LÓGICA Y MÉTODOS DISCRETOS

19 de Mayo de 2014

APELLIDOS Y NOMBRE: ____________________

DNI: ____________________ GRUPO: __________

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS TEST

	1	2	3	4
Pregunta 1	V	F	V	F
Pregunta 2	F	V	V	F
Pregunta 3	V	F	F	V
Pregunta 4	F	V	F	F
Pregunta 5	V	F	V	F
Pregunta 6	V	F	F	F

Nota Importante: Todas las casillas hay que marcarlas con S/N (Sí/No) o con V/F (Verdadero/Falso). Una casilla no marcada se contará como una respuesta incorrecta.

EJERCICIO PARA DESARROLLAR

Ejercicio

Sean

- $\alpha_1 = \forall x(P(x, f(a)) \to \exists y Q(y, x))$,
- $\alpha_2 = R(f(a)) \to \neg\exists x R(x)$,
- $\alpha_3 = \neg\exists x(\exists y \neg P(y, x) \wedge \neg R(x))$,
- $\beta = \exists x(\exists y Q(y, x) \wedge \neg R(x))$.

Estudia si

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\} \vDash \beta$$

Si en el desarrollo del ejercicio se emplea el método de resolución hay que indicar claramente las sustituciones realizadas en cada paso.

Solución:

Sabemos que lo que nos piden es equivalente a demostrar que $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \neg\beta\}$ es insatisfacible.

Vamos a calcular la forma clausular de cada una de estas fórmulas:

- $\alpha_1 = \forall x(P(x, f(a)) \to \exists y Q(y, x))$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & \equiv & \forall x(\neg P(x, f(a)) \vee \exists y Q(y, x)) \\ & \equiv & \forall x \exists y(\neg P(x, f(a)) \vee Q(y, x)) \\ & & \forall x(\neg P(x, f(a)) \vee Q(g(x), x)). \end{array}$$

  Al pasar a la forma de Skolem no se ha podido sustituir la variable y por $f(x)$ pues el símbolo f ya aparece en la fórmula.

- $\alpha_2 = R(f(a)) \to \neg\exists x R(x)$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha_2 & = & R(f(a)) \to \neg\exists x R(x) \\ & \equiv & \neg R(f(a)) \vee \forall x \neg R(x) \\ & \equiv & \forall x(\neg R(f(a)) \vee \neg R(x)). \end{array}$$

- $\alpha_3 = \neg\exists x(\exists y \neg P(y, x) \wedge \neg R(x))$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha_3 & \equiv & \forall x \neg(\exists y \neg P(y, x) \wedge \neg R(x)) \\ & \equiv & \forall x(\neg\exists y \neg P(y, x) \vee \neg\neg R(x)) \\ & \equiv & \forall x(\forall y \neg\neg P(y, x) \vee R(x)) \\ & \equiv & \forall x(\forall y P(y, x) \vee R(x)) \\ & \equiv & \forall x \forall y(P(y, x) \vee R(x)). \end{array}$$

- $\neg\beta = \neg\exists x(\exists y Q(y, x) \wedge \neg R(x))$.

$$\begin{array}{rcl} \neg\beta & = & \neg\exists x(\exists y Q(y, x) \wedge \neg R(x)) \\ & \equiv & \forall x \neg(\exists y Q(y, x) \wedge \neg R(x)) \\ & \equiv & \forall x(\neg\exists y Q(y, x) \vee \neg\neg R(x)) \\ & \equiv & \forall x(\forall y \neg Q(y, x) \vee R(x)) \\ & \equiv & \forall x \forall y(\neg Q(y, x) \vee R(x)). \end{array}$$

Entonces lo que hemos de probar es que el conjunto de cláusulas

$$\{\neg P(x, f(a)) \vee Q(g(x), x);\ \neg R(f(a)) \vee \neg R(x);\ P(y, x) \vee R(x);\ \neg Q(y, x) \vee R(x)\}$$

es insatisfacible. Para ello vamos a hacer una deducción (por resolución) de la cláusula vacía. Puesto que para hacer resolventes las cláusulas no deben tener variables comunes realizaremos los oportunos cambios de variable para evitar esta situación.

$$
\begin{array}{ccc}
\neg P(x, f(a)) \vee Q(g(x), x) & & \neg Q(y, z) \vee R(z) \\
 & & (y|g(x);\ z|x) \\
\neg P(x, f(a)) \vee R(x) & & P(y, z) \vee R(z) \\
 & & (y|x;\ z|f(a)) \\
R(x) \vee R(f(a)) & & \neg R(f(a)) \vee \neg R(z) \\
(x|f(a)) & & (z|f(a)) \\
\square & &
\end{array}
$$

