## ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

## Convocatoria Extraordinaria Septiembre 2014.

**(15/09/2014)**

**Ejercicio 1.** Sean $A$ y $B$ dos conjuntos. Entonces podemos asegurar que el conjunto $A \setminus (A \setminus B)$ es igual a:

a) $A$.

b) $B$.

c) $A \cap B$.

d) $A \cup B$.

**Ejercicio 2.** Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. El cardinal de $\mathcal{P}(A \times B)$ es:

a) $12^2$.

b) $2^7$.

c) $2^{12}$.

d) $12^{12}$.

**Ejercicio 3.** Sean $a$ y $b$ dos números reales tales que $a < b$. Sea $f : [0, 1] \to [a, b]$ la aplicación dada por

$$f(x) = a + (b - a)x$$

Entonces:

a) $f$ es inyectiva y sobreyectiva.

b) $f$ no es inyectiva, pero sí es sobreyectiva.

c) $f$ es inyectiva pero no sobreyectiva.

d) $f$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

**Ejercicio 4.** Dada la relación binaria definida sobre $\mathbb{R}$ por

$$xRy \text{ si } |x - y| \leq 1$$

a) $R$ no es reflexiva.

b) $R$ no es simétrica.

c) $R$ no es transitiva.

d) $R$ es una relación de equivalencia.

**Ejercicio 5.** ¿Cuántos números de exactamente tres cifras existen cuyos dígitos pueden ser 0, 1, 2 ó 3?

a) 48.

b) 64.

c) 81.

d) 16.

**Ejercicio 6.** El número de formas distintas en que podemos repartir 11 bolas iguales en 3 cajas distintas en cada una de las cuales cabe un máximo de 5 bolas es:

a) 956, es decir, $11^3 - 3 \cdot 5^3$.

b) 165, es decir, $\binom{11}{3}$.

c) 15, es decir, $\binom{13}{2} - 3 \cdot \binom{7}{2}$.

d) 135, es decir, $\binom{11}{3} - 3 \cdot \binom{5}{3}$.

**Ejercicio 7.** El número de divisores positivos del número $5^2 \cdot 6^5 \cdot 8^6 \cdot 9^4$ es:

a) $24 \cdot 14 \cdot 3$.

b) $(5^2 - 5) \cdot (6^5 - 6^4) \cdot (8^6 - 8^5) \cdot (9^4 - 9^3)$.

c) $3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5$.

d) $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4$.

**Ejercicio 8.** Dado el sistema de congruencias

$$\begin{cases} 15x & \equiv & 7 & \text{mód } 16 \\ 10x & \equiv & 14 & \text{mód } 28 \end{cases}$$

(a) No tiene solución.

(b) Tiene solución, pero ninguna entre 0 y 100.

(c) Tiene exactamente una solución entre 0 y 100.

(d) Tiene exactamente dos soluciones entre 0 y 100.

**Ejercicio 9.** Sea $a = 15^{1357}$. La congruencia $ax \equiv 3$ mód 13 tiene como solución a:

a) $x = 1$.

b) $x = 2$.

c) $x = 4$.

d) $x = 8$.

**Ejercicio 10.** En el cuerpo $A = \mathbb{Z}_2[x]_{x^3+x+1}$ el elemento $x^2 + x + 1$ es igual a:

a) $x^4$.

b) $x^5$.

c) $x^6$.

d) $x^7$.

**Ejercicio 11.** Sea $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Entonces $p(x)$ es igual a:

a) $(x+2)^2 \cdot (x+3) \cdot (x+4)^2$.

b) $(x+2)^2 \cdot (x+3)^2 \cdot (x+4)$.

c) $(x+2) \cdot (x+3)^2 \cdot (x+4)^2$.

d) $(x+2)^3 \cdot (x+3) \cdot (x+4)$.

**Ejercicio 12.** ¿Para cuántos valores $c \in \mathbb{N}$ tales que $10 < c < 20$ tiene solución la ecuación diofántica

$$84x + 990y = c?$$

a) 2.

b) $5$.

c) $7$.

d) $9$.

**Ejercicio 13.** Sea $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$. El determinante de $A$ vale:

a) $(x-y)^4$.

b) $(x^2-y^2)^2$.

c) $x^4-y^4$.

d) $0$.

**Ejercicio 14.** Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 6x & + & 5y & + & 3z & + & 6t & = & 1 \\ 2x & + & 6y & + & 4z & + & 6t & = & 1 \\ 3x & + & 5y & & & + & 2t & = & 3 \end{array}\right.$$

a) La solución es $\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & 6\lambda \\ y & = & 4 & + & 2\lambda \\ z & = & & & \lambda \\ t & = & 4 & & \end{array}\right.$

b) La solución es $\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & 4\lambda \\ y & = & 2 & + & 5\lambda \\ z & = & 3 & + & 6\lambda \\ t & = & & & \lambda \end{array}\right.$

c) La solución es $\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 6 \\ z & = & 1 \\ t & = & 4 \end{array}\right.$

d) No tiene solución.

**Ejercicio 15.** Sean $B_1 = \{u_1,\ u_2\}$ y $B_2 = \{v_1,\ v_2\}$ dos bases de un espacio vectorial. Sabemos que $v_1 = 3u_1 - 2u_2$ y que $v_2 = 2u_1 - u_2$. Sea $w = u_1 - u_2$. Entonces, las coordenadas de $w$ en la base $B_2$ son:

a) $(5,3)$.

b) $(-3,-5)$.

c) $(1,-1)$.

d) $(-1,1)$.

**Ejercicio 16.** Sea $U$ el subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^3$ generado por los vectores $(2,1,3)$ y $(3,3,3)$. Y sea $W$ el subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^3$ generado por $(1,1,4)$ y $(2,4,4)$. Entonces una base de $U \cap W$ es:

a) $\{(2,1,3)\}$.

b) $\{(3,2,4),(1,4,3)\}$.

c) $\{(2,3,1)\}$.

d) $\{(4,1,2),(1,1,4)\}$.

**Ejercicio 17.** ¿Cuál de los siguientes subconjuntos es un subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^3$:

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 : x+y = 11\}$.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x + 2y + z = 0\}$.

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 = y^2\}$.

d) $\{(a, a + 2, 0) : a \in \mathbb{Q}\}$.

**Ejercicio 18.** De una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ se sabe que $f(1, 2, 4) = (3, 2, 1)$ y $f(3, 2, 2) = (1, 1, 1)$. Entonces:

a) $f(0, 4, 0) = (1, 0, 4)$.

b) Los datos que nos dan no nos permiten calcular $f(0, 4, 0)$.

c) $f(0, 4, 0) = (3, 0, 2)$.

d) No existe ninguna aplicación lineal satisfaciendo las condiciones dadas.

**Ejercicio 19.** Sea $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x, y, z) = (x + z,\ x + y,\ 2x + y + z)$$

Entonces las ecuaciones cartesianas (o implícitas) de $\mathrm{Im}(f)$ son:

a) Puesto que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ no tiene ecuaciones cartesianas.

b) $x + z = 0$.

c) $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right.$ .

d) $x + y - z = 0$.

**Ejercicio 20.** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. Entonces:

a) $A$ tiene dos valores propios y es diagonalizable.

b) $A$ tiene tres valores propios y no es diagonalizable.

c) $A$ tiene tres valores propios y es diagonalizable.

d) $A$ tiene dos valores propios y no es diagonalizable.