ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Convocatoria Febrero 2013

(29/01/2013)

Ejercicio 1. Sea $V = \mathbb{Q}^3$, y $v = (x_1, x_2, x_3)$ un vector de V para el que $x_1 \neq x_2$. ¿Existe alguna base B de V en las que el vector v tuviera coordenadas $(1, 0, 0)$?

a) Sí, pues v no es el vector nulo.

b) Los datos del enunciado no permiten afirmar si es posible o no.

c) Depende de lo que valga x_3.

d) No, pues v podría ser el vector nulo.

Ejercicio 2. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$ una matriz que verifica la ecuación $A^2 + 2A + Id_3 = 0$. Entonces, podemos asegurar que:

a) El determinante de A vale 0.

b) A es regular.

c) A es diagonalizable.

d) A es simétrica.

Ejercicio 3. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ definida por $f(x, y, z, t) = (x + y, x + z, x + t)$, se tiene que:

a) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ y $\dim(N(f)) = 2$.

b) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ y $\dim(N(f)) = 0$.

c) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ y $\dim(N(f)) = 1$.

d) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ y $\dim(N(f)) = 1$.

Ejercicio 4. El resto de dividir $x^{137} + x + 1$ entre $x + 5$ en $\mathbb{Z}_7[x]$ es:

a) 6.

b) $x + 4$.

c) 3.

d) 0.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z) = \left(2x + y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2z, x + y + 5z\right)$$

Sean $B_1 = \{(1, -1, 1),\ (2, -2, 1),\ (1, 1, -1)\}$ y $B_2 = \{(-1, 0, 0),\ (6, 1, 2),\ (8, 0, -1)\}$. Entonces la matriz de f en las bases B_1 y B_2 es:

a) No tiene sentido la pregunta, pues B_2 no es una base de $\mathbb{Q}^3$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 11 \\ \frac{7}{4} & \frac{11}{4} & \frac{7}{2} \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal cuyo núcleo es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x + y = 0$, y tal que $f(1, 0, 1) = (1, 1)$. Entonces:

a) $f(x, y, z) = (x + y, z)$.

b) $f(x, y, z) = (x + y, x + y)$.

c) Los datos que nos dan no son suficientes para determinar la aplicación lineal f.

d) $f(x, y, z) = (x + y, -x - y)$.

Ejercicio 7. ¿Cuál de los siguientes objetos es un cuerpo con 16 elementos?

a) $\mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Z}_{16}$.

c) $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x^2+1}$.

d) $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x+1}$.

Ejercicio 8. Sea $q(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Entonces:

a) $q(x)$ tiene raíces, y por tanto es reducible.

b) $q(x)$ es irreducible por el criterio de Eisenstein ($p = 2$).

c) $q(x)$ no tiene raíces pero es reducible.

d) $q(x)$ no tiene raíces, luego es irreducible.

Ejercicio 9. Dada la ecuación en $\mathbb{Z}_7[x]$

$$(x^2 + 2x + 1) \cdot a(x) + (x^2 + 3x + 2) \cdot b(x) = x^3$$

a) Tiene una única solución.

b) No tiene solución.

c) Tiene infinitas soluciones.

d) Tiene siete soluciones.

Ejercicio 10. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. En X definimos la relación

$$xRy \text{ si, y sólo si, } x + 2y \text{ es múltiplo de 3.}$$

Entonces:

a) R es una relación de equivalencia.

b) R no es reflexiva.

c) R no es simétrica.

d) R no es transitiva.

Ejercicio 11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_5)$. El determinante de A vale:

a) 1.

b) 4.

c) 0.

d) 3.

Ejercicio 12. Sean:

$$U = \left\{ (x, y, z, t) \in (\mathbb{Z}_5)^4 : \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z + \ t = 0 \\ x + 4y + 2z + 3t = 0 \end{array} \right\}; \qquad W = \{(x, y, z, t) \in (\mathbb{Z}_5)^4 : x + y + z + t = 0\}.$$

Entonces una base de $U \cap W$ es:

a) $\{(2, 3, 4, 1\}$.

b) $\{(1, 3, 1, 0),\ (3, 1, 0, 1)\}$.

c) $\{(2, 3, 4, 1),\ (1, 4, 2, 3)\}$.

d) $\{(1, 3, 0, 1)\}$.

Ejercicio 13. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. Entonces:

a) A tiene tres valores propios distintos y no es diagonalizable.

b) A tiene dos valores propios distintos y no es diagonalizable.

c) A tiene dos valores propios distintos y es diagonalizable.

d) A tiene tres valores propios distintos y es diagonalizable.

Ejercicio 14. ¿Cuál de las siguientes matrices, con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, es diagonalizable?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la aplicación dada por $f(m, n) = m - n$. Entonces:

a) f es biyectiva.

b) f es inyectiva pero no sobreyectiva.

c) f es sobreyectiva pero no inyectiva.

d) f no define una aplicación.

Ejercicio 16. En $\mathbb{Z}_{430}$ la ecuación $9x = 83^{-1}$

a) $x = 57$ es solución.

b) Tiene a $x = 123$ como solución.

c) No tiene solución, pues $\mathbb{Z}_{430}$ no es un cuerpo.

d) $x = 293$ es la solución.

Ejercicio 17. El sistema de congruencias

$$\begin{array}{llrl} x-2 & \equiv & 1 & \text{mód } 2 \\ 2x & \equiv & 10 & \text{mód } 12 \\ 15x & \equiv & 3 & \text{mód } 36 \\ x & \equiv & 2 & \text{mód } 5 \end{array}$$

a) Tiene 3 soluciones entre 10 y 140.

b) Tiene 2 soluciones entre 0 y 60.

c) No tiene solución.

d) Tiene 5 soluciones entre 10 y 140.

Ejercicio 18. Sea $V = (\mathbb{Z}_5)^3$, y sea U el subespacio de V generado por los vectores $(1,3,2)$ y $(3,4,1)$. ¿Para cuál de los siguientes subespacios $W \subseteq V$ se verifica que $V = U \oplus W$?

a) Para W el subespacio de ecuación $2x + 3y + z = 0$.

b) Para W el subespacio generado por $(1,1,1)$.

c) Para W el subespacio de ecuación $x + y + 3z = 0$.

d) Para W el subespacio generado por $(2,1,1)$.

Ejercicio 19. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $18x + 28y = 66$ en las que x e y sean ambos números naturales?

a) 2.

b) Infinitas.

c) 1.

d) 0.

Ejercicio 20. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & 3z & + & 4t & = & 3 \\ 4x & + & 3y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ 4x & + & 4y & + & z & + & t & = & 1 \end{array} \right.$$

a) Tiene una única solución.

b) Tiene 5 soluciones distintas.

c) Tiene 25 soluciones distintas.

d) Tiene cero soluciones.