

EXAMEN DE CÁLCULO  
GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA  
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

1. (1.5 ptos.) Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En caso de ser convergente, calcula su límite.

**Solución:** Veamos que se trata de una sucesión monótona y acotada. En efecto, en primer lugar tenemos que:

$$x_1 = \sqrt{2} < x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

Comprobemos ahora, haciendo uso del Principio de inducción, que, suponiendo que siendo  $n$  un natural fijo y verificándose que  $x_n < x_{n+1}$ , entonces se verifica también que  $x_{n+1} < x_{n+2}$ . En efecto:

$$x_n < x_{n+1} \Leftrightarrow 2x_n < 2x_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{2x_n} < \sqrt{2x_{n+1}} \Leftrightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$$

Tenemos entonces que la sucesión dada es monótona creciente, con lo que la acotación inferior la tenemos garantizada por el primer término de la sucesión, esto es:  $\sqrt{2} < x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Vamos ahora a comprobar que la sucesión está mayorada por 2. Es claro que  $x_1 \leq 2$ . Aplicando nuevamente el Principio de inducción, supongamos que  $x_n \leq 2$  y comprobemos que entonces  $x_{n+1} \leq 2$  también. En efecto:

$$x_n \leq 2 \Leftrightarrow 2x_n \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow x_{n+1} \leq 2$$

Por tanto, la sucesión dada es convergente. Calculemos ahora su límite  $x$ . Partiendo de la fórmula de recurrencia,  $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ , elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad,  $x_{n+1}^2 = 2x_n$  y tomamos límite a ambos

lados:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2x_n \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = 2.$$

Comentemos que la solución  $x = 0$  queda descartada ya que si  $\sqrt{2} < x_n \leq 2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\sqrt{2} \leq x \leq 2$ , lo que excluye el caso  $x = 0$ . Por tanto, la sucesión planteada es convergente y su límite es 2.

2. Calcula

a) **(1.25 ptos.)**  $\lim \left( 1 + \frac{1}{2n^3 \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} \right)^{n^2}.$

b) **(1.25 ptos.)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{x^3}.$

**Solución:**

a) Se trata de una sucesión que presenta una indeterminación del tipo “ $1^\infty$ ”, ya que la base tiende a 1, y el exponente a  $\infty$ . Aplicamos entonces el criterio del número  $e$  y analizamos la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} n^2 \left[ 1 + \frac{1}{2n^3 \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} - 1 \right] &= n^2 \left[ \frac{1}{2n^3 \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} \right] \\ &= \frac{n^2}{2n^3 \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \frac{1}{2n \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \frac{1}{2 \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

puesto que  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e$  entonces  $\log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow 1$ . Por tanto, aplicando el criterio del número  $e$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2n^3 \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} \right)^{n^2} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

- b) El límite planteado presenta una indeterminación del tipo “ $\frac{0}{0}$ ”, por lo que vamos a aplicar la primera Regla de L’Hôpital.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2} - 2x}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x^3}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^3}{3x^2(1+x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{3(1+x^2)} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{x^3} = 0$

3. Estudia la convergencia de las siguientes series de números reales.

a) (1.25 ptos.)  $\sum_{n \geq 1} \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - n \right)^n.$

b) (1.25 ptos.)  $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^2 e^n}.$

**Solución:**

- a) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\left[ \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - n \right)^n \right]} &= \sqrt{n^2 + n + 1} - n \\ &= \frac{\left( \sqrt{n^2 + n + 1} - n \right) \left( \sqrt{n^2 + n + 1} + n \right)}{\left( \sqrt{n^2 + n + 1} + n \right)} \\ &= \frac{n + 1}{\left( \sqrt{n^2 + n + 1} + n \right)}\end{aligned}$$

y dividiendo por  $n$ ,

$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

Por tanto, la serie dada es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^2 e^{n+1}} \frac{n^2 e^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)}{(n+1)^2 e} = +\infty.$$

Por tanto, la serie dada es divergente.

4. **(1.5 ptos.)** Sea  $m > 0$ . Determina el número de soluciones de la ecuación

$$mx - 1 + \frac{1}{x} = 2m,$$

con  $x > 0$ .

**Solución:** Vamos a determinar el número de ceros de la función  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x) = mx - 1 + \frac{1}{x} - 2m.$$

Se trata de una función derivable, así que analizamos su derivada y buscamos posibles puntos críticos:

$$f'(x) = m - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{m} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Por ahora podemos afirmar que como la función derivada sólo tiene un punto crítico, la función  $f$  se puede anular, como mucho, en dos puntos. Recordemos que este razonamiento es consecuencia del Teorema de Rolle.

