ALUMNO:________________ DNI:________ GRUPO: ____

Lógica y Métodos Discretos

Examen de Teoría

(29/06/2011)

Ejercicio 1. ***(1 punto)***
Trazamos n rectas en el plano de forma que:

- *ningún par de rectas distintas son paralelas*
- *por ningún punto del plano pasan más de dos rectas*

y llamamos R_n al número de regiones en que queda dividido el plano.

1. *Obtén una relación entre R_n y R_{n-1}.*
2. *Calcula una fórmula general que exprese el valor de R_n.*
3. *Da el valor de R_{10}.*

Solución:
La relación entre R_n y R_{n-1} es la siguiente: $R_n = R_{n-1} + n$.
Vamos a verlo.
Es claro que $R_1 = 2$ (una recta divide al plano en dos semiplanos). También, que $R_2 = 4$. Si calculamos R_3 veremos que vale 7. Podemos darnos cuenta como se sigue la relación que hemos dicho.
Vamos a justificar que la relación $R_n = R_{n-1} + n$ vale para cualquier n.
Supongamos que tenemos $n-1$ rectas dibujadas en el plano en las condiciones que nos da el enunciado. El plano lo tenemos dividido en R_{n-1} regiones.
Trazamos una nueva recta (la número n). Esa recta debe cortar a las $n-1$ rectas que estaban ya dibujadas en $n-1$ puntos distintos (uno para cada recta, pues tres rectas no pueden coincidir en un punto). Esto hace que esta nueva recta quede dividida en n partes, y que atraviese n regiones de las R_{n-1} en que estaba dividido el plano antes de trazarla. Cada una de las regiones que atraviesa, la divide en 2, luego por cada región que atraviesa, aumenta en 1 el número de regiones (pasa de 1 a 2). Como atraviesa n regiones, entonces el número aumenta en n. Es decir, al trazar la recta n, el número de regiones en que queda dividido el plano es el que teníamos antes (R_{n-1}) más n.
Tenemos entonces una sucesión R_n, que satisface la relación de recurrencia $R_n = R_{n-1} + n$. Esta es una relación de recurrencia lineal no homogénea.
El polinomio característico de la parte homogénea ($R_n = R_{n-1}$) es $x-1$. Como la parte no homogénea es un polinomio de grado 1 (el polinomio $g(n) = n$), entonces la ecuación característica es $(x-1)(x-1)^2 = 0$, es decir, $(x-1)^3 = 0$, que tiene como raíz a $x = 1$ con multiplicidad 3.
Entonces, la solución a esta recurrencia será de la forma $R_n = 1^n(a+bn+cn^2) = a+bn+cn^2$. Puesto que conocemos R_1, R_2, y R_3 podemos plantear el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 2 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 4 \\ a & + & 3b & + & 9c & = & 7 \end{array}$$

cuya solución es $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. Por tanto, la solución que nos queda es $R_n = \frac{n^2+n+2}{2}$.
A partir de ahí, se calcula fácilmente R_{10}. Nos queda $R_{10} = \frac{10^2+10+2}{2} = \frac{112}{2} = 56$.

Ejercicio 2. ***(1 punto)***
Supongamos que tenemos un árbol en el que hay 15 *vértices de grado* 2*,* 23 *vértices de grado* 3*,* 15 *vértices de grado* 4*,* 8 *vértices de grado* 5 *y el resto, vértices de grado uno. ¿Cuántos lados tiene dicho árbol?.*

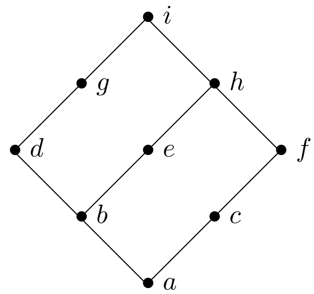
Solución:
Sea x el número de vértices de grado 1. Sea l el número de lados y v el número de vértices. Entonces:

- $v = x + 15 + 23 + 15 + 8$, es decir, $v = x + 61$.
- $l = v - 1 = x + 60$, pues en un árbol, el número de lados es igual al número de vértices menos uno.

- $2l = x + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 23 + 4 \cdot 15 + 8 \cdot 5$, pues en un grafo, la suma de los grados de los vértices vale el doble del número de lados.

