Cálculo
1ºE Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial (II)
Curso 2013/2014

1. **(2 puntos)** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x_n+1}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

   b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1} = \sqrt{1/3} > x_1 = 0$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n < x_{n+1} \Rightarrow 2x_n < 2x_{n+1} \Rightarrow 2x_n+1 < 2x_{n+1}+1 \Rightarrow \sqrt{2x_n+1} < \sqrt{2x_{n+1}+1}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x_n+1} < \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x_{n+1}+1} \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por el $x_1 = 0$. Veamos que está acotada superiormente por 1. Esto es, que $x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 0 \leq 1$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 1$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 1$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \leq 1 \Rightarrow 2x_n \leq 2 \Rightarrow 2x_n+1 \leq 3 \Rightarrow \sqrt{2x_n+1} \leq \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x_n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3} \Rightarrow x_{n+1} \leq 1$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

b) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x+1}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x+1} \Rightarrow 3x^2 = 2x+1 \Rightarrow 3x^2-2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2\pm 4}{6}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 1$ y $x = -1/3$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que 0. El motivo es que $0 \leq x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 1$.

2. **(2 puntos)** Calcula el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{ \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\log(n+1)} \right\}$$

Solución: Observamos que tenemos un cociente donde el denominador, claramente, crece a infinito. Aplicamos el criterio de Stolz y, si llamamos a_n al numerador y b_n al denominador, tendremos que estudiar el límite del siguiente cociente:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}{\log(n+2) - \log(n+1)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)} = \frac{1}{\log\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\sqrt{n+1}}\right]}$$

Estudiamos aparte la sucesión: $\left\{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\sqrt{n+1}}\right\}$ ya que presenta una indetermincaión del tipo "1^∞". Aplicamos el criterio del número e, es decir, calculamos el límite de la sucesión:

$$\sqrt{n+1}\left[\frac{n+2}{n+1} - 1\right] = \sqrt{n+1}\left(\frac{n+2-n-1}{n+1}\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

y, por tanto:

$$\lim\left\{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\sqrt{n+1}}\right\} = e^0 = 1 \Rightarrow \lim\left\{\log\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\sqrt{n+1}}\right]\right\} = \log(1) = 0$$

Observemos, además, que, como $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\sqrt{n+1}} > 1$, entonces $\log\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\sqrt{n+1}}\right] > 0$. Por tanto, $\lim \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim \dfrac{1}{\log\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\sqrt{n+1}}\right]} = +\infty$, y aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim \left\{ \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\log(n+1)} \right\} = +\infty$$

3. **(3 puntos)** Calcula el límite de la sigiente sucesión:

$$\left\{ \frac{1}{n} \sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \right\}$$

Como consecuencia del límite anterior deduce el carácter de la serie:

$$\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n^n}$$

Solución:

Introducimos dentro de la raíz el denominador y así tendremos que estudiar el límite de $\sqrt[n]{a_n}$, siendo $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n^n}$. Aplicando entonces el criterio de la raíz para sucesiones:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} = \frac{(2n+1)}{(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{2}{e}$$

Por tanto, $\lim\left\{\frac{1}{n}\sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\} = \frac{2}{e}$.

Para deducir el carácter de la serie propuesta, observamos que si a dicha serie le aplicamos el criterio de la raíz. obtenemos la sucesión anterior. Esto es:

$$\sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n^n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \to \frac{2}{e} < 1$$

y, por tanto, la serie $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n^n}$ es convergente.

4. **(3 puntos)** Estudia la posible convergencia de las siguientes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{n+1}{3n^2+4}\right)^{-n^2+1}$

   b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{(-2)^n}{4^{n+1}}+\frac{3^n}{6^{n-1}}\right)$. Si es convergente, calcula su suma.

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raíz (ya que el término general presenta una potencia n-sima). Por tanto, estudiamos el límite de $\sqrt[n]{a_n}$, siendo $a_n = \left(1+\frac{n+1}{3n^2+4}\right)^{-n^2+1}$.

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{n+1}{3n^2+4}\right)^{-n^2+1}} = \left(1+\frac{n+1}{3n^2+4}\right)^{\frac{-n^2+1}{n}}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo "1^∞", por lo que aplicamos el criterio del número e:

$$\left(\frac{-n^2+1}{n}\right)\left[1+\frac{n+1}{3n^2+4}-1\right] = \left(\frac{-n^2+1}{n}\right)\left[\frac{n+1}{3n^2+4}\right] = \frac{(-n^2+1)(n+1)}{n(3n^2+4)} \to \frac{-1}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\left(1+\frac{n+1}{3n^2+4}\right)^{-n^2+1}} \to e^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} < 1$$

Por tanto, el criterio de la raíz nos asegura que la serie dada es convergente.

b) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-2)^n}{4^{n+1}}+\frac{3^n}{6^{n-1}}\right) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{-2}{4}\right)^n + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{6^{-1}}\left(\frac{3}{6}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 6\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{2}| < 1$ y $|\frac{1}{2}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$, nos queda entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-2)^n}{4^{n+1}}+\frac{3^n}{6^{n-1}}\right) &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n - 1\right] + 6\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}} - 1\right] + 6\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right] = \frac{71}{12}
\end{aligned}$$

Granada, 28 de noviembre de 2013