Capítulo 6

Espacios vectoriales.

6.1. Espacios vectoriales.

6.1.1. Definición y ejemplos.

Definición 73. *Sea K un cuerpo, y V un conjunto. Decimos que V tiene estructura de espacio vectorial sobre K (o de K-espacio vectorial) si en V tenemos definidas dos operaciones, una interna, y otra externa con los elementos de K*

$$\begin{array}{ccc} V\times V & \longrightarrow & V \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} K\times V & \longrightarrow & V \\ (a,u) & \mapsto & a\cdot u \end{array}$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

i) Para cualesquiera $u,v,w\in V$, $(u+v)+w=u+(v+w)$.

ii) Para cualesquiera $u,v\in V$, $u+v=v+u$.

iii) Existe $0\in V$ tal que $u+0=u$ para cualquier $u\in V$.

iv) Para cualquier $u\in V$ existe $v\in V$ tal que $u+v=v+u=0$.

v) Dados $a,b\in K$ y $u\in V$, $(a+b)\cdot u=a\cdot u+b\cdot u$.

vi) Dados $a\in K$ y $u,v\in V$, $a\cdot(u+v)=a\cdot u+a\cdot v$.

vii) Para cualesquiera $a,b\in K$ y $u\in V$, $(a\cdot b)\cdot u=a\cdot(b\cdot u)$.

viii) Para cualquier $u\in V$, $1\cdot u=u$.

Es decir, un K-espacio vectorial es un conjunto en el que podemos sumar elementos y multiplicarlos por elementos de K.

A los elementos de un espacio vectorial se les llama *vectores*, mientras que a los elementos del cuerpo K se les suele llamar *escalares*.

Dados dos vectores u, v, denotaremos como $u-v$ al vector $u+(-v)$.

Ejemplo 6.1.1. *Vamos a ver algunos ejemplos de espacios vectoriales:*

1. *Si K es un cuerpo, consideramos el conjunto $K^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in K\}$. Definimos la suma y el producto por escalares como sigue:*

   - $(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$
   - $a\cdot(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a\cdot x_1,a\cdot x_2,\cdots,a\cdot x_n)$

De esta forma, K_n tiene estructura de K-espacio vectorial.

En particular, tomando $n = 1$, nos queda que K es un K-espacio vectorial (podemos sumar elementos de K y multiplicarlos por elementos de K).

El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ podemos identificarlo con los vectores del plano, mientras que $\mathbb{R}^3$ podemos identificarlo con los vectores del espacio.

2. *Para cualquier $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, el conjunto $M_{m\times n}(K)$ es un K-espacio vectorial, pues tenemos definida una suma de matrices y un producto de matrices por escalares, y satisface las ocho propiedades anteriores.*

3. *El conjunto de polinomios con coeficientes en K es un K-espacio vectorial, con la suma usual de polinomios y el producto de polinomios por constantes. Este conjunto sabemos que se denota como $K[x]$.*

4. *El conjunto de polinomios con coeficientes en K de grado menor o igual que n es también un K-espacio vectorial. Este espacio lo denotaremos como $K_n[x]$.*

5. *Para cualquier cuerpo K podemos considerar el K-espacio vectorial formado por un solo elemento. Como este elemento debe ser el elemento neutro para la suma, lo denotaremos por 0.*

6. *El conjunto $U = \{(0, 0, 0);\ (1, 1, 0);\ (1, 0, 1);\ (0, 1, 1)\} \subseteq (\mathbb{Z}_2)^3$ es un $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial.*

7. *El conjunto $V = \{(0, 0, 0);\ (1, 1, 0);\ (1, 1, 1);\ (0, 1, 0)\} \subseteq (\mathbb{Z}_2)^3$ no es un espacio vectorial con las operaciones usuales, ya que no podemos sumar elementos. Por ejemplo, $(1, 1, 0) + (1, 1, 1)$ no es un elemento de V.*

Hemos definido un espacio vectorial a partir de 8 propiedades. De esas 8 propiedades se deducen otras muchas, que son elementales y de sobra conocidas. Algunas de estas son:

Sea K un cuerpo y V un K-espacio vectorial. Sean $a, b \in K$ y $u, v \in V$. Entonces:

1. $0 \cdot u = 0$.
2. $a \cdot 0 = 0$.
3. $a \cdot u = 0$ implica que $a = 0$ ó $u = 0$.
4. Si $a \cdot u = b \cdot u$ y $u \neq 0$ entonces $a = b$.
5. Si $a \cdot u = a \cdot v$ y $a \neq 0$ entonces $u = v$.

6.1.2. Combinaciones lineales.

Sea V un K-espacio vectorial, y $u_1, u_2, \cdots, u_m \in V$. Llamamos combinación lineal de estos vectores a cualquier vector v que podemos escribir de la forma

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$$

donde $a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$. A los escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ los llamaremos *coeficientes de la combinación lineal.*[1]

Ejemplo 6.1.2.

1. *Sea $V = (\mathbb{Z}_5)^3$, y $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (3, 2, 3)$ y $u_3 = (2, 4, 0)$. Entonces el vector $(4, 2, 2)$ es combinación lineal de los vectores u_1, u_2 y u_3, ya que $(4, 2, 2) = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3$.*

   Notemos también que podemos escribir $(4, 2, 2)$ como $4 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3$.

[1] Aquí hemos definido lo que es una combinación lineal para un conjunto finito de vectores $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$. Dado un espacio vectorial V y un subconjunto S, posiblemente infinito, un vector $v \in V$ se dice que es combinación lineal de los vectores de S si existen $u_1, u_2, \cdots, u_m \in S$ tales que v es combinación lineal de $u_1, u_2, \cdots, u_m$.

