Prueba de clase 19 de Mayo de 2015

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**____________

De las cuatro primeras preguntas hay que elegir 3. La quinta es obligatoria.

1. Sea $\alpha = \forall x(P(x,a) \to \exists y Q(f(y),x)) \vee \exists x \neg Q(x,x)$.

   a) Consideramos las siguientes estructuras:
   - Estructura 1:
     - Dominio: $\mathbb{Z}_4$.
     - Asignación de constantes: $a = 0$.
     - Asignación de funciones: $f(x) = 2x$.
     - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv x^2 = y$; $Q(x,y) \equiv x = y$.
   - Estructura 2:
     - Dominio: $\mathbb{N}$.
     - Asignación de constantes: $a = 2$.
     - Asignación de funciones: $f(x) = x^2$.
     - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv y|x$ (es decir, x es múltiplo de y); $Q(x,y) \equiv 2y = x^2$.

     Calcula el valor de verdad de α en ambas estructuras.

   b) Estudia el carácter de α (universalmente válida, satisfacible y refutable, contradicción).

2. Consideramos el siguiente lenguaje de primer orden:
   - Símbolos de constante: $\mathcal{C} = \{a,\ b\}$.
   - Símbolos de función: $\mathcal{F} = \{p^2,\ m^2\}$.
   - Símbolos de predicado: $\mathcal{R} = \{P^1,\ Pr^1,\ M^2,\ E^2\}$.

   Y consideramos la siguiente estructura:
   - Dominio: $\mathbb{N}$.
   - Asignación de constantes: $a = 0$; $b = 2$.
   - Asignación de funciones: $p(x,y) = x \cdot y$; $s(x,y) = x + y$.
   - Asignación de predicados: $P(x) \equiv x$ es par; $Pr(x) \equiv x$ es primo; $M(x,y) \equiv x < y$; $E(x,y) \equiv x = y$.

   Expresa en este lenguaje los siguientes enunciados:

   a) El doble de un número primo nunca es un número primo.

   b) La suma de dos números impares es par.

3. Calcula una forma prenexa con el menor número de cuantificadores posible, una forma de Skolem y una forma clausular para la fórmula
$$[\exists x P(x) \longrightarrow \forall z Q(z,a)] \longrightarrow \forall y \exists x[\neg P(f(x)) \vee Q(x,y)]$$

4. Estudia si los siguientes conjuntos de cláusulas son satisfacibles o insatisfacibles:

   a)
$$\{Q(x,g(x),g(x)) \vee Q(g(x),x,g(x)),\ \neg Q(y,g(y),y)\}$$

   b)
$$\{Q(x,b,g(y)),\ \neg Q(a,x,y)\}$$

5. Utiliza el método de resolución para probar si la siguiente consecuencia lógica ocurre.
$$\{\forall x \forall y[\neg P(x) \wedge R(y) \to S(x,y)];\ \forall y[S(b,y) \to D(y)],\ \forall x R(f(x))\} \vDash \neg P(b) \to \exists x \exists y[D(f(x)) \wedge S(b,y)]$$