_\_\_\_

### RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS TEST<sup>1</sup>

	a)	b)	c)	d)
Pregunta 1	V	F	V	F
Pregunta 2	F	V	F	V
Pregunta 3	F	F	V	V
Pregunta 4	F	V	F	F
Pregunta 5	F	V	F	F

### PREGUNTAS TEST.

**Ejercicio 1.** En un álgebra de Boole  $B$  se definen las operaciones  $a \uparrow b = \overline{ab}$  y  $a \downarrow b = \overline{a + b}$ . Entonces:

- a)  $(x \downarrow y) \uparrow z = \overline{x} \uparrow (y \downarrow \overline{z})$
- b)  $(x \downarrow y) \uparrow z = (x \uparrow y) \downarrow (y \uparrow z)$
- c)  $(x \downarrow z) \uparrow (y \downarrow z) = x + y + z$
- d)  $\overline{x \downarrow y} = \overline{x} \uparrow y$

**Ejercicio 2.** Denotamos por  $D(m)$  al conjunto de los divisores del número natural  $m$  dotados con las operaciones  $\vee = \text{m.c.m.}$  y  $\wedge = \text{m.c.d.}$  Entonces:

- a)  $D(132)$  es un álgebra de Boole con 3 coátomos: 33, 22 y 6.
- b)  $D(165)$  es un álgebra de Boole con 3 coátomos: 33, 55 y 15.
- c)  $D(24)$  es un álgebra de Boole con 3 átomos: 2, 4 y 8.
- d)  $D(110)$  es un álgebra de Boole con 3 átomos: 2, 5 y 11.

**Ejercicio 3.** Dadas las funciones booleanas  $f, g : \mathbb{B}^5 \rightarrow \mathbb{B}$  dadas por

$$f = m_0 + m_5 + m_{15} + m_{21} + m_{23} + m_{24} + m_{27} + m_{31}$$

$$g = M_0 \cdot M_1 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_{10} \cdot M_{15} \cdot M_{22} \cdot M_{23} \cdot M_{28} \cdot M_{30}$$

se tiene:

- a)  $f + g = m_5 + m_{21} + m_{24} + m_{27} + m_{31}$
- b)  $fg = m_1 + m_4 + m_6 + m_{10} + m_{22} + m_{28} + m_{30}$
- c)  $\overline{f} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{16} + m_{17} + m_{18} + m_{19} + m_{20} + m_{22} + m_{25} + m_{26} + m_{28} + m_{29} + m_{30}$
- d)  $\overline{g} = m_0 + m_1 + m_4 + m_6 + m_{10} + m_{15} + m_{22} + m_{23} + m_{28} + m_{30}$

**Ejercicio 4.** Señala si cada una de las siguientes afirmaciones es equivalentes a

$$\Gamma \models \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg \gamma)$$

---

<sup>1</sup>Cada casilla del cuadro debe ser rellenada con V (verdadero) o F (falso).

- a)  $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \models \gamma$   
 b)  $\Gamma \cup \{\beta\} \models \alpha \rightarrow \neg\gamma$   
 c)  $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \neg\gamma\}$  es satisfacible.  
 d)  $\Gamma \cup \{\alpha \rightarrow \beta, \gamma\}$  es insatisfacible.

**Ejercicio 5.** Indica en cada caso si el siguiente conjunto de fórmulas es insatisfacible

- a)  $\{a \rightarrow b, a \rightarrow (b \rightarrow c), \neg c\}$   
 b)  $\{a \rightarrow b, (a \rightarrow b) \rightarrow c, \neg c\}$   
 c)  $\{a \rightarrow b, c \rightarrow (a \rightarrow b), \neg c\}$   
 d)  $\{\neg(a \rightarrow b), a \rightarrow (b \rightarrow c), c\}$

## FIN DE LAS PREGUNTAS TEST

**Ejercicio 6.** Sea  $f : \mathbb{B}^5 \rightarrow \mathbb{B}$  la función dada por

$$f(x, y, z, t, u) = \bar{x}yztu + xy\bar{z}\bar{t}\bar{u} + xyz\bar{t}\bar{u} + xz(\bar{y}u \oplus ut) + (x \downarrow u)yzt + xy\bar{t}(z \oplus u)$$

Calcula una expresión reducida de  $f$  como suma de productos, y expresa  $\bar{f}$  usando únicamente los operadores **producto** y **complemento**.

