Cálculo

1ºGrado en Ingeniería Informática

Examen Final
Septiembre 2014

1. Calcula el siguiente límite: (1.25 pto.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\log\left(n^2+3n+1\right)-\log\left(n^2+1\right)\right)^n .$$

Solución: Escribimos la sucesión de esta otra forma haciendo uso de las propiedades de la función logaritmo:

$$\left(1+\log\left(n^2+3n+1\right)-\log\left(n^2+1\right)\right)^n = \left(1+\log\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1}\right)\right)^n$$

que presenta una indeterminación del tipo "1^∞". Aplicamos entonces la regla del número e y nos queda:

$$n\left(1+\log\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1}\right)-1\right) = n\left(\log\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1}\right)\right) = \log\left[\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1}\right)^n\right] .$$

Observamos que la sucesión a la que se le aplica el logaritmo, $\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1}\right)^n$, presenta nuevamente la indeterminación del tipo "1^∞". Volvemos entonces a aplicar la regla del número e:

$$n\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1}-1\right) = n\left(\frac{n^2+3n+1-n^2-1}{n^2-1}\right) = \frac{3n^2}{n^2+1} \to 3 .$$

Volviendo hacia atrás, deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1}\right)^n = e^3 ,$$

y por tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\log\left[\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1}\right)^n\right] = \log(e^3) = 3 .$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\log\left(n^2+3n+1\right)-\log\left(n^2+1\right)\right)^n = e^3 .$$

2. Calcula los siguientes límites: (2 ptos.)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \operatorname{tg}(x) - 1}{\operatorname{tg}^2(x)}$. *b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\operatorname{sen}(x) - e^x}{\operatorname{arc\,tg}(x)}$.

Solución:

a) El límite propuesto presenta una indeterminación del tipo "0/0". Para resolver dicha indeterminación aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \operatorname{tg}(x) - 1}{\operatorname{tg}^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+\operatorname{tg}^2(x))}{2\operatorname{tg}(x)\,(1+\operatorname{tg}^2(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\,(1+\operatorname{tg}^2(x))} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}(x)}$$

Tenemos un producto de límites donde el primer límite no presenta ninguna indeterminación y vale $1/2$. El segundo factor sí presenta indeterminación del tipo "0/0", por lo que volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital en ese segundo factor solamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\operatorname{tg}(x)(1+\operatorname{tg}^2(x))}{1+\operatorname{tg}^2(x)} = 1\,.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \operatorname{tg}(x) - 1}{\operatorname{tg}^2(x)} = \frac{1}{2}$$

b) Este límite también presenta una indeterminación del tipo "0/0". Para resolver dicha indeterminación aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen}(x) - e^x}{\operatorname{arc\,tg}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^x}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} (1+x^2)\,(\cos(x) - e^x) = 0\,.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen}(x) - e^x}{\operatorname{arc\,tg}(x)} = 0$$

3. Se considera la función $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por (2 pto.)

$$H(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt[4]{1+t^2}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Estudiar los posibles extremos absolutos y relativos de H.

b) Probar que $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} H(x) = 2$.

c) Calcular la imagen de H.

Solución:

a) La función H es continua y derivable en todo su dominio por ser composición de dos funciones que lo son: la integral indefinida $\int_0^x \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt[4]{1+t^2}}$ que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ como consecuencia del teorema fundamental del Cálculo, y la función x^2 por ser una función potencial. Por tanto, para calcular los posibles extremos de H calculamos su derivada:

$$H'(x) = \frac{e^{\sqrt{x^2}}}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,2x = \frac{e^{|x|}}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,2x.$$

Esta función derivada sólo se anula en $x = 0$; por tanto, sólo existe un punto crítico. Para decidir si es punto de extremo relativo, vamos a estudiar los intervalos de monotonía de H. Para ello:

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow H'(x) < 0 \Rightarrow H \text{ es estrictamente decreciente},$$
$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow H'(x) > 0 \Rightarrow H \text{ es estrictamente creciente}.$$

Por tanto, en el punto $x = 0$ se alcanza un mínimo relativo que, al ser el único punto crítico de la función, se convierte en el punto donde se alcanza el mínimo absoluto de H. Además este mínimo absoluto vale $H(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt[4]{1+t^2}} = 0$.
Nos preguntaban también sobre la posible existencia de máximo absoluto y relativo. Al haber obtenido un único punto crítico que es el mínimo absoluto, es claro que no van a alcanzarse ni el máximo absoluto ni van a existir máximos relativos.

b) Vamos ahora a comprobar $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}H(x) = 2$. Simplemente haremos la siguiente modificación en la expresión de la función:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}H(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{H(x)}{e^x}.$$

De esta forma podremos aplicar la segunda regla de L'Hôpital ya que tenemos un cociente donde el denominador diverge positivamente. Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{H(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{H'(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{|x|}}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{|x|}\,2x}{\sqrt[4]{1+x^4}\,e^x}.$$

