FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA PROGRAMACIÓN

Convocatoria Junio 2011

Alumno:____________________________________ **DNI:**____________

(29/06/2011)

I. Informática   I.T.I. Gestión   I.T.I. Sistemas

En las siguientes 7 preguntas, debes elegir una de las cuatro posibles respuestas y justificar dicha elección.

Ejercicio 1. ¿Para qué fórmulas α, β, γ se verifica que $I(\alpha) \cdot (1 + I(\beta)) = I(\gamma)$?

a) $\alpha = a \vee b \vee c$; $\beta = \neg a \vee \neg b \vee \neg c$; $\gamma = a \wedge b \to b \wedge c$.

b) $\alpha = a \to b \wedge \neg c$; $\beta = a \vee \neg c$; $\gamma = \neg(a \vee c)$.

c) $\alpha = a \to b$; $\beta = \neg a \to \neg b$; $\gamma = a \wedge \neg b$.

d) $\alpha = \mathbf{a} \vee \neg\mathbf{b}$; $\beta = \neg\mathbf{b}$; $\gamma = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Solución:

La respuesta es la d). Sabemos que $I(\alpha) \cdot (1 + I(\beta)) = I(\alpha) \cdot I(\neg\beta) = I(\alpha \wedge \neg\beta)$.

Por tanto, lo que nos piden es comprobar para que fórmulas se verifica que $I(\alpha \wedge \neg\beta) = I(\gamma)$. O lo que es lo mismo, para qué fórmulas se tiene que $\alpha \wedge \neg\beta$ y γ son lógicamente equivalentes.

En la respuesta d) tenemos:

$$\alpha \wedge \neg\beta = (a \vee \neg b) \wedge \neg\neg b \equiv (a \vee \neg b) \wedge b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg b \wedge b) \equiv (a \wedge b) \vee 0 \equiv a \wedge b = \gamma$$

Vamos a ver que las otras opciones no son correctas.

a) Tomamos la interpretación $I(a) = 0$, $I(b) = 0$, $I(c) = 0$. Entonces:
$I(\alpha) = 0$, $I(\beta) = 1$, $I(\alpha)(1 + I(\beta)) = 0$ e $I(\gamma) = 1$. Por tanto, $I(\alpha)(1 + I(\beta)) \neq I(\gamma)$.

b) Aquí también podemos tomar la interpretación $I(a) = 0$, $I(b) = 0$, $I(c) = 0$.
$I(\alpha) = 1$, $I(\beta) = 1$, $I(\alpha)(1 + I(\beta)) = 0$ e $I(\gamma) = 1$. Por tanto, $I(\alpha)(1 + I(\beta)) \neq I(\gamma)$.

c) Ahora, tomamos la interpretación $I(a) = 0$, $I(b) = 1$. Tenemos:
$I(\alpha) = 1$, $I(\beta) = 0$, $I(\alpha)(1 + I(\beta)) = 1$ e $I(\gamma) = 0$. Por tanto, $I(\alpha)(1 + I(\beta)) \neq I(\gamma)$.

Ejercicio 2. Sean $\alpha = \forall x \exists y (P(x) \to Q(x,y))$ y $\beta = \forall x (P(x) \to Q(x, g(x)))$. Entonces:

(a) $\alpha \vDash \beta$.

(b) $\beta \vDash \alpha$.

(c) $\alpha \to \beta$ es satisfacible y refutable.

(d) $\neg\alpha \vDash \neg\beta$.

Solución:

Aquí hay un error, y hay tres posibles respuestas buenas, que son la b), la c) y la d).

Vamos a ver que la b) es correcta.

