TEMA 5

Matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes.

Ejercicio 1. Da un ejemplo de dos matrices $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_2)$, distintas de cero, tales que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

Ejercicio 2. Prueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ satisface una ecuación de la forma $A^2 + \alpha A + \beta \mathrm{Id} = 0$. Utiliza este hecho para ver que A es regular y calcular su inversa.

Ejercicio 3. Da un ejemplo de tres matrices A, P, Q, con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, de forma que P y Q sean regulares y distintas, A sea distinta de cero y $PA = QA$.

Ejercicio 4. Una matriz se dice idempotente si $A^2 = A$.

1. Prueba que si A es idempotente y regular entonces $A = \mathrm{Id}$.
2. Prueba que si A es idempotente, y $B = \mathrm{Id} - A$ entonces B es idempotente y $AB = 0$.
3. Calcula todas las matrices $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ idempotentes.
4. Encuentra $A \in M_3(\mathbb{Z}_2)$, $A \neq 0$, $A \neq \mathrm{Id}$ que sea idempotente.

Ejercicio 5. Comprueba que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son equivalentes, pero que no son equivalentes por filas ni equivalentes por columnas.

Ejercicio 6. Calcula la inversa, cuando exista, de las siguientes matrices:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(K)$, donde K es un cuerpo cualquiera.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_2),\ M_3(\mathbb{Z}_3),\ M_3(\mathbb{Q})$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_3),\ M_4(\mathbb{Z}_5)$

Ejercicio 7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Determina para que valores de a, b, c, d se verifica que $A \cdot B = B \cdot A$.

Ejercicio 8. Una imagen en blanco y negro se puede almacenar en una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ con $0 \leq a_{ij} \leq 1$ donde el valor de a_{ij} determina el tono de gris del pixel i, j. Sea t un divisor común de n y m. Seleccionamos un cuadrado de la imagen de tamaño $t \times t$ al que llamamos C. Calcula el producto

$$\frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{tt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cómo interpretas el resultado? ¿Qué operación matricial podemos realizar sobre A para que cada pixel de la imagen resultante tenga tamaño $t \times t$?

Ejercicio 9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & a & 2 \\ 3 & 0 & 5 & a+1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$. Estudia para qué valores del parámetro a la matriz A tiene inversa para el producto.

Ejercicio 10. ¿Cómo afecta a un sistema de ecuaciones si en la matriz de coeficientes intercambiamos dos columnas? ¿Y si multiplicamos una columna por un escalar no nulo?

Ejercicio 11. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

1. Encuentra una matriz B tal que $A \cdot B = Id$.
2. Encuentra todas las matrices B que cumplan la propiedad anterior.
3. ¿Existe una matriz C tal que $C \cdot A = Id$?

Ejercicio 12. Encuentra, si es posible, $P \in M_4(\mathbb{Z}_3)$, regular, tal que $PA = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = -1 \end{cases}$$

discútelo considerando los coeficientes en $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Q}$. En el caso de que sea compatible, encuentra explícitamente todas las soluciones.

Ejercicio 14. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ x + 2y + az = 4 \\ 3x + (a+2)y + 2z = 2 \end{cases}$$

Discútelo según el valor del parámetro a. Si para $a = 4$ es compatible, resuélvelo.

Ejercicio 15. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Q}$

$$\begin{cases} x - ay + (a+1)z = 4 \\ ax + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Discútelo según los valores del parámetro a, y resuélvelo para $a = -1$.

Ejercicio 16. Calcula la forma normal de Hermite por filas y el rango de la siguiente matriz, vista con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$,$\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Q}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 17. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_p).$$

Encuentra los valores de p para los que la matriz A es singular.

Ejercicio 18. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales considerados en $\mathbb{Q}$.

- $$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x - y + z + t + v = 0 \\ x + y + z + t - v = 0 \\ -x - y + z + t - v = 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x + y + t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x + y - z + t - v = 0 \\ x - y + z + t + v = 1 \\ x + t = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 19. Repite el ejercicio anterior considerando los coeficientes de los sistemas en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. Para los sistemas indeterminados calcula el número de soluciones.