Sin embargo, el vector $(1,2,3)$ *no es combinación lineal de los vectores* u_1*,* u_2*,* u_3*. Si así lo fuera, habría unos coeficientes* $a,b,c \in \mathbb{Z}_5$ *tales que* $(1,2,3) = a\cdot(1,1,2) + b\cdot(3,2,3) + c\cdot(2,4,0)$*, lo que se traduce en que* a,b,c *es una solución del sistema*

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 3b & + & 2c & = & 1 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 2 \\ 2a & + & 3b & & & = & 3 \end{array}$$

cuya matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$*, y su forma normal de Hermite por filas es* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, el sistema es incompatible. Vemos entonces que los coeficientes a*,* b*,* c *no existen.*

2. *Dado cualquier conjunto de vectores* $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ *de un espacio vectorial, el vector* 0 *es combinación lineal de estos vectores, ya que* $0 = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + \cdots + 0\cdot v_m$*.*

3. *Sean* $v_1 = (1,1,2)$ *y* $v_2 = (2,1,0)$ *vectores de* $(\mathbb{Z}_3)^3$*. Entonces podemos formar un total de 9 combinaciones lineales de estos vectores. Estas son:*

$$\begin{array}{lll} 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 = (0,0,0) & 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 = (2,1,0) & 0\cdot v_1 + 2\cdot v_2 = (1,2,0) \\ 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 = (1,1,2) & 1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 = (0,2,2) & 1\cdot v_1 + 2\cdot v_2 = (2,0,2) \\ 2\cdot v_1 + 0\cdot v_2 = (2,2,1) & 2\cdot v_1 + 1\cdot v_2 = (1,0,1) & 2\cdot v_1 + 2\cdot v_2 = (0,1,1) \end{array}$$

Es decir, cualquiera de los nueve vectores del conjunto

$$\{(0,0,0);\ (2,1,0);\ (1,2,0);\ (1,1,2);\ (0,2,2);\ (2,0,2);\ (2,2,1);\ (1,0,1);\ (0,1,1)\}$$

es combinación lineal de los vectores v_1 *y* v_2*. Notemos que todos estos vectores cumplen que la tercera coordenada es la suma de las dos primeras. Es decir, podríamos decir que el conjunto de todas las combinaciones lineales de* v_1 *y* v_2 *es el conjunto*

$$\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 / z = x + y\} = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 / x + y + 2z = 0\}$$

Consideramos ahora los vectores de $M_{3\times 1}(\mathbb{Z}_5)$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Hemos comprobado que v no es combinación lineal de v_1, v_2, v_3, y hemos llegado a esa conclusión porque el sistema de ecuaciones $A\cdot x = b$, en el que las columnas de A son los vectores v_1, v_2, v_3 es incompatible.

Por tanto, podemos ver que **un sistema de ecuaciones $\mathbf{A\cdot x = b}$ es compatible si, y sólo si, $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$**.

Si V es un K-espacio vectorial, y $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ es un subconjunto de V, vamos a denotar por $L(S)$ al conjunto de todos los vectores de V que son combinación lineal de los vectores de S.

Por ejemplo, si $V = (\mathbb{Z}_3)^3$ y $S = \{(1,1,2);\ (2,1,0)\}$ entonces

$$L(S) = \{(0,0,0);\ (2,1,0);\ (1,2,0);\ (1,1,2);\ (0,2,2);\ (2,0,2);\ (2,2,1);\ (1,0,1);\ (0,1,1)\}$$

Si $S = \emptyset$, el conjunto $L(S)$ será el formado por el vector 0 (es decir, $L(\emptyset) = \{0\}$.

6.1.3. Dependencia e independencia lineal.

Sea V un K-espacio vectorial, y $v_1, v_2, \cdots, v_m \in V$. Se dice que los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_m$ son linealmente dependientes, o que el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ es un conjunto (de vectores) linealmente dependiente si existen escalares $a_1, a_2, \cdots, a_m \in K$, no todos iguales a cero, de forma que

$$a_1\cdot v_1 + a_2\cdot v_2 + \cdots + a_m\cdot v_m = 0$$

En caso contrario, se dice que los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_m$ son linealmente independietes, o que el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ es linealmente independiente[2][3]

Ejemplo 6.1.3.

1. *El conjunto* $\{u_1, u_2, u_3\} \subseteq (\mathbb{Z}_5)^3$, *donde* $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (3, 2, 3)$ *y* $u_3 = (2, 4, 0)$ *es linealmente dependiente, pues* $2 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + u_3 = (0, 0, 0)$.

   Es decir, hay escalares $a_1 = 2$, $a_2 = 2$ *y* $a_3 = 1$, *no todos nulos (en este caso ninguno) tales que* $a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + a_3 \cdot u_3 = 0$.

   La forma de encontrar esos escalares, si existen, sería plantear la ecuación $a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + a_3 \cdot u_3 = 0$, *que se traduce en el sistema*

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_1 & + & 3a_2 & + & 2a_3 & = & 0 \\ a_1 & + & 2a_2 & + & 4a_3 & = & 0 \\ 2a_1 & + & 3a_2 & & & = & 0 \end{array}$$

   Si el sistema es compatible determinado, entonces la única solución es $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, *y los vectores serían linealmente independientes, mientras que si el sistema es compatible indeterminado (como es el caso que nos ocupa), entonces los vectores son linealmente dependientes.*

2. *Sean ahora* $v_1 = (1, 1, 2) \in (\mathbb{Z}_3)^3$ *y* $v_2 = (2, 1, 0) \in (\mathbb{Z}_3)^3$. *Entonces estos vectores son linealmente independientes. El sistema que habría que resolver ahora sería*

$$\begin{array}{rcrcl} a & + & 2b & = & 0 \\ a & + & b & = & 0 \\ 2a & & & = & 0 \end{array}$$

   que es compatible determinado. Su única solución es $a = b = 0$.