Tenemos que probar que $\beta \vDash \alpha$, o lo que es lo mismo, que el conjunto $\{\beta, \neg\alpha\}$ es insatisfacible. Calculamos la forma clausular de ambas fórmula:

$$\begin{array}{ll} \forall x (P(x) \to Q(x, g(x))) & \neg\forall x \exists y (P(x) \to Q(x,y)) \\ \forall x (\neg P(x) \lor Q(x, g(x))) & \exists x \forall y \neg (P(x) \to Q(x,y)) \\ & \exists x \forall y \neg(\neg P(x) \lor Q(x,y)) \\ & \exists x \forall y (P(x) \land \neg Q(x,y)) \\ & \forall y (P(a) \land \neg Q(a,y)) \end{array}$$

Por tanto, hay que probar que el conjunto de cláusulas $\{\neg P(x) \lor Q(x, g(x));\ P(a);\ \neg Q(a,y)\}$ es insatisfacible. Buscamos una deducción de la cláusula vacía.

$$\begin{tikzcd}
\neg P(x) \lor Q(x, g(x)) \arrow[d, dash, "(x|a)"'] & P(a) \arrow[dl, dash] \\
Q(a, g(a)) \arrow[d, dash] & \neg Q(a,y) \arrow[dl, dash, "(y|g(a))"] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Para comprobar que la d) es correcta, habría que ver que el conjunto $\{\neg\alpha, \beta\}$ es insatisfacible, pero eso ya lo hemos hecho.

Para ver que la c) es correcta, buscamos una estructura donde $\alpha \to \beta$ se interpreta como verdadera, y una donde se interpreta como falsa.

Estructura donde se interpreta como verdadera:

Dominio: $\mathbb{N}$; $P(x)$: x es par; $Q(x,y)$: x es múltiplo de y; $g(x) = x$.

Entonces, para cualquier natural x, existe un natural y (el propio x) de forma que $Q(x,y)$ es verdadero. Por tanto, α se interpreta como cierta.

De la misma forma, para cualquier natural x, $Q(x, g(x)) = Q(x,x)$ se interpreta como verdadero, luego β se interpreta como verdadera.

Estructura donde se interpreta como falsa:

Dominio: $\mathbb{N}$; $P(x)$: x es par; $Q(x,y)$: x es múltiplo de y; $g(x) = x + 1$.

La fórmula α se interpreta igual que en la estructura anterior, pues en la fórmula α no aparece el símbolo de función g.

Pero la fórmula β se interpreta como falsa. Basta tomar $x = 2$, en cuyo caso tenemos que $P(x) = 1$ (pues 2 es par), mientras que $Q(x, g(x)) = 0$ (pues 2 no es múltiplo de 3).

Esta misma estructura nos sirve para ver que la opción a) no es correcta.

Ejercicio 3. Sea $\alpha = \forall x \exists y \exists z P(x, g(f(y), f(z)))$, y consideramos las dos estructuras siguientes:

- Estructura 1.
  Dominio: $\mathbb{Z}_4$.
  Funciones: $f(x) = x^2$, $g(x, y) = x + y$.
  Predicado: $P = \{(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3)\}$.
- Estructura 2.
  Dominio: $\mathbb{Z}_5$.
  Funciones: $f(x) = x^2$, $g(x, y) = x + y$.
  Predicado: $P(x, y) \equiv x = y$.

(a) α se interpreta como cierta en las dos estructuras.

(b) α se interpreta como cierta en la estructura 1 y como falsa en la estructura 2.

(c) α **se interpreta como falsa en la estructura 1 y como cierta en la estructura 2.**

(d) α se interpreta como falsa en ambas estructuras.

Aquí la respuesta correcta es la c).

Notemos como en ambos cados, el predicado P es la igualdad (es decir, $P(x, y) = 1$ si $x = y$). Por tanto, lo que dice la fórmula, en ambos casos es:

$$\text{Para todo } x \text{ existen } y,\ z \text{ tales que } x = y^2 + z^2$$

Es decir, que todo elemento de $\mathbb{Z}_4$ o $\mathbb{Z}_5$ (según estemos en la primera o la segunda estructura) se puede poner como suma de cuadrados.

Vamos a ver que en $\mathbb{Z}_4$ eso no es cierto, pero en $\mathbb{Z}_5$ sí.