Para la última resolvente necesitamos sustituir x por $f(a)$ en la primera cláusula (y así $R(x) \vee R(f(a))$ se queda como $R(f(a))$) y en la segunda cláusula z por $f(a)$ (y así tenemos $\neg R(f(a))$). Es decir, necesitamos hacer un factor de cada una de las cláusulas. De no hacerlo no podríamos obtener la cláusula vacía a partir de $R(x) \vee R(f(a))$ y $\neg R(f(a)) \vee \neg R(z)$ (la sustitución $(z|x)$ no nos serviría para deducir la cláusula vacía pues no podemos "resolver a la doble").

Al haber llegado a la cláusula vacía, el conjunto de cláusulas es insatisfacible, luego

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \vDash \beta.$$

PREGUNTAS TEST

Pregunta Test 1: De entre las siguientes fórmulas señala las que sean universalmente válidas.

(1) $\forall x[Q(x) \vee \neg Q(x)]$
(2) $\exists x Q(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$
(3) $\forall x Q(x) \to \neg \forall x \neg Q(x)$
(4) $\exists x Q(x) \to \exists x \neg Q(x)$

Solución:

La primera fórmula, $\forall x(Q(x) \vee \neg Q(x))$ es universalmente válida. El motivo es que sea quien sea el elemento del dominio x, se tiene que $Q(x)$ o $\neg Q(x)$ es verdadero. Luego para cualquier x es cierto $Q(x) \vee \neg Q(x)$.

La segunda no lo es, pues no tiene que haber siempre un elemento para el que sea cierto $Q(x)$ y otro para el que no lo sea. Basta tomar $D = \mathbb{N}$ y $Q(x) \equiv x \geq 0$. Entonces $I(\exists x \neg Q(x)) = 0$.

La tercera la podemos escribir como $\forall x Q(x) \to \exists x Q(x)$. Y esa es universalmente válida, pues si el predicado Q es cierto para todos los valores de x, entonces tiene que haber un elemento para el que el predicado Q sea cierto.

La última no es universalmente válida, y el ejemplo dado para la segunda vale ahora también.

Vamos a hacerlo ahora intentando ver que $\vDash \alpha$ para cada una de las cuatro fórmulas que tenemos:

- $\alpha = \forall x[Q(x) \vee \neg Q(x)]$

  Tenemos que comprobar que $\{\neg \forall x(Q(x) \vee \neg Q(x))\}$ es insatisfacible. Calculamos la forma clausular.

$$\begin{aligned} \neg\alpha &= \neg \forall x(Q(x) \vee \neg Q(x)) \\ &\equiv \exists x \neg(Q(x) \vee \neg Q(x)) \\ &\equiv \exists x(\neg Q(x) \wedge Q(x)) \\ & \quad\ \neg Q(a) \wedge Q(a) \end{aligned}$$

  Y nos queda comprobar que el conjunto de cláusulas $\{\neg Q(a);\ Q(a)\}$ es insatisfacible, lo cual es claramente cierto.

- $\alpha = \exists x Q(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$.

  Procedemos igual que antes.

$$\begin{aligned} \neg\alpha &= \neg(\exists x Q(x) \wedge \exists x \neg Q(x)) \\ &\equiv \neg \exists x Q(x) \vee \neg \exists x \neg Q(x) \\ &\equiv \forall x \neg Q(x) \vee \forall x Q(x) \\ &\equiv \forall x \neg Q(x) \vee \forall y Q(y) \\ &\equiv \forall x \forall y(\neg Q(x) \vee Q(y)) \end{aligned}$$

  Y ahora hay que comprobar que el conjunto de cláusulas $\{\neg Q(x) \vee Q(y)\}$ es insatisfacible. Puesto que solo tenemos una cláusula no podemos hacer ninguna resolvente, luego no podemos llegar a la cláusula vacía.

- $\alpha = \forall x Q(x) \to \neg \forall x \neg Q(x)$.

  Repetimos el proceso.

$$\begin{aligned} \neg\alpha &= \neg(\forall x Q(x) \to \neg \forall x \neg Q(x)) \\ &\equiv \neg(\neg \forall x Q(x) \vee \neg \forall x \neg Q(x)) \\ &\equiv \forall x Q(x) \wedge \forall x \neg Q(x) \end{aligned}$$

  Y puesto que el conjunto de cláusulas $\{Q(x);\ \neg Q(x)\}$ es insatisfacible, la fórmula α es universalmente válida.