   Vimos en el ejemplo anterior, en que calculamos todas las combinaciones lineales de estos vectores, que la única en la que obteníamos el vector $(0, 0, 0)$ *era con ambos coeficientes iguales a cero.*

Hemos visto que estudiar si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente se reduce a estudiar si un sistema de ecuaciones es compatible indeterminado o compatible determinado. El ser de un tipo u otro depende de que el rango de la matriz de coeficientes sea menor o sea igual al número de columnas. A partir de aquí es fácil ver que

Las columnas de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{m\times n}(K)}$ son linealmente independientes si, y sólo si, $\mathbf{rg(A) = n}$.

Y puesto que el rango de una matriz es igual al rango de la matriz traspuesta, podemos cambiar columnas por filas y tenemos que

Las filas de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{m\times n}(K)}$ son linealmente independientes si, y sólo si, $\mathbf{rg(A) = m}$.

Observación.

Una cosa es hablar de si las filas o las columnas de una matriz son linealmente independientes, y otra, si un conjunto de matrices es o no linealmente independiente. En el primer caso, estamos estudiando vectores del espacio vectorial $M_{1\times n}(K)$ ó $M_{m\times 1}(K)$, mientras que en el segundo, son vectores de $M_{m\times n}(K)$. Por ejemplo:

Ejemplo 6.1.4. *Sean* $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *tres matrices con coeficientes en* $\mathbb{Z}_5$. *Las tres matrices son elementos del espacio vectorial* $M_2(\mathbb{Z}_5)$, *y como miembros de ese espacio vectorial son linealmente dependientes, pues* $2A_1 + 3A_2 + 4A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[2] La definición que se ha dado de conjunto de vectores linealmente dependientes o independientes no es correcta. Para ver porqué, consideramos $v_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ y $v_2 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. De acuerdo con la definición que hemos dado, el conjunto $\{v_1\}$ sería linealmente independiente, mientras que el conjunto $\{v_1, v_2\}$ sería linealmente dependiente (pues $1 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 = (0, 0)$), y sin embargo, como conjuntos $\{v_1\} = \{v_1, v_2\}$. Siendo conscientes de la deficiencia y la imprecisión de esta definición, seguiremos hablando de conjuntos de vectores linealmente dependientes e independientes.

[3] También se puede definir el concepto de conjunto linealmente independiente para un cojunto infinito. Un conjunto (posiblemente infinito) de vectores es linealmente independiente si cualquier subconjunto finito suyo lo es.

Sin embargo, las columnas de la matriz A_1 son linealmente independientes ($rg(A_1) = 2$), así como las filas. Las columnas de A_2 son linealmente dependientes, pues $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Las columnas de A_3 son linealmente independientes.*

Lo siguiente es una caracterización de los conjuntos linealmente dependientes.

Proposición 6.1.1. *Sea V un K-espacio vectorial, y $u_1, u_2, \cdots, u_m \in V$. Entonces estos vectores son linealmente dependientes si, y sólo si, uno de ellos es combinación lineal del resto.*

Esta proposición es también válida en el caso de que tengamos un conjunto infinito de vectores.

Demostración: Supongamos en primer lugar que el conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ es linealmente dependiente. En tal caso, hay escalares $a_1, a_2, \cdots, a_m$, no todos nulos, tales que $a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_m \cdot u_m = 0$.

Vamos a suponer que $a_m \neq 0$. Si no fuera así, se haría con cualquier otro que fuera distinto de cero. En tal caso, se tiene que

$$u_m = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \cdots + b_{m-1} \cdot u_{m-1}$$

donde $b_i = -a_i(a_m)^{-1}$. Vemos entonces que u_m es combinación lineal de los restantes vectores.

Recíprocamente, supongamos ahora que uno de los vectores del conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ es combinación lineal del resto, y al igual que antes, supondremos que ese vector es u_m. Entonces, hay escalares $a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}$ tales que $u_m = a_1 \cdot u_1 + \cdots + u_{m-1} \cdot a_{m-1}$. De ahí deducimos que

$$a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_{m-1} \cdot u_{m-1} + (-1) \cdot u_m = 0$$

y por lo menos, el coeficiente de u_m es distinto de cero. ■

Ejemplo 6.1.5.

1. *Sabemos que el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\} \subseteq (\mathbb{Z}_5)^3$, donde $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (3, 2, 3)$ y $u_3 = (2, 4, 0)$ es linealmente dependiente. Una relación entre estos vectores vimos que es $2 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + u_3 = (0, 0, 0)$. A partir de ahí vemos que*

   - $(2, 4, 0) = 3 \cdot (1, 1, 2) + 3 \cdot (3, 2, 3)$, *es decir, u_3 es combinación lineal de u_1 y u_2.*

   También se tiene que u_2 es combinación lineal de u_1 y u_3, y que u_1 es combinación lineal de u_2 y u_3.

   - $(3, 2, 3) = 4 \cdot (1, 1, 2) + 2 \cdot (2, 4, 0)$.
   - $(1, 1, 2) = 4 \cdot (3, 2, 3) + 2 \cdot (2, 4, 0)$.

