TEMA 1

Conjuntos, aplicaciones y relaciones

1.1 Conjuntos

Vamos a iniciar este primer tema con una aproximación muy intuitiva al concepto de conjunto. La primera idea que debemos destacar es que un conjunto está determinado por sus elementos.

> Dado un objeto x y un conjunto X, la pregunta *¿es x elemento de X?* debe tener respuesta unívoca.

Observación. Que la pregunta anterior tenga respuesta no significa que la conozcamos. Por ejemplo, el número π no se supo hasta el siglo XIX si era racional o no.

Utilizamos los símbolos $\in$ y $\notin$ para indicar pertenencia y no pertenencia. Así $x \in X$ significa que x pertenece a (o es elemento de) X.

Definición 1. Hay un conjunto especial, el conjunto que no tiene elementos. Los llamamos *conjunto vacío*, y lo notamos $\emptyset = \{\}$. Observemos que la pregunta "¿es x elemento de $\emptyset$?" siempre tiene una respuesta inequívoca, y la respuesta es no.

Definición 2. El siguiente concepto que vamos a presentar es el concepto de subconjunto. Dados dos conjuntos X e Y, decimos que X es un *subconjunto* de (o está incluido en) Y si todo elemento de X es elemento de Y. Lo notamos $X \subseteq Y$. Se emplea además la notación $X \subsetneq Y$ o $X \subset Y$ para indicar que X es subconjunto de Y y que no son iguales. Es lo que se llama inclusión estricta.

Ejemplo 3.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

La presentación que acabamos de hacer de los conceptos de conjunto y subconjunto nos conduce a las propiedades que enumeramos a continuación

Proposición 4. *Si X, Y y Z son conjuntos cualesquiera, se tiene*

1. $\varnothing \subseteq X$;
2. $X \subseteq X$ *(esta propiedad recibe el nombre de reflexiva);*
3. *si* $X \subseteq Y$ *e* $Y \subseteq X$, *entonces* $X = Y$ *(esta propiedad recibe el nombre de antisimétrica);*
4. *si* $X \subseteq Y$ *e* $Y \subseteq Z$, *entonces* $X \subseteq Z$ *(y esta propiedad recibe el nombre de transitiva).*

Definición 5. Se define el conjunto potencia de X como el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de X, es decir

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$$

Este conjunto también se llama partes de X.

Definición 6. Dados $A, B \subseteq X$ definimos los siguientes subconjuntos de X:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in X \mid x \in A \text{ y } x \in B\} \\ A \cup B &= \{x \in X \mid x \in A \text{ o } x \in B\} \\ A \setminus B &= \{x \in X \mid x \in A \text{ y } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\} \\ \overline{A} &= X \setminus A \end{aligned}$$

Proposición 7. *Sean $A, B, C \subseteq X$. Entonces*

- $A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$,
- $A \cap B = B \cap A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap X = A$,
- $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- $A \cup \varnothing = A$, $A \cup X = X$,
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
- $\overline{\overline{A}} = A$, $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Definición 8. Sean X, Y dos conjuntos. Se define el producto cartesiano de X e Y como el conjunto cuyos elementos son pares ordenados en los que el primer elemento pertenece a X y el segundo a Y, es decir,

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Si $n \geq 2$ se define recursivamente $X^n = X^{n-1} \times X$.

• 1.2

Relaciones de equivalencia

Definición 9. Una relación binaria R en un conjunto X es un subconjunto de n$X \times X$, es decir, $R \subseteq X \times X$. Utilizamos la notación xRy para expresar que $(x, y) \in R$.

Definición 10. Algunas propiedades de las relaciones binarias tienes nombres específicos. Sea R una relación binaria en X.

- La relación se dice *reflexiva* si para cualquier $x \in X$ tenemos que xRx.

- La relación es *simétrica* si para cualesquiera $x, y \in X$, xRy implica yRx.
- La relación es *antisimétrica* si para cualesquiera $x, y \in X$, xRy e yRx implica $x = y$.
- La relación se dice *transitiva* si para cualesquiera $x, y, z \in X$, si xRy e yRz entonces xRz.

Definición 11. Una relación binaria reflexiva, simétrica y transitiva se llama *relación de equivalencia*. Si la relación binaria es reflexiva, antisimétrica y transitiva, recibe el nombre de *relación de orden.*

Definición 12. Sea X un conjunto y R una relación de equivalencia sobre X. Sea además $x \in X$. Se define la *clase de equivalencia* de x como

$$[x]_R = \{y \in X \mid xRy\}$$

Si no hay confusión con la relación se suele prescindir de la R en la notación, es decir, $[x] = [x]_R$.

