

Matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes.

Ejercicio 1. Da un ejemplo de dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$, distintas de cero, tales que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

Ejercicio 2. Prueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ satisface una ecuación de la forma $A^2 + \alpha A + \beta \text{Id} = 0$. Utiliza este hecho para ver que A es regular y calcular su inversa.

Ejercicio 3. Da un ejemplo de tres matrices A, P, Q , con coeficientes en \mathbb{Z}_2 , de forma que P y Q sean regulares y distintas, A sea distinta de cero y $PA = QA$.

Ejercicio 4. Una matriz se dice idempotente si $A^2 = A$.

1. Prueba que si A es idempotente y regular entonces $A = \text{Id}$.
2. Prueba que si A es idempotente, y $B = \text{Id} - A$ entonces B es idempotente y $AB = 0$.
3. Calcula todas las matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ idempotentes.
4. Encuentra $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$, $A \neq 0$, $A \neq \text{Id}$ que sea idempotente.

Ejercicio 5. Comprueba que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son equivalentes, pero que no son equivalentes por filas ni equivalentes por columnas.

Ejercicio 6. Calcula la inversa, cuando exista, de las siguientes matrices:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)$, donde K es un cuerpo cualquiera.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2), \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3), \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_3), \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_5)$

Ejercicio 7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en \mathbb{Q} . Determina para que valores de a, b, c, d se verifica que $A \cdot B = B \cdot A$.

Ejercicio 8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & a & 2 \\ 3 & 0 & 5 & a+1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_7)$. Estudia para qué valores del parámetro a la matriz A tiene inversa para el producto.

Ejercicio 9. ¿Cómo afecta a un sistema de ecuaciones si en la matriz de coeficientes intercambiamos dos columnas? ¿Y si multiplicamos una columna por un escalar no nulo?

Ejercicio 10. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

1. Encuentra una matriz B tal que $A \cdot B = \text{Id}$.
2. Encuentra todas las matrices B que cumplan la propiedad anterior.
3. ¿Existe una matriz C tal que $C \cdot A = \text{Id}$?

Ejercicio 11. Encuentra, si es posible, $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_3)$, regular, tal que $PA = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = -1 \end{cases}$$

discútelo considerando los coeficientes en \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_7 y \mathbb{Q} . En el caso de que sea compatible, encuentra explícitamente todas las soluciones.

Ejercicio 13. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ x + 2y + az = 4 \\ 3x + (a + 2)y + 2z = 2 \end{cases}$$

Discútelo según el valor del parámetro a . Si para $a = 4$ es compatible, resuélvelo.

Ejercicio 14. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Q}

$$\begin{cases} x - ay + (a + 1)z = 4 \\ ax + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Discútelo según los valores del parámetro a , y resuélvelo para $a = -1$.

Ejercicio 15. Calcula la forma normal de Hermite por filas y el rango de la siguiente matriz, vista con coeficientes en \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_7 y \mathbb{Q} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 16. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_p).$$

Encuentra los valores de p para los que la matriz A es singular.

Ejercicio 17. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales considerados en \mathbb{Q} , \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_5 y \mathbb{Z}_7 .

1.

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x - y + z + t + v = 0 \\ x + y + z + t - v = 0 \\ -x - y + z + t - v = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} x + y + t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} x + y - z + t - v = 0 \\ x - y + z + t + v = 1 \\ x + t = 1 \end{cases}$$

Para los sistemas indeterminados calcula el número de soluciones.

Ejercicio 18. Calcula el rango de cada una de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 5}(\mathbb{Q}) \text{ y } B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 10 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 6}(\mathbb{Z}_{11})$$

“

Ejercicio 19. Calcula los siguientes determinantes (considerando las matrices con coeficientes en \mathbb{Q}):

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/5 \\ -1 & 1/2 & -1/3 & -1/5 \\ 1 & 1/2 & 4/3 & 1/5 \\ 2 & 1 & 2/3 & 11/5 \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{vmatrix}$$

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

5.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

6.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

7.

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 20. Calcula el rango de la siguiente matriz, con coeficientes en \mathbb{Z}_3 , según los valores de los parámetros a y b .

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & a & b & a+b \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21. Sea K un cuerpo, y $a, b, c, d \in K$. Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 22. Un sistema de cifrado elemental puede obtenerse asignando a cada letra del alfabeto un valor entero positivo, y enviando un mensaje alfabético como una cadena de enteros¹, aunque este sistema no es difícil de “romper”. Sin embargo el sistema puede mejorarse usando multiplicación matricial. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ invertible, tal que $A^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Disponemos entonces el mensaje numérico anterior en una matriz B , de orden $3 \times k$, donde k es el menor entero tal que $3k$ es mayor o igual que el número de símbolos del mensaje, y disponemos la cadena numérica rellenando las filas de la matriz B de izquierda a derecha y de arriba a abajo, completando con ceros si fuera necesario. El mensaje cifrado se obtiene leyendo de igual forma los elementos de la matriz AB .