Esta última ecuación se queda $2l = x + 199$. Si le restamos la ecuación $l = x + 60$ nos queda $l = 139$. Luego 139 es el número de lados.

Ejercicio 3. ***(0'75 puntos)***
Consideramos el retículo cuyo diagrama de Hasse es:



Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

1. *¿Es L un retículo distributivo?.*
2. *¿Es L un retículo complementado?.*

Considera ahora el subconjunto de L, $S = \{b, d, e, h\}$. De S, calcula el conjunto de cotas superiores y el conjunto de cotas inferiores. Da, si existen, los elementos: supremo, ínfimo, máximo, mínimo, maximales y minimales.

Solución:
No es distributivo, pues el subconjunto $P = \{a, c, e, f, h\}$ es un subrretículo (para comprobar esto hay que ver que el supremo y el ínfimo de dos elementos de P sigue siendo un elemento de P) que es isomorfo al pentágono. Por tanto no es distributivo.

También se puede calcular $c \vee (e \wedge f)$ y $(c \vee e) \wedge (c \vee f)$ y comprobar que son distintos.

$$c \vee (e \wedge f) = c \vee a = c; \qquad (c \vee e) \wedge (c \vee f) = h \wedge f = f$$

No es complementado. De serlo, todo elemento tendría complemento. En particular, el elemento e. Tendríamos que encontrar un elemento x tal que $e \vee x = k$ y $e \wedge x = a$.

Elementos que cumplan la primera condición ($e \vee x = k$) encontramos $x = d$, $x = g$, $x = k$. Elementos que cumplan la segunda condición ($e \wedge x = a$) encontramos otros tres, que son $x = a$, $x = c$ y $x = f$. Pero no hay ninguno que cumpla las dos condiciones simultáneamente.

En cuanto al subconjunto S, tenemos:

Cotas superiores: $\{k\}$	Cotas inferiores: $\{a, b\}$.
Supremo: k	Ínfimo: b.
Elementos maximales: $\{d, h\}$	Elementos minimales: $\{b\}$.
Máximo: No tiene	Mínimo: b.

Ejercicio 4. ***(0'75 puntos)***
Dada la función booleana $f(x, y, z, t) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15)$, obtén una expresión reducida de f como suma de productos.

Solución:
Hacemos un diagrama de Karnaugh de la función que nos dan

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$	1	1		1
$\overline{z}\,t$	1			1
$z\,t$	1	1	1	1
$z\,\overline{t}$	1	1		

Y a partir de él deducimos que $f(x,y,z,t) = z\,t + \overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{t}$.

Ejercicio 5. ***(1 punto)***
Tenemos 3 cajas numeradas, y 31 bolas indistinguibles.

1. *¿De cuántas formas podemos distribuir las 31 bolas en las 3 cajas?.*
2. *¿En cuántas de ellas, la caja primera tiene menos bolas que la suma de las que tienen las cajas 2 y 3?.*
3. *¿De cuántas formas podemos repartir las bolas de forma que ninguna caja tenga más bolas que las otras dos juntas?.*

Solución:

Supongamos que las cajas están numeradas del 1 al 3, y que x_1 es el número de bolas que introducimos en la caja 1, x_2 el número de bolas que introducimos en la caja 2, y x_3 el número de bolas que introducimos en la caja 3.

Entonces, lo que tenemos es que ver de cuantas formas podemos tomar x_1, x_2, x_3 de forma que $x_1 + x_2 + x_3 = 31$ (y $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$).

El número de soluciones de esta ecuación es $\binom{31+3-1}{3-1} = \binom{33}{2} = 528$.

Si la primera caja tiene menos bolas que la suma de las otras dos, entonces la primera caja tiene a lo sumo 15 bolas (si tuviera 16, en las otras dos habría 15 en total).

Vamos a contar, de las 528 soluciones anteriores, en cuántas de ellas es $x_1 \geq 16$. Esas soluciones las descartaremos.

Para contar cuantas soluciones hay tales que $x_1 \geq 16$ nos planteamos el problema de introducir las bolas, pero una vez que hemos metido 16 bolas en la caja primera. Por tanto, lo que nos queda es repartir 15 bolas entre las 3 cajas. Y el número de formas de hacer esto es $\binom{15+3-1}{3-1} = \binom{17}{2} = 136$.

Por tanto, el número de formas de repartir las bolas sin que haya más en la primera caja que en las dos restantes es $528 - 136 = 392$.