**Solución 1.** En primer lugar calculamos los minterminos que describen a esta función; algunos vienen ya determinados:

$$\begin{array}{lll} \bar{x}yztu & 01111 & (15) \\ xy\bar{z}\bar{t}\bar{u} & 11000 & (24) \\ xyz\bar{t}\bar{u} & 11110 & (30) \end{array}$$

calculamos el resto:

$$\begin{aligned} xz(\bar{y}u \oplus ut) &= xz(\bar{y}u\bar{u}t + \bar{y}uut) = xz(\bar{y}u(\bar{u} + t) + (y + \bar{u})ut) = \\ &= x\bar{y}z\bar{t}u + xyztu \end{aligned}$$

lo que nos proporciona los minterminos 10101, (21) y 11111, (31). Ahora

$$(x \downarrow u)yzt = (\overline{x + u})yzt = \bar{x}\bar{u}yzt$$

que da el mintermino 01110, (14). Por último

$$xy\bar{t}(z \oplus u) = xy\bar{t}(z\bar{u} + \bar{z}u) = xyz\bar{t}\bar{u} + xy\bar{z}tu$$

que son los minterminos 11100, (28) y 11001, (25). Así que

$$f(x, y, z, t, u) = \Sigma_5 m(14, 15, 21, 24, 25, 28, 30, 31)$$

Usando el algoritmo de Quine-McClusky, por ejemplo, realizamos la minimización.

Procedemos a obtener las agrupaciones

n° de unos	minterm-binario	minterm-decimal
2	11000	24
3	01110	14
	10101	21
	11001	25
	11100	28
3	01111	15
	11110	30
5	11111	31

Agrupación	minterm implicados
1100_	24,25
11_00	24,28
0111_	14,15
_1110	14,30
111_0	28,30
_1111	15,31
1111_	30,31

con lo que en la primera tabla el mintermino 21 es un implicante primo. Calculando las agrupaciones en la tabla anterior aparece

$$\_111\_ , (14, 30, 15, 31)$$

y nos quedan 3 implicantes primos en la segunda tabla: 1100\_, 11\_00, 111\_0.

Procedemos ahora a seleccionar qué implicantes primos son esenciales. Con los tres i.p. esenciales solo queda por cubrir el mintermino 28, y podemos optar por cualquiera de los dos i.p. restantes. Así que tenemos dos posibles soluciones:

$$f(x, y, z, t, u) = x\bar{y}z\bar{t}u + xy\bar{z}\bar{t} + yzt + xy\bar{t}\bar{u}$$

o bien

$$f(x, y, z, t, u) = x\bar{y}z\bar{t}u + xy\bar{z}\bar{t} + yzt + xyz\bar{u}$$

Para dar una expresión de  $\bar{f}$  usamos una reducida de  $f$  y complementamos:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, y, z, t, u) &= \overline{x\bar{y}z\bar{t}u + xy\bar{z}\bar{t} + yzt + xy\bar{t}\bar{u}} = \\ &= \overline{(x\bar{y}z\bar{t}u)} \overline{(xy\bar{z}\bar{t})} \overline{(yzt)} \overline{(xy\bar{t}\bar{u})}\end{aligned}$$

que es una expresión en la que solo se usan productos y complementos.

Tabla de i.p.