- $\alpha = \exists x Q(x) \to \exists x \neg Q(x)$.

  En este caso:

$$\begin{array}{rcl}
\neg\alpha & = & \neg(\exists x Q(x) \rightarrow \exists x \neg Q(x)) \\
& \equiv & \neg(\neg\exists x Q(x) \vee \exists x \neg Q(x)) \\
& \equiv & \neg\neg\exists x Q(x) \wedge \neg\exists x \neg Q(x) \\
& \equiv & \exists x Q(x) \wedge \forall x Q(x) \\
& \equiv & \exists x Q(x) \wedge \forall y Q(y) \\
& \equiv & \exists x \forall y (Q(x) \wedge Q(y)) \\
& \equiv & \forall y (Q(a) \wedge Q(y))
\end{array}$$

Y el conjunto de cláusulas $\{Q(a);\ Q(y)\}$ es satisfacible, ya que no podemos hacer ninguna resolvente.

Pregunta Test 2: Sean $\alpha = \forall x \exists y(P(x) \to Q(x,y))$ y $\beta = \forall x(P(x) \to Q(x, g(x)))$. Entonces:

(1) $\alpha \vDash \beta$.
(2) $\beta \vDash \alpha$.
(3) $\alpha \to \beta$ es satisfacible y refutable.
(4) $\neg\beta \vDash \neg\alpha$.

Solución:

Vamos a hacer los cuatro casos:

(1) $\alpha \vDash \beta$.

Para esto, comprobamos si $\{\alpha, \neg\beta\}$ es insatisfacible. Calculamos la forma clausular de cada una de estas fórmulas.

$\forall x \exists y(P(x) \to Q(x,y))$	$\neg\forall x(P(x) \to Q(x,g(x)))$
$\forall x(P(x) \to Q(x,f(x)))$	$\exists x\neg(\neg P(x) \vee Q(x,g(x)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee Q(x,f(x)))$	$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x,g(x)))$
	$P(a) \wedge \neg Q(a,g(a))$

Luego hemos de ver si el conjunto de cláusulas

$$\{\neg P(x) \vee Q(x,f(x));\ P(a);\ \neg Q(a,g(a))\}$$

es insatisfacible. Dado que este conjunto es un conjunto de Horn, si fuera insatisfacible habría una deducción lineal-input de la cláusula vacía que comenzaría en la cláusula negativa $\neg Q(a,g(a))$. Pero con esta cláusula no podemos hacer ninguna resolvente, ya que los literales $Q(a,g(a))$ y $Q(x,f(x))$ no son unificables.

Por tanto no es cierto que $\alpha \vDash \beta$.

(2) $\beta \vDash \alpha$.

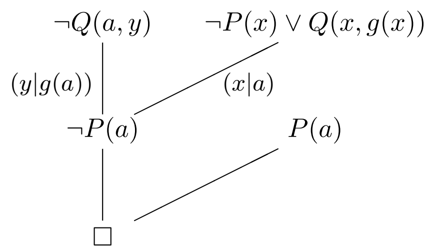
Ahora hemos de comprobar si $\{\beta,\ \neg\alpha\}$ es insatisfacible. Calculamos la forma clausular de ambas.

$\forall x(P(x) \to Q(x,g(x)))$	$\neg\forall x\exists y(P(x) \to Q(x,y))$
$\forall x(\neg P(x) \vee Q(x,g(x)))$	$\exists x\forall y\neg(\neg P(x) \vee Q(x,y))$
	$\exists x\forall y(P(x) \wedge \neg Q(x,y))$
	$\forall y(P(a) \wedge \neg Q(a,y))$

Y ahora tenemos que comprobar si el conjunto de cláusulas

$$\{\neg P(x) \vee Q(x,g(x));\ P(a);\ \neg Q(a,y)\}$$

es o no insatisfacible. Al ser un cojunto de Horn comenzamos por la cláusula negativa.



Y puesto que hemos llegado a la cláusula vacía, el conjunto es insatisfacible, luego $\beta \vDash \alpha$.

(3) $\alpha \to \beta$ es satisfacible y refutable.

