

# Ejemplo de cálculo de Campo Eléctrico con distribuciones discretas de carga

Isabel M. Tienda Luna

En este documento analizaremos cómo solucionar ejercicios de campo eléctrico donde aparecen cargas puntuales.

## 1. Enunciado del ejercicio

En el punto (1,2) hay una carga  $Q_1$  de  $10\mu C$  y en el punto (3,4) hay una carga  $Q_2$  de  $2\mu C$ . Calcula:

1. La fuerza que la primera carga ejerce sobre la segunda,  $\vec{F}_{12}$ .
2. La fuerza que la segunda carga ejerce sobre la primera,  $\vec{F}_{21}$ .
3. El campo que la primera carga crea en el punto donde está la segunda carga,  $\vec{E}_1$ .
4. El campo que la segunda carga crea en el punto donde está la primera carga,  $\vec{E}_2$ .
5. El campo en el punto A situado en las coordenadas (5,2).
6. El potencial en el punto A situado en las coordenadas (5,2).
7. El potencial en el punto B situado en las coordenadas (4,2).
8. El trabajo necesario para llevar una carga  $Q_3$  de  $8\mu C$  desde A hasta B. Razone si es un trabajo realizado por el campo o en contra del campo.

## 2. Calcular la fuerza que la primera carga ejerce sobre la segunda, $\vec{F}_{12}$

Para realizar este cálculo en primer lugar hay que conocer la expresión para la fuerza que tenemos que utilizar. Al ser las dos cargas que aparecen en el problema cargas puntuales, para calcular la fuerza hay que utilizar la ley de Coulomb

$$\vec{F}_{12} = K \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \hat{e}_{r_{12}} \quad (1)$$

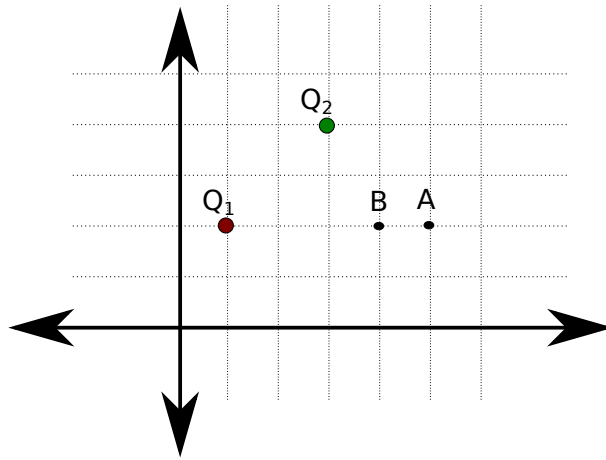


Figura 1: Esquema del problema.

donde  $K$  es una constante,  $r_{12}$  es el módulo del vector que va desde la carga  $Q_1$  hasta la carga  $Q_2$  y  $\hat{e}_{r_{12}}$  es el vector unitario que marca la dirección y sentido del vector  $\vec{r}_{12}$ . Este vector se calcula (ver figura 2) desplazándose desde el punto donde está la carga que crea el campo hasta el punto donde está la carga sobre la que actúa el campo.

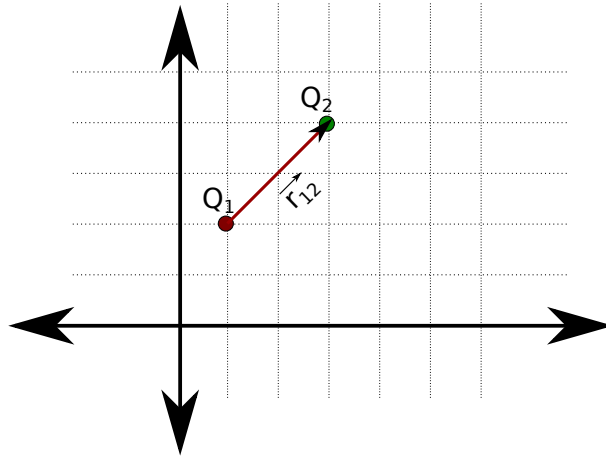


Figura 2: Esquema del problema para el cálculo de  $\vec{F}_{12}$ .

En la expresión 1 conocemos los valores de  $K$ ,  $Q_1$  y  $Q_2$  de manera que hay que calcular dos magnitudes,  $r_{12}$  y  $\hat{e}_{r_{12}}$ .