		14	15	21	24	25	28	30	31
★	10101			✓					
★	1100_				✓	✓			
	11_00				✓		✓		
	111_0						✓	✓	
★	_111_	✓	✓					✓	✓
		✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓

**Ejercicio 7.** Dadas las fórmulas:

- $\alpha_1 = a \wedge b \rightarrow c \vee d$ .
- $\alpha_2 = c \rightarrow ((b \rightarrow a) \wedge (b \rightarrow \neg a))$ .
- $\alpha_3 = e \rightarrow (a \leftrightarrow \neg c)$ .
- $\alpha_4 = a \vee (c \wedge (\neg b \rightarrow d))$ .
- $\beta = (c \rightarrow b) \rightarrow (a \wedge d)$ .

estudia si es cierto que  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models \beta$ . Caso de no ser cierto, da una interpretación que lo muestre.

**Solución 2.** Se trata de estudiar si es cierta la consecuencia lógica

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models (c \rightarrow b) \rightarrow (a \wedge d)$$

Así que usando el Teorema de la Deducción es equivalente a

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c \rightarrow b\} \models (a \wedge d)$$

y transformando en un problema de insatisficibilidad de un conjunto de fórmulas queda

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c \rightarrow b, \neg(a \wedge d)\} \models \square$$

Calculamos la forma clausular de cada una de las fórmulas del conjunto:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\equiv \neg(a \wedge b) \vee (c \vee d) \equiv \neg a \vee \neg b \vee c \vee d \\ \alpha_2 &\equiv \neg c \vee ((\neg b \vee a) \wedge (\neg b \vee \neg a)) \equiv (\neg c \vee \neg b \vee a) \wedge (\neg c \vee \neg b \vee \neg a) \\ \alpha_3 &\equiv \neg e \vee ((\neg a \vee \neg c) \wedge (c \vee a)) \equiv (\neg e \vee \neg a \vee \neg c) \wedge (\neg e \vee c \vee a) \\ \alpha_4 &\equiv a \vee (c \wedge (b \vee d)) \equiv (a \vee c) \wedge (a \vee b \vee d) \\ c \rightarrow b &\equiv \neg c \vee b \\ \neg(a \wedge d) &\equiv \neg a \vee \neg d\end{aligned}$$

Ahora sustituyendo cada fórmula por las cláusulas a las que da lugar, el problema original es equivalente a

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c \vee d, \neg c \vee \neg b \vee a, \neg c \vee \neg b \vee \neg a, \neg e \vee \neg a \vee \neg c, \neg e \vee c \vee a, a \vee c, a \vee b \vee d, \neg c \vee b, \neg a \vee \neg d\} \models \square$$

Para el que podemos usar el algoritmo de Davis-Putnam. Hay un literal puro (paso 2),  $\lambda = \neg e$ , así que eliminamos las cláusulas donde aparece:

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c \vee d, \neg c \vee \neg b \vee a, \neg c \vee \neg b \vee \neg a, a \vee b \vee d, \neg c \vee b, \neg a \vee \neg d\}$$

Ahora, como no hay cláusulas unit ni literales puros, usamos el Paso 3, y eligiendo un literal cualquiera, por ejemplo  $a$ , obtenemos dos conjuntos que deben ser ambos insatisficibles para que lo sea el inicial. Cuando  $\lambda = a$  queda

$$\{\neg b \vee c \vee d, \neg c \vee \neg b, \neg c \vee b, \neg d\}$$

donde aparece la cláusula unit  $\lambda = \neg d$  y aplicamos el Paso 1:

$$\{\neg b \vee c, \neg c \vee \neg b, \neg c \vee b\}$$

y este conjunto es satisficible para la interpretación  $I(b) = 0, I(c) = 0$ . No hace falta entonces examinar el conjunto de cláusulas para  $\lambda = \neg a$ .

Así que la consecuencia lógica no ocurre, y la interpretación que lo prueba se ha obtenido en el algoritmo

$$I(\neg e) = 1, I(a) = 1, I(\neg d) = 1, I(b) = 0, I(c) = 0$$