Ejercicio 20. Calcula el rango de cada una de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{Q}) \text{ y } B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 10 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix} \in M_{4\times 6}(\mathbb{Z}_{11})$$

“

Ejercicio 21. Calcula los siguientes determinantes (considerando las matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}$):

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/5 \\ -1 & 1/2 & -1/3 & -1/5 \\ 1 & 1/2 & 4/3 & 1/5 \\ 2 & 1 & 2/3 & 11/5 \end{vmatrix}$$

3. $$\begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{vmatrix}$$

4.
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

5.
$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

6.
$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

7.
$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 22. Calcula el rango de la siguiente matriz, con coeficientes en $\mathbb{Z}_3$, según los valores de los parámetros a y b.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & a & b & a+b \end{pmatrix}$$

Ejercicio 23. Sea K un cuerpo, y $a, b, c, d \in K$. Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 24. Un sistema de cifrado elemental puede obtenerse asignando a cada letra del alfabeto un valor entero positivo, y enviando un mensaje alfabético como una cadena de enteros[1], aunque este sistema no es difícil de "romper". Sin embargo el sistema puede mejorarse usando multiplicación matricial. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z})$ invertible, tal que $A^{-1} \in M_3(\mathbb{Z})$. Disponemos entonces el mensaje numérico anterior en una matriz B, de orden $3 \times k$, donde k es el menor entero tal que $3k$ es mayor o igual que el número de símbolos del mensaje, y disponemos la cadena numérica rellenando las filas de la matriz B de izquierda a derecha y de arriba a abajo, completando con ceros si fuera necesario. El mensaje cifrado se obtiene leyendo de igual forma los elementos de la matriz AB.

Dada la asignación

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
6	12	16	24	4	19	8	5	20	13	17	7	1
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
21	2	25	10	3	23	14	11	22	15	26	9	18

y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcula el cifrado a enviar correspondiente al mensaje

INTENTALO DE NUEVO

[1] cifrado monoalfabético general

2. Hallar A^{-1} y descifrar la cadena:

$$19, -18, 0, 33, -5, 20, 22, 11, 24, 36, 41, 45, 45, 151,$$
$$128, 119, 7, 96, -14, 8, -3, -22, -8, -22, -21, -7, -22$$

3. ¿Cómo puede obtenerse una matriz distinta, C, con entradas enteras, que pueda sustituir a A?.

Ejercicio 25. En este ejercicio os presentamos otro sistema de cifrado elemental derivado del conocido como cifrado de Hill. Comenzamos codificando los caracteres según la tabla siguiente

0	0	8	8	G	16	Ñ	24	V	32
1	1	9	9	H	17	O	25	W	33
2	2	A	10	I	18	P	26	X	34
3	3	B	11	J	19	Q	27	Y	35
4	4	C	12	K	20	R	28	Z	36
5	5	D	13	L	21	S	29		
6	6	E	14	M	22	T	30		
7	7	F	15	N	23	U	31		

Con lo que nuestro texto será una sucesión de valores en $\mathbb{Z}_{37}$, un cuerpo ya que 37 es primo. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 2 & 34 & 17 & 16 & 4 \\ 17 & 8 & 7 & 27 & 2 & 18 \\ 35 & 25 & 7 & 34 & 6 & 4 \\ 2 & 28 & 3 & 9 & 29 & 27 \\ 9 & 18 & 5 & 14 & 23 & 2 \\ 33 & 9 & 7 & 22 & 8 & 30 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{Z}_{37}).$$

La matriz A se emplea como clave de cifrado en un sistema similar al ejercicio 24. Por ejemplo, para cifrar la cadena `ALGEBRA`, convertimos la cadena a una sucesión de elementos en $\mathbb{Z}_{37}$, lo que nos da $10, 21, 16, 14, 11, 28, 10$. Añadimos a esa cadena un 0, y a continuación añadimos tantos valores aleatorios no nulos hasta obtener una longitud múltiplo de 6, con lo que obtenemos la cadena $10, 21, 16, 14, 11, 28, 10, 0, 12, 18, 7, 33$. Esta cadena la ordenamos en una matriz de 6 filas y tantas columnas como sea necesario, que rellenamos por filas, por lo que obtenemos

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 21 \\ 16 & 14 \\ 11 & 28 \\ 10 & 0 \\ 12 & 18 \\ 7 & 33 \end{pmatrix} \in M_{6\times 2}(\mathbb{Z}_{37}).$$

El cifrado se produce multiplicando $A \cdot P$, lo que proporciona

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 0 \\ 9 & 4 \\ 18 & 7 \\ 12 & 25 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

que convertido a cadena de caracteres se corresponde con `9AI094I7CO43`.

1. Cifra tu nombre completo.

2. Descifra la cadena

`QRGLYSEEPBL0YH0RJD4I35M1TPBNOGTHLW0AJ6K2DWM9BK1LFWF8TRBW76PO1D5U1AIVÑ6F4`.