Proposición 13. *Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto X y $x, y \in X$, tenemos*

$$xRy \iff [x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$$

Demostración. Supongamos que xRy; si $z \in [x]$ entonces xRz, por las propiedades simétrica y transitiva tenemos que yRz, por lo que $z \in [y]$. Hemos demostrado que $[x] \subseteq [y]$, análogamente se demuestra la otra inclusión y por tanto la igualdad.

Es evidente que $[x] = [y]$ implica que $[x] \cap [y] \neq \varnothing$, ya que las clases son no vacías por la propiedad reflexiva.

Finalmente si $z \in [x] \cap [y]$ tenemos que xRz y yRz. De nuevo por las propiedades simétrica y transitiva tenemos que xRy.

Hemos hecho una demostración circular. $\square$

Observación 14. En primer lugar todo elemento está en al menos una clase de equivalencia. En segundo lugar dado $x \in X$, existe una y sólo una clase de equivalencia conteniendo a x.

Definición 15. Dada una relación de equivalencia R sobre X se define el conjunto cociente de X con respecto a R como

$$X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}$$

¿Qué significa describir un conjunto cociente? Si X es finito podemos enumerar todas las clases de equivalencia y decir a su vez qué elementos de X están en cada una de ellas. Si X no es finito, es necesario encontrar otra forma de describirlo.

Definición 16. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto X. Un *conjunto minimal de representantes* para R es un subconjunto $X_0 \subseteq X$ tal que:

1. todo elemento de X está relacionado con algún elemento de X_0, es decir, para cualquier $x \in X$ existe $y \in X_0$ tal que xRy;
2. dos elementos distintos de X_0 no están relacionados, es decir, si $x, y \in X_0$ y xRy entonces $x = y$.

En este caso podemos describir el conjunto cociente como

$$X/R = \{[x]_R \mid x \in X_0\}$$

Definición 17. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con $\varnothing \notin \mathcal{A}$. Decimos que $\mathcal{A}$ es una partición de X si

1. $X = \bigcup_{i \in I} A_i$,
2. $A_i \neq A_j$ si y sólo si $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Ejemplo 18. Si R es una relación de equivalencia sobre X entonces X/R es una partición sobre X.

Teorema 19. *Existe una correspondencia biunívoca entre las particiones sobre X y las relaciones de equivalencia en X.*

Demostración. Ya sabemos que X/R es una partición cuando R es una relación de equivalencia sobre X. Si $\mathcal{A}$ es una partición en X, definimos la relación $R_{\mathcal{A}}$ diciendo que dos elementos de X están relacionados si pertenecen al mismo elemento de la partición. Es sencillo comprobar que esta definición nos da una relación de equivalencia. También es sencillo verificar que el componer estos dos procesos deja invariantes a las relaciones o a las particiones. $\square$

1.3 Relaciones de Orden

Observación 20. Recordemos que una relación $\leqslant$ en un conjunto X se dice *relación de orden* si satisface la propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Observación 21. Si $\leqslant$ es una relación de orden es sencillo comprobar que la relación opuesta ($x \geqslant y \overset{\text{def}}{\iff} y \leqslant x$) también es una relación de orden. Normalmente utilizamos para expresar una relación de orden los siguientes símbolos $\leqslant, \preccurlyeq$, que leemos 'menor o igual que', y también $\geqslant, \succcurlyeq$ que leemos 'mayor o igual que'.

Definición 22 (Orden estricto)**.** Una relación $\prec$ en un conjunto X se dice *relación de orden estricto* si satisface la propiedades:

(a') (ANTIREFLEXIVA) para todo $x \in X$, $x \nprec x$;

(b') (TRANSITIVA) para cualesquiera $x, y, z \in X$, si $x \prec y$ e $y \prec z$ entonces $x \prec z$.

Proposición 23. *Sea X un conjunto y sean $\leqslant$, $\prec$ relaciones de orden y orden estricto respectivamente. Entonces*

1. *La relación $x < y \overset{def}{\iff} (x \leqslant y \text{ y } x \neq y)$ es una relación de orden estricto.*
2. *La relación $x \preccurlyeq y \overset{def}{\iff} (x \prec y \text{ o } x = y)$ es una relación de orden.*

Demostración. Sencilla. □

Ejemplo 24. Los ejemplos más conocidos son la relación de orden usual en$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. La relación en $\mathbb{R}$ se define por $x \leq y \overset{\text{def}}{\iff} y - x \in \mathbb{R}_0^+$.

