

Lógica y Métodos Discretos

Examen de Teoría

(29/06/2011)

Ejercicio 1. (1 punto)

Trazamos n rectas en el plano de forma que:

- ningún par de rectas distintas son paralelas
- por ningún punto del plano pasan más de dos rectas

y llamamos R_n al número de regiones en que queda dividido el plano.

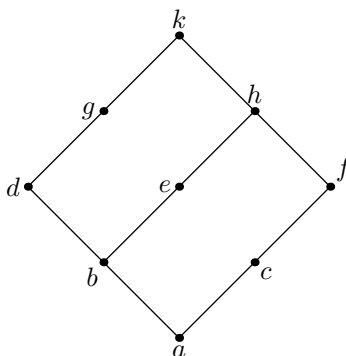
1. Obtén una relación entre R_n y R_{n-1} .
2. Calcula una fórmula general que exprese el valor de R_n .
3. Da el valor de R_{10} .

Ejercicio 2. (1 punto)

Supongamos que tenemos un árbol en el que hay 15 vértices de grado 2, 23 vértices de grado 3, 15 vértices de grado 4, 8 vértices de grado 5 y el resto, vértices de grado uno. ¿Cuántos lados tiene dicho árbol?

Ejercicio 3. (0'75 puntos)

Consideramos el retículo cuyo diagrama de Hasse es:



Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

1. ¿Es L un retículo distributivo?
2. ¿Es L un retículo complementado?

Considera ahora el subconjunto de L , $S = \{b, d, e, h\}$. De S , calcula el conjunto de cotas superiores y el conjunto de cotas inferiores. Da, si existen, los elementos: supremo, ínfimo, máximo, mínimo, maximales y minimales.

Ejercicio 4. (0'75 puntos)

Dada la función booleana $f(x, y, z, t) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15)$, obtén una expresión reducida de f como suma de productos.

Ejercicio 5. (1 punto)

Tenemos 3 cajas numeradas, y 31 bolas indistinguibles.

1. ¿De cuántas formas podemos distribuir las 31 bolas en las 3 cajas?
2. ¿En cuántas de ellas, la caja primera tiene menos bolas que la suma de las que tienen las cajas 2 y 3?
3. ¿De cuántas formas podemos repartir las bolas de forma que ninguna caja tenga más bolas que las otras dos juntas?

Ejercicio 6. (1 punto)

Sean α, β, γ fórmulas y Γ un conjunto de fórmulas. Demuestra que la fórmula

$$(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \gamma))$$

es una tautología.

Supongamos ahora que $\Gamma \models \alpha \rightarrow \gamma$. Demuestra que

$$\Gamma \models (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \gamma)$$

Ejercicio 7. (1 punto)

Consideramos un lenguaje de primer orden \mathbf{L} con dos símbolos de función f y g (el primero 1-ario y el segundo binario), y con un símbolo de predicado binario P . Sea α la fórmula

$$\forall x \exists y \exists z P(x, g(f(y), f(z)))$$

Y consideramos la estructura \mathcal{E} :

- Dominio: \mathbb{Z}_7 .
- Funciones: $f(x) = x^2$; $g(x, y) = x + y$.
- Predicado: $P(x, y) \equiv x = y$. Es decir, $P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$

Calcula el valor de verdad de la fórmula α en la estructura \mathcal{E} .

Ejercicio 8. (1'5 puntos)

Considera las siguientes fórmulas:

- $\varphi_1 = \forall x ((P(x) \wedge \exists y (Q(y, x) \wedge s(y))) \rightarrow u(x))$
- $\varphi_2 = \forall x (P(x) \wedge v(x) \rightarrow s(x))$
- $\varphi_3 = \forall x (P(x) \wedge \neg v(x) \rightarrow \neg r(x))$
- $\varphi_4 = \forall x (\exists y (Q(y, x) \wedge P(y)) \rightarrow P(x))$
- $\varphi_5 = P(a) \wedge Q(a, b)$
- $\psi = \exists x (\neg r(x) \vee \exists y (Q(x, y) \wedge u(y)))$.

Demuestra que

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \} \models \psi$$