Ejercicio 26. Sea p el menor primo mayor que el número formado por 50000 más las cuatro últimas cifras de vuestro DNI. Si por ejemplo dicho DNI fuese 12345678X el número se construiría como `55678.next_prime()`, lo que daría

$p = 55681$. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{r}
5015x_1 + 18603x_2 + 4894x_3 + 17361x_4 + 47670x_5 + 49916x_6 + 5523x_7 + 5269x_8 + 18257x_9 + 9340x_{10} + 26043x_{11} = 19653 \\
45792x_1 + 29150x_2 + 17379x_3 + 36497x_4 + 10140x_5 + 26125x_6 + 50178x_7 + 40381x_8 + 49002x_9 + 29195x_{10} + 46346x_{11} = 14741 \\
18335x_1 + 4862x_2 + 16313x_3 + 49293x_4 + 19464x_5 + 24883x_6 + 41089x_7 + 372x_8 + 222x_9 + 35926x_{10} + 22174x_{11} = 39227 \\
11092x_1 + 48089x_2 + 17749x_3 + 35751x_4 + 23070x_5 + 47020x_6 + 32813x_7 + 15861x_8 + 40258x_9 + 35832x_{10} + 11679x_{11} = 10234 \\
48094x_1 + 1810x_2 + 30641x_3 + 13263x_4 + 19055x_5 + 29957x_6 + 1816x_7 + 31183x_8 + 40695x_9 + 44119x_{10} + 1351x_{11} = 29876 \\
15698x_1 + 40421x_2 + 31830x_3 + 5392x_4 + 35457x_5 + 37743x_6 + 36917x_7 + 27596x_8 + 57x_9 + 38297x_{10} + 30345x_{11} = 49370 \\
19094x_1 + 3134x_2 + 27116x_3 + 28634x_4 + 48678x_5 + 18937x_6 + 35925x_7 + 26930x_8 + 33163x_9 + 9521x_{10} + 30821x_{11} = 24055 \\
36705x_1 + 44884x_2 + 30170x_3 + 9765x_4 + 23988x_5 + 49952x_6 + 22768x_7 + 2807x_8 + 502x_9 + 35364x_{10} + 23941x_{11} = 41543 \\
28869x_1 + 6221x_2 + 27182x_3 + 41958x_4 + 47947x_5 + 38480x_6 + 9733x_7 + 29309x_8 + 24051x_9 + 44039x_{10} + 1458x_{11} = 23814 \\
24222x_1 + 29259x_2 + 29203x_3 + 26461x_4 + 7514x_5 + 8032x_6 + 50128x_7 + 46744x_8 + 33502x_9 + 18158x_{10} + 45245x_{11} = 3049
\end{array}\right.$$

Discute si tiene o no solución. En caso de tener más de una solución calcula cinco soluciones distintas.

Preguntas test

Ejercicio 27. Acerca del siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +ay & -z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & a \end{array}\right\}$$

podemos afirmar que:

a) Independientemente del valor de a, es compatible determinado.

b) Independientemente del valor de a, es compatible indeterminado.

c) Es siempre incompatible.

d) La compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a.

Ejercicio 28. Dadas dos matrices A y B en $M_2(\mathbb{R})$ y tales que

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces $A^2 - B^2$ es igual a

a) $\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 29. Sea $A \in M_3(\mathbb{Q})$ tal que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de A es

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 30. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

vale

a) -9 b) -3 c) 0 d) 3

Ejercicio 31. Dado el sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) Es compatible determinado.

b) Es incompatible.

c) Es compatible indeterminado.

d) Tiene exactamente 35 soluciones.

Ejercicio 32. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sea $X \in M_3(\mathbb{R})$. Entonces

1. $X = B$ es la única solución de la ecuación matricial $AB = AX$.
2. $X = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $AB = AX$.
3. Tanto B como C son soluciones de la ecuación matricial $AB = AX$.
4. La ecuación matricial $AB = AX$ no tiene solución.

Ejercicio 33. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 6 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_p)$$

La matriz A es singular (es decir, no tiene inversa para el producto) para el siguiente valor de p

a) $p = 2$ b) $p = 3$ c) $p = 5$ d) $p = 7$

Ejercicio 34. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$. Entonces $(A \cdot B)^{-1}$

a) No existe.

b) vale $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

c) vale $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) vale $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 35. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + 2z & = & 6 \\ 4x + 5y + az & = & 1 \end{array} \right.$$

la respuesta correcta es:

a) El sistema es compatible indeterminado y tiene exactamente 7 soluciones.

b) Es siempre compatible, pero depende del valor de a que sea compatible determinado o compatible indeterminado.

c) Dependiendo del valor de a puede ser compatible o incompatible.

d) Es compatible indeterminado, y el número de soluciones depende del valor de a.

Ejercicio 36. Señala la afirmación verdadera. La matriz en $M_4(\mathbb{Z}_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) No tiene inversa para ningún valor de a.

b) Tiene inversa para todo valor de a.

c) Sólo tiene inversa para $a = 1$.

d) Tiene inversa sólo cuando $a \neq 0$.