### 2.1. Cálculo de $r_{12}$

Como  $r_{12}$  es el módulo del vector  $\vec{r}_{12}$ , hay que comenzar calculando precisamente ese vector. Como hemos visto en clase este vector va desde la carga que crea el campo ( $Q_1$ ) hasta el punto donde está la carga sobre la que actúa el campo ( $Q_2$ ):

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (3\hat{i} + 4\hat{j})m - (\hat{i} + 2\hat{j})m = (2\hat{i} + 2\hat{j})m \quad (2)$$

Una vez calculado el vector (ver ecuación 2), el módulo se puede expresar como:

$$r_{12} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8}m \quad (3)$$

Las unidades de todas las magnitudes anteriores son metros.

### 2.2. Cálculo de $\hat{e}_{r_{12}}$

El vector  $\hat{e}_{r_{12}}$  es un vector unitario que marca la dirección y sentido del vector  $\vec{r}_{12}$ . Según la definición de vector unitario, este puede calcularse sin más que dividir el vector  $\vec{r}_{12}$  por su módulo ( $r_{12}$ ):

$$\hat{e}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{(2\hat{i} + 2\hat{j})m}{\sqrt{8}m} = \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{j} \quad (4)$$

Como puede verse en la ecuación 4,  $\hat{e}_{r_{12}}$  no tiene unidades. Es adimensional.

### 2.3. Cálculo del valor de $\vec{F}_{12}$

En este punto, ya conocemos los valores de todas las variables presentes en la ecuación 1. Por tanto, sólo queda sustituir:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{10 \cdot 10^{-6} C \cdot 2 \cdot 10^{-6} C}{(\sqrt{8}m)^2} \left( \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{j} \right) \\ &= 45 \cdot 10^{-3} \left( \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{j} \right) N \end{aligned} \quad (5)$$

## 3. Calcular la fuerza que la primera carga ejerce sobre la segunda, $\vec{F}_{21}$

Para realizar este cálculo en primer lugar hay que conocer la expresión para la fuerza que tenemos que utilizar. Al ser las dos cargas que aparecen en el problema cargas puntuales, para calcular la fuerza hay que utilizar la ley de Coulomb

$$\vec{F}_{21} = K \frac{Q_1 Q_2}{r_{21}^2} \hat{e}_{r_{21}} \quad (6)$$

donde  $K$  es una constante,  $r_{21}$  es el módulo del vector que va desde la carga  $Q_2$  hasta la carga  $Q_1$  y  $\hat{e}_{r_{21}}$  es el vector unitario que marca la dirección y sentido del vector  $\vec{r}_{21}$  (ver figura 3). Según la figura 3, este vector va desde la carga que crea el campo hasta la carga sobre la que actúa el campo.

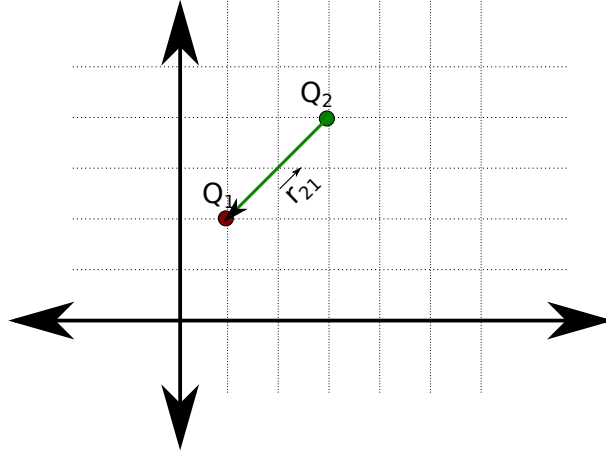


Figura 3: Esquema del problema para el cálculo de  $\vec{F}_{21}$ .

En la expresión 1 conocemos los valores de  $K$ ,  $Q_1$  y  $Q_2$  de manera que hay que calcular dos magnitudes,  $r_{21}$  y  $\hat{e}_{r_{21}}$ .

### 3.1. Cálculo de $r_{21}$

Como  $r_{21}$  es el módulo del vector  $\vec{r}_{21}$ , hay que comenzar calculando precisamente ese vector:

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (\hat{i} + 2\hat{j})m - (3\hat{i} + 4\hat{j})m = (-2\hat{i} - 2\hat{j})m \quad (7)$$

Una vez calculado el vector (ver ecuación 7), el módulo se puede expresar como:

$$r_{21} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}m \quad (8)$$

Las unidades de todas las magnitudes anteriores son metros.