Por último, si lo que buscamos que también en la caja 2 no haya más bolas que en las dos restantes, e igual en la caja 3, tendremos que descartar aquellas soluciones para las que $x_2 \geq 16$ (que son 136), y aquéllas para las que $x_3 \geq 16$ (que son otras 136). Por tanto, el número de soluciones es $528 - 3 \cdot 136 = 120$.

Ejercicio 6. ***(1 punto)***
Sean α, β, γ fórmulas y Γ un conjunto de fórmulas. Demuestra que la fórmula

$$(\alpha \to \gamma) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma))$$

es una tautología.

Supongamos ahora que $\Gamma \vDash \alpha \to \gamma$. Demuestra que

$$\Gamma \vDash (\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma)$$

Solución:

Tenemos que demostrar que

$$\vDash (\alpha \to \gamma) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma))$$

Por el teorema de la deducción, eso es equivalente a demostrar que

$$\{\alpha \to \gamma\} \vDash (\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma)$$

Nuevamente, por el teorema de la deducción, eso es equivalente a demostrar que

$$\{\alpha \to \gamma;\ \neg\alpha \to \beta\} \vDash \neg\beta \to \gamma$$

Aplicando otra vez el teorema de la deducción, esto último es equivalente a probar

$$\{\alpha \to \gamma;\ \neg\alpha \to \beta;\ \neg\beta\} \vDash \gamma$$

Y esto último es lo mismo que probar que el siguiente conjunto de fórmulas

$$\{\alpha \to \gamma;\ \neg\alpha \to \beta;\ \neg\beta;\ \neg\gamma\}$$

es insatisfacible.

Pasamos cada fórmula a forma clausular, en cuyo caso lo que hay que probar es que el conjunto de cláusulas

$$\{\neg\alpha \vee \gamma;\ \alpha \vee \beta;\ \neg\beta;\ \neg\gamma\}$$

es insatisfacible.

Y esto lo demostramos por el algoritmo de Davis-Putnam.

$$\begin{array}{c}
\{\neg\alpha \vee \gamma;\ \alpha \vee \beta;\ \neg\beta;\ \neg\gamma\} \\
\big| \ \lambda = \neg\beta \\
\{\neg\alpha \vee \gamma;\ \alpha;\ \neg\gamma\} \\
\big| \ \lambda = \alpha \\
\{\gamma;\ \neg\gamma\} \\
\big| \ \lambda = \gamma \\
\{\square\}
\end{array}$$

Para demostrar la otra parte, nos fijamos en que al demostrar que la fórmula es una tautología, lo que hemos demostrado es que $\{\alpha \to \gamma\} \vDash (\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma)$ (ver el resultado después de aplicar una vez el teorema de la deducción).

Si I es una interpretación que hace ciertas todas las fórmulas de Γ, entonces I hace cierta la fórmula $\alpha \to \gamma$. Y por la última observación, tenemos que la fórmula $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma)$ es cierta bajo la interpretación I.

Es decir, hemos demostrado que cualquier interpretación que haga ciertas a todas las fórmulas de Γ, hace cierta a la fórmula $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma)$, que es lo que teníamos que demostrar.

Ejercicio 7. ***(1 punto)***
Consideramos un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$ *con dos símbolos de función* f *y* g *(el primero 1-ario y el segundo binario), y con un símbolo de predicado binario* P*. Sea* α *la fórmula*

$$\forall x \exists y \exists z P(x, g(f(y), f(z)))$$

Y consideramos la estructura $\mathcal{E}$*:*

- *Dominio:* $\mathbb{Z}_7$.
- *Funciones:* $f(x) = x^2$; $g(x, y) = x + y$.
- *Predicado:* $P(x, y) \equiv x = y$*. Es decir,* $P(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x = y, \\ 0 & si\ x \neq y. \end{cases}$

Calcula el valor de verdad de la fórmula α en la estructura $\mathcal{E}$.