Ejemplo 25. Sea X un conjunto. La relación $\subseteq$ definida en $\mathcal{P}(X)$ es una relación de orden ya que para cualesquiera $A, B, C \subseteq X$ se tiene: $A \subseteq A$; si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$; si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Ejemplo 26. La divisibilidad en $\mathbb{N}$ otra relación de orden. De hecho, ya que $a = a1$ tenemos que $a \mid a$ para todo $a \in \mathbb{N}$ (reflexiva); por otra parte, si $a = br$ y $b = as$ entonces $1 = rs$ y $r = s = 1$, de donde $a \mid b$ y $b \mid a$

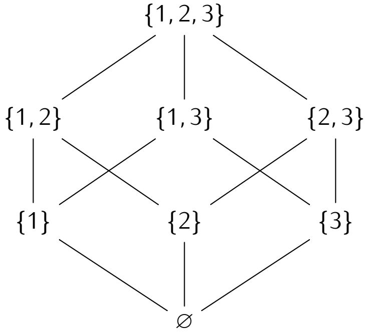
implican que $a = b$ (antisimétrica); finalmente, si $b = ar$ y $c = bs$ entonces $c = a(rs)$, de donde $a \mid b$ y $b \mid c$ implican $a \mid c$ (transitiva).

Destacamos $D(n) = \{a \in \mathbb{N} \ ; \ a \mid n\} \subseteq \mathbb{N}$. Si no se indica lo contrario consideraremos $D(n)$ como un conjunto ordenado con respecto a la relación de divisibilidad, es decir, $(D(n), |)$ será uno de los ejemplos más importantes a tener en cuenta en este curso.

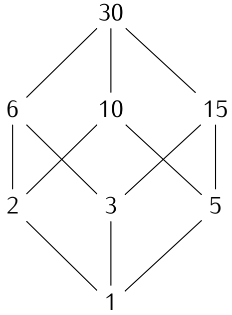
Definición 27. Sea $(X, \leqslant)$ un conjunto ordenado y sean $x, y \in X$. Decimos que y *cubre* a x si $x < y$ y no existe ningún otro elemento entre ellos, es decir, $x < y$ y no existe $u \in X$ tal que $x < u < y$.

Definición 28. El diagrama de Hasse de $(X, \leqslant)$ es un grafo dirigido cuyos vértices son los elementos de X y existe línea ascendente de x en y si y sólo si y cubre a x

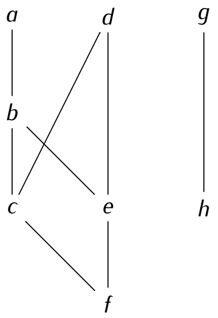
$(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$



$(D(30), |)$



El diagrama



(1)

produce las siguientes desigualdades además de las que vienen de la propiedad reflexiva: $\{b \leqslant a, c \leqslant b, c \leqslant a, c \leqslant d, e \leqslant b, e \leqslant a, e \leqslant d, f \leqslant a, f \leqslant b, f \leqslant c, f \leqslant d, f \leqslant e, h \leqslant g\}$.

Definición 29. Un elemento $x \in X$ se dice *maximal* si no existe $y \in X$ tal que $x < y$. Análogamente se definen los elementos minimales, $x \in X$ es *minimal* si no existe $y \in X$ tal que $y < x$.

En el ejemplo dado por el diagrama de Hasse (1) los elementos a, d, g son todos los maximales, mientras que los elementos f, h son los únicos minimales. Por otra parte, en $\mathbb{N}$ con el orden usual el único elemento minimal es el 0, mientras que no hay elementos maximales. $\mathbb{Z}$ no tiene maximales ni minimales.

Definición 30. Un elemento $x \in X$ se dice *máximo* si para todo $y \in X$ $y \leqslant x$. Análogamente se define el *mínimo* de un conjunto ordenado. Es inmediato comprobar que el máximo y el mínimo son únicos en caso de existir.

Definición 31. Sea $Y \subseteq X$. Decimos que x es una *cota superior* para Y si para cualquier $y \in Y$, $y \leqslant x$. Análogamente se definen las *cotas inferiores.*

Definición 32. Sea $Y \subseteq X$ y sea S el conjunto de las cotas superiores de Y. Si S tiene mínimo dicho elemento recibe el nombre de *supremo* de Y. Análogamente se define el *ínfimo*, como el máximo de las cotas inferiores.