Hemos visto en el apartado primero que $\alpha \nvDash \beta$, es decir, $\nvDash \alpha \to \beta$. Esto nos dice que $\alpha \to \beta$ no es universalmente válida, luego es refutable.

Veamos que es satisfacible, para lo cual nos basta con una estructura en la que la fórmula β se interprete como cierta. Esta estructura podría ser:

- Dominio: $D = \mathbb{N}$.
- Funciones: $g(x) = x + 1$.
- Predicados: $P(x) \equiv x$ es par. $Q(x,y) \equiv x < y$.

En tal caso, la fórmula β dice que si x es par entonces $x < x+1$, lo cual es claramente cierto.

Concluimos entonces que $\alpha \to \beta$ es satisfacible y refutable.

(4) $\neg\beta \vDash \neg\alpha$.
Esto supone comprobar si $\{\neg\beta,\ \alpha\}$ es o no insatisfacible. Pero en el apartado primero ya se vio que no era insatisfacible. Por tanto esta implicación semántica no es cierta.

Pregunta Test 3: Señala las consecuencias lógicas que sean ciertas.

(1) $\{\forall x P(x)\} \models \exists y P(y)$.
(2) $\{\forall x P(x) \to Q(a)\} \models Q(a) \vee \neg P(b)$.
(3) $\{\forall x P(x) \to Q(a)\} \models \exists x Q(x) \wedge \neg P(b)$.
(4) $\{Q(a) \to \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x) \to P(b)$.

Solución:

Lo resolvemos uno a uno.

(1) $\{\forall x P(x)\} \models \exists y P(y)$.
Sabemos que eso es equivalente a comprobar si $\{\forall x P(x);\ \neg\exists y P(y)\}$ es insatisfacible. La forma clausular de cada una de estas fórmulas es $\forall x P(x)$ y $\forall y \neg P(y)$. Y puesto que el conjunto de cláusulas $\{P(x);\ \neg P(y)\}$ es insatisfacible, la implicación semántica que se nos plantea es cierta.

(2) $\{\forall x P(x) \to Q(a)\} \models Q(a) \vee \neg P(b)$.
Calculamos la forma clausular de $\forall x P(x) \to Q(a)$ y de $\neg(Q(a) \vee \neg P(b))$.

$$\begin{array}{ll}
\forall x P(x) \to Q(a) & \neg(Q(a) \vee \neg P(b)) \\
\neg\forall x P(x) \vee Q(a) & \neg Q(a) \wedge P(b) \\
\exists x \neg P(x) \vee Q(a) & \\
\exists x (\neg P(x) \vee Q(a) & \\
\neg P(c) \vee Q(a) &
\end{array}$$

Al hacer la última forma de Skolem, para sustituir la variable x no podemos emplear el símbolo a ya que aparece en la fórmula ni el símbolo b, ya que aparece en otra fórmula del mismo problema. Usamos por tanto otro símbolo de constante.
Y como el conjunto de cláusulas $\{\neg P(c) \vee Q(a);\ \neg Q(a);\ P(b)\}$ es satisfacible (pues no podemos llegar a la cláusula vacía).
La implicación semántica es entonces falsa.

(3) $\{\forall x P(x) \to Q(a)\} \models \exists x Q(x) \wedge \neg P(b)$.
Lo resolvemos igual que ejercicios anteriores:

$$\begin{array}{ll}
\forall x P(x) \to Q(a) & \neg(\exists x Q(x) \wedge \neg P(b)) \\
\neg\forall x P(x) \vee Q(a) & \neg\exists x Q(x) \vee P(b) \\
\exists x \neg P(x) \vee Q(a) & \forall x Q(x) \vee P(b) \\
\exists x (\neg P(x) \vee Q(a)) & \forall x (Q(x) \vee P(b)) \\
\neg P(c) \vee Q(a) &
\end{array}$$

Y el conjunto de cláusulas $\{\neg P(c) \vee Q(a);\ Q(x) \vee P(b)\}$ es satisfacible, la implicación semántica es falsa.