2. *Sean* $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ *cuatro matrices 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$.*

   Entonces, la matriz A_3 es combinación lineal de las otras, pues $A_3 = 2 \cdot A_1 + 3 \cdot A_2 + 0 \cdot A_4$, lo que nos dice que el conjunto $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ es linealmente dependiente.

   Sin embargo, la matriz A_4 no es combinación lineal del resto. Vamos a comprobarlo.

   Si $A_4 = a_1 \cdot A_1 + a_2 \cdot A_2 + a_3 \cdot A_3$ tenemos que

$$\begin{array}{rcrcrl} a_1 & + & 2a_2 & + & a_3 & = 3 \\ & & 3a_2 & + & 2a_3 & = 1 \\ a_1 & + & a_2 & + & 5a_3 & = 1 \\ 2a_1 & + & a_2 & & & = 6 \end{array}$$

   y la forma de Hermite de la matriz ampliada del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que nos dice que el sistema es incompatible.

El hecho de que una matriz (un vector) no sea combinación lineal del resto no significa que el conjunto no sea linealmente dependiente, como podemos ver en este ejemplo.

Vamos ahora a enumerar algunas propiedades referentes a la dependencia e independencia lineal.
Propiedades:
Sea V un K-espacio vectorial.

1. Si $u \in V$, entonces $\{u\}$ es un conjunto linealmente independiente si, y sólo si, $u \neq 0$.

2. El conjunto $\{u, v\}$ es linealmente dependiente si, y sólo si, uno de los vectores es múltiplo del otro.

3. Si el conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ es linealmente dependiente, entonces también lo es el conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_m, u_{m+1}, \cdots, u_n\}$ sean quienes sean los vectores $u_{m+1}, \cdots, u_n$. Es decir, si a un conjunto de vectores linealmente dependientes le añadimos vectores cualesquiera el conjunto resultante sigue siendo linealmente dependiente.

   Dicho de otra forma, todo conjunto que contenga un subconjunto de vectores linealmente dependientes es linealmente dependiente.

   Por tanto, si un conjunto contiene al vector cero, entonces es linealmente dependiente.

4. Cualquier subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independientes es linealmente independiente. Es decir, si de un conjunto de vectores linealmente independientes eliminamos algún(os) vector(es), el conjunto resultante sigue siendo linealmente independiente.

Todas estas propiedades son elementales, y apenas necesitan demostración. No tan elemental es la siguiente:

Proposición 6.1.2. *Sea V un K-espacio vectorial, $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ un subconjunto de V, y $u \in V$. Si $u \notin L(S)$, entonces el conjunto $S \cup \{u\} = \{u_1, u_2, \cdots, u_m, u\}$ es linealmente independiente.*

El resultado sigue siendo válido en el caso de que el conjunto S sea infinito.
Demostración:
Supongamos que tenemos una combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_m, u$ igualada a cero, es decir, tenemos $a_1, a_2, \cdots, a_m, a \in K$ tales que

$$a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_m \cdot u_m + a \cdot u = 0$$

Si a fuera distinto de cero, tendríamos que $u = -a_1 \cdot a^{-1} \cdot u_1 - a_2 \cdot a^{-1} \cdot u_2 - \cdots - a_m \cdot a^{-1} \cdot u_m$, y tendríamos que u es combinación lineal de los vectores de S, lo cual sabemos que no es cierto. Por tanto, a debe valer cero. Pero en tal caso, lo que tenemos es que

$$a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_m \cdot u_m = 0$$

y como $u_1, u_2, \cdots, u_m$ son linealmente independientes, podemos deducir que $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$.
Por tanto, hemos visto que todos los coeficientes de la combinación lineal son nulos, luego los vectores son linealmente independientes. ■

Ejemplo 6.1.6. *Vimos en el ejemplo 6.1.3 que los vectores de $(\mathbb{Z}_3)^3$ $v_1 = (1, 1, 2)$ y $v_2 = (2, 1, 0)$ son linealmente independientes. También calculamos en el ejemplo 6.1.2 todos los vectores que son combinación lineal de esos dos. El vector $(1, 1, 1)$ no es combinación lineal de $(1, 1, 2)$ y $(2, 1, 0)$. Por tanto, el conjunto $\{(1, 1, 2);\ (2, 1, 0);\ (1, 1, 1)\}$ es linealmente independiente.*

6.1.4. Sistemas de generadores.

En un espacio vectorial, a partir de un conjunto de vectores podemos obtener nuevos vectores si realizamos las operaciones propias del espacio vectorial, a saber, la suma y el producto por escalares. Si mediante la realización de estas operaciones podemos obtener todos los vectores del espacio vectorial, entonces diremos que el conjunto de vectores forma un sistema de generadores.

Definición 74. *Sea V un K-espacio vectorial, y $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ un subconjunto de V. Se dice que S es un sistema de generadores de V si todo vector de V es combinación lineal de los vectores de S. O con la notación introducida en secciones anteriores, si $L(S) = V$.*

La definición que hemos dado, podría haberse hecho también en el caso de que S fuera un conjunto infinito. Un espacio vectorial se dice que es finitamente generado si tiene un sistema de generadores formado por un conjunto finito de vectores. En lo que sigue, nos centraremos únicamente en espacios vectoriales finitamente generados.

Ejemplo 6.1.7.

1. *Sea $V = (\mathbb{Z}_3)^2$, y sean $u_1 = (1,1)$ y $u_2 = (2,1)$. Entonces:*

$$\begin{array}{lll} (0,0) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 & (1,0) = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 & (2,0) = 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 \\ (0,1) = 2 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 & (1,1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 & (2,1) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 \\ (0,2) = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 & (1,2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 & (2,2) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \end{array}$$

   Luego $L(\{u_1, u_2\}) = V$. Por tanto, $S = \{u_1, u_2\}$ es un sistema de generadores de $(\mathbb{Z}_3)^2$.

