TEMA 2

Números naturales y números enteros

Ejercicio 1. Da la expresión en base 2, 8, 10 y 16 de los siguientes números naturales:

1. $10110110001001101011 1)_2$.
2. $3750)_8$.
3. 28452.
4. $8D5)_{16}$.
5. $10110100101011)_2 + 110101001)_2$.
6. $7225)_8 - 3456)_8$.
7. $48572)_{16} + 95883)_{16}$.

Ejercicio 2. Encuentra los sistemas de numeración, si existe alguno, para los que se verifica cada una de las siguientes igualdades:

1. $3 \times 4 = 22$,
2. $41 \times 14 = 1224$,
3. $52 \times 25 = 1693$,
4. $25 \times 13 = 51$,
5. $13^4 = 14641$

Ejercicio 3. Un número escrito en base b tiene 64 cifras. ¿Cuántas cifras tiene el mismo número expresado en base b^3?.

Ejercicio 4. Dado un número natural $n \geq 10$, definimos el número natural $P(n)$ como el número que resulta de colocar la cifra de las unidades a la izquierda (por ejemplo, si $n = 3148$ entonces $P(n) = 8314$). Calcula un número n que termine en 6 y que verifique que $4n = P(n)$.

Ejercicio 5. Enumera los divisores positivos de 120, y calcula cuántos divisores tiene el número 118800.

Ejercicio 6. Determina la factorización como producto de números primos de $10!$ y $15!$. ¿Cuántos divisores tiene cada uno de ellos?.

Ejercicio 7. Encuentra el valor máximo de n tal que 2^n divide a 25!.

Ejercicio 8. ¿Cuántos ceros tiene al final el número $100!$?.

Ejercicio 9. Encuentra todas las soluciones enteras de $x^2 - y^2 = 32$.

Ejercicio 10. Encuentra todas las parejas de números a, b tales que $mcd(a, b) = 210$ y $mcm(a, b) = 840$.

Ejercicio 11. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que b es divisor de a y $a+2$. Demuestra que $b = 1$ ó $b = 2$.

Ejercicio 12. Explica porqué si un número natural $a > 1$ no es primo, entonces tiene un divisor primo menor o igual que $\sqrt{a}$.

Ejercicio 13. Calcula números naturales con el siguiente número de divisores positivos:

1. 2.
2. 3.
3. 4.
4. 13.
5. 28.

En cada caso, ¿cuál es el número más pequeño que cumple la condición requerida?

Ejercicio 14. ¿Para cuántos valores naturales c comprendidos entre 10 y 20 tiene solución la ecuación diofántica $84x + 990y = c$?

Ejercicio 15. Resuelve la congruencia $ax \equiv 3 \bmod 13$, donde $a = 15^{1357}$.

Ejercicio 16. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ primos relativos. Demuestra que si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$. Estudia que pasa si $\mathrm{mcd}(a, b) \neq 1$.

Ejercicio 17. Calcula el resto de dividir $100^{103^{109}}$ entre 17.

Ejercicio 18. Jaimito salió todos los días del pasado mes de octubre a dar un paseo en bicicleta. Dependiendo de su estado físico cada día, elegía entre dos recorridos. El más largo era 25'32 kilómetros más largo que el corto.

A final de mes vio que había recorrido un total de 1769'93 kilómetros. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los recorridos, y cuantos días realizó cada uno de ellos? (la precisión de las mediciones de la distancia recorrida alcanza hasta las decenas de metros).

Ejercicio 19. Dado un número entero n, demuestra que $\mathrm{mcd}(8n+3, 5n+2) = 1$.

Ejercicio 20. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Demuestra que el máximo común divisor de $35a+57$ y $45a+76$ vale 1 ó 19. ¿Para que valores de a es este máximo común divisor igual a 19?.

Ejercicio 21. Demuestra que si p es un número primo, entonces $\sqrt{p}$ es un número irracional. Concluye que $\sqrt{75}$ es irracional.

Ejercicio 22. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En ellas, a y b denotan un número entero cualquiera, y p un número primo. Razona la respuesta.

1. Si $\mathrm{mcd}(a, p^2) = p$ entonces $\mathrm{mcd}(a^2, p^2) = p^2$.
2. Si $\mathrm{mcd}(a, p^2) = p$ y $\mathrm{mcd}(b, p^2) = p^2$ entonces $\mathrm{mcd}(ab, p^4) = p^4$.
3. Si $\mathrm{mcd}(a, p^2) = p$ y $\mathrm{mcd}(b, p^2) = p$ entonces $\mathrm{mcd}(ab, p^4) = p^2$.
4. Si $\mathrm{mcd}(a, p^2) = p$ entonces $\mathrm{mcd}(a+p, p^2) = p$.

Ejercicio 23. En $\mathbb{Z}_{300}$ realiza, si es posible, los siguientes cálculos:

- $25 \cdot 60$.
- $127 \cdot (-100)$.

