Series de números reales

1 Convergencia de series numéricas

Ejercicio 1. Aplicar el criterio de la raíz para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$

b) $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$

c) $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$

d) $\sum \frac{n^n}{e^{(n^2+1)}}$

e) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

Solución 1.

a) Aplicamos el criterio de la raíz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$. Por tanto, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio de la raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{\frac{n^2+1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n}\,\frac{1}{e^{1/n}} = 0 < 1$$

de lo que se deduce que la serie es convergente.

e) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

Ejercicio 2. Aplicar el criterio del cociente para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n2^n}$

b) $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) $\sum \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$

d) $\sum \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$

e) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

Solución 2.

a) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\frac{2}{5} = \frac{2}{5} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)^{(n+1)}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{(n+1)^n}{3^n n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{e}{3} < 1,$$

y, por tanto, la serie es convergente. Observa que en el último paso hemos utilizado la regla del número e.

d) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)(4n+1)}}{\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

e) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$$

de lo que se deduce la convergencia de la serie.

Ejercicio 3. Aplicar el criterio de comparación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{\log(n)}{n}$

b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

c) $\sum \frac{1}{2n-1}$

d) $\sum \frac{1}{2^n-n}$

e) $\sum \frac{1}{(2n-1)2n}$

f) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

g) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Solución 3.

a) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n}$ que no es convergente. Como $\frac{\log(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$, la serie no es convergente.

b) Comparamos con la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}} = 1.$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ no es convergente.

c) No es convergente. La serie se comporta igual que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$.

d) Comparamos con la serie convergente $\sum \frac{1}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n}{2^n} = 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

e) Comparamos con la serie convergente $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(2n-1)2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)2n}{n^2} = 4.$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie es convergente.

f) No es convergente porque $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$.

g) Comparamos con la serie convergente $\sum \frac{1}{n^{7/6}}$

$$\lim_{n\to\infty} n^{7/6} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 4. Aplicar el criterio de condensación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n\log(n)}$

b) $\sum \frac{1}{n(\log(n))^2}$

c) $\sum \frac{1}{n(\log(n))\log(\log(n))}$

Solución 4.

a) Aplicando el criterio de condensación, la serie tiene el mismo carácter que la serie $\sum 2^n \frac{1}{2^n \log(2^n)} = \sum \frac{1}{\log(2^n)} = \sum \frac{1}{n\log(2)}$ y esta última serie no es convergente comparando con $\sum \frac{1}{n}$.

b) Aplicando el criterio de condensación $\sum 2^n \frac{1}{2^n(\log(2^n))^2} = \sum \frac{1}{n^2(\log(2))^2}$ y esta última serie es convergente (compárase con $\sum \frac{1}{n^2}$).

c) El término general es decreciente y convergente a cero. Estamos en condiciones de aplicar el criterio de condensación. La serie tiene el mismo carácter de convergencia que la serie

$$\sum \frac{2^n}{2^n \log(2^n)\log(\log(2^n))} = \sum \frac{1}{n\log(2)\log(n\log(2))}$$

que, a su vez y por el criterio de comparación por paso al límite, se comporta igual que $\sum \frac{1}{n\log(n)}$. Esta última serie ya sabemos que no es convergente (véase el Ejercicio ??).

Ejercicio 5. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{2^n}{n}$

b) $\sum \frac{n+1}{2n+1}$

c) $\sum \frac{1}{n^2\log(n)}$

d) $\sum \frac{n^2}{(3n-1)^2}$

e) $\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

Solución 5.

a) No es convergente porque $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$.
b) No es convergente porque el término general no tiende a cero: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$.
c) Como $\log(n) \geq 1$ para $n \geq 3$, se tiene que $\frac{1}{n^2\log(n)} \leq \frac{1}{n^2}$, para cualquier $n \geq 3$. La serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente y, el criterio de comparación nos dice que $\sum \frac{1}{n^2\log(n)}$ también lo es.
d) El término general no converge a cero y, por tanto, la serie no es convergente.
e) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n+1)-1}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 6. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{n!}$
b) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
c) $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$
d) $\sum \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$
e) $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$

Solución 6.

a) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.
b) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-2)(3n+1)}{n^2} = 9$$

y, por tanto la serie es convergente.
c) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n^3}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}} = 2.$$

En consecuencia, las dos series tienen el mismo carácter de convergencia. Puesto que la serie $\sum \frac{1}{n^3}$ es convergente, ambas lo son.
d) No es convergente porque el término general no converge a cero:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = e^L \iff \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n}{3n+1} - 1\right) = L$$

y el segundo límite vale

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n}{3n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n-3n-1}{3n+1}\right) = -1/3.$$

Por tanto el término general de la serie converge a $e^{-1/3} \neq 0$.
e) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{4^{(n-1)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{4^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 7. Estudiar la convergencia de las series

a) $\sum \frac{n^3}{e^n}$

b) $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

c) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

d) $\sum \frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$

e) $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$

f) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}$

g) $\sum \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}$

Solución 7.