### 3.2. Cálculo de $\hat{e}_{r_{21}}$

El vector  $\hat{e}_{r_{21}}$  es un vector unitario que marca la dirección y sentido del vector  $\vec{r}_{21}$ . Según la definición de vector unitario, este puede calcularse sin más que dividir el vector  $\vec{r}_{21}$  por su módulo ( $r_{21}$ ):

$$\hat{e}_{r_{21}} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \frac{(-2\hat{i} - 2\hat{j})m}{\sqrt{8}m} = -\frac{2}{\sqrt{8}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{j} \quad (9)$$

Como puede verse en la ecuación 9,  $\hat{e}_{r_{21}}$  no tiene unidades. Es adimensional.

### 3.3. Cálculo del valor de $\vec{F}_{21}$

En este punto, ya conocemos los valores de todas las variables presentes en la ecuación 6. Por tanto, sólo queda sustituir:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{10 \cdot 10^{-6} C \cdot 2 \cdot 10^{-6} C}{(\sqrt{8}m)^2} \left( -\frac{2}{\sqrt{8}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{j} \right) \\ &= 45 \cdot 10^{-3} \left( -\frac{1}{\sqrt{8}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{j} \right) N\end{aligned}\quad (10)$$

Como puede verse,  $\vec{F}_{21}$  y  $\vec{F}_{12}$  tienen el mismo módulo, misma dirección pero sentidos opuestos.

## 4. Calcula el campo que la primera carga crea en el punto donde está la segunda carga, $\vec{E}_1$ .

Como ya se ha calculado  $\vec{F}_{12}$ , tenemos dos formas de realizar el cálculo de  $\vec{E}_1$ . En este apartado se realizará sólo una de ellas y se dejará como ejercicio de autoevaluación para el alumno el cálculo utilizando la otra forma alternativa.

### 4.1. Método 1

En esta forma de resolver este apartado usamos que hemos calculado en el apartado anterior  $\vec{F}_{12}$ . La relación que existe entre el campo que crea una carga en un punto (en este caso en el punto en el que se encuentra  $Q_2$ ) y la fuerza que experimenta una carga (en este caso  $Q_2$ ) que se encuentra en ese punto es:

$$\vec{F}_{12} = \vec{E}_1 Q_2 \quad (11)$$

De la ecuación anterior puede despejarse  $\vec{E}_1$  quedando:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{Q_2} = \frac{45 \cdot 10^{-3} \left( \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{j} \right) N}{2 \cdot 10^{-6} C} = 22,5 \cdot 10^3 \left( \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{j} \right) N/C \quad (12)$$

### 4.2. Método 2

La otra alternativa de cálculo del vector  $\vec{E}_1$  consiste en utilizar su definición:

$$\vec{E}_1 = K \frac{Q_1}{r_{12}^2} \hat{e}_{12} \quad (13)$$

Se deja como ejercicio comprobar que el resultado obtenido al aplicar la ecuación 13 es el mismo que el que se obtiene en la ecuación 12.

## 5. Calcula el campo que la primera carga crea en el punto donde está la segunda carga, $\vec{E}_2$ .

Como ya se ha calculado  $\vec{F}_{21}$ , tenemos dos formas de realizar el cálculo de  $\vec{E}_2$ . En este apartado se realizará sólo una de ellas y se dejará como ejercicio de autoevaluación para el alumno el cálculo utilizando la otra forma alternativa.

### 5.1. Método 1

En esta forma de resolver este apartado usamos que hemos calculado en el apartado anterior  $\vec{F}_{21}$ . La relación que existe entre el campo que crea una carga en un punto (en este caso en el punto en el que se encuentra  $Q_1$ ) y la fuerza que experimenta una carga (en este caso  $Q_1$ ) que se encuentra en ese punto es:

$$\vec{F}_{21} = \vec{E}_2 Q_1 \quad (14)$$

De la ecuación anterior puede despejarse  $\vec{E}_1$  quedando:

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{Q_1} = \frac{45 \cdot 10^{-3} \left( -\frac{1}{\sqrt{8}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{j} \right) N}{10 \cdot 10^{-6} C} = 4,5 \cdot 10^3 \left( -\frac{1}{\sqrt{8}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{j} \right) N/C \quad (15)$$

### 5.2. Método 2

La otra alternativa de cálculo del vector  $\vec{E}_1$  consiste en utilizar su definición:

$$\vec{E}_2 = K \frac{Q_2}{r_{21}^2} \hat{e}_{21} \quad (16)$$

Se deja como ejercicio comprobar que el resultado obtenido al aplicar la ecuación 16 es el mismo que el que se obtiene en la ecuación 15.