- 237^{-1}.
- $13 - 50 \cdot 101^{-1}$.
- Encuentra $x \neq 0$ tal que $111 \cdot x = 0$.
- Encuentra x tal que $13x + 25 = 32x - 50$.
- Encuentra x tal que $11x - 100 = 45x + 12$.

Ejercicio 24. Calcula, si es posible, 1392^{-1} en $\mathbb{Z}_{7585}$.

Ejercicio 25. Calcula el resto de dividir 4225^{1850} entre 1234.

Ejercicio 26. Demuestra que si n es par, $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$, mientras que si n es impar, entonces $\varphi(2n) = \varphi(n)$.

Ejercicio 27. Demuestra que:

1. Un número escrito en base 10 es par si, y sólo si, su última cifra es par.
2. Un número escrito en base 10 es un múltiplo de 3 si, y sólo si, la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
3. Un número escrito en base 10 es múltiplo de 4 si, y sólo si, su última cifra más dos veces la penúltima es múltiplo de 4.
4. Un número escrito en base 10 es un múltiplo de 9 si, y sólo si, la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.
5. Un número escrito en base 10 es un múltiplo de 5 si acaba en 0 o en 5.
6. Si $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ es la expresión decimal de un número x, entonces x es múltiplo de 7 si, y sólo si, el número $y = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 - 2 \cdot a_0$ es múltiplo de 7 (es decir, x es múltiplo de 7 si, y sólo si, $(x \text{ div } 10) - 2 \cdot (x \text{ mód } 10)$ es múltiplo de 7). Comprueba que $x \equiv 3y (\text{mód } 7)$.
7. Un número escrito en hexadecimal es múltiplo de 4 si, y sólo si, termina en 0, 4, 8 ó C.
8. Un número escrito en base 10 es múltiplo de 11 si, y sólo si, la suma de las cifras que ocupan un lugar par menos la suma de las cifras que ocupan posiciones impares es un múltiplo de 11
9. Un número escrito en base 8 es un múltiplo de 7 si, y sólo si, la suma de sus cifras es un múltiplo de 7.

Ejercicio 28. Un número entero n se dice que está escrito en *forma ternaria equilibrada* si lo tenemos expresado como

$$n = e_n \cdot 3^n + e_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \cdots + e_1 \cdot 3 + e_0$$

donde e_i vale -1, 0 ó 1.

1. Calcula una expresión ternaria equilibrada de los números 5, -12, 35, 121, 123456.
2. Demuestra que todo número entero distinto de cero admite una única expresión ternaria equilibrada en la que $e_n \neq 0$.

Ejercicio 29. Sin realizar el cálculo, halla las cifras que faltan en los siguientes números:

1. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 = 61 - 4 - 0$

2. $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 = -07 - 84 - 00$
3. $17! = 35 - 6874 - 8096000$

Ejercicio 30. Prueba que dado un número entero cualquiera m se verifica una de las siguientes posibilidades:

1. $m^2 \equiv 0 \pmod 8$,
2. $m^2 \equiv 1 \pmod 8$,
3. $m^2 \equiv 4 \pmod 8$

Concluye que si m es impar, entonces $m^2 - 1$ es múltiplo de 8.

Ejercicio 31 (El problema del mono y los cocos)**.** Cinco hombres y un mono naufragan en una isla desierta. Durante el primer día los hombres se dedican a recoger cocos. Al final del día deciden dejar el reparto para el día siguiente. Por la noche, uno de ellos despierta y, desconfiado, decide separar su parte. Divide los cocos en cinco montones, toma su parte y, como sobra un coco, se lo da al mono. Poco después, un segundo náufrago se despierta y hace lo mismo. Al dividir los cocos en cinco montones, vuelve a sobrar un coco y también se lo da al mono. Uno tras otro, el tercero, cuarto y quinto náufragos hacen lo mismo. Al día siguiente por la mañana, dividen los cocos en cinco montones sin que sobre ninguno. ¿Cuántos cocos se habían recolectado inicialmente?

Ejercicio 32. Calcula los números que hay entre 20000 y 30000 que terminen en 39, al escribirlos en base 4 terminan en 33, y al escribirlos en base 8 acaban en 37.

Ejercicio 33. Resuelve las siguientes congruencias:

1. $3x \equiv 2 \pmod 5$,
2. $7x \equiv 4 \pmod{10}$,
3. $6x \equiv 3 \pmod 4$.

Ejercicio 34. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en congruencias:

1. $$\left\{\begin{array}{ll} x \equiv 1 & \pmod 2 \\ 6x \equiv 3 & \pmod 9 \\ 3x \equiv 3 & \pmod 5 \end{array}\right.$$
2. $$\left\{\begin{array}{ll} x \equiv 1 & \pmod 2 \\ x \equiv 2 & \pmod 4 \end{array}\right.$$
3. $$\left\{\begin{array}{ll} x \equiv 3 & \pmod 6 \\ x \equiv 1 & \pmod 4 \\ 2x \equiv 1 & \pmod 5 \end{array}\right.$$

Ejercicio 35. Resuelve la congruencia $1211^{399} n \equiv 20 \pmod{17}$.

