Cálculo

1^{o}E Grado en Ingeniería Informática

Segundo Parcial

Curso 2013/2014

1. **(2 puntos)** Comprueba la desigualdad: $e^x \geq 1+x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Solución: Presentamos la función con la que vamos a trabajar. Dado que:

$$e^x \geq 1+x \iff e^x - 1 - 1 \geq 0$$

vamos a estudiar la función $f(x) = e^x - 1 - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tendremos que comprobar que $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Se trata de una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo que aplicamos las técnicas de derivación para estudiar su imagen. Calculamos, en primer lugar, puntos críticos de f.

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \iff x = 0$$

Además: $f''(x) = e^x$. Por tanto, como $f''(0) = 1 > 0$, por el test de la derivada segunda, deducimos que f presenta en $x = 0$ un mínimo relativo, que al ser el único punto crítico de f, se convierte en el punto de mínimo absoluto. Esto quiere decir que:

$$f(x) \geq f(0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

que era lo que queríamos comprobar.

2. **(2 puntos)** Calcula: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2-2\,\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^2} \right)^{1/x}$

Solución: En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo"$0/0$". Parta resolver dicha indeterminacación aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(x)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1,$$

con lo que el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞".

Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^2}\right)^{1/x}=e^L \iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{2-2\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^2}-1\right)=L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{2-2\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^2}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(x)-\operatorname{sen}(x)^2}{x\operatorname{sen}(x)^2}$$

aplicamos la regla de L'Hôpital. Nos queda

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x)-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^2+2x\operatorname{sen}(x)\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)+2x\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+2\cos(x)-2x\operatorname{sen}(x)}=0$$

Obsérvese que hemos aplicado la regla de L'Hôpital tres veces consecutivas.

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^2}\right)^{1/x}=e^0=1$$

3. **(2 puntos)** Calcula la imagen de la función $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\arctan\left(\frac{2x^3-9x^2+12x}{6}\right)\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

Solución: Se trata de una función derivable (es composición de funciones derivables) y, por tanto, continua en todo el dominio. Sabemos entonces que su imagen tiene que ser un intervalo. Estudiamos la monotonía de la función usando el signo de la derivada. Para ello calculamos sus puntos críticos:

$$f'(x)=\frac{x^2-3x+2}{1+\left(\frac{2x^3-9x^2+12x}{6}\right)^2}=0 \iff x^2-3x+2=0 \iff x=1 \text{ ó } x=2.$$

Además, podemos factorizar la derivada como sigue:

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{1+\left(\frac{2x^3-9x^2+12x}{6}\right)^2}$$

Analizando el signo de la derivada (que sólo depende del signo del numerador, ya que el denominador es siempre positivo), obtenemos que:

- En el intervalo $]-\infty,1[$ se tiene que $f'(x)>0$, por lo que la función es estrictamente creciente.

- En el intervalo $]1,2[$ se tiene que $f'(x) < 0$, por lo que la función es estrictamente decreciente.
- En el intervalo $]2,+\infty[$ se tiene que $f'(x) > 0$, por lo que la función es estrictamente creciente.

Por tanto, la función presenta un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y, un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 2$. Para terminar de calcular $f(\mathbb{R})$, analizamos los límites en los extremos del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}\ , \text{ y } \ f(1) = \arctan(2/3)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}\ , \text{ y } \ f(2) = \arctan(-2/3)$$

Por la propiedad de monotonía creciente estricta de la función arco tangente, sabemos, y sin necesidad de calculadora, que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} < f(2) = \arctan(-2/3) < f(1) = \arctan(2/3) < \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, el conjunto imagen es entonces $f(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

4. **(2 puntos)** Calcula: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2} \log(\sqrt{t})\,dt}{x^2\log(x)}$

Solución:

Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que la función numerador, $F(x) = \int_0^{x^2} \log(\sqrt{t})\,dt$ es continua y derivable ya que el integrando, $f(t) = \log(\sqrt{t})$, es una función continua, al ser composición de funciones continuas. Además,

$$F'(x) = \log(x)\,2x$$

Estamos ante una indeterminación del tipo "$\frac{?}{\infty}$". Por tanto, aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{2x\log(x)+x^2\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)\,2x}{2x\log(x)+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\log(x)}{2x\log(x)+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log(x)}{2\log(x)+1}$$

Finalmente, podríamos volver a aplicar la regla de L'Hôpital, pero vamos a terminar antes dividiendo numerador y denominador por $\log(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\log(x)}{2\log(x)+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2+\frac{1}{\log(x)}} = \frac{2}{2} = 1$$

Concluimos entonces que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \log(\sqrt{t})\,dt}{x^2\log(x)} = 1$$

5. **(2 puntos)** Se consideran a y $C \in \mathbb{R}$ y se definen las funciones:

$$F(x) = x\log(x) + ax - x + C$$

$$f(x) = \log(x) + a$$

a) Comprueba que F es una primitiva de f.

b) Encuentra los valores de a y C para que la gráfica de F pase por el punto $(1,1)$ y su recta tangente en dicho punto tenga como pendiente $m = 4$.

Solución:

a) Vamos a derivar F para comprobar que $F' = f$. En efecto:

$$F'(x) = \log(x) + x\frac{1}{x} + a - 1 = \log(x) + 1 + a - 1 = f(x)$$

b) Si queremos que la gráfica de F pase por el punto $(1,1)$, eso es lo mismo que decir que $F(1) = a + C = 1$. Y si pretendemos que la recta tangente a F en dicho punto tenga pendiente $m = 4$, eso es equivalente a decir que $F'(1) = f(1) = a = 4$. De esta forma planteamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a - 1 + C & = 1 \\ a & = 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos que $a = 4$ y $C = -2$.

Granada, 21 de enero de 2014