Cálculo

1ºA Grado en Ingeniería Informática

Primer Parcial (Tipo I)

Curso 2014/2015

1. **(3 puntos)** Calcula:

   a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^{1/x}$.

   b) Calcula el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el punto $a = 0$ y de orden 3.

Solución:

a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo "0/0". Parta resolver dicha indeterminacación aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1,$$

con lo que el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞".

Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^{1/x} = e^L \iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\log(1+x)}{x} - 1\right) = L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\log(1+x)}{x} - 1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$$

aplicamos la regla de L'Hôpital, ya que que presenta una indeterminación del tipo "0/0". Nos queda entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^{1/x} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

b) Para calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de la función seno en $a=0$ tenemos que calcular las derivadas sucesivas en el cero hasta la de orden 3. Es decir,

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x) \;\Rightarrow\; f(0)=0 \\ f'(x) &= \cos(x) \;\Rightarrow\; f'(0)=1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen}(x) \;\Rightarrow\; f''(0)=0 \\ f'''(x) &= -\cos(x) \;\Rightarrow\; f'''(0)=-1 \end{aligned}$$

Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}$$

2. **(2.5 puntos)** Se considera la función $f\colon \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right)$.

   a) ¿Existe algún $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?

   b) ¿Es estrictamente monónota la función f?

Solución:

a) Se trata de una función derivable en todo el dominio. Para que la recta tangente a la gráfica de f en un punto sea horizontal, la derivada en dicho punto tendrá que ser cero. Por tanto, calculamos la derivada de f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right)^2}\,\frac{\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x))+\cos(x)(1+\operatorname{sen}(x))}{(1-\operatorname{sen}(x))^2} \\ &= \frac{2\cos(x)}{\left[1+\left(\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right)^2\right](1-\operatorname{sen}(x))^2} = \frac{2\cos(x)}{\left[\frac{(1-\operatorname{sen}(x))^2+(1+\operatorname{sen}(x))^2}{(1-\operatorname{sen}(x))^2}\right](1-\operatorname{sen}(x))^2} \\ &= \frac{2\cos(x)}{(1-\operatorname{sen}(x))^2+(1+\operatorname{sen}(x))^2} = \frac{2\cos(x)}{2+2\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)} \end{aligned}$$

Es decir, $f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \cos(x)=0$. Pero observemos que en el dominio dado $\cos(x)\neq 0$. Por tanto la respuesta es que no hay ningún punto donde la recta tangente sea horizontal.

b) El apartado anterior nos da la información de que la derivada no se anula nunca en $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, con lo deducimos que f es estrictamente monótona. Como además $f'(x)>0$, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ (todos sus factores son positivos), tenemos que f es estrictamente creciente.

3. **(2.5 puntos)** Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = xe^{-x}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

a) Calcula la imagen de f.

b) Determina el número de soluciones de la ecuación $e\,f(x) = 1$.

Solución:

a) La función dada es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Para calcular su imagen, vamos a buscar posibles extremos relativos calculando sus puntos críticos. Para ello, derivamos f.

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)\ ,\forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Calculemos los intervalos de monotonía para decidir si el punto $x = 1$ es punto de extremo relativo o no:

$$\begin{aligned}
&\text{Si } x < 1 \Rightarrow\ 1-x > 0 \Rightarrow\ f'(x) > 0 \Rightarrow\ f\ \text{ es estrictamente creciente}\\
&\text{Si } x > 1 \Rightarrow\ 1-x < 0 \Rightarrow\ f'(x) < 0 \Rightarrow\ f\ \text{ es estrictamente decreciente}
\end{aligned}$$

Se deduce entonces que en el punto $x = 1$ se alcanza un máximo relativo y, al ser el único punto crítico de la función, es el punto de máximo absoluto.

Calculamos la imagen de f:

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty,1]) \cup f([1,+\infty[) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)] \cup]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)]$$

Obsérvese que hemos empleado la continuidad y la monotonía de f en cada intervalo para calcular su imagen. Calculamos los límites en los extremos del dominio:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ (por la escala de infinitos)}\\
f(1) &= e^{-1}
\end{aligned}$$

Por tanto: $f(\mathbb{R}) =]-\infty, e^{-1}] \cup]0, e^{-1}] =]-\infty, e^{-1}]$.

b) Para encontrar el número de soluciones de la ecuación dada vamos a determinar el número de ceros de la función siguiente:

$$g(x) = ef(x) - 1$$

Esta función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ y su derivada es: $g'(x) = ef'(x)$. Por tanto, tiene el mismo punto crítico que f (es decir, $x = 1$); y además, ese punto crítico será también el máximo absoluto de la función g. Como

$$g(1) = ef(1) - 1 = e\frac{1}{e} - 1 = 0\ ,$$

y antes de ese punto la función g crece estrictamente y después de él, decrece estrictamente, concluimos que g sólo admite un solo cero que es $x = 1$. Y por tanto, la ecuación planteada tiene una única solución, que además es $x = 1$.

4. **(2 puntos)** De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10, halla las dimensiones de aquél cuya hipotenusa sea mínima.

Solución: Llamemos x e y a los catetos del triángulo. Sabemos entonces que $x+y = 10$. La función que hay que maximizar es la hipotenusa, es decir: $\sqrt{x^2+y^2}$. Si despejamos y en función de x: $y = 10-x$, con lo que la función a estudiar es $\sqrt{x^2+(10-x)^2}$. Es decir:

$$f(x) = \sqrt{x^2+(10-x)^2} = \sqrt{x^2+100-20x+x^2} = \sqrt{2x^2-20x+100}$$

Esta función (un polinomio de grado 2) se podría definir en todo $\mathbb{R}$; pero si las variables x e y indican dimensiones, podemos considerar que el dominio es $[0,10]$.

Buscamos posibles puntos de extremos en $]0,10[$. Para ello, calculamos puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}} = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Para calcular el mínimo absoluto, al ser el dominio un intervalo compacto, sólo nos queda evaluar la función:

$$f(0) = 10 = f(10) > f(5) = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}\ .$$

Por tanto las dimensiones que hacen que la hipotenusa sea mínima son los catetos iguales a 5.

Granada, 27 de noviembre de 2014