Dada la asignación

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
6	12	16	24	4	19	8	5	20	13	17	7	1
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
21	2	25	10	3	23	14	11	22	15	26	9	18

y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcula el cifrado a enviar correspondiente al mensaje

INTENTALO DE NUEVO

2. Hallar A^{-1} y descifrar la cadena:

19, -18, 0, 33, -5, 20, 22, 11, 24, 36, 41, 45, 45, 151,
128, 119, 7, 96, -14, 8, -3, -22, -8, -22, -21, -7, -22

3. ¿Cómo puede obtenerse una matriz distinta, C , con entradas enteras, que pueda sustituir a A ?

Ejercicio 23. En este ejercicio os presentamos otro sistema de cifrado elemental derivado del conocido como cifrado de Hill. Comenzamos codificando los caracteres según la tabla siguiente

¹cifrado monoalfabético general

0	0	8	8	G	16	Ñ	24	V	32
1	1	9	9	H	17	O	25	W	33
2	2	A	10	I	18	P	26	X	34
3	3	B	11	J	19	Q	27	Y	35
4	4	C	12	K	20	R	28	Z	36
5	5	D	13	L	21	S	29		
6	6	E	14	M	22	T	30		
7	7	F	15	N	23	U	31		

Con lo que nuestro texto será una sucesión de valores en \mathbb{Z}_{37} , un cuerpo ya que 37 es primo. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 2 & 34 & 17 & 16 & 4 \\ 17 & 8 & 7 & 27 & 2 & 18 \\ 35 & 25 & 7 & 34 & 6 & 4 \\ 2 & 28 & 3 & 9 & 29 & 27 \\ 9 & 18 & 5 & 14 & 23 & 2 \\ 33 & 9 & 7 & 22 & 8 & 30 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{Z}_{37}).$$

La matriz A se emplea como clave de cifrado en un sistema similar al ejercicio ?? . Por ejemplo, para cifrar la cadena ALGEBRA, convertimos la cadena a una sucesión de elementos en \mathbb{Z}_{37} , lo que nos da 10, 21, 16, 14, 11, 28, 10. Añadimos a esa cadena un 0, y a continuación añadimos tantos valores aleatorios no nulos hasta obtener una longitud múltiplo de 6, con lo que obtenemos la cadena 10, 21, 16, 14, 11, 28, 10, 0, 12, 18, 7, 33. Esta cadena la ordenamos en una matriz de 6 filas y tantas columnas como sea necesario, que rellenamos por filas, por lo que obtenemos

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 21 \\ 16 & 14 \\ 11 & 28 \\ 10 & 0 \\ 12 & 18 \\ 7 & 33 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{6 \times 2}(\mathbb{Z}_{37}).$$

El cifrado se produce multiplicando $A \cdot P$, lo que proporciona

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 0 \\ 9 & 4 \\ 18 & 7 \\ 12 & 25 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

que convertido a cadena de caracteres se corresponde con 9AI094I7CO43.

1. Cifra tu nombre completo.
2. Descifra la cadena

QRGLYSEEPBL0YH0RJD4I35M1TPBNOGTHLW0AJ6K2DWM9BK1LFWF8TRBW76PO1D5U1AIVÑ6F4.