En $\mathbb{Z}_4$ tenemos que $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 0$, $3^2 = 1$. Vemos entonces que el número 3 no lo podemos poner como suma de dos cuadrados. Por tanto, la fórmula α se interpreta como falsa.

En $\mathbb{Z}_5$ podemos ver que $0 = 0^2 + 0^2$, $1 = 1^2 + 0^2$, $2 = 1^2 + 1^2$, $3 = 2^2 + 3^2$, $4 = 2^2 + 0^2$. Es decir, todo elemento de $\mathbb{Z}_5$ se puede escribir como suma de dos cuadrados. Por tanto, la fórmula α se interpreta como verdadera en esta estructura.

Ejercicio 4. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de cláusulas es satisfacible?

(a) $\{P(x,y,z);\ \neg P(x,f(a),g(f(x))) \vee \neg P(f(x),g(b),f(x))\}$.

(b) $\{P(x,f(x),y);\ \neg P(f(x),y,y) \vee \neg P(z,y,g(z))\}$.

(c) $\{\mathbf{P(x,f(x),g(x));\ \neg P(x,f(x),y) \vee \neg P(z,y,g(z))}\}$.

(d) $\{P(x,a,f(x));\ \neg P(b,x,f(b)) \vee \neg P(x,x,f(a))\}$.

Vamos a ver que los conjuntos de las opciones a), b) y d) son insatisfacibles. Para ello, vamos a encontrar en cada uno de los casos, una deducción de la cláusula vacía. Para hacer resolventes, vamos a renombrar las variables.

Para la opción a).

$$\begin{array}{cc}
\neg P(t,f(a),g(f(t))) \vee \neg P(f(t),g(b),f(t)) & P(x,y,z) \\
 & (x|t;\ y|f(a);\ z|g(f(t))) \\
\neg P(f(t),g(b),f(t)) & P(x,y,z) \\
 & (x|f(t);\ y|g(b);\ z|f(t)) \\
\square &
\end{array}$$

Para la opción b).

$$\begin{array}{ccc}
 & \neg P(f(t),u,u) \vee \neg P(z,u,g(z)) & P(x,f(x),y) \\
(u|f(f(t))) & & (x|f(t);\ y|f(f(t))) \\
 & \neg P(z,f(f(t)),g(z)) & P(x,f(x),y) \\
(z|f(t)) & & (x|f(t);\ y|g(f(t))) \\
 & \square &
\end{array}$$

Para la opción d).

$$\begin{array}{ccc}
 & \neg P(b,y,f(b)) \vee \neg P(y,y,f(a)) & P(x,a,f(x)) \\
(y|a) & & (x|b) \\
 & \neg P(a,a,f(a)) & P(x,a,f(x)) \\
 & & (x|a) \\
 & \square &
\end{array}$$

Si intentamos llegar a la cláusula vacía a partir de las cláusulas de c) nos encontramos con:

$$\begin{array}{ccc}
 & \neg P(t,f(t),y) \vee \neg P(z,y,g(z)) & P(x,f(x),g(x)) \\
(y|g(t)) & & (x|t) \\
 & \neg P(z,g(x),g(z)) &
\end{array}$$

Y ahora no podemos continuar, ya que no podemos unificar $P(z,g(x),g(z))$ con $P(y,f(y),g(y))$ ya que nos quedaría $g(x)=f(y)$.

También podemos ver que es satisfacible dando una estructura donde las dos cláusulas sean ciertas. Esta estructura podría ser:

Dominio: $\mathbb{N}\setminus\{0\}$; $\quad P(x,y,z) : z = x+y$; $\quad f(x)=x^2$; $\quad g(x) = x + x^2$.