(4) $\{Q(a) \to \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x) \to P(b)$.
Aplicando primero el teorema de la deducción transformamos este problema en ver si

$$\{Q(a) \to \forall x P(x);\ \forall x Q(x)\} \models P(b)$$

y esto es equivalente a ver si $\{Q(a) \to \forall x P(x);\ \forall x Q(x);\ \neg P(b)\}$ es insatisfacible.
Después de hallar la forma clausular lo que nos queda es comprobar si el conjunto de cláusulas

$$\{\neg Q(a) \vee P(x);\ Q(x);\ \neg P(a)\}$$

es insatisfacible, lo cual es cierto como nos muestra la siguiente deducción.

$$\begin{array}{lll}
\neg P(a) & & \neg Q(a) \vee P(x) \\
| & (x|a) & \\
\neg Q(a) & & Q(x) \\
| & (x|a) & \\
\square & &
\end{array}$$

Pregunta Test 4: Dada la fórmula

$$\exists y \forall x R(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$$

¿Cuáles de las siguientes son lógicamente equivalentes con ella?
(1) $\forall y \exists x(\neg R(x,y) \vee P(x,y))$
(2) $\forall y \forall z \exists x(\neg R(x,y) \vee P(x,z))$
(3) $\forall y \exists x \exists z(\neg R(x,y) \vee P(z,y))$
(4) $\forall y \forall z(\neg R(f(y,z),y) \vee P(g(y,z),z))$

Solución:
Vamos a tomar la fórmula y transformarla en otras equivalentes a ella.

$$\begin{array}{l} \exists y \forall x R(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y) \\ \neg \exists y \forall x R(x,y) \vee \forall y \exists x P(x,y) \\ \forall y \exists x \neg R(x,y) \vee \forall y \exists x P(x,y) \end{array}$$

Y vemos que tenemos la disyunción de dos fórmulas. En cada una de estas subfórmulas hay un cuantificador $\forall$. Pero al estar separados por la conectiva $\vee$ no podemos agruparlos en 1. Por tanto, podemos descartar las fórmulas primera y tercera.

En cuanto a la cuarta vemos que no hay ningún cuantificador $\exists$. De hecho, la fórmula cuarta es la forma de Skolem. Las variables cuantificadas con el cuantificador existencial han sido sustituidasa por símbolos de función. Cuando calculamos la forma de Skolem sabemos que la fórmula que obtenemos no es equivalente a la de partida.

La única opción posible es la segunda. Vamos a comprobarlo. Continuamos por donde nos hemos quedado.

$$\begin{array}{l} \forall y \exists x \neg R(x,y) \vee \forall y \exists x P(x,y) \\ \forall y \exists x \neg R(x,y) \vee \forall z \exists x P(x,z) \\ \forall y (\exists x \neg R(x,y) \vee \forall z \exists x P(x,z) \\ \forall y \forall z (\exists x \neg R(x,y) \vee \exists x P(x,z) \\ \forall x \forall z \exists x (\neg R(x,y) \vee P(x,z). \end{array}$$

Pregunta Test 5: Señala las fórmulas que sean verdaderas bajo la siguiente interpretación:

$$D = \mathbb{Z}_5$$
$$P = \{(0,0),(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,4)\}$$
$$a = 0; \qquad f(x) = x+1; \qquad v(x) = 1.$$

(1) $\exists x P(x,x)$
(2) $\forall x P(x, f(x))$
(3) $\forall y \exists x [P(x,y) \vee \neg P(y,x)]$
(4) $\forall x [P(x,a) \vee \neg P(a,x)]$

Solución:

(1) $\exists x P(x,x)$.
Esta fórmula es cierta en esta estructura, pues hay un valor de x ($x = 0$) para el que la fórmula $P(x,x)$ se interpreta como cierta. También para $x = 4$ la fórmula $P(x,x)$ se interpreta como cierta.

(2) $\forall x P(x, f(x))$.
Esta fórmula se interpreta como falsa. El motivo es que para $x = 4$ la fórmula $P(x, f(x))$ no es cierta, ya que $f(4) = 0$ y $P(4,0) = 0$. Luego no es cierto que para cualquier x del dominio la fórmula $P(x, f(x))$ sea cierta.

(3) $\forall y \exists x (P(x,y) \vee \neg P(y,x))$.
Para comprobar que es cierta, dado cualquier $y \in \mathbb{Z}_5$ tenemos que encontrar $x \in \mathbb{Z}_5$ de forma que, bien $P(x,y)$ sea cierto, bien $P(y,x)$ sea falso. Tenemos que:

- Para $y = 0$ podemos tomar $x = 0$, ya que $P(0,0) = 1$.
- Para $y = 1$ podemos tomar también $x = 0$, ya que $P(0,1) = 1$.
- Para $y = 2$ podemos tomar $x = 1$, pues $P(1,2) = 1$.
- Para $y = 3$ podemos tomar $x = 2$, ya que $P(2,3) = 1$.
- Para $y = 4$ podemos tomar $x = 3$.