Proposición 33. *$y \in Y$ es el máximo si y sólo si y es el supremo de Y e $y \in Y$. Análogamente, $y \in Y$ es el mínimo si y sólo si y es el ínfimo de Y e $y \in Y$.*

Definición 34. Una relación de orden $\leqslant$ sobre un conjunto X se dice que es un *orden total* si para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene $x \leqslant y$ o $y \leqslant x$. En este case se dice que $(X, \leqslant)$ es un conjunto totalmente ordenado o una *cadena*. Los órdenes totales también se llaman *órdenes lineales*.

Proposición 35. *Todo subconjunto de un conjunto totalmente ordenado es totalmente ordenado.*

Observación 36. Es inmediato comprobar que en una cadena finita existe mínimo y máximo.

Definición 37. Una relación de orden $\leqslant$ sobre un conjunto X se dice que es un *buen orden* si todo subconjunto $Y \subseteq X$ no vacío tiene mínimo. En este caso se dice que $(X, \leqslant)$ es un conjunto bien ordenado.

Proposición 38. *Todo buen orden es un orden total.*

Demostración. Basta observar que el conjunto $\{x, y\}$ tiene mínimo para cualesquiera $x, y \in X$. $\square$

$(X_1, \leqslant_1)$ y $(X_2, \leqslant_2)$ son dos conjuntos ordenados.

Definición 39. Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$. Se define el *orden producto* como

$$(x_1, x_2) \leqslant_1 \times \leqslant_2 (y_1, y_2) \text{ si y sólo si } x_1 \leqslant_1 y_1 \text{ y } x_2 \leqslant_2 y_2.$$

Proposición 40. $(X_1 \times X_2, \leqslant_1 \times \leqslant_2)$ *es un conjunto ordenado.*

Proposición 41. (x_1, x_2) *es un máximo (resp. mínimo) de* $(X_1 \times X_2, \leqslant_1 \times \leqslant_2)$ *si y sólo si* x_1 *es máximo (resp. mínimo) de* X_1 *y* x_2 *es máximo (resp. mínimo) de* X_2.

Proposición 42. (x_1, x_2) *es un elemento maximal (resp. minimal) de* $(X_1 \times X_2, \leqslant_1 \times \leqslant_2)$ *si y sólo si* x_1 *es elemento maximal (resp. minimal) de* X_1 *y* x_2 *es maximal (resp. minimal) en* X_2.

Definición 43. Sean $(X_1, \leqslant_1), \ldots, (X_n, \leqslant_n)$ conjuntos ordenados. Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$. Se define el *orden lexicográfico* mediante la siguiente equivalencia

$$(x_1, x_2) \preccurlyeq_{\text{lex}} (y_1, y_2) \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} x_1 <_1 y_1 & \text{o} \\ x_1 = y_1 \text{ y } x_2 \leqslant_2 y_2. \end{cases}$$

Por recurrencia podemos extender esta definición a tamaño n. Si $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$,

$$(x_1, \ldots, x_n) \preccurlyeq_{\text{lex}} (y_1, \ldots, y_n) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 <_1 y_1 \\ x_1 = y_1 \text{ y } (x_2, \ldots, x_n) \preccurlyeq_{\text{lex}} (y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Proposición 44. *$(X_1 \times \cdots \times X_n, \preccurlyeq_{lex})$ es un conjunto ordenado. Además, si $\leqslant_1, \cdots \leqslant_n$ son órdenes totales (resp. buenos) entonces $\preccurlyeq_{lex}$ es un orden total (resp. bueno).*

• 1.4 Aplicaciones

Definición 45. Una aplicación f es una terna $f = (X, Y, G)$ donde

1. X es un conjunto llamado dominio (origen, inicio),
2. Y es un conjunto llamado codominio (destino, fin),
3. $G \subseteq X \times Y$ satisfaciendo que para todo $x \in X$ existe un único $f(x) \in Y$ tal que $(x, f(x)) \in G$.

La aplicación anterior se denota

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

El conjunto de las aplicaciones de X en Y se denota Y^X

Ejemplo 46. Si X es un conjunto, la aplicación identidad en X se define como sigue,

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \mathrm{id}_X(x) = x, \end{aligned}$$

es decir, $G = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$.