Ejercicio 5. Dado el siguiente conjunto de cláusulas

$$\{P(x) \vee \neg R(f(a)); \neg Q(x) \vee R(f(x));\ Q(a);\ \neg P(f(a))\}$$

a) Es satisfacible, pues lo es el conjunto de instancias básicas $\{P(a) \vee \neg R(f(a));\ \neg Q(a) \vee R(f(a));\ Q(a);\ \neg P(f(a))\}$.

b) Es insatisfacible, pues lo es el conjunto de instancias básicas $\{P(a) \vee \neg R(f(a));\ \neg Q(a) \vee R(f(a));\ Q(a);\ \neg P(f(a))\}$.

c) Es satisfacible, pues lo es el conjunto de instancias básicas $\{P(f(a)) \vee \neg R(f(a));\ \neg Q(a) \vee R(f(a));\ Q(a);\ \neg P(f(a))\}$.

d) **Es insatisfacible, pues lo es el conjunto de instancias básicas $\{\mathbf{P}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \vee \neg \mathbf{R}(\mathbf{f}(\mathbf{a}));\ \neg \mathbf{Q}(\mathbf{a}) \vee \mathbf{R}(\mathbf{f}(\mathbf{a}));\ \mathbf{Q}(\mathbf{a});\ \neg \mathbf{P}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))\}$.**

Por el teorema de Herbrand sabemos que un conjunto de cláusulas es insatisfacible si, y sólo si, podemos tomar un subconjunto finito del conjunto de todas las instancias básicas (es decir, del sistema de Herbrand) que sea insatisfacible.

Pero el que haya un conjunto de instancias básicas que sea satisfacible no significa nada sobre que el conjunto de cláusulas sea o no insatisfacible (salvo que sea el conjunto de **todas** las instancias básicas). Esto nos descarta las opciones a) y c).

Nos queda entonces probar cual de los dos subconjuntos de instancias básicas es insatisfacible. Vamos a ver que lo es el que viene en la opción d). Para verlo, aplicamos el algoritmo de Davis-Putnam.

$$\{P(f(a)) \vee \neg R(f(a));\ \neg Q(a) \vee R(f(a));\ Q(a);\ \neg P(f(a))\}$$
$$\Big|\ \lambda = Q(a)$$
$$\{P(f(a)) \vee \neg R(f(a));\ R(f(a));\ \neg P(f(a))\}$$
$$\Big|\ \lambda = R(f(a))$$
$$\{P(f(a));\ \neg P(f(a))\}$$
$$\Big|\ \lambda = P(f(a))$$
$$\{\square\}$$

Y como hemos llegado a la cláusula vacía, este conjunto de instancias básicas es insatisfacible.

Podemos ver que con el conjunto $\{P(a) \vee \neg R(f(a));\ \neg Q(a) \vee R(f(a));\ Q(a);\ \neg P(f(a))\}$ llegaríamos al conjunto vacío, luego ese conjunto es satisfacible.

Ejercicio 6. Sea γ la fórmula $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$. Entonces:

a) γ **es tautología.**

b) γ es satisfacible y refutable.

c) γ es una contradicción.

d) $\gamma \wedge \neg\gamma$ es tautología.

Vamos a ir transformando la fórmula γ en fórmulas que sean todas equivalentes:

$$((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$$
$$\neg((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \vee \neg\alpha$$
$$\neg((\neg\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta) \vee \neg\alpha$$
$$(\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg\neg\beta) \vee \neg\alpha$$
$$((\alpha \wedge \neg\beta) \vee \beta) \vee \neg\alpha$$
$$((\alpha \vee \beta) \wedge (\beta \vee \neg\beta)) \vee \neg\alpha$$
$$(\alpha \vee \beta \vee \neg\alpha) \wedge (\beta \vee \neg\beta \vee \neg\alpha).$$

Y podemos ver como esta fórmula es una tautología.