Ejercicio 36. Resuelve el siguiente sistema de congruencias:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 17834x & \equiv & 1870 & \pmod{21989} \\ 89710x & \equiv & 10489 & \pmod{8147} \\ 10022x & \equiv & 81984 & \pmod{20984} \\ 20987x & \equiv & 10002 & \pmod{11090} \\ 4094x & \equiv & n & \pmod{56271} \end{array}\right.$$

Donde n es el número formado por las cinco últimas cifras de tu DNI (es decir, si D es tu DNI, entonces $n = D$ mód 100000).

Ejercicio 37. Determina el número de enteros entre 1500 y 2500 tales que

(a) sus dos últimas cifras en base dos son 11,

(b) sus dos últimas cifras en base tres son 00 y

(c) sus dos últimas cifras en base cinco son 12.

Ejercicio 38. ¿Cuántos números hay entre 60000 y 90000 que terminen en 45, y que su triple dé resto 97 al dividirlos por 122?

Ejercicio 39. Dado un número natural n, denotaremos por $S(n)$ a la suma de sus cifras.

1. Demuestra que para cualquier n se tiene que $n \equiv S(n) \pmod{9}$.
2. Calcula los divisores de 2010.
3. Enuentra todos los números naturales para los que $n(S(n) - 1) = 2010$.

Ejercicio 40. Calcula las soluciones enteras de cada una de las siguientes ecuaciones diofánticas:

1. $2x + 3y = 7$.
2. $6x + 10y = 16$.
3. $10x + 23y = 18$.
4. $21x + 14y = 15$.
5. $232x - 341y = 17$.
6. $6x + 9y + 15z = 7$.
7. $6x + 10y + 15z = 7$.
8. $35x + 45y + 55z = 60$.

Ejercicio 41. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación diofántica

$$210x - 91y = 77$$

que verifiquen que $-500 \leq x, y \leq 500$?

Ejercicio 42. Calcula 5 soluciones enteras de la ecuación

$$3761373923x + 472926384y = 382734927$$

Ejercicio 43.
1. Calcula una solución entera de la ecuación

$$79257x + 78610y = 1$$

2. Encuentra el inverso (para el producto) de 79257 en $\mathbb{Z}_{78610}$.
3. Encuentra 78610^{-1} en $\mathbb{Z}_{79257}$.
4. Calcula todas las soluciones de la ecuación

$$79257x + 78610y = 10$$

Ejercicio 44. Encuentra $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que 31 sea múltiplo de $5a + 7b + 11c$.

Demuestra que si x, y, z son números enteros tales que $5x + 7y + 11z$ es múltiplo de 31, también lo son $21x + 17y + 9z$ y $6x + 27y + 7z$.

Preguntas test

Ejercicio 45. Dado el sistema de congruencias

$$\begin{cases} 23x \equiv 54 & (\text{mód } 60) \\ 12x \equiv 21 & (\text{mód } 35) \end{cases}$$

a) Tiene una solución en el intervalo $[1000, 2000]$.

b) Tiene más de una solución en el intervalo $[1000, 2000]$.

c) Tiene infinitas soluciones, pero ninguna en el intervalo $[1000, 2000]$.

d) No tiene solución, pues $\mathrm{mcd}(60, 35) \neq 1$.

Ejercicio 46. La clase del 28 módulo 75

a) Tiene un inverso.

b) No tiene inverso porque ni 4 ni 15 son primos.

c) Tiene dos inversos.

d) Es un divisor de cero.

Ejercicio 47. Las dos últimas cifras del número $37129373222227^{524525273010}$ son

a) 27.

b) 49.

c) 91.

d) 63.

Ejercicio 48. Sea p un número primo. La congruencia $ax \equiv 1(\text{mód } p^2)$

a) No tiene solución, pues p^2 no es primo.

b) Tiene solución si, y sólo si, $ax \equiv 1(\text{mód } p)$ tiene solución.

c) Tiene solución, ya que $\mathrm{mcd}(a, 1)|p^2$.

d) Tiene solución salvo que a sea múltiplo de p^2.

Ejercicio 49. El número de unidades de $\mathbb{Z}_{123}$ es

a) 0

b) 40

c) 80

d) 122

Ejercicio 50. Disponemos de 45 billetes de 20 euros, y 18 billetes de 50 euros. ¿De cuántas formas distintas podemos conseguir 1110 euros?

(a) 7.

(b) 11.

(c) 9.

(d) 5.

Ejercicio 51. Sea $a = 24^{1234}$. La congruencia $ax \equiv 6 \text{ mód } 11$ tiene como solución a:

a) $x = 3$.

b) $x = 7$.

c) $x = 10$.

d) $x = 2$.

Ejercicio 52. El número de divisores positivos de $5^2 \cdot 6^5 \cdot 8^6 \cdot 9^4$ es:

a) $24 \cdot 14 \cdot 3$.

b) $(5^2 - 5) \cdot (6^5 - 6^4) \cdot (8^6 - 8^5) \cdot (9^4 - 9^3)$.

c) $3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5$.

d) $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4$.