Definición 47. Si $f : X \to Y$ es una aplicación, se emplea la notación $\operatorname{im} f = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y$.

Ejemplo 48. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Definimos una relación R_f asociada a f de la siguiente forma: $x R_f y \iff f(x) = f(y)$. Es sencillo comprobar que R_f es una relación de equivalencia. El cociente se denota X/f. La clase de un elemento x suele denotarse $[x]_f$.

Definición 49. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y' \to Z$ dos aplicaciones tales que $\operatorname{im} f \subseteq Y'$. Se define la composición de f con g como

$$\begin{aligned} g \circ f = gf : X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto gf(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Proposición 50. *Sean $f : X \to Y$, $g : Y' \to Z$ y $h : Z' \to W$ aplicaciones tales que $\operatorname{im} f \subseteq Y'$ e $\operatorname{im} g \subseteq Z'$. Se tienen las siguientes igualdades,*

1. $h(gf) = (hg)f$,
2. $f \operatorname{id}_X = f$,
3. $\operatorname{id}_Y f = f$.

Definición 51. Una aplicación $f : X \to Y$ se dice inyectiva si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$, es decir, elementos distintos de X tienen imágenes distintas. Se dice que f es sobreyectiva si $\operatorname{im} f = Y$.

Proposición 52. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación.*

1. *f es inyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $gf = \mathrm{id}_X$,*

2. *f es sobreyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $fg = \mathrm{id}_Y$.*

Definición 53. Una aplicación f se dice biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva. Si $f : X \to Y$ es una aplicación biyectiva decimos que X e Y son biyectivos.

Ejemplo 54. Si X, Y, Z son tres conjuntos cualesquiera, es muy sencillo comprobar que $(X \times Y) \times Z$ y $X \times (Y \times Z)$ son biyectivos. Además son biyectivos con el conjunto $X \times Y \times Z$ de las ternas ordenadas. Por este motivo solemos identificar dichos conjuntos.

Proposición 55. *Una aplicación $f : X \to Y$ es biyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $gf = \mathrm{id}_X$ y $fg = \mathrm{id}_Y$. En este caso la aplicación g es única y se denota f^{-1}.*

Demostración. En vista de la Proposición 52 existen $g_1, g_2 : Y \to X$ tales que $g_1 f = \mathrm{id}_X$ y $fg_2 = \mathrm{id}_Y$. Dado que

$$g_1 = g_1 \mathrm{id}_Y = g_1(fg_2) = (g_1 f)g_2 = \mathrm{id}_X g_2 = g_2$$

obtenemos la tesis de la proposición. □

Definición 56. Sea $f : X \to Y$ una aplicación, y sea $A \subseteq X$. La aplicación con dominio A, codominio Y gráfica $x \mapsto f(x)$ se denota $f|_A$, es decir,

$$\begin{aligned} f|_A : A &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f|_A(x) = f(x), \end{aligned}$$

aunque normalmente se abusa del lenguaje y se representa $f|_A = f$ si no hay riesgo de confusión.

Proposición 57. *f es inyectiva si y sólo si $f|_A$ es inyectiva para cualquier $A \subseteq X$.*

Demostración. Ejercicio. □

Vamos a denotar por $\mathbf{n} = \{0, \ldots n-1\}$.

Lema 58. *$\mathbf{n}$ es biyectivo con $\mathbf{m}$ si y sólo si $n = m$.*

Demostración. Inducción en n. Para $n = 1$ el resultado es claro. Supongamos que el resultado es cierto para n y que $\mathbf{n+1}$ es biyectivo con $\mathbf{m}$ con f la biyección. Componiendo con la biyección de $\mathbf{m}$ en $\mathbf{m}$ adecuada no perdemos generalidad si suponemos que $f(n) = m - 1$. De esta forma $f|_{\mathbf{n}}$ es una biyección de $\mathbf{n}$ en $\mathbf{m-1}$. Por hipótesis de inducción $n = m - 1$, de donde $n + 1 = m$. □

Definición 59. Un conjunto X se dice finito si es biyectivo con $\mathbf{n}$ para algún n. En este caso se dice que el cardinal de X es n, y se representa

$$|X| = n$$

Proposición 60. *Sean X, Y conjuntos y $A, B \subseteq X$. Entonces,*

1. $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$,
2. $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.
3. $|X \times Y| = |X|\,|Y|$

Teorema 61. *Un conjunto X no es finito si y sólo si existe $Y \subset X$ tal que Y es biyectivo con X*