Transformada de Laplace

FFT

Transformaciones: Conversión de unas funciones en otras funciones

Transformación integral [k(s,t) = kernel] :

$$T\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, k(s,t)\, dt \quad ; \quad s \in \mathbb{C}$$

Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \quad ; \quad s \in \mathbb{C}$$

Muy efectiva para resolver ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes con condiciones iniciales.

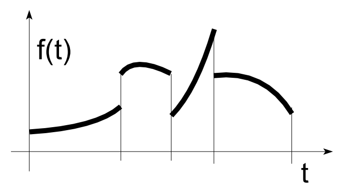
Si f(t) es de clase A ⇒ ∃ su transformada de Laplace L{f(t)}=F(s).

Una función es de clase A, si:

— f(t) es seccionalmente continua en todos los intervalos finitos $\forall\ t \geq 0$
— f(t) es de orden exponencial cuando $t \to \infty$

f(t) es seccionalmente continua en un intervalo [a,b], si ese intervalo puede subdividirse en un número finito de intervalos cerrados [c,d] en los que:

— f(t) sea continua en el intervalo abierto (c,d)
— ∃ límite de f(t) cuando $t \to c$ y cuando $t \to d$



f(t) es de orden exponencial cuando $t \to \infty$, si existen ctes.M y b, y un t_0 tal que:

$$|f(t)| < M\, e^{bt} \quad \forall\ t \geq t_0$$

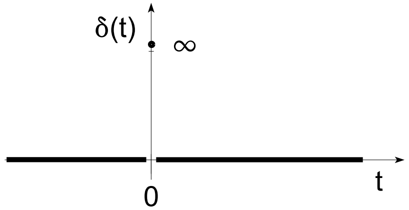
Transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, e^{st}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s)\, e^{st}\, ds$$

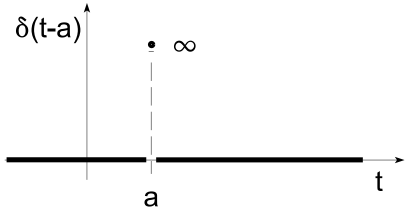
La transformada inversa de Laplace no es única.

Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ difieren en un conjunto finito de puntos, sus transformadas son iguales: $F_1(s) = F_2(s)$.

Función delta de Dirac,
o función impulso:



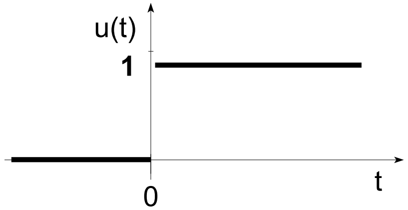
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$



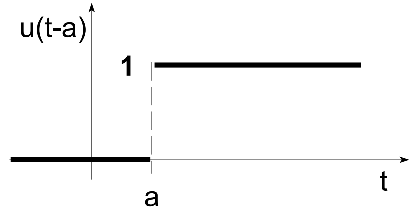
$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

$$\int_c^d \delta(t-a)\,dt = 1 \quad \text{si } a \in [c,d], \text{ en otro caso sería } 0$$

Función escalón unitario,
o de Heaviside:



$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$



$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

Nomenclatura

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) \qquad \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0} = f'(0)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = f''(t) \qquad \left.\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = f''(0)$$

Linealidad

$$a\,f(t) + b\,g(t) \;\rightarrow L \rightarrow\; a\,F(s) + b\,G(s)$$

Más propiedades, y las tablas de transformadas en el PDF

Relaciones útiles:

$$\text{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$$

par $\cos(-a) = \cos(a)$
impar $\text{sen}(-a) = -\text{sen}(a)$

$$\text{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\,\text{sen}(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a)\,\text{sen}(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\text{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(a-b) + \text{sen}(a+b)\right]$$

$$\text{sen}^2(a) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2a)\right]$$

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2a)\right]$$

Ejercicios

Cálculo de la transformada de Laplace

Cálculo de la transformada inversa de Laplace

- Directas
- $b^2=4c$ y $b^2<4c$
- $b^2>4c$

Resolución de ecuaciones diferenciales

Ejercicios

Cálculo de la transformada de Laplace

$$t^2+4t-5 \qquad \cos^2(\omega t)$$

$$t^3-t^2+4t \qquad \mathrm{sen}^2(\omega t)$$

$$e^{-2t}+4e^{-3t} \qquad \mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)$$

$$3e^{4t}-e^{-2t} \qquad \mathrm{sen}(3t)\,\mathrm{sen}(t)$$

$$e^{2t}+3te^{-3t}+5t^2e^{-6t} \qquad e^{-at}-e^{-bt}$$

Soluciones

$$\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{5}{s} \qquad \frac{(s^2+2\omega^2)}{s(s^2+4\omega^2)}$$

$$\frac{6}{s^4}-\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2} \qquad \frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$$

$$\frac{5s+11}{(s+2)(s+3)} \qquad \frac{\omega}{(s^2+4\omega^2)}$$

$$\frac{2s+10}{(s-4)(s+2)} \qquad \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+2^2}-\frac{s}{s^2+4^2}\right]$$

$$\frac{1}{(s-2)}+\frac{3}{(s+3)^2}+\frac{10}{(s+6)^3} \qquad \frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$$