Ejercicio 7. La fórmula $\forall x P(x) \to \neg\exists x R(x,x)$ es lógicamente equivalente a:

a) $\mathbf{\exists x \forall y (P(x) \to \neg R(y,y))}$

b) $\exists x \exists y (P(x) \to \neg R(y,y))$

c) $\forall x \forall y (P(x) \to \neg R(y,y))$

d) $\forall x \exists y (P(x) \to \neg R(y,y))$

Al igual que en el anterior, vamos a tomar la fórmula $\alpha = \forall x P(x) \to \neg\exists x R(x,x)$ y haciendo uso de algunas reglas de equivalencias lógicas vamos a llegar hasta $\exists x \forall y (P(x) \to \neg R(y,y))$.

$$\forall x P(x) \to \neg\exists x R(x,x)$$
$$\neg\forall x P(x) \vee \neg\exists x R(x,x)$$
$$\exists x \neg P(x) \vee \forall x \neg R(x,x)$$
$$\exists x (\neg P(x) \vee \forall x \neg R(x,x))$$
$$\exists x (\neg P(x) \vee \forall y \neg R(y,y))$$
$$\exists x \forall y (\neg P(x) \vee \neg R(y,y))$$
$$\exists x \forall y (P(x) \to \neg R(y,y))$$

De las siguientes tres preguntas debes contestar dos. Si contestas las tres, sólo contarán las dos de puntuación más baja.

Ejercicio 8. Estudia la satisfacibilidad del siguiente conjunto de cláusulas:

$$\{\neg a \vee a \vee c,\ b \vee c,\ \neg a \vee c \vee d \vee e,\ \neg e,\ a \vee \neg c \vee \neg d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$

Vamos a ver que es insatisfacible por medio del algoritmo de Davis-Putnam. En primer lugar quitamos la primera cláusula (que es una tautología).

$$\{b \vee c,\ \neg a \vee c \vee d \vee e,\ \neg e,\ a \vee \neg c \vee \neg d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$

$$\lambda = \neg e$$

$$\{b \vee c,\ \neg a \vee c \vee d,\ a \vee \neg c \vee \neg d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$

$$\lambda = b$$

$$\{\neg a \vee c \vee d,\ a \vee \neg c \vee \neg d,\ \neg a \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ a \vee d,\ \neg c \vee d\}$$

$$\lambda = a \qquad\qquad \lambda = \neg a$$

$$\{c \vee d,\ \neg d,\ c \vee \neg d,\ \neg c \vee d\} \qquad\qquad \{\neg c \vee \neg d,\ c \vee \neg d,\ d,\ \neg c \vee d\}$$

$$\lambda = \neg d \qquad\qquad \lambda = d$$

$$\{c,\ \neg c\} \qquad\qquad \{\neg c,\ c\}$$

$$\lambda = c \qquad\qquad \lambda = \neg c$$

$$\{\square\} \qquad\qquad \{\square\}$$

Y como hemos llegado en ambos casos a la cláusula vacía concluimos que el conjunto inicial de cláusulas es insatisfacible.

Ejercicio 9. Encuentra una fórmula en forma normal prenexa lógicamente equivalente a la fórmula:

$$\exists x(Q(x) \wedge \forall x P(a,x)) \rightarrow \forall x\big(Q(x) \wedge \exists y \forall z R(a,y,z)\big)$$

que tenga el menor número posible de cuantificadores.

Vamos a ir transformando la fórmula en fórmulas equivalentes, de forma que al final lleguemos a una forma normal prenexa.