## 6. Calcular el campo en el punto A situado en las coordenadas (5,2).

Para calcular el campo total en el punto A (ver figura 5) hay que calcular el campo que la carga  $Q_1$  crea en el punto A así como el campo que la carga  $Q_2$  crea en el punto A:

$$\vec{E}_1 = K \frac{Q_1}{r_{1A}^2} \hat{e}_{1A} \quad (17)$$

$$\vec{E}_2 = K \frac{Q_2}{r_{2A}^2} \hat{e}_{2A} \quad (18)$$

$$\vec{E}_{TOT_A} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (19)$$

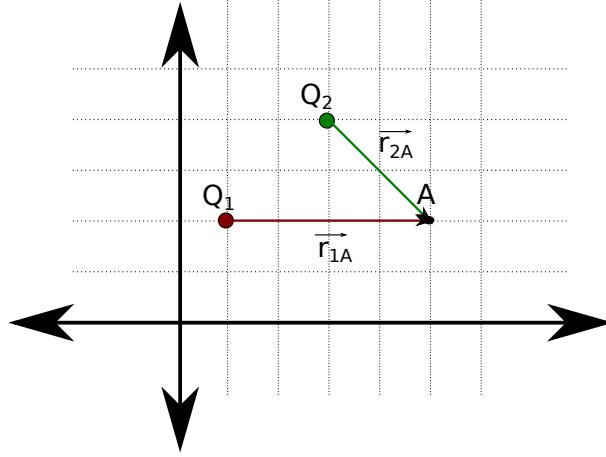


Figura 4: Esquema del problema para el cálculo del campo en el punto A.

La principal dificultad relacionada con los cálculos anteriores está en el cálculo de los vectores  $\vec{r}_{1A}$  y  $\vec{r}_{2A}$  así como de sus correspondientes vectores unitarios. Como este tipo de cálculos ya se ha hecho de forma detallada anteriormente en este documento, a continuación simplemente se presentan los resultados de los vectores para que el alumno compruebe si ha hecho este cálculo adecuadamente:

$$\vec{r}_{1A} = \vec{r}_A - \vec{r}_1 = (5\hat{i} + 2\hat{j})m - (\hat{i} + 2\hat{j})m = 4\hat{i}m \quad (20)$$

$$\vec{r}_{2A} = \vec{r}_A - \vec{r}_2 = (5\hat{i} + 2\hat{j})m - (3\hat{i} + 4\hat{j})m = (2\hat{i} - 2\hat{j})m \quad (21)$$

$$\hat{e}_{1A} = \hat{i} \quad (22)$$

$$\hat{e}_{2A} = \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{j} \quad (23)$$

## 7. Calcula el potencial en el punto A situado en las coordenadas (5,2).

Para calcular el potencial en el punto A hay que tener en cuenta de nuevo que ese potencial se debe tanto a la carga  $Q_1$  ( $V_{1A}$ ) como a la carga  $Q_2$  ( $V_{2A}$ ). Por tanto, el potencial total se calculará como la suma de  $V_{1A}$  y  $V_{2A}$

### 7.1. Cálculo de $V_{1A}$

Para calcular  $V_{1A}$  utilizamos la expresión vista en clase:

$$V_{1A} = K \frac{Q_1}{r_{1A}} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{10 \cdot 10^{-6}C}{4m} = \frac{9 \cdot 10^4 Nm}{4 C} = \frac{9 \cdot 10^4}{4} V \quad (24)$$

### 7.2. Cálculo de $V_{2A}$

Para calcular  $V_{2A}$  utilizamos la expresión vista en clase:

$$V_{2A} = K \frac{Q_2}{r_{2A}} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{2 \cdot 10^{-6} C}{\sqrt{8} m} = \frac{1,8 \cdot 10^4 Nm}{\sqrt{8} C} = \frac{1,8 \cdot 10^4}{\sqrt{8}} V \quad (25)$$

### 7.3. Cálculo del potencial total

Para calcular el potencial total en el punto A debido a la presencia de las cargas  $Q_1$  y  $Q_2$ , se suman los potenciales  $V_{1A}$  y  $V_{2A}$ .