Concluimos entonces que la fórmula $\forall y \exists x (P(x,y) \vee \neg P(y,x))$ es verdadera en esta estructura.

(4) $\forall x [P(x,a) \vee \neg P(a,x)]$.
En este caso, la fórmula $P(x,a) \vee \neg P(a,x)$ es falsa para $x = 1$, ya que $P(1,0) = 0$ y $P(0,1) = 1$. Por tanto, $I(\forall x (P(x,a) \vee \neg P(a,x))) = 0$.

Vamos a hacerlo ahora por medio de una tabla en la que analizamos todos los casos.

(1) $\exists x P(x,x)$

x	$P(x,x)$	$\exists x P(x,x)$
0	1	
1	0	
2	0	1
3	0	
4	1	

(2) $\forall x P(x, f(x))$

x	$f(x)$	$P(x,f(x))$	$\forall x P(x,f(x))$
0	1	1	
1	2	1	
2	3	1	0
3	4	1	
4	0	0	

(3) $\forall y \exists x [P(x,y) \vee \neg P(y,x)]$

y	x	$P(x,y)$	$P(y,x)$	$\neg P(y,x)$	$P(x,y) \vee \neg P(y,x)$	$\exists x(P(x,y) \vee \neg P(y,x))$	$\forall y \exists x(P(x,y) \vee \neg P(y,x))$
0	0	1	1	0	1	1	1
	1	0	1	0	0		
	2	0	0	1	1		
	3	0	0	1	1		
	4	0	0	1	1		
1	0	1	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1		
	2	0	1	0	0		
	3	0	0	1	1		
	4	0	0	1	1		
2	0	0	0	1	1	1	
	1	1	0	1	1		
	2	0	0	1	1		
	3	0	1	0	0		
	4	0	0	1	1		
3	0	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1		
	2	1	0	1	1		
	3	0	0	1	1		
	4	0	1	0	0		
4	0	0	0	1	1	1	
	1	0	0	1	1		
	2	0	0	1	1		
	3	1	0	1	1		
	4	1	1	0	1		

(4) $\forall x[P(x,a) \vee \neg P(a,x)]$

x	$P(x,a)$	$P(a,x)$	$\neg P(a,x)$	$P(x,a) \vee \neg P(a,x)$	$\forall x(P(x,a) \vee \neg P(a,x))$
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	
2	0	0	1	1	
3	0	0	1	1	
4	0	0	1	1	

Pregunta Test 6: ¿Cuáles de los siguientes pares de literales son unificables?

(1) $\{Q\big(g(h(a)), z\big), Q\big(z, g(x)\big)\}$,
(2) $\{Q\big(f(x,y), z\big), Q\big(z, x\big)\}$.
(3) $\{Q\big(g(x), z\big), Q\big(z, x\big)\}$,
(4) $\{Q\big(g(x), z\big), Q\big(z, a\big)\}$.

Solución:

Planteamos en cada caso un sistema de ecuaciones en términos y tratamos de llevarlo a uno en forma resuelta.

(1) $\{Q\big(g(h(a)), z\big), Q\big(z, g(x)\big)\}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} g(h(a)) & = & z \\ z & = & g(x) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & g(h(a)) \\ g(x) & = & z \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & g(h(a)) \\ g(x) & = & g(h(a)) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & g(h(a)) \\ x & = & h(a) \end{array}\right.$$

Y ya está en forma resuelta. Los literales son unificables.

(2) $\{Q\big(f(x,y), z\big), Q\big(z, x\big)\}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & z \\ z & = & x \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & f(x,y) \\ x & = & z \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & f(x,y) \\ x & = & f(x,y) \end{array}\right.$$

Y vemos que no son unificables, pues hemos llegado a la ecuación $x = f(x,y)$.

(3) $\{Q\big(g(x), z\big), Q\big(z, x\big)\}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} g(x) & = & z \\ z & = & x \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & g(x) \\ x & = & z \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & g(x) \\ x & = & g(x) \end{array}\right.$$

Y al haber llegado a la ecuación $x = g(x)$ concluimos que no son unificables.

(4) $\{Q\big(g(x), z\big), Q\big(z, a\big)\}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} g(x) & = & z \\ z & = & a \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & g(x) \\ z & = & a \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & g(x) \\ g(x) & = & a \end{array}\right.$$

La ecuación $g(x) = a$ nos dice que no son unificables.