2. *Sea ahora $V = (\mathbb{Z}_3)^3$, y $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (2,1,0)$. Vimos en el ejemplo 6.1.2 que el conjunto $L(\{v_1, v_2\})$ tiene nueve vectores, luego $\{v_1, v_2\}$ no es un sistema de generadores de $(\mathbb{Z}_3)^3$ (pues este espacio vectorial tiene 27 elementos).*

3. *Consideramos los vectores $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (2,3)$ y $u_3 = (4,5)$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Para cualquier vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que el sistema de ecuaciones*

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & 2b & + & 4c & = & x \\ a & + & 3b & + & 5c & = & y \end{array}$$

   en el que las incógnitas son a, b, c, es compatible (indeterminado), pues la matriz de coeficientes del sistema, que es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, tiene rango 2, y la ampliada, al ser 2×4, tiene también rango 2.

Estamos interesados en los sistemas de generadores más pequeños. La siguiente proposición nos permite, en los casos en que sea posible, de un sistema de generadores, extraer otro con menos elementos.

Lema 6.1.1. *Sea V un K-espacio vectorial, y $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ un sistema de generadores. Si el vector u_i es combinación lineal del resto, entonces el conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_m\}$ es también un sistema de generadores de V.*

Demostración:
Para simplificar la notación, supondremos que el vector que es combinación lineal del resto es u_m. Eso significa que existen escalares $b_1, b_2, \cdots, b_{m-1}$ tales que $u_m = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \cdots + b_{m-1} \cdot u_{m-1}$.
Sea u un vector de V. Vamos a ver que u es combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}$.
Sabemos que por ser $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ un sistema de generadores, existen escalares $a_1, a_2, \cdots, a_m$ tales que $u = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_{m-1} \cdot u_{m-1} + a_m \cdot u_m$. Sustituyendo la expresión de u_m tenemos que:

$$u = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_{m-1} \cdot u_{m-1} + a_m \cdot (b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \cdots + b_{m-1} \cdot u_{m-1}) =$$

$$= (a_1 + a_m \cdot b_1) \cdot u_1 + (a_2 + a_m \cdot b_2) \cdot u_2 + \cdots + (a_{m-1} + a_m \cdot b_{m-1}) \cdot u_{m-1}$$

■

Por tanto, si tenemos un sistema de generadores linealmente dependiente, podemos eliminar algún vector de forma que lo que nos queda siga siendo sistema de generadores (pues si es linealmente dependiente, uno de los vectores es combinación lineal del resto). Este proceso puede seguirse mientras los vectores que forman el sistema de generadores sean linealmente dependientes.

Ejemplo 6.1.8. *Hemos visto que los vectores* $u_1 = (1,1)$*,* $u_2 = (2,3)$ *y* $u_3 = (4,5)$ *forman un sistema de generadores de* $\mathbb{R}^2$*. Estos vectores son linealmente dependientes, pues* $2 \cdot u_1 + u_2 - u_3 = (0,0)$*. El tercer vector es combinación lineal de los dos primeros (*$u_3 = 2u_1 + u_2$*), luego el conjunto* $\{(1,1);\ (2,3)\}$ *sigue siendo un sistema de generadores de* $\mathbb{R}^2$*. Esto también podríamos haberlo visto comprobando que para cualquier* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *el sistema de ecuaciones*

$$\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & x \\ a & + & 3b & = & y \end{array}$$

es compatible (determinado), ya que el rango de la matriz de coeficientes vale 2*.*

Este conjunto es linealmente independiente.

También es un sistema de generadores el conjunto $\{(1,1);\ (4,5)\}$*, así como el conjunto* $\{(2,3);(4,5)\}$*. Ambos conjuntos son linealmente independientes.*

Proposición 6.1.3. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial. Supongamos que los vectores* $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ *son linealmente independientes, y que los vectores* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *forman un sistema de generadores. Entonces* $m \leq n$*.*

Demostración:

La idea de la demostración es ir sustituyendo los vectores del conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ por los del conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$. Esto lo haremos como sigue:

Tomamos el vector u_1. Este es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$, pues estos forman un sistema de generadores. Existen por tanto escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tales que $u_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Además, no todos los escalares pueden ser nulos, ya que $u_1 \neq 0$. Supongamos, para no complicar mucho la notación, que $a_1 \neq 0$. Eso significa que v_1 es combinación lineal de $\{u_1, v_2, \cdots, v_n\}$, y como $\{u_1, v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es un sistema de generadores, también lo es $\{u_1, v_2, \cdots, v_n\}$.

Ahora tomamos el vector u_2. Existen escalares $b_1, b_2, \cdots, b_n$ tales que $u_2 = b_1u_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$. Si los escalares $b_2, b_3, \cdots, b_n$ fueran todos nulos tendríamos que $u_2 - b_1u_1 = 0$, lo cual es imposible, pues el conjunto $\{u_1, u_2\}$ es linealmente independiente. Por tanto, alguno de los escalares $b_2, b_3, \cdots, b_n$ es distinto de cero. Supondremos que b_2 es uno de ellos. En tal caso, razonando igual que antes podemos ver que el conjunto $\{u_1, u_2, v_3, \cdots, v_n\}$ es un sistema de generadores.