Vamos a decidir si este punto crítico encontrado es de mínimo o máximo analizando el signo de la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow f''\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) > 0.$$

Por tanto tenemos un punto de mínimo que, al ser el único punto crítico de  $f$ , se convierte en el mínimo absoluto de la función. Evaluamos  $f$  en dicho punto y calculamos los límites de  $f$  en los extremos del dominio para

concluir el ejercicio:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = 2\sqrt{m} - 2m - 1 = 2(\sqrt{m} - m) - 1 < 0.$$

¿Cómo llegamos a la conclusión de que el valor de  $f$  en el punto de mínimo es negativo? Si resolvemos la ecuación  $2(\sqrt{m} - m) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{m} = 2m + 1$ ; y elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:  $4m = 4m^2 + 4m + 1 \Leftrightarrow 4m^2 + 1 = 0$ , la ecuación resultante no tiene solución para  $m \in \mathbb{R}$ . Además, es fácil comprobar que para  $m = 1$ , por ejemplo, el valor de  $f$  en el mínimo es negativo; por tanto, sea quien sea  $m > 0$ , el valor del mínimo de  $f$  es siempre negativo. Hay que añadir que la función, tanto en cero como en  $+\infty$ , diverge a  $+\infty$ . Con todo esto concluimos que la función  $f$  tiene dos ceros (uno, antes de  $x = \frac{1}{\sqrt{m}}$ ; y otro, después de  $x = \frac{1}{\sqrt{m}}$ ). Por tanto, la ecuación planteada tiene exactamente dos soluciones en  $\mathbb{R}^+$ .

**Nota:** Observemos que si transformamos la ecuación planteada en esta otra equivalente:

$$mx^2 - x + 1 = 2mx \Leftrightarrow mx^2 - (2m + 1)x + 1 = 0$$

Se trata de discutir el número de soluciones de esta ecuación de segundo grado, en función del parámetro  $m > 0$ . Si resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{(2m + 1) \pm \sqrt{(2m + 1)^2 - 4m}}{2} = \frac{(2m + 1) \pm \sqrt{4m^2 + 1}}{2}$$

Como el valor  $4m^2 + 1$  es positivo, independientemente del valor de  $m$ , podemos asegurar que la ecuación dada tiene dos soluciones reales distintas, tal y como hemos concluido en la resolución anterior del ejercicio.

5. a) (1 pto.) Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \arctan(t) dt}{\operatorname{sen}^3(x)}$  utilizando el teorema fundamental del cálculo.

b) (1 pto.) Calcula  $\int_0^x t \arctan(t) dt$ .

**Solución:**

a) Este límite presenta una indeterminación del tipo “ $\frac{0}{0}$ ”, por lo que vamos a aplicar la primera Regla de L’Hôpital. Hay que comentar que la función numerador es derivable como consecuencia del teorema fundamental del Cálculo, y que su derivada es:

$$F(x) = \int_0^x t \arctan(t) dt \Rightarrow F'(x) = x \arctan(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, aplicando la primera Regla de L’Hôpital, nos queda:

$$\frac{F'(x)}{3 \operatorname{sen}^2(x) \cos(x)} = \frac{x \arctan(x)}{3 \operatorname{sen}^2(x) \cos(x)} = \frac{1}{3 \cos(x)} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \frac{\arctan(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Hemos descompuesto el cociente en el producto de otros tres con el objetivo de simplificar cálculos a la hora de volver a aplicar la Regla de L’Hôpital. Así que estudiamos cada uno por separado, teniendo en cuenta que sólo vamos a aplicar la Regla de L’Hôpital en los dos últimos:

$$\frac{1}{3 \cos(x)} \rightarrow \frac{1}{3} (x \rightarrow 0)$$

$$\frac{1}{\cos(x)} \rightarrow 1 (x \rightarrow 0)$$

$$\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos(x)} \rightarrow 1 (x \rightarrow 0)$$

Por tanto, el límite que nos pedían es  $\frac{1}{3}$ .

b) Para calcular  $\int_0^x t \arctan(t) dt$  aplicamos el método de integración por

partes, donde:

$$u = \arctan(t) \Rightarrow du = \frac{1}{1+t^2}$$
$$dv = t \Rightarrow v = \frac{t^2}{2}$$

Con lo que la integral nos queda:

$$\begin{aligned}\int_0^x t \arctan(t) dt &= \left[ \frac{1}{2} t^2 \arctan(t) \right]_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \\&= \frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt \\&= \frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2} \int_0^x 1 dt + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\&= \frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan(x) \\&= \frac{1}{2} (x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x)) .\end{aligned}$$

*Granada a 19 de septiembre de 2012.*