Límites y continuidad

1 Límites elementales

Ejercicio 1. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{7x+4}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+3}{2x^2+1}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

d) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4}{x-2}$

Solución 1.

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{7x+4} = \frac{1}{7}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+3}{2x^2+1} = 0$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4$

d) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4}{x-2} = +\infty$

Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right)$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{3x^3+2x^2+x}$,

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}$,

d) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}$,

Solución 2.

a) $\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right) = -\frac{1}{16}$.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{3x^3+2x^2+x} = 0$.

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|} = +\infty$.

d) No existe $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}$ ya que los límites laterales no coinciden. Más concretamente,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{|x-1|} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x}},$$

que, dependiendo de por dónde nos acerquemos a 1 tiende a $\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.

Ejercicio 3. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$
c) $\lim_{x\to 0} \frac{2x+3}{\sqrt[3]{26+x}-3}$
d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

Solución 3.

a) Multiplicamos y dividimos por el conjugado,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=1.$$

b) Multiplicamos por los conjugados de numerador y denominador,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=-1.$$

c) No hay ninguna indeterminación: $\lim_{x\to 0}\frac{2x+3}{\sqrt[3]{26+x}-3}=\frac{3}{\sqrt[3]{26}-3}$.

d) Multiplicamos y dividimos por el conjugado,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}.$$

Ejercicio 4. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2+x}$
b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{|x-1|}$
c) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+6}{x^2-4}$
d) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-2^{1/x}}$
e) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{1/x}+1}$

Solución 4.

a) Estudiamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x^2+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x^2+x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x+1}=-1.$$

b) Calculamos los límites por la derecha y por la izquierda.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x+1=2,$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{1-x}=\lim_{x\to 1^+}-(x+1)=-2.$$

c) El límite por la izquierda vale $-\infty$ y el límite por la derecha $+\infty$.

d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2-2^{1/x}} = 0$ y $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2-2^{1/x}} = \frac{1}{2}$.
e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{1/x}+1} = 0$ y $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^{1/x}+1} = 1$.

2 Límites y continuidad

Ejercicio 5. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f y g y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y $-\infty$.

Solución 5.

a) En primer lugar estudiemos la continuidad de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

El carácter local de la continuidad nos da que f es continua en $\mathbb{R}^*$. Veamos qué ocurre en el origen. Para ello estudiamos los límites laterales en 0:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1.$$

Por tanto f no es continua en el origen. Por último

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}.$$

b) La función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ por el carácter local. Veamos los límites laterales en 0 y 1:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

y, por tanto, g no puede ser continua en 0. Como

$$\lim_{x\to 1^-} x = 1 = \lim_{x\to 1^+} \sqrt[5]{x} = 1 = g(1),$$

g es continua en 1. Por último, los límites en infinito valen

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0, \text{ y}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x} = +\infty.$$

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^{\frac{1}{\log(x)-1}}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$. Estudiar el comportamiento de f en $0, e, +\infty$.

Solución 6.

a) Veamos en primer lugar el comportamiento en 0: $\lim_{x\to 0}\log(x) = -\infty \implies \lim_{x\to 0}\frac{1}{\log(x)-1} = 0$, por tanto tenemos una indeterminación del tipo 0^0. Tomemos logaritmos para resolverla:

$$\lim_{x\to 0}\log\left(x^{\frac{1}{\log(x)-1}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(x)}{\log(x)-1} = 1 \implies \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = e^1 = e.$$

b) En e vamos a estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x\to e^-} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = \text{"}e^{-\infty}\text{"} = 0, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to e^+} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = \text{"}e^{+\infty}\text{"} = +\infty.$$

c) Por último, en $+\infty$ de nuevo tomamos logaritmos para resolver la indeterminación:

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(x^{\frac{1}{\log(x)-1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{\log(x)-1} = 1 \implies \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = e^1 = e.$$

Ejercicio 7. Sea $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)}$. Probar que f tiene límite en los puntos 0 y $\frac{\pi}{2}$ y calcular dichos límites.