a) Aplicamos el criterio de la raíz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{1}{e} < 1$ y, en consecuencia, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)(2n+3)}}{\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n+3} = 0 < 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

e) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

f) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)(2n+4)}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+4} = 1$$

pero, como $\frac{2n+1}{2n+4} \leq 1$, el criterio del cociente no decide. Ya que hemos calculado $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, aplicamos el criterio de Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n+1}{2n+4}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+4} = \frac{3}{2} > 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

g) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n\cdot(2n+2)}{5\cdot7\cdot9\cdots(2n+3)\cdot(2n+5)}}{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{5\cdot7\cdot9\cdots(2n+3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+5} = 1,$$

pero $\frac{2n+2}{2n+5} \leq 1$ por lo que el criterio del cociente no decide. Aplicamos el criterio de Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n+2}{2n+5}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+5} = \frac{3}{2} > 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

Ejercicio 8. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum(-1)^n \frac{20^n}{n+1}$

b) $\sum\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\right)^2$

c) $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

d) $\sum \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)$

e) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}\log(n)}{n^2+1}$

f) $\sum(-1)^n e^{-n}$

Solución 8.

a) No es convergente porque el término general no converge a cero.

b) Aplicamos el criterio de Raabe y llegamos a $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{4n^2+3n}{4n^2+8n+4} \leq 1$, de lo que se deduce la no convergencia de la serie.

c) Comparamos con la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \log(e) = 1$$

y, por tanto, la serie no es convergente.

d) Podemos escribir el término general de la forma:

$$a_n = \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right).$$

Comparando con la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ se obtiene la convergencia de la serie dada.

e) Comparamos con la serie $\sum \frac{\log(n)}{n^{5/3}}$ ya que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{\log(n)}{n^{5/3}}} = 1$$

Y aplicando el criterio de condensación a la serie $\sum \frac{\log(n)}{n^{5/3}}$ se obtiene que es convergente, luego la de partida también lo es.

f) No hay más que aplicar el criterio de Laeibnitz para series alternadas.

E **Ejercicio 9.** Estudia el carácter de las siguientes series:

a) $\sum\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$.

b) $\sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$.

Solución 9.

a) Aplicamos el criterio de la raíz, considerando como $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$. Tendremos entonces que estudiar el límite de $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ y compararlo con 1; esto es

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2/n} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n}$$

sucesión que presenta una indeterminación del tipo "1^∞" por lo que aplicamos la regla del número e:

$$\lim n\left(\frac{2n+1}{2n+5} - 1\right) = \lim \frac{-4n}{2n+5} = -2 \ \Rightarrow\ \lim \sqrt[n]{a_n} = e^{-2} < 1$$

Por tanto la serie dada es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente, considerando como $a_n = \frac{1+\log(n)}{n^n}$; de esta forma, habrá que estudiar el límite de la siguiente sucesión y compararlo con el valor1:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1+\log(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{1+\log(n)} = \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)}\,\frac{n^n}{(n+1)^n\,(n+1)}\\ &= \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Finalmente, si calculamos el límite de cada uno de los tres factores que tenemos, el primer factor es claro que converge a 1 (no hay más que dividir el numerador y denominador por $\log(n+1)$), el segundo factor converge a e^{-1} (basta aplicar la regla del número e) y el tercero converge a cero. Por tanto:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \ \text{ es convergente.}$$

E **Ejercicio 10.** Estudiar, según los valores de $a > 0$ la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{a^n}{n^a}$

b) $\sum a^n n^a$

Solución 10.

a) Sólo tenemos en cuenta $0 < a < 1$ puesto que en para $a = 1$ es la serie armónica que no converge, y para $a > 1$ el término general no converge a cero. Entonces, para $0 < a < 1$ aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.

b) Sólo tenemos en cuenta $0 < a < 1$ puesto que para $a \geq 1$ el término general no converge a cero. Entonces, para $0 < a < 1$ aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.

2 Suma de series

Ejercicio 11. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

Solución 11.

a) Usando la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n} = 15 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 15 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{150}{9}.$$

b) La suma es $\frac{1}{2}$ puesto que la serie es la mitad de la del Ejemplo ??.

c) De nuevo utilizamos la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} - \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Ejercicio 12. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$

Solución 12.

a) Calculamos las sumas parciales usando la descomposición en fracciones simples del término general:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+3)} - \frac{1}{(n+4)}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{n+4} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

b) Aprovechamos que estamos sumando una progresión geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{16} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

c) Dividimos en dos progresiones geométricas y sumamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{13}{6}.$$

Ejercicio 13. Suma la serie de números reales $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}$

Solución 13. Esta serie se suma haciendo uso de que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, y para ello descomponemos el numerador del término general de la forma siguiente:

$$n^2 + n + 1 = \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma$$

e igualando coeficientes obtenemos que $\alpha = 1, \beta = 2$ y $\gamma = 1$. Por tanto la suma de la serie (que existe por el criterio del cociente) es:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= e + 2e + (e-1) = 4e - 1.
\end{aligned}$$