Cálculo
1ºA Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial (II)
Curso 2013/2014

1. **(2 puntos)** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$x_1 = 1$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{5x_n+2}\ ,\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{5+2} = \sqrt{7/3} > x_1 = 1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n < x_{n+1} \Rightarrow 5x_n < 5x_{n+1} \Rightarrow 5x_n + 2 < 5x_{n+1} + 2$$
$$\Rightarrow \sqrt{5x_n+2} < \sqrt{5x_{n+1}+2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{5x_n+2} < \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{5x_{n+1}+2} \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por $x_1 = 1$. Veamos que está acotada superiormente por 2. Esto es, que $x_n \leq 2\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1 \leq 2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 2$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 2$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \leq 2 \Rightarrow 5x_n \leq 10 \Rightarrow 5x_n + 2 \leq 12 \Rightarrow \sqrt{5x_n+2} \leq \sqrt{12}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{5x_n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{12} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow x_{n+1} \leq 2$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

b) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{5x+2}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{5x+2} \Rightarrow 3x^2 = 5x+2 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 2$ y $x = -1/3$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que 1. El motivo es que $1 \leq x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 2$.

2. **(2 puntos)** Calcula el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\log\left((n+1)!\right)} \right\}$$

Solución: Observamos que tenemos un cociente donde el denominador, claramente, crece a infinito. Aplicamos el criterio de Stolz y, si llamamos a_n al numerador y b_n al denominador, tendremos que estudiar el límite del siguiente cociente:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n+1}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - \left[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right]}{\log((n+2)!) - \log((n+1)!)} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}{\log\left(\frac{(n+2)!}{(n+1)!}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}{\log(n+2)} \to 0\end{aligned}$$

ya que se trata de un cociente donde el numerador tiende a 1 y el denominador tiende a $+\infty$.

Como $\lim \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 0$, aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\log\left((n+1)!\right)} \right\} = 0$$

3. **(3 puntos)** Calcula el límite de la sigiente sucesión:

$$\left\{n^2 \log\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)\right\}$$

Como consecuencia del límite anterior deduce el carácter de la serie:

$$\sum \log\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)$$

Solución: Por las propiedades del logaritmo, la sucesión dada se puede reescribir como sigue:

$$\left\{\log\left[\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)^{n^2}\right]\right\}$$

Como la sucesión $\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)^{n^2}$ presenta una indeterminación del tipo "1^∞", aplicamos la regla del número e:

$$n^2\left[\frac{n^3+7n}{n^3+4}-1\right] = n^2\left[\frac{n^3+7n-n^3-4}{n^3+4}\right] = \frac{7n^3-4n^2}{n^3+4} \to 7$$

Por tanto, $\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)^{n^2} \to e^7$ y de aquí se tiene que:

$$\left\{n^2 \log\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)\right\} = \left\{\log\left[\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)^{n^2}\right]\right\} \to \log(e^7) = 7$$

Vamos ahora a deducir el carácter de la serie $\sum \log\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)$. Basta con escribir la sucesión que acabamos de estudiar de la siguiente forma:

$$n^2 \log\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right) = \frac{\log\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)}{\frac{1}{n^2}} \to 7 \neq 0$$

Haciendo uso del criterio de comparación por paso al límite, ambas series, la del numerador y la del denominador ($\sum \frac{1}{n^2}$) tienen el mismo carácter. Como es conocido que la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, la serie que nos proponen también es convergente.

4. **(3 puntos)** Estudia la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2/2}$

b) $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)$. Si es convergente, calcula su suma.

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2/2}}=\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2/2n}=\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n/2}$$

Como la sucesión anterior presenta una indeterminación del tipo “1^∞”, aplicamos la regla del número e:

$$\frac{n}{2}\left[\frac{3n+1}{3n+4}-1\right]=\frac{n}{2}\left[\frac{3n+1-3n-4}{3n+4}\right]=\frac{-3n}{6n+8}\to\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$$

Por tanto, $\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n/2}\to e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}<1$ y de aquí se tiene que la serie propuesta es convergente.

b) La serie planteada es suma de dos series geométricas multiplicadas por un escalar:

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)=\sum_{n\geq 0}2\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{2}{3}|<1$ y $|\frac{-1}{2}|<1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\right)$, nos queda entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)&=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\\&=2\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)=2\cdot 3-\frac{1}{2}\frac{2}{3}=6-\frac{1}{3}=\frac{17}{3}\end{aligned}$$

Granada, 27 de noviembre de 2013