Ejercicio 37. En $\mathbb{R}$ el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & b & b \\ 1 & 1 & a+b & b-a \end{pmatrix}$$

es

a) Depende de los valores de a y b.

b) 3.

c) 2.

d) 4.

Ejercicio 38. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_2)$ tal que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) Los datos del enunciado no permiten calcular A.

Ejercicio 39. Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$. Entonces:

a) La matriz $I - A + A^t$ es simétrica.

b) La matriz $I - (A \cdot A^t)$ es simétrica.

c) La matriz $I - A^2$ es simétrica.

d) La matriz $I - 2A$ es simétrica.

Ejercicio 40. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ es regular para

a) $p = 5$.

b) $p = 7$.

c) $p = 3$.

d) $p = 2$.

Ejercicio 41. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite por filas es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 42. En el conjunto $M_2(\mathbb{Z}_2)$ definimos la relación de equivalencia $ARB \iff A^2 = B^2$. Entonces:

(a) La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pertenece a la clase de equivalencia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) El conjunto cociente está formado por un solo elemento.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$.

(d) La clase $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$ tiene cardinal uno.

Ejercicio 43. Sea $X \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

1. $X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-25}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{-23}{11} & \frac{-3}{11} \end{pmatrix}$.
3. $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. La matriz X no es regular.

Ejercicio 44. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & + & 5z & = & 6 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & a^2+1 \end{array}\right.$$

(a) El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a, pero el número de soluciones depende de a.

(b) El sistema es incompatible, independientemente del valor de a.

(c) El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a, y tiene 7 soluciones.

(d) Según el valor de a el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible.

Ejercicio 45. Si $A \in M_3(\mathbb{R})$ verifica que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces A^{-1} es igual a:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 46. Dados los sistemas de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 4z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & & & + & (b+5)z & = & 5b+4 \\ x & + & 3y & + & (b+2)z & = & 2b+4 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 5b \end{array}\right.$$

1. Son equivalentes para $b = 3$.
2. Son equivalentes para $b = 4$.
3. Son equivalentes para $b = 5$.
4. No son equivalentes para ningún valor de b.

Ejercicio 47. Di qué vale $a \in \mathbb{Z}_{11}$ para que los sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & 2z & + & t & = & 0 \\ 3x & + & y & + & az & + & 2t & = & 5 \\ 4x & & & + & 8z & + & t & = & 3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & 4y & + & 8z & + & 3t & = & 3 \\ 2x & + & y & & & + & t & = & 5 \\ & & y & + & 7z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right\}$$

sean equivalentes:

(a) 4.

(b) 10.

(c) 2.

(d) 1.

Ejercicio 48. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Q}$

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & b \\ x & + & by & + & z & = & a \end{array}$$

(a) El sistema es siempre compatible indeterminado.

(b) Si $a = b = 1$ el sistema es incompatible.

(c) Existen valores de a y b para los que el sistema es compatible determinado.

(d) El sistema es compatible indeterminado si, y sólo si, $a \cdot b = 1$.

Ejercicio 49. Sea $X \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

a) $X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-25}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{-23}{11} & \frac{-3}{11} \end{pmatrix}$.

c) $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

d) La matriz X no es regular.

Ejercicio 50. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -a & 3 & 7 & 3 \\ 1 & a & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

(a) Para $a = 2$ las matrices A y B son equivalentes por filas.

(b) Para $a = -1$ las matrices A y B son equivalentes por filas.

(c) No existe ningún valor de a para el que las matrices A y B sean equivalentes por filas.

(d) Para $a = 1$ las matrices A y B no son equivalentes por columnas.

Ejercicio 51. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 4 \\ 4x & + & 3y & = & 3 \end{array}$$

con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$

a) Para $p = 2$ el sistema tiene dos soluciones.

b) Para $p = 3$ el sistema tiene tres soluciones.

c) Para $p = 5$ el sistema tiene cinco soluciones.

d) Para $p = 7$ el sistema tiene siete soluciones.

Ejercicio 52. Sea $P \in M_2(\mathbb{Q})$ tal que $P \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces:

(a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) La matriz P no tiene inversa.

(d) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 53. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 3 & a+1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Entonces la matriz A es regular:

a) Para cualquier valor de $a \in \mathbb{Z}_7$.

b) Para $a = 1, 3, 4, 5, 6$.

c) Para $a = 3, 4, 5, 6$.

d) Para $a = 0, 2, 3, 5, 6$.

Ejercicio 54. Consideremos el sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lambda x & + & y & + & z & = & \lambda \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda \end{cases}$$

Entonces:

1. El sistema es compatible para $\lambda \neq -2$
2. El sistema es compatible determinado si, y sólo si, $\lambda < 0$
3. El sistema es compatible determinado si, y sólo si, $\lambda > 0$
4. El sistema es compatible determinado para todos los valores de λ.