Solución:
Vamos a ir transformando la fórmula α en un enunciado más próximo al lenguaje natural, teniendo en cuenta el significado que se le ha dado a los distintos elementos que intervienen en la fórmula.

$$\begin{array}{l} \forall x \exists y \exists z \; P(x, g(f(y), f(z))) \\ \forall x \exists y \exists z \; x = g(f(y), f(z)) \\ \forall x \exists y \exists z \; x = f(y) + f(z) \\ \forall x \exists y \exists z \; x = y^2 + z^2 \end{array}$$

Es decir, tenemos que comprobar si en $\mathbb{Z}_7$, para cualquier elemento x, podemos encontrar dos elementos y y z, tales que $x = y^2 + z^2$. Dicho de otra forma, si todo elemento de $\mathbb{Z}_7$ es suma de dos cuadrados. Para comprobar si es cierto o no, calculamos los cuadrados de todos los elementos de $\mathbb{Z}_7$.

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 2, \quad 4^2 = 2, \quad 5^2 = 4, \quad 6^2 = 1$$

Y ahora, puesto que

$$\begin{array}{l} 0 = 0^2 + 0^2 \\ 1 = 1^2 + 0^2 \\ 2 = 3^2 + 0^2 \\ 3 = 3^2 + 1^2 \\ 4 = 2^2 + 0^2 \\ 5 = 2^2 + 1^2 \\ 6 = 3^2 + 2^2 \end{array}$$

Vemos que todo elemento de $\mathbb{Z}_7$ es suma de dos cuadrados. Por tanto, la fórmula α es verdadera en la estructura que nos han dado.

Ejercicio 8. ***(1'5 puntos)***
Considera las siguientes fórmulas:

- $\varphi_1 = \forall x((P(x) \wedge \exists y(Q(y, x) \wedge S(y))) \rightarrow U(x))$
- $\varphi_2 = \forall x(P(x) \wedge V(x) \rightarrow S(x))$
- $\varphi_3 = \forall x(P(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \neg R(x))$
- $\varphi_4 = \forall x(\exists y(Q(y, x) \wedge P(y)) \rightarrow P(x))$
- $\varphi_5 = P(a) \wedge Q(a, b)$
- $\psi = \exists x(\neg R(x) \vee \exists y(Q(x, y) \wedge U(y)))$.

Demuestra que

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\} \models \psi$$

Solución:
Lo que tenemos que demostrar es equivalente a demostrar que el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \neg\psi\}$ es insatisfacible. Para ello, calculamos la forma clausular de cada una de las fórmulas.

- φ_1.
  $\forall x((P(x) \wedge \exists y(Q(y, x) \wedge S(y))) \rightarrow U(x))$
  $\forall x(\neg(P(x) \wedge \exists y(Q(y, x) \wedge S(y))) \vee U(x))$
  $\forall x((\neg P(x) \vee \neg\exists y(Q(y, x) \wedge S(y))) \vee U(x))$
  $\forall x((\neg P(x) \vee \forall y\neg(Q(y, x) \wedge S(y))) \vee U(x))$
  $\forall x((\neg P(x) \vee \forall y(\neg Q(y, x) \vee \neg S(y))) \vee U(x))$
  $\forall x\forall y(\neg P(x) \vee \neg Q(y, x) \vee \neg S(y) \vee U(x))$

- φ_2.
  $\forall x(P(x) \wedge V(x) \to S(x))$
  $\forall x(\neg(P(x) \wedge V(x)) \vee S(x))$
  $\forall x(\neg P(x) \vee \neg V(x) \vee S(x))$

- φ_3.
  $\forall x(P(x) \wedge \neg V(x) \to \neg R(x))$
  $\forall x(\neg(P(x) \wedge \neg V(x)) \vee \neg R(x))$
  $\forall x(\neg P(x) \vee V(x) \vee \neg R(x))$

- φ_4.
  $\forall x(\exists y(Q(y,x) \wedge P(y)) \to P(x))$
  $\forall x(\neg\exists y(Q(y,x) \wedge P(y)) \vee P(x))$
  $\forall x(\forall y\neg(Q(y,x) \wedge P(y)) \vee P(x))$
  $\forall x(\forall y(\neg Q(y,x) \vee \neg P(y)) \vee P(x))$
  $\forall x\forall y(\neg Q(y,x) \vee \neg P(y) \vee P(x))$