Podemos suponer que la variable "x" es positiva con lo que el límite a calcular sería:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{H'(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\,2x}{\sqrt[4]{1+x^4}\,e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt[4]{\frac{x^4}{1+x^4}} = 2.$$

c) El límite del apartado anterior nos sirve para deducir el comportamiento de H en $+\infty$. En efecto:

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{H(x)\,e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} H(x)\,e^x = 2 \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Notemos además que la función H es par; esto es, $H(-x) = H(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que el comportamiento de H en $-\infty$ es análogo al comportamiento en $+\infty$. Por tanto, para calcular la imagen de H basta con calcular la imagen en los positivos. La imagen entonces es el intervalo que recorre la variable "y" que toma el valor de mínimo absoluto en $H(0) = 0$ hasta $+\infty$. Es decir:

$$H(\mathbb{R}) = H(\mathbb{R}_0^+) = H([0,+\infty[) = [0,+\infty[.$$

4. Estudia la convergencia de la serie $\sum\left(\frac{1+2n}{4+2n}\right)^{\frac{n^3}{2(n+1)}}$. (1.25 pto.)

Solución: Aplicamos el criterio del cociente para el estudio del carácter de una serie. Si llamamos a_n al término general de la serie planteada:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1+2n}{4+2n}\right)^{\frac{n^3}{2(n+1)}}} = \left(\frac{1+2n}{4+2n}\right)^{\frac{n^3}{2n(n+1)}} = \left(\frac{1+2n}{4+2n}\right)^{\frac{n^2}{2(n+1)}}.$$

La sucesión que nos queda presenta una indeterminación del tipo "1^∞" por lo que aplicamos la regla del número e:

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{2(n+1)}\left(\frac{1+2n}{4+2n} - 1\right) &= \frac{n^2}{2(n+1)}\left(\frac{1+2n-4-2n}{4+2n}\right) = \frac{n^2}{2(n+1)}\left(\frac{-3}{4+2n}\right)\\ &= \frac{-3n^2}{2(n+1)(4+2n)} = \frac{-3n^2}{4n^2+12n+8} \to \frac{-3}{4}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-3/4} < 1$ de lo que se deduce que la serie dada es convergente.

5. Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+2}}{4^{n+3}}$. (1 pto.)

Solución: Vamos a descomponer el término general de la serie dada como diferencia de dos series que serán, cada una de ellas, producto de una constante por una serie geométrica. En efecto:

$$\frac{3^{n+1} - 2^{n+2}}{4^{n+3}} = \frac{3}{4^3}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{2^2}{4^3}\left(\frac{2}{4}\right)^n = \frac{3}{4^3}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{2^2}{4^3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Por tanto, la serie dada es convergente al ser la diferencia de dos series convergentes: cada sumando es el producto de una constante por una serie geométrica convergente (las razones de ambas series son menores que 1). Por lo que la suma de la serie es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}-2^{n+2}}{4^{n+3}} = \frac{3}{4^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{2^2}{4^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{4^3}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right) - \frac{2^2}{4^3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{3}{4^3}\cdot 4 - \frac{2^2}{4^3}\cdot 2 = \frac{3}{4^2} - \frac{2^3}{4^3} = \frac{12-8}{4^3} = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16},$$

donde hemos usado la fórmula de la suma de una serie geométrica; es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \ , \ \forall |r|<1\,.$$

6. Discute el número de soluciones de la ecuación $x^2 = \log(1/x)$ en $]1,+\infty[$. (1.5 pto.)

Solución: Como:

$$x^2 = \log(1/x) \iff x^2 - \log(1/x) = 0\,,$$

para encontrar el número de soluciones de esta ecuación, vamos a determinar el número de ceros de la función $f\colon\,]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = x^2 - \log(1/x) = x^2 - \log(1) + \log(x) = x^2 + \log(x)\,.$$

Esta función es estrictamente creciente en el intervalo $]1,+\infty[$ al ser suma de funciones estrictamente crecientes. De todas formas, vamos a comprobarlo con el estudio de su derivada:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

Observamos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; en particular, la derivada de f es positiva en el intervalo $]1,+\infty[$. Deducimos entonces que f es estrictamente creciente en todo su dominio. Finalmente, analicemos el comportamiento de f en los extremos del dominio:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

De lo anterior obtenemos que f no tiene ningún cero y, equivalentemente, la ecuación planteada no admite ninguna solución en el intervalo $]1,+\infty[$.

Nota: Hay una forma inmediata de llegar a la misma conclusión. En efecto, si nos fijamos en el signo de cada uno de los dos miembros de la ecuación planteada, estos son distintos.

El miembro izquierdo es x^2 que siempre es positivo en el dominio dado, y el miembro derecho es el logaritmo de un número menor que 1, por tanto es negativo. Conclusión, ambos miembros nunca pueden igualarse en $]1,+\infty[$.

7. Elige uno de los dos apartados: (1 pto.)

   a) Estudia la función $f(x) = \frac{x\log^2(x)}{1+\log(x)}$, con $x > 0$.

   b) Calcula $\int \operatorname{sen}(2x)e^x\,dx$.

