ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Convocatoria Febrero 2013

(29/01/2013)

Ejercicio 1. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & 3z & + & 4t & = & 3 \\ 4x & + & 3y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ 4x & + & 4y & + & z & + & t & = & 1 \end{array}\right.$$

a) Tiene 5 soluciones distintas.

b) Tiene una única solución.

c) Tiene cero soluciones.

d) Tiene 25 soluciones distintas.

Ejercicio 2. Sea $V = (\mathbb{Z}_5)^3$, y sea U el subespacio de V generado por los vectores $(1,3,2)$ y $(3,4,1)$. ¿Para cuál de los siguientes subespacios $W \subseteq V$ se verifica que $V = U \oplus W$?

a) Para W el subespacio generado por $(2,1,1)$.

b) Para W el subespacio de ecuación $x + y + 3z = 0$.

c) Para W el subespacio de ecuación $2x + 3y + z = 0$.

d) Para W el subespacio generado por $(1,1,1)$.

Ejercicio 3. Sea $V = \mathbb{Q}^3$, y $v = (x_1, x_2, x_3)$ un vector de V para el que $x_1 \neq x_2$. ¿Existe alguna base B de V en las que el vector v tuviera coordenadas $(1,0,0)$?

a) No, pues v podría ser el vector nulo.

b) Los datos del enunciado no permiten afirmar si es posible o no.

c) Sí, pues v no es el vector nulo.

d) Depende de lo que valga x_3.

Ejercicio 4. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$ una matriz que verifica la ecuación $A^2 + 2A + \mathrm{Id}_3 = 0$. Entonces, podemos asegurar que:

a) A es simétrica.

b) A es regular.

c) A es diagonalizable.

d) El determinante de A vale 0.

Ejercicio 5. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ definida por $f(x,y,z,t) = (x+y, x+z, x+t)$, se tiene que:

a) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ y $\dim(N(f)) = 0$.

b) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ y $\dim(N(f)) = 1$.

c) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ y $\dim(N(f)) = 2$.

d) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ y $\dim(N(f)) = 1$.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x,y,z) = \left(2x+y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2z, x+y+5z\right)$$

Sean $B_1 = \{(1,-1,1),\ (2,-2,1),\ (1,1,-1)\}$ y $B_2 = \{(-1,0,0),\ (6,1,2),\ (8,0,-1)\}$. Entonces la matriz de f en las bases B_1 y B_2 es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 11 \\ \frac{7}{4} & \frac{11}{4} & \frac{7}{2} \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

c) No tiene sentido la pregunta, pues B_2 no es una base de $\mathbb{Q}^3$.

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal cuyo núcleo es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x+y=0$, y tal que $f(1,0,1) = (1,1)$. Entonces:

a) $f(x,y,z) = (x+y, x+y)$.

b) $f(x,y,z) = (x+y, -x-y)$.

c) $f(x,y,z) = (x+y, z)$.

d) Los datos que nos dan no son suficientes para determinar la aplicación lineal f.

Ejercicio 8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. Entonces:

a) A tiene tres valores propios distintos y es diagonalizable.

b) A tiene dos valores propios distintos y es diagonalizable.

c) A tiene tres valores propios distintos y no es diagonalizable.

d) A tiene dos valores propios distintos y no es diagonalizable.

Ejercicio 9. ¿Cuál de las siguientes matrices, con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, es diagonalizable?

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la aplicación dada por $f(m,n) = m - n$. Entonces:

a) f es inyectiva pero no sobreyectiva.

b) f es biyectiva.

c) f es sobreyectiva pero no inyectiva.

d) f no define una aplicación.

Ejercicio 11. Sean:

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in (\mathbb{Z}_5)^4 : \begin{array}{l} 2x+3y+4z+\ t=0 \\ x+4y+2z+3t=0 \end{array} \right\}; \qquad W = \{(x,y,z,t) \in (\mathbb{Z}_5)^4 : x+y+z+t=0\}.$$

Entonces una base de $U \cap W$ es:

a) $\{(1,3,1,0),\ (3,1,0,1)\}$.

b) $\{(1,3,0,1)\}$.

c) $\{(2,3,4,1\}$.

d) $\{(2,3,4,1),\ (1,4,2,3)\}$.

Ejercicio 12. En $\mathbb{Z}_{430}$ la ecuación $9x = 83^{-1}$

a) Tiene a $x = 123$ como solución.

b) No tiene solución, pues $\mathbb{Z}_{430}$ no es un cuerpo.

c) $x = 293$ es la solución.

d) $x = 57$ es solución.

Ejercicio 13. El sistema de congruencias

$$\begin{array}{llrl} x-2 & \equiv & 1 & \text{mód } 2 \\ 2x & \equiv & 10 & \text{mód } 12 \\ 15x & \equiv & 3 & \text{mód } 36 \\ x & \equiv & 2 & \text{mód } 5 \end{array}$$

a) No tiene solución.

b) Tiene 3 soluciones entre 10 y 140.

c) Tiene 5 soluciones entre 10 y 140.

d) Tiene 2 soluciones entre 0 y 60.

Ejercicio 14. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $18x + 28y = 66$ en las que x e y sean ambos números naturales?

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) Infinitas.

Ejercicio 15. El resto de dividir $x^{137} + x + 1$ entre $x + 5$ en $\mathbb{Z}_7[x]$ es:

a) 0.

b) 6.

c) $x + 4$.

d) 3.

Ejercicio 16. ¿Cuál de los siguientes objetos es un cuerpo con 16 elementos?

a) $\mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Z}_{16}$.

c) $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x^2+1}$.

d) $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x+1}$.

Ejercicio 17. Sea $q(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Entonces:

a) $q(x)$ no tiene raíces, luego es irreducible.

b) $q(x)$ tiene raíces, y por tanto es reducible.

c) $q(x)$ es irreducible por el criterio de Eisenstein ($p = 2$).

d) $q(x)$ no tiene raíces pero es reducible.

Ejercicio 18. Dada la ecuación en $\mathbb{Z}_7[x]$

$$(x^2 + 2x + 1) \cdot a(x) + (x^2 + 3x + 2) \cdot b(x) = x^3$$

a) Tiene infinitas soluciones.

b) No tiene solución.

c) Tiene una única solución.

d) Tiene siete soluciones.

Ejercicio 19. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. En X definimos la relación

$$xRy \text{ si, y sólo si, } x + 2y \text{ es múltiplo de } 3.$$

Entonces:

a) R no es transitiva.

b) R no es reflexiva.

c) R no es simétrica.

d) R es una relación de equivalencia.

Ejercicio 20. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_5)$. El determinante de A vale:

a) 3.

b) 0.

c) 1.

d) 4.