Solución 7. En primer lugar, veamos el límite en 0:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^{\operatorname{sen}(x)}}{\operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)}} = \frac{1}{1} = 1,$$

ya que $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)} = 1$, usando que $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.
En $\frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)^{\operatorname{sen}(x)}}{\operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ejercicio 8. Sea $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (1+\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)}$. Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en 0 y $\pi/2$.

Solución 8. La función f es continua en $]0, \frac{\pi}{2}[$ ya que $1+\operatorname{sen}(x)$ es una función continua y positiva en dicho intervalo y, $\operatorname{cotan}(x)$ también es una función continua en este intervalo.
Veamos el comportamiento en $\frac{\pi}{2}$: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)} = 2^0 = 1$.
En 0, $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)}$ ="1^∞" con lo que aplicamos la regla del número e para resolverlo:

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{cotan}(x)(1+\operatorname{sen}(x)-1) = \lim_{x\to 0}\cos(x) = 1 \implies \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)} = e.$$

Ejercicio 9. Estudiar el comportamiento en cero de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{7}{x}\right) - \arctan\left(\frac{-5}{x}\right), \quad g(x) = xf(x).$$

Solución 9. Comencemos con la función f. Dado que $\lim_{x\to 0^+} \frac{7}{x} = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \frac{-5}{x} = -\infty$, se tiene que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ y, análogamente, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$.
La función f está acotada (es suma de dos funciones acotadas) y, por tanto, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, por ser producto de algo que tiende a cero y algo acotado.

Ejercicio 10. Probar que existe un número real positivo x tal que $\log(x) + \sqrt{x} = 0$.

Solución 10. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \log(x) + \sqrt{x}$. La función f es continua y esta definida en un intervalo. Además

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$

Por tanto f cambia de signo y tiene que anularse en $\mathbb{R}^+$.

Ejercicio 11. Probar que la ecuación $x + e^x + \arctan(x) = 0$ tiene una sola raíz real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

Solución 11. Consideremos $f(x) = x + e^x + \arctan(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. f es una función continua definida en un intervalo, además $f(-1) < 0 < f(0)$ y por tanto f se anula en el intervalo $]-1, 0[$. Para comprobar que sólo se anula en un punto basta observar que f es una función estrictamente creciente, en particular inyectiva, por ser suma de tres funciones estrictamente crecientes.

Ejercicio 12. Determinar la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(\log |x|)$.

Solución 12. Como la función es par, $f(x) = f(-x)$, se tiene que $f(\mathbb{R}^*) = f(\mathbb{R}^+)$. En este caso, f es la composición de la función arcotangente y la función logaritmo neperiano. Dado que ambas son estrictamente crecientes, su composición también lo es. Por tanto

$$f(\mathbb{R}^*) = f(\mathbb{R}^+) = \left]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right[= \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Ejercicio 13. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua en $[0,1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo: $\exists\, x \in [0,1] : f(x) = x$.

Solución 13. Consideremos la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x) - x$. La función g es continua por ser diferencia de funciones continuas, además $g(0) = f(0) \geq 0$ y $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Si se da la igualdad en 0 o en 1 ya hemos encontrado un punto fijo, en caso contrario la función g cambia de signo y el Teorema de los ceros de Bolzano nos asegura la existencia de un cero de g o, lo que es mismo, un punto fijo de f.

Ejercicio 14. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del sábado.

Solución 14. Sea $f : [7, 20] \to [0, h]$ la función que indica la altura del escalador en la subida y $g : [7, 20] \to [0, h]$ la que indica la altura bajando, donde h es la altura de la montaña. Por tanto $f(7) = g(20) = 0$ y $f(20) = g(7) = h$. La ecuación que queremos resolver es $f(x) = g(x)$ o lo que es lo mismo buscamos un cero de la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Dado que h es continua, está definida en un intervalo y $h(7) = -h < 0 < h(20) = h$, el Teorema de los ceros de Bolzano nos asegura la existencia de un punto donde se anula h.