Ejercicio 24. Sea p el menor primo mayor que el número formado por 50000 más las cuatro últimas cifras de vuestro DNI. Si por ejemplo dicho DNI fuese 12345678X el número se construiría como $55678.\text{next_prime}()$, lo que daría $p = 55681$. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 5015x_1 + 18603x_2 + 4894x_3 + 17361x_4 + 47670x_5 + 49916x_6 + 5523x_7 + 5269x_8 + 18257x_9 + 9340x_{10} + 26043x_{11} = 19653 \\ 45792x_1 + 29150x_2 + 17379x_3 + 36497x_4 + 10140x_5 + 26125x_6 + 50178x_7 + 40381x_8 + 49002x_9 + 29195x_{10} + 46346x_{11} = 14741 \\ 18335x_1 + 4862x_2 + 16313x_3 + 49293x_4 + 19464x_5 + 24883x_6 + 41089x_7 + 372x_8 + 222x_9 + 35926x_{10} + 22174x_{11} = 39227 \\ 11092x_1 + 48089x_2 + 17749x_3 + 35751x_4 + 23070x_5 + 47020x_6 + 32813x_7 + 15861x_8 + 40258x_9 + 35832x_{10} + 11679x_{11} = 10234 \\ 48094x_1 + 1810x_2 + 30641x_3 + 13263x_4 + 19055x_5 + 29957x_6 + 1816x_7 + 31183x_8 + 40695x_9 + 44119x_{10} + 1351x_{11} = 29876 \\ 15698x_1 + 40421x_2 + 31830x_3 + 5392x_4 + 35457x_5 + 37743x_6 + 36917x_7 + 27596x_8 + 57x_9 + 38297x_{10} + 30345x_{11} = 49370 \\ 19094x_1 + 3134x_2 + 27116x_3 + 28634x_4 + 48678x_5 + 18937x_6 + 35925x_7 + 26930x_8 + 33163x_9 + 9521x_{10} + 30821x_{11} = 24055 \\ 36705x_1 + 44884x_2 + 30170x_3 + 9765x_4 + 23988x_5 + 49952x_6 + 22768x_7 + 2807x_8 + 502x_9 + 35364x_{10} + 23941x_{11} = 41543 \\ 28869x_1 + 6221x_2 + 27182x_3 + 41958x_4 + 47947x_5 + 38480x_6 + 9733x_7 + 29309x_8 + 24051x_9 + 44039x_{10} + 1458x_{11} = 23814 \\ 24222x_1 + 29259x_2 + 29203x_3 + 26461x_4 + 7514x_5 + 8032x_6 + 50128x_7 + 46744x_8 + 33502x_9 + 18158x_{10} + 45245x_{11} = 3049 \end{cases}$$

Discute si tiene o no solución. En caso de tener más de una solución calcula cinco soluciones distintas.

Preguntas test

Ejercicio 25. Acerca del siguiente sistema con coeficientes en \mathbb{R}

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & +ay & -z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & a \end{array} \right\}$$

podemos afirmar que:

- a) Independientemente del valor de a , es compatible determinado.
- b) Independientemente del valor de a , es compatible indeterminado.
- c) Es siempre incompatible.
- d) La compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a .

Ejercicio 26. Dadas dos matrices A y B en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y tales que

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces $A^2 - B^2$ es igual a

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 27. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ tal que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de A es

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 28. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$$

vale

$$\text{a) } -9 \quad \text{b) } -3 \quad \text{c) } 0 \quad \text{d) } 3$$

Ejercicio 29. Dado el sistema de ecuaciones lineales en \mathbb{Z}_7

$$\begin{array}{rcl} x + y - z & = & 1 \\ x + 2y + 2z & = & 2 \\ 2x + 3y + z & = & 3 \end{array}$$

¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a) Es compatible determinado.
- b) Es incompatible.
- c) Es compatible indeterminado.
- d) Tiene exactamente 35 soluciones.

Ejercicio 30. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Entonces

1. $X = B$ es la única solución de la ecuación matricial $AB = AX$.
2. $X = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $AB = AX$.
3. Tanto B como C son soluciones de la ecuación matricial $AB = AX$.
4. La ecuación matricial $AB = AX$ no tiene solución.

Ejercicio 31. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 6 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_p)$$

La matriz A es singular (es decir, no tiene inversa para el producto) para el siguiente valor de p

- a) $p = 2$ b) $p = 3$ c) $p = 5$ d) $p = 7$

Ejercicio 32. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en \mathbb{Z}_7 . Entonces $(A \cdot B)^{-1}$

- a) No existe.
- b) vale $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.
- c) vale $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- d) vale $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 33. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z}_7

$$\begin{cases} x + \alpha y + 2z &= 6 \\ 4x + 5y + \alpha z &= 1 \end{cases}$$

la respuesta correcta es:

- a) El sistema es compatible indeterminado y tiene exactamente 7 soluciones.
- b) Es siempre compatible, pero depende del valor de α que sea compatible determinado o compatible indeterminado.
- c) Dependiendo del valor de α puede ser compatible o incompatible.
- d) Es compatible indeterminado, y el número de soluciones depende del valor de α .

Ejercicio 34. Señala la afirmación verdadera. La matriz en $\mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- a) No tiene inversa para ningún valor de α .
- b) Tiene inversa para todo valor de α .
- c) Sólo tiene inversa para $\alpha = 1$.
- d) Tiene inversa sólo cuando $\alpha \neq 0$.

Ejercicio 35. En \mathbb{R} el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & b & b \\ 1 & 1 & a+b & b-a \end{pmatrix}$$

es

- a) Depende de los valores de a y b .
- b) 3.
- c) 2.
- d) 4.