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = \left( \frac{9}{4} + \frac{1,8}{\sqrt{8}} \right) 10^4 V \quad (26)$$

## 8. Calcula el potencial en el punto B situado en las coordenadas (4,2).

Para calcular el potencial en el punto A hay que tener en cuenta de nuevo que ese potencial se debe tanto a la carga  $Q_1$  ( $V_{1B}$ ) como a la carga  $Q_2$  ( $V_{2B}$ ). Por tanto, el potencial total se calculará como la suma de  $V_{1B}$  y  $V_{2B}$ . Para ello, las variables que hay que calcular son  $r_{1B}$  y  $r_{2B}$  (ver figura ).

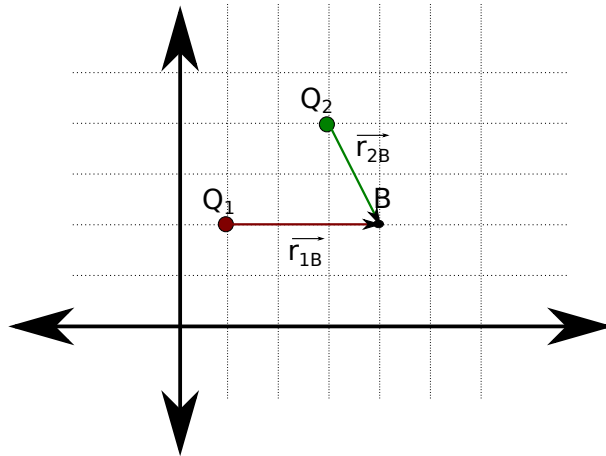


Figura 5: Esquema del problema para el cálculo del potencial en el punto B.

### 8.1. Cálculo de $V_{1B}$

Para calcular  $V_{1B}$  utilizamos la expresión vista en clase:

$$V_{1B} = K \frac{Q_1}{r_{1B}} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{10 \cdot 10^{-6} C}{4 m} = \frac{9 \cdot 10^4 Nm}{3 C} = 3 \cdot 10^4 V \quad (27)$$



## 8.2. Cálculo de $V_{2B}$

Para calcular  $V_{2B}$  utilizamos la expresión vista en clase:

$$V_{2B} = K \frac{Q_2}{r_{2A}} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{2 \cdot 10^{-6} C}{\sqrt{5} m} = \frac{1,8 \cdot 10^4 Nm}{\sqrt{5} C} = \frac{1,8 \cdot 10^4}{\sqrt{5}} V \quad (28)$$

## 8.3. Cálculo del potencial total

Para calcular el potencial total en el punto B debido a la presencia de las cargas  $Q_1$  y  $Q_2$ , se suman los potenciales  $V_{1B}$  y  $V_{2B}$ .

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = \left(3 + \frac{1,8}{\sqrt{5}}\right) 10^4 V \quad (29)$$

## 9. Calcula el trabajo necesario para llevar una carga $Q_3$ de $8\mu C$ desde A hasta B. Razone si es un trabajo realizado por el campo o en contra del campo.

Como hemos visto en clase, el trabajo se relaciona con la energía potencial de la siguiente manera:

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = E_{pA} - E_{pB} \quad (30)$$

donde cada una de las energías potenciales que aparecen en la ecuación anterior están relacionadas con el potencial de la siguiente forma:

$$E_{pA} = Q_3 V_A = Q_3 (V_{1A} + V_{2A}) \quad (31)$$

$$E_{pB} = Q_3 V_B = Q_3 (V_{1B} + V_{2B}) \quad (32)$$

Por tanto

$$W_{A \rightarrow B} = (Q_3 (V_{1A} + V_{2A})) - (Q_3 (V_{1B} + V_{2B})) = Q_3 (V_{1A} + V_{2A} - V_{1B} - V_{2B}) \quad (33)$$

si ahora sustituimos los valores numéricos, el resultado es:

$$W_{A \rightarrow B} = 8 \cdot 10^{-6} C \left( \left( \frac{9}{4} + \frac{1,8}{\sqrt{8}} \right) 10^4 V - \left( 3 + \frac{1,8}{\sqrt{5}} \right) 10^4 V \right) \quad (34)$$

Finalmente, se deja al alumno realizar los cálculos anteriores con la calculadora. Con el signo del trabajo calculado según la ecuación 34, podremos determinar si este trabajo es realizado por el campo o en contra del campo.