Si m fuera mayor que n, llegaría un momento en que los vectores del conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ los habríamos sustituido por los vectores $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, y este conjunto seguiría siendo un sistema de generadores. Por tanto, cualquiera de los vectores $u_{n+1}, \cdots, u_m$ sería combinación lineal de éstos. Pero esto no es posible, pues el conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}, \cdots, u_m\}$ es linealmente independiente, luego ningún vector puede ser combinación lineal del resto.

Como m no puede ser mayor que n podemos concluir que $m \leq n$, como queríamos. ■

Hemos visto que los vectores $(1,1)$, $(2,3)$ forman un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, cualquier conjunto de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$ tiene a lo sumo dos vectores.

También sabemos que los vectores de $(\mathbb{Z}_3)^3$ $(1,1,2)$, $(2,1,0)$, $(1,1,1)$ son linealmente independientes. Por tanto, cualquier sistema de generadores de $(\mathbb{Z}_3)^3$ tiene 3 o más vectores.

6.1.5. Bases y dimensión.

Ya estamos en condiciones de dar uno de los conceptos más importantes dentro de la teoría de espacios vectoriales.

Definición 75. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial, y* B *un subconjunto de* V*. Se dice que* B *es una base si* B *es un sistema de generadores y los vectores de* B *son linealmente independientes.*

Teorema 6.1.1. *Sean* $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ *y* $B' = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ *dos bases de un* K*-espacio vectorial* V*. Entonces* $n = m$*.*

Es decir, todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal. Esto es así porque, al ser B linealmente independiente y B' un sistema de generadores se tiene que $m \leq n$, mientras que por ser B un sistema de generadores y B' linealmente independiente, $n \leq m$.

Teorema 6.1.2. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial (finitamente generado).*

1. *Si* $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ *es un sistema de generadores, entonces existe una base contenida en* S.

2. *Si* $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ *es un conjunto linealmente independiente, entonces existe una base que contiene a* S.

Es decir, de cualquier sistema de generadores puede extraerse una base (para ello posiblemente haya que eliminar algunos vectores), y cualquier conjunto de vectores linealmente independientes puede ampliarse hasta una base.

Corolario 6.1.1. *Cualquier espacio vectorial finitamente generado tiene al menos una base.*

En general, cualquier espacio vectorial, sea o no finitamente generado, tiene al menos una base.

Definición 76. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial (finitamente generado). La dimensión de* V *es el cardinal de una de sus bases.*

Si V es un espacio vectorial finitamente generado, entonces V tiene una base formada por un número finito de vectores. Por tanto, su dimensión es finita. Por ello, a los espacios vectoriales finitamente generados se les llama también espacios vectoriales de dimensión finita (o finitodimensionales).

Una base del espacio vectorial $\{0\}$ es el conjunto vacío, que tiene cardinal cero. Por tanto, $dim(\{0\}) = 0$.

Ejemplo 6.1.9.

1. *Sea* V *el espacio vectorial* K^n. *El conjunto* $B = \{(1, 0, \cdots, 0);\ (0, 1, \cdots, 0);\ \cdots\ (0, 0, \cdots, 1)\}$ *es una base de* V*, como puede comprobarse fácilmente. Por tanto, la dimensión de* K^n *es* n.

   Esta base es la que se conoce como la base canónica *de* K^n.

   Ya hemos visto que $\{(1, 1);\ (2, 3)\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^2$. *Como vemos, su cardinal es 2, como era de esperar, pues* $dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

   También sabemos que $\{(1, 1, 2);\ (2, 1, 0);\ (1, 1, 1)\}$ *es una base de* $(\mathbb{Z}_3)^3$*, que tiene tres elementos.*

2. *Una base del espacio vectorial* $K_n[x]$ *es* $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$. *Por tanto,* $dim(K_n[x]) = n + 1$.

   Si $p(x) \in K_n[x]$ *entonces* $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. *Es decir, cualquier polinomio de* $K_n[x]$ *es combinación lineal de los vectores (polinomios)* $1, x, \cdots, x^n$ *(los coeficientes de la combinación lineal son* $a_0, a_1, \cdots, a_n$*). Por tanto, estos polinomios forman un sistema de generadores.*

   Además son linealmente independientes, pues si $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ *significa que todos los coeficientes son nulos.*

3. *La dimensión del espacio vectorial* $M_{m\times n}(K)$ *es* $m \cdot n$. *Una base de este espacio vectorial está formado por las matrices que tienen un* 1 *en la posición* (i, j) *y cero en el resto.*

4. *El espacio vectorial* $K[x]$ *es un ejemplo de un espacio vectorial que no es finitamente generado. Una base de este espacio vectorial es* $\{1, x, x^2, \cdots\}$.

Proposición 6.1.4. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial y* $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ *una base de* V. *Entonces todo vector de* V *se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores de* B.

Demostración:

Por ser B un sistema de generadores, todo vector se escribe como combinación lineal de los vectores de B. Por ser B linealmente independiente, la forma de escribirlo es única. Veámoslo con más detalle.

Sea $u \in V$. Entonces existen $a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$ tal que $u = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_n \cdot u_n$.