Ejercicio 36. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$ tal que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) Los datos del enunciado no permiten calcular A .

Ejercicio 37. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Entonces:

- a) La matriz $I - A + A^t$ es simétrica.
- b) La matriz $I - (A \cdot A^t)$ es simétrica.
- c) La matriz $I - A^2$ es simétrica.
- d) La matriz $I - 2A$ es simétrica.

Ejercicio 38. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con coeficientes en \mathbb{Z}_p es regular para

- a) $p = 5$.
- b) $p = 7$.
- c) $p = 3$.
- d) $p = 2$.

Ejercicio 39. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite por filas es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 40. En el conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ definimos la relación de equivalencia $A \sim B \iff A^2 = B^2$. Entonces:

(a) La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pertenece a la clase de equivalencia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) El conjunto cociente está formado por un solo elemento.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$.

(d) La clase $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ tiene cardinal uno.

Ejercicio 41. Sea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

1. $X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

2. $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-25}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{-23}{11} & \frac{-3}{11} \end{pmatrix}.$

3. $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$

4. La matriz X no es regular.

Ejercicio 42. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z}_7

$$\begin{cases} 3x + y + 5z = 6 \\ 2x + 3y + z = a^2 + 1 \end{cases}$$

(a) El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a , pero el número de soluciones depende de a .

(b) El sistema es incompatible, independientemente del valor de a .

(c) El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a , y tiene 7 soluciones.

(d) Según el valor de a el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible.

Ejercicio 43. Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ verifica que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces A^{-1} es igual a:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 44. Dados los sistemas de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z}_7

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 3 \\ 3x + y + 2z = 5 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + (b+5)z = 5b + 4 \\ x + 3y + (b+2)z = 2b + 4 \\ 2x + 4y + 5z = 5b \end{cases}$$

1. Son equivalentes para $b = 3$.
2. Son equivalentes para $b = 4$.
3. Son equivalentes para $b = 5$.
4. No son equivalentes para ningún valor de b .

Ejercicio 45. Di qué vale $a \in \mathbb{Z}_{11}$ para que los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2z + t = 0 \\ 3x + y + az + 2t = 5 \\ 4x + 8z + t = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4y + 8z + 3t = 3 \\ 2x + y + t = 5 \\ y + 7z + 2t = 2 \end{cases}$$

sean equivalentes:

- (a) 4.
- (b) 10.
- (c) 2.
- (d) 1.

Ejercicio 46. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Q}

$$\begin{aligned} ax + y + z &= b \\ x + by + z &= a \end{aligned}$$

- (a) El sistema es siempre compatible indeterminado.
- (b) Si $a = b = 1$ el sistema es incompatible.
- (c) Existen valores de a y b para los que el sistema es compatible determinado.
- (d) El sistema es compatible indeterminado si, y sólo si, $a \cdot b = 1$.

Ejercicio 47. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -a & 3 & 7 & 3 \\ 1 & a & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en \mathbb{Q} .

- (a) Para $a = 2$ las matrices A y B son equivalentes por filas.
- (b) Para $a = -1$ las matrices A y B son equivalentes por filas.
- (c) No existe ningún valor de a para el que las matrices A y B sean equivalentes por filas.

(d) Para $\alpha = 1$ las matrices A y B no son equivalentes por columnas.

Ejercicio 48. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 4x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

con coeficientes en \mathbb{Z}_p

- a) Para $p = 2$ el sistema tiene dos soluciones.
- b) Para $p = 3$ el sistema tiene tres soluciones.
- c) Para $p = 5$ el sistema tiene cinco soluciones.
- d) Para $p = 7$ el sistema tiene siete soluciones.

Ejercicio 49. Sea $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ tal que $P \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces:

- (a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.
- (b) $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- (c) La matriz P no tiene inversa.
- (d) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 50. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 3 & \alpha + 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_7)$.

Entonces la matriz A es regular:

- a) Para cualquier valor de $\alpha \in \mathbb{Z}_7$.
- b) Para $\alpha = 1, 3, 4, 5, 6$.
- c) Para $\alpha = 3, 4, 5, 6$.
- d) Para $\alpha = 0, 2, 3, 5, 6$.

Ejercicio 51. Consideremos el sistema con coeficientes en \mathbb{R}

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda \end{cases}$$

Entonces:

1. El sistema es compatible para $\lambda \neq -2$
2. El sistema es compatible determinado si, y sólo si, $\lambda < 0$
3. El sistema es compatible determinado si, y sólo si, $\lambda > 0$
4. El sistema es compatible determinado para todos los valores de λ .