1. Sean $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{a, b, c\}$. Entonces el cardinal de $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$ es

   (a) 256 (b) 225 (c) 125 (d) 243

2. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{4, 6, 8, 9\}$ y $D = \{1, 2, 6, 7, 9\}$, el cardinal del conjunto $((A \setminus B) \times C) \cup ((B \cap D) \times (C \cup A))$ es

   (a) 23 (b) 0 (c) 28 (d) 31

3. Dada la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(n) = \frac{n}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces:
   a) f es sobreyectiva y no es inyectiva.
   b) f es inyectiva y no es sobreyectiva.
   c) f es biyectiva.
   d) f no es inyectiva ni sobreyectiva.

4. Para un número entero z denotamos por $|z|$ el valor absoluto de z, es decir,

$$|z| = \begin{cases} z & \text{si } z \geq 0 \\ -z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

   Consideramos la siguiente relación de equivalencia R definida sobre el conjunto $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100\}$:

$$a \; R \; b \;\Leftrightarrow\; |a - 8| = |b - 8|.$$

   Entonces el cardinal del conjunto cociente X/R es igual a

   (a) 13 (b) 56 (c) 93 (d) 85

5. Sea la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 8 & 6 & 1 & 9 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Entonces:
   a) El orden de σ es 4.
   b) σ es impar.
   c) σ es un ciclo.
   d) σ es el cuadrado de una trasposición.

6. Sea la permutación $\alpha = (6,7,8,1,2)(3,1,4,9,5,7,6)$. Entonces α^{2006} es igual a

   (a) α^{4391} (b) α^{3072} (c) α^{5301} (d) α^{2867}

7. Dados dos subgrupos H_1 y H_2 de un grupo G, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre falsa?
   a) $H_1 \times H_2$ es un subgrupo de $G \times G$.
   b) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G.
   c) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.
   d) $H_1 \setminus H_2$ es un subgrupo de G.
8. Sean $B = \{v_1, v_2\}$ y $B' = \{v_1', v_2'\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ tales que $v_1' = v_1 + v_2$ y $v_2' = v_1 - v_2$. Si las coordenadas de un vector $w \in V$ respecto de la base B son $(3,5)$, entonces las coordenadas de w respecto de la base B' son

   (a) $(4,-1)$ (b) $(1,1)$ (c) $(1,-1)$ (d) $(2,0)$

9. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \langle (1,1,2,2),(3,3,4,4) \rangle \quad \text{y} \quad W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0, t=0\},$$

   la dimensión de $U \cap W$ es igual a

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

10. Sea el conjunto $V = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$. Entonces respecto de las operaciones usuales:
    a) V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 6.
    b) V no tiene estructura de espacio vectorial ya que la matriz nula de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ no pertenece a V.
    c) V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3.
    d) V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 0.
11. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales

$$U = \{(x,y,z) \mid x = 0\} \quad y \quad W = \{(x,y,z) \mid y = 0\}.$$

    Entonces el subespacio vectorial $U + W$ es:

a) $\left\{(x,y,z) \mid \begin{array}{c} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$

b) $\mathbb{R}^3$

c) $\{(x,y,z) \mid x+y=0\}$

d) $\{(x,y,z) \mid z=0\}$

12. Sea $f:(\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ una aplicación lineal verificando que

$$\{(1,1,1),(2,3,2),(0,0,4)\} \subseteq \mathrm{Im}(f).$$

Entonces:

a) f es inyectiva y no sobreyectiva.
b) f es sobreyectiva y no inyectiva.
c) f es biyectiva.
d) f no es inyectiva ni sobreyectiva.

13. Sea $f:(\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ una aplicación lineal tal que $f(1,2)=(0,6)$ y $f(1,4)=(4,1)$. Entonces $f(5,3)$ es igual a:

(a) $(4,6)$ (b) $(3,0)$ (c) $(1,1)$ (d) $(0,2)$

14. Sea $f:\mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$ la aplicación definida por

$$f(x,y,z)=(x-y+2z, 2x+y+z, -x+2y+z, x+2y+2z).$$

Unas ecuaciones implícitas para el subespacio $\mathrm{Im}(f)$ son:

a) $x+3y+3z-4t=0.$

b) $\left\{\begin{array}{c} 5x-y+3z=0 \\ x-y+t=0 \end{array}\right.$

c) $17x-13y+3z+12t=0.$

d) $\left\{\begin{array}{c} x-y-z=0 \\ x-t=0 \end{array}\right.$

15. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $f(x,y,z)=(x+y+z,0,0)$. Una base del núcleo de f es:

(a) $\{(0,0,0)\}$ (b) $\{(1,-1,0),(0,1,-1)\}$ (c) $\{(1,1,1),(1,0,0)\}$ (d) $\{(1,1,-2)\}$

16. Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & & + & z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
a) El sistema es compatible determinado.
b) El sistema es incompatible.
c) El sistema es compatible indeterminado.
d) Ninguna de las anteriores es cierta.

17. ¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & y & & & = & 1 \end{array}\right.$$

(a) 15 (b) 0 (c) 10 (d) 5

18. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5),$$

¿para cuál de las siguientes matrices $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$ se verifica que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ es una matriz diagonal?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

19. ¿Cuál es el valor del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

cuyos coeficientes están en $\mathbb{Z}_7$?.

(a) 6 (b) 4 (c) 2 (d) 0

20. Se considera el conjunto $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ junto con el producto usual de matrices. Entonces:

a) G es un grupo no conmutativo.
b) G no es un grupo.
c) G es un grupo conmutativo.
d) G es un anillo considerando además la suma usual de matrices.