Supongamos que u se expresara también como $u = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \cdots + b_n \cdot u_n$. Entonces, restando ambas expresiones tendríamos:

$$0 = (a_1 - b_1) \cdot u_1 + (a_2 - b_2) \cdot u_2 + \cdots + (a_n - b_n) \cdot u_n$$

Y como los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ son linealmente independientes tenemos que $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \cdots = a_n - b_n = 0$, es decir, $a_i = b_i$, como queríamos. ■

Dado un espacio vectorial V y una base B, un vector $u \in K$ queda determinado por los escalares que aparecen en la expresión de u como combinación lineal de los vectores de B. A tales escalares, los llamaremos **coordenadas del vector u en la base B**[4]

Si $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ y $u = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_n \cdot u_n$, diremos que las coordenadas de u en la base B son $a_1, a_2, \cdots, a_n$, y escribiremos

$$(u)_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Notemos que si V es un K-espacio vectorial de dimensión n, y B es una base, tenemos definida una aplicación

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & M_{n\times 1}(K) \\ u & \mapsto & (u)_B \end{array}$$

Esta aplicación claramente es inyectiva y sobreyectiva (¿porqué?). Además, para cualesquiera $u, v \in V$ y $a \in K$ se tiene que $f(u+v) = f(u) + f(v)$ y $f(a \cdot u) = a \cdot f(u)$.

Ejemplo 6.1.10.

1. *Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la base canónica $B_c = \{(1,0);\ (0,1)\}$. Si $u = (3,5)$, entonces $(u)_{B_c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.*

   En general, las coordenadas de un vector (x,y) en la base canónica son x, y.

   Sea ahora la base $B = \{(1,1);\ (2,3)\}$. Puesto que $u = -(1,1)+2\cdot(2,3)$ se tiene que $(u)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. *En el espacio vectorial $(\mathbb{Z}_3)^3$, una base es $B = \{(1,1,2);\ (2,1,0);\ (1,1,1)\}$. Las coordenadas del vector $u = (0,1,2)$ son $0,2,2$, pues $(0,1,2) = 0\cdot(1,1,2)+2\cdot(2,1,0)+2\cdot(1,1,1)$. Se tiene entonces que $(u)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$*

3. *En el espacio $\mathbb{Q}_3[x]$, las coordenadas del polinomio $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 3$ en la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ son $3, -2, 1, 2$, es decir, $(p(x))_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$*

4. *Si $V = M_2(\mathbb{Z}_7)$, $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, entonces*

$$(A)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Sean $C_1, C_2, \cdots, C_n \in M_{m\times 1}(K)$, es decir, matrices columna. A partir de ellas, formamos la matriz A, cuyas columnas son estas matrices $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Denotaremos a esa matriz como $A = (C_1\ C_2\ \cdots\ C_n)$. La matriz A tiene tamaño $m \times n$.

Con esta notación se tiene:

[4]Cuando escribimos una base, el orden en que escibimos los vectores es significativo. Como conjuntos, $B_1 = \{(1,0);\ (0,1)\}$ y $B_2 = \{(0,1);\ (1,0)\}$ son iguales (pues el orden en que escribamos los elementos no importa), pero como bases son diferentes. El vector $(2,3)$ no tiene las mismas coordenadas en B_1 y en B_2. Aunque emplearemos la notación de conjuntos para designar a una base (o a un sistema de generadores), el orden en que coloquemos los elementos no es indiferente.

Propiedades:

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión m, B, y $u_1, u_2, \cdots, u_n, u \in V$. Formamos la matriz $A = ((u_1)_B \ (u_2)_B \ \cdots \ (u_n)_B)$. Notemos que $A \in M_{m\times n}(K)$. Entonces:

1. Los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ son linealmente independientes si, y sólo si, $rg(A) = n$.
2. Los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ forman un sistema de generadores de V si, y sólo si, $rg(A) = m$.
3. Los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ forman una base de V si, y sólo si, A es regular.
4. El vector u es combinación lineal de $u_1, u_2, \cdots, u_n$ si, y sólo si, el sistema $A\cdot x = (u)_B$ es compatible (en este caso, una solución del sistema nos da unos coeficientes de una combinación lineal).

Ejemplo 6.1.11.

1. *En $(\mathbb{Z}_5)_3[x]$ consideramos los polinomios $p_1(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 1$, $p_2(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$, $p_3(x) = 3x^3 + 4$.*

   Para ver si son linealmente dependientes o independientes, tomamos la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ (podría haber sido cualquier otra base), y formamos la matriz cuyas columnas son las coordenadas de estos polinomios en la base B. Esta matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   y su rango es 2. Por tanto, los polinomios son linealmente dependientes.

   Si hubiéramos tomado otra base, el resultado sería el mismo. Por ejemplo, podemos tomar la base $B' = \{1;\ x+4;\ x^2+3x+1;\ x^3+2x^2+3x+4\}$ (comprueba que es base). En tal caso, se tiene que:

$$(p_1(x))_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad (p_2(x))_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad (p_3(x))_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Por ejemplo, las coordenadas de $p_1(x)$ se pueden obtener buscando números a, b, c, d tales que

$$2x^3 + x^2 + 3x + 1 = a\cdot 1 + b\cdot(x+4) + c\cdot(x^2+3x+1) + d\cdot(x^3+2x^2+3x+4)$$

   lo que nos da el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & 4b & + & c & + & 4d & = & 1 \\ & & b & + & 3c & + & 3d & = & 3 \\ & & & & c & + & 2d & = & 1 \\ & & & & & & d & = & 2 \end{array}$$

   cuya solución es $d = 2$, $c = 2$, $b = 1$, $a = 2$.

   Formamos la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los polinomios $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $p_3(x)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   y resulta que también tiene rango igual a 2.

2. El espacio vectorial $M_2(\mathbb{Z}_7)$ tiene dimensión cuatro. Consideramos el conjunto

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Puesto que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vale 4, el conjunto B es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

6.1.6. Cambio de base.

Vamos en esta sección a estudiar cómo varían las coordenadas de un vector cuando cambiamos de base.

Precisando un poco más. Supongamos que tenemos un K-espacio vectorial V, y B y B' son dos bases de V. Dado un vector $u\in V$, ¿qué relación hay entre $(u)_B$ y $(u)_{B'}$?