Ejercicios

Cálculo de la transformada inversa de Laplace

- Directas

$$\frac{4}{s}+\frac{6}{s^2}+\frac{8}{(s+2)^3}$$

$$\frac{12}{s^4}+\frac{24}{(s+2)^4} \qquad \frac{(s+2)}{(s+3)^3} \qquad \frac{s^2+6s-9}{(s^2+9)^2}$$

$$\frac{3}{(s+3)}+\frac{4}{(s+4)^2}-\frac{6}{s^4} \qquad \frac{(s+2)}{s^3} \qquad \frac{s^2}{(s-1)^4}$$

$$\frac{s}{(s+4)^2} \qquad \frac{(s+3)}{(s^2+9)} \qquad \frac{2s+3}{(s+4)^3}$$

Soluciones

$$4+6t+4t^2e^{-2t}$$

$$\left(t-\frac{1}{2}t^2\right)e^{-3t}$$

$$t[\cos(3t)+\operatorname{sen}(3t)]$$

$$2t^3+4t^3e^{-2t}$$

$$t+t^2$$

$$e^t\left(t+t^2+\frac{t^3}{6}\right)$$

$$3e^{-3t}+4te^{-4t}-t^3$$

$$\cos(3t)+\operatorname{sen}(3t)$$

$$e^{-4t}\left(2t-\frac{5}{2}t^2\right)$$

$$e^{-4t}(1-4t)$$

Ejercicios

Cálculo de la transformada inversa de Laplace

— $b^2=4c$ y $b^2<4c$

$$\frac{1}{s^2+4s+4}$$

$$\frac{s}{s^2+4s+4}$$

$$\frac{15}{s^2+4s+13}$$

$$\frac{2s-3}{s^2-4s+8}$$

$$\frac{s+3}{s^2+2s+1}$$

$$\frac{3s}{s^2+4s+13}$$

$$\frac{3s+1}{s^2+6s+13}$$

$$\frac{1}{s^2+2s+10}$$

$$\frac{s}{s^2+6s+13}$$

$$\frac{s+1}{s^2+6s+25}$$

$$\frac{1}{s^2-4s+8}$$

Soluciones

$$te^{-2t}$$

$$5e^{-2t}\operatorname{sen}(3t)$$

$$e^{-2t}(1-2t)$$

$$e^{-2t}[3\cos(3t)-2\operatorname{sen}(3t)]$$

$$(1+2t)e^{-t}$$

$$e^{-3t}\left[\cos(2t)-\frac{3}{2}\operatorname{sen}(2t)\right]$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)e^{-t}$$

$$e^{2t}\left[2\cos(2t)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right]$$

$$e^{-3t}[3\cos(2t)-4\operatorname{sen}(2t)]$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)e^{2t}$$

$$e^{-3t}\left[\cos(4t)-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(4t)\right]$$

Ejercicios

Cálculo de la transformada inversa de Laplace

— $b^2>4c$

$$\frac{2}{s^2-3s+2}$$

$$\frac{1}{s^2-5s+6}$$

$$\frac{2s}{s^2-4s+3}$$

$$\frac{2s-5}{s^2-5s+4}$$

Soluciones:

$$2e^{2t}-2e^t$$

$$e^{3t}-e^{2t}$$

$$-e^t+3e^{3t}$$

$$e^t+e^{4t}$$

Más ejercicios

Obtener las soluciones de la derecha

Soluciones:

$7t^2 e^{3t} + 9\,\mathrm{sen}(4t)\, e^{-5t}$	$\frac{14}{(s-3)^3} + \frac{36}{(s+5)^2+16}$
$\frac{2s-1}{s^2-2s+1}$	$2e^t + t e^t$
$\frac{6s-4}{s^2-4s+20}$	$2e^{2t}[3\cos(4t) + \mathrm{sen}(4t)]$
$\frac{1}{s^3(s^2+1)}$	$-1 + \frac{t^2}{2} + \cos(t)$

Ejercicios

Resolución de ecuaciones diferenciales

Soluciones:

$y' = e^{2t} \quad ; \quad y(0) = \frac{1}{2}$	$y(t) = \frac{1}{2} e^{2t}$
$y' = 2e^t \quad ; \quad y(0) = -1$	$y = 2e^t - 3$
$y' + y = e^{2t} \quad ; \quad y(0) = 0$	$y = \frac{1}{3} e^{2t} - \frac{1}{3} e^{-t}$
$y' - y = e^{-t} \quad ; \quad y(0) = 1$	$y = \frac{3}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$
$y' = e^t \quad ; \quad y(0) = 2$	$y = e^t + 1$

Ejercicios

Resolución de ecuaciones diferenciales

Soluciones:

$y'' + a^2 y = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$	$y = \cos(at)$
$y'' + a^2 y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = a$	$y = \mathrm{sen}(at)$
$y'' + y = e^{-t} \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0$	$y = \frac{1}{2}[\mathrm{sen}(t) - \cos(t) + e^{-t}]$
$y'' - 3y' + 2y = e^{3t} \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0$	$y = \frac{1}{2} e^t - e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}$
$y'' - 2y' = -4 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 4$	$y(t) = e^{2t} + 2t - 1$
$y'' + y' - 2y = -4 \quad ; \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3$	$y = 2 + e^t - e^{-2t}$

Ejercicios

Resolución de ecuaciones diferenciales

Soluciones:

$y'' + y = 1 \quad ; \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 0$	$y(t) = 1 + \cos(t)$
$y'' + 2y' + y = 3t e^{-t} \quad ; \quad y(0) = 4 \quad y'(0) = 2$	$y(t) = \frac{1}{2} t^3 e^{-t} + 4e^{-t} + 6t e^{-t}$

Transformada de Laplace

FFT Granada granada.net78.net

24-X-2011
S.O.: Win95
Res.: 800x600
Col.: 16bit

FIN