$$\begin{array}{l}
\exists x(Q(x) \wedge \forall x P(a,x)) \rightarrow \forall x(Q(x) \wedge \exists y \forall z R(a,y,z)) \\
\neg \exists x(Q(x) \wedge \forall x P(a,x)) \vee \forall x(Q(x) \wedge \exists y \forall z R(a,y,z)) \\
\forall x \neg(Q(x) \wedge \forall x P(a,x)) \vee (\forall x Q(x) \wedge \exists y \forall z R(a,y,z)) \\
\forall x(\neg Q(x) \vee \neg \forall x P(a,x)) \vee \exists y(\forall x Q(x) \wedge \forall z R(a,y,z)) \\
\forall x(\neg Q(x) \vee \exists x \neg P(a,x)) \vee \exists y(\forall z Q(z) \wedge \forall z R(a,y,z)) \\
(\forall x \neg Q(x) \vee \exists y \neg P(a,y)) \vee \exists y(\forall z(Q(z) \wedge R(a,y,z))) \\
\exists y(\forall x \neg Q(x) \vee \neg P(a,y)) \vee \exists y \forall z(Q(z) \wedge R(a,y,z)) \\
\exists y \forall x(\neg Q(x) \vee \neg P(a,y)) \vee \exists y \forall z(Q(z) \wedge R(a,y,z)) \\
\exists y(\forall x(\neg Q(x) \vee \neg P(a,y)) \vee \forall z(Q(z) \wedge R(a,y,z))) \\
\exists y \forall x \forall z((\neg Q(x) \vee \neg P(a,y)) \vee (Q(z) \wedge R(a,y,z)))
\end{array}$$

Ejercicio 10. Demuestra que $T(a,b)$ es consecuencia lógica de las hipótesis:

s1) $P(a)$

s2) $Q(b,c)$

s3) $R(a,b)$

s4) $\forall z \forall y \forall x (S(z,y,x) \to T(x,y))$

s5) $\forall z \forall y \forall x ((U(x,z) \wedge Q(y,z)) \to S(z,y,x))$

s6) $\forall z \forall y \forall x ((R(x,y) \wedge P(x)) \to U(x,z))$

Vamos a llamar α a la fórmula $T(a,b)$; α_1 a $P(a)$; α_2 a $Q(b,c)$; α_3 a $R(a,b)$; α_4 a $\forall z \forall y \forall x (S(z,y,x) \to T(x,y))$; α_5 a $\forall z \forall y \forall x ((U(x,z) \wedge Q(y,z)) \to S(z,y,x))$ y α_6 a $\forall z \forall y \forall x ((R(x,y) \wedge P(x)) \to U(x,z))$.

Entonces lo que tenemos que demostrar es que

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6\} \models \alpha$$

o lo que es lo mismo, que el conjunto

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \neg\alpha\}$$

es insatisfacible. Para ello, calculamos la forma clausular de cada una de esas fórmulas. Vemos que α_1, α_2, α_3 y $\neg\alpha$ ya están en forma clausular. Después de calcular la forma clausular de α_4, α_5 y α_6 nos quedaría comprobar que el conjunto de cláusulas

$$\{P(a);\ Q(b,c);\ R(a,b);\ \neg S(z,y,x) \vee T(x,y);\ \neg U(x,z) \vee \neg Q(y,z) \vee S(z,y,x);\ \neg R(x,y) \vee \neg P(x) \vee U(x,z);\ \neg T(a,b)\}$$

es insatisfacible. Puesto que es un conjunto de Horn, tratamos de buscar una deducción lineal-input de la cláusula vacía, comenzando por la cláusula negativa.

$$\begin{array}{lcl}
\neg T(a,b) & & \neg S(z,y,x) \vee T(x,y) \\
\quad | & (x|a;y|b) & \\
\neg S(z,b,a) & & \neg U(x,t) \vee \neg Q(y,t) \vee S(t,y,x) \\
\quad | & (x|a;y|b;t|z) & \\
\neg U(a,z) \vee \neg Q(b,z) & & Q(b,c) \\
(z|c)\ | & & \\
\neg U(a,c) & & \neg R(x,y) \vee \neg P(x) \vee U(x,z) \\
\quad | & (x|a;z|c) & \\
\neg R(a,y) \vee \neg P(a) & & R(a,b) \\
(y|b)\ | & & \\
\neg P(a) & & P(a) \\
\quad | & & \\
\square & &
\end{array}$$

Y como hemos llegado a la cláusula vacía, deducimos que el conjunto de cláusulas es insatisfacible, luego $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6\} \models \alpha$.