Solución:

a) En primer lugar vamos a estudiar el dominio de f. Observamos que el denominador se anula en un punto. En efecto:

$$1+\log(x) = 0 \iff \log(x) = -1 \iff x = e^{-1}.$$

Por tanto el dominio de f es $\mathbb{R}^+ \setminus \{e^{-1}\}$.

En el dominio descrito esta función es continua (por ser cociente de continuas con denominador distinto de cero) y derivable (por el mismo motivo que es continua).

Vamos a analizar la monotonía de la función. Para ello calculamos la derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\log^2(x) + 2x\frac{1}{x}\log(x)\right)(1+\log(x)) - \frac{1}{x}x\log^2(x)}{(1+\log(x))^2} \\ &= \frac{\left(\log^2(x) + 2\log(x)\right)(1+\log(x)) - \log^2(x)}{(1+\log(x))^2} \\ &= \frac{\log^2(x) + 2\log(x) + \log^3(x) + 2\log^2(x) - \log^2(x)}{(1+\log(x))^2} \\ &= \frac{\log(x)\left(\log^2(x) + 2\log(x) + 2\right)}{(1+\log(x))^2}. \end{aligned}$$

La derivada de f se anula sólo, y sólo cuando $\log(x) = 0 \iff x = 1$. Observemos que el segundo factor que aparece en el numerador de la expresión de $f'(x)$ no se anula nunca. (Comprueba que $y^2+2y+2 > 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$). Por tanto, la función f sólo tiene un punto crítico en $x = 1$.

Estudiamos los intervalos de monotonía de f. Para ello, la factorización de $f'(x)$ nos permite centrar el estudio en el factor $\log(x)$, ya que los restantes factores son siempre positivos.

$$\begin{aligned}
&\text{Si } 0<x<e^{-1} \Rightarrow \log(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente},\\
&\text{Si } e^{-1}<x<1 \Rightarrow \log(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente},\\
&\text{Si } 1<x \Rightarrow \log(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}.
\end{aligned}$$

Por tanto, f admite un punto de mínimo relativo en $x=1$.

Para finalizar, calculamos la imagen de f. Los intervalos de monotonía de la función nos permiten descomponer el conjunto imagen como sigue:

$$f\left(\mathbb{R}^+ \setminus \{e^{-1}\}\right) = f\left(]0,e^{-1}[\right) \cup f\left(]e^{-1},1]\right) \cup f\left([1,+\infty[\right).$$

Para determinar estos intervalos, calculamos los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \text{(el numerador tiende a cero y el denominador a } -\infty),\\
&\lim_{x\to e^{-1}_-} f(x) = -\infty \quad \text{(el numerador tiende a } e^{-1} \text{ y es positivo, y el denominador a 0 y es negativo)}\\
&\lim_{x\to e^{-1}_+} f(x) = +\infty \quad \text{(el numerador tiende a } e^{-1} \text{ y es positivo, y el denominador a 0 y es positivo)}\\
&f(1) = 0.
\end{aligned}$$

Para el comportamiento en $+\infty$ aplicamos la regla de L'Hôpital :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2(x) + 2x\frac{1}{x}\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x\log^2(x) + 2\log(x) = +\infty.$$

Por tanto, el conjunto imagen es:

$$f\left(\mathbb{R}^+ \setminus \{e^{-1}\}\right) =]-\infty,0[\cup[0,+\infty[\cup[0,+\infty[= \mathbb{R}$$

b) Aplicamos el método de integración por partes:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(2x)\, e^x\, dx =& \begin{bmatrix} u=\operatorname{sen}(2x) \Rightarrow du = 2\cos(2x)\,dx \\ dv = e^x\,dx \Rightarrow v = e^x \end{bmatrix}\\
=& e^x \operatorname{sen}(2x) - 2\int \cos(2x)\, e^x\, dx.
\end{aligned}$$

Nos vuelve a quedar una integral que haremos también por partes:

$$\begin{aligned}
\int \cos(2x)\, e^x\, dx =& \begin{bmatrix} u=\cos(2x) \Rightarrow du = -2\operatorname{sen}(2x)\,dx \\ dv = e^x\,dx \Rightarrow v = e^x \end{bmatrix}\\
=& e^x \cos(2x) + 2\int \operatorname{sen}(2x)\, e^x\, dx.
\end{aligned}$$

Volviendo a la que teníamos en principio:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(2x)\, e^x\, dx =& e^x \operatorname{sen}(2x) - 2\int \cos(2x)\, e^x\, dx \\ &= e^x \operatorname{sen}(2x) - 2\, e^x \cos(2x) - 4\int \operatorname{sen}(2x)\, e^x\, dx\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int \operatorname{sen}(2x)\, e^x\, dx + 4\int \operatorname{sen}(2x)\, e^x\, dx = e^x\, (\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x))\ ,$$

$$5\int \operatorname{sen}(2x)\, e^x\, dx = e^x\, (\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x))\ ,$$

$$\int \operatorname{sen}(2x)\, e^x\, dx = \frac{e^x\, (\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x))}{5}\ .$$

Granada, 1 de septiembre de 2014