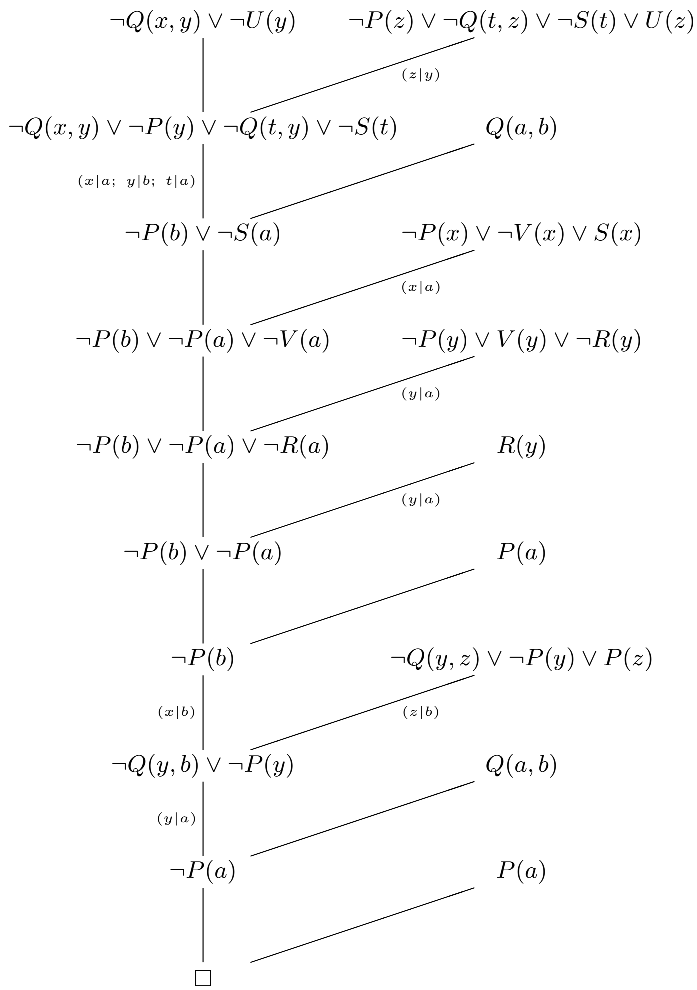
- φ_5.
  $P(a) \wedge Q(a,b)$

- $\neg\psi$.
  $\neg\exists x(\neg R(x) \vee \exists y(Q(x,y) \wedge U(y)))$
  $\forall x\neg(\neg R(x) \vee \exists y(Q(x,y) \wedge U(y)))$
  $\forall x(R(x) \wedge \neg\exists y(Q(x,y) \wedge U(y)))$
  $\forall x(R(x) \wedge \forall y\neg(Q(x,y) \wedge U(y)))$
  $\forall x(R(x) \wedge \forall y(\neg Q(x,y) \vee \neg U(y)))$
  $\forall x\forall y(R(x) \wedge (\neg Q(x,y) \vee \neg U(y)))$

Luego nos queda comprobar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible.

$$\{\neg P(x) \vee \neg Q(y,x) \vee \neg S(y) \vee U(x);\ \neg P(x) \vee \neg V(x) \vee S(x);\ \neg P(x) \vee V(x) \vee \neg R(x);\\ \neg Q(y,x) \vee \neg P(y) \vee P(x);\ P(a);\ Q(a,b);\ R(x);\ \neg Q(x,y) \vee \neg U(y)\}$$

Lo que sigue es una deducción (lineal-input) de la cláusula vacía a partir de este conjunto de cláusulas.


$\neg Q(x,y) \vee \neg U(y)$
$\neg P(z) \vee \neg Q(t,z) \vee \neg S(t) \vee U(z)$
$(z|y)$
$\neg Q(x,y) \vee \neg P(y) \vee \neg Q(t,y) \vee \neg S(t)$
$Q(a,b)$
$(x|a;\ y|b;\ t|a)$
$\neg P(b) \vee \neg S(a)$
$\neg P(x) \vee \neg V(x) \vee S(x)$
$(x|a)$
$\neg P(b) \vee \neg P(a) \vee \neg V(a)$
$\neg P(y) \vee V(y) \vee \neg R(y)$
$(y|a)$
$\neg P(b) \vee \neg P(a) \vee \neg R(a)$
$R(y)$
$(y|a)$
$\neg P(b) \vee \neg P(a)$
$P(a)$
$\neg P(b)$
$\neg Q(y,z) \vee \neg P(y) \vee P(z)$
$(x|b)$
$(z|b)$
$\neg Q(y,b) \vee \neg P(y)$
$Q(a,b)$
$(y|a)$
$\neg P(a)$
$P(a)$
$\square$