Supongamos que $B=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ y que $B'=\{u_1',u_2',\cdots,u_n'\}$.

Sea P la matriz $\big((u_1)_{B'}\ (u_2)_{B'}\ \cdots\ (u_n)_{B'}\big)$. Entonces

$$(u)_{B'}=P\cdot(u)_B$$

Puesto que los vectores $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ forman una base, la matriz P es regular.

A la matriz P se le conoce como *matriz del cambio de base de B a B'*. Esta matriz, como su nombre indica, nos permite pasar de las coordenadas de un vector en la base B a las coordenadas del mismo vector en la base B'. Denotaremos a esta matriz como $M_{B\to B'}$.

Vamos a comprobar que $(u)_{B'}=P\cdot(u)_B$.

Supongamos que

$$(u)_{B'}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};\quad (u)_B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Esto significa que:

$u=b_1\cdot u_1'+b_2\cdot u_2'+\cdots+b_n\cdot u_n'$.

$u_1=a_{11}\cdot u_1'+a_{21}\cdot u_2'+\cdots+a_{n1}\cdot u_n'$.

$u_2=a_{12}\cdot u_1'+a_{22}\cdot u_2'+\cdots+a_{n2}\cdot u_n'$.

$u_n=a_{1n}\cdot u_1'+a_{2n}\cdot u_2'+\cdots+a_{nn}\cdot u_n'$.

$u=a_1\cdot u_1+a_2\cdot u_2+\cdots+a_n\cdot u_n$.

Si en esta última expresión sustituimos $u_1,u_2,\cdots u_n$ por lo que tenemos en las expresiones anteriores

$$\begin{aligned} u&=a_1(a_{11}u_1'+a_{21}u_2'+\cdots+a_{n1}u_n')+a_2(a_{12}u_1'+a_{22}u_2'+\cdots+a_{n2}u_n')+\cdots+a_n(a_{1n}u_1'+a_{2n}u_2'+\cdots+a_{nn}u_n')=\\ &=(a_{11}a_1+a_{12}a_2+\cdots+a_{1n}a_n)u_1'+(a_{21}a_1+a_{22}a_2+\cdots+a_{2n}a_n)u_2'+\cdots+(a_{n1}a_1+a_{n2}a_2+\cdots+a_{nn}a_n)u_n' \end{aligned}$$

Y puesto que la expresión de un vector como combinación lineal de los vectores de una base es única, igualando coeficientes tenemos que:

$b_1=a_{11}\cdot a_1+a_{12}\cdot a_2+\cdots+a_{1n}\cdot a_n$

$b_2=a_{21}\cdot a_1+a_{22}\cdot a_2+\cdots+a_{2n}\cdot a_n$

$b_n=a_{n1}\cdot a_1+a_{n2}\cdot a_2+\cdots+a_{nn}\cdot a_n$

es decir,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.1.12.

En $(\mathbb{Z}_5)_3[x]$ *consideramos las bases* $B = \{1;\ x;\ x^2;\ x^3\}$ *y* $B' = \{1;\ x+4;\ x^2+3x+1;\ x^3+2x^2+3x+4\}$.

La matriz del cambio de base de B' *a* B *se obtiene expresando los vectores (polinomios) de* B' *en función de los de* B.

$$1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 \qquad x+4 = 4\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$

$$x^2+3x+1 = 1\cdot 1 + 3\cdot x + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3 \qquad x^3+2x^2+3x+4 = 4\cdot 1 + 3\cdot x + 2\cdot x^2 + 1\cdot x^3$$

luego

$$M_{B'\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio cuyas coordenadas en B' *son* 2, 3, 0, 1, *tiene coordenadas en* B

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es decir, es el polinomio x^3+2x^2+x+3, *algo que ya sabíamos del ejemplo anterior.*

Es sencillo comprobar que si V es un K-espacio vectorial, y B, B' y B'' tres bases de V, entonces:

- $M_{B\to B''} = M_{B'\to B''}\cdot M_{B\to B'}$.
- $M_{B'\to B} = (M_{B\to B'})^{-1}$.

Ejemplo 6.1.13.

1. *Vamos a trabajar en* $V = (\mathbb{Z}_5)_3[x]$. *Hemos visto en el ejemplo anterior que si* $B = \{1;\ x;\ x^2;\ x^3\}$ *y* $B' = \{1;\ x+4;\ x^2+3x+1;\ x^3+2x^2+3x+4\}$, *entonces la matriz del cambio de base de* B' *a* B *es*

$$M_{B'\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz del cambio de base de B *a* B' *es*

$$M_{B\to B'} = (M_{B'\to B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las coordenadas del polinomio $3x^3+4$ *en la base* B' *son*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

algo que ya habíamos calculado en un ejemplo anterior.

2. *Sean* $B = \{(1,2,3);\ (3,5,2);\ (4,4,6)\}$ *y* $B' = \{(3,1,6);\ (2,5,1);\ (3,2,4)\}$ *dos bases de* $(\mathbb{Z}_7)^3$.

   Vamos a calcular la matriz del cambio de base de B *a* B'*. Una forma de hacerlo sería expresando cada uno de los vectores de* B *como combinación lineal de los vectores de* B'*. Calcularíamos* $a, b, c \in \mathbb{Z}_7$ *tales que* $(1,2,3) = a\cdot(3,1,6) + b\cdot(2,5,1) + c\cdot(3,2,4)$*. Eso nos daría la primera columna de la matriz del cambio de base. Luego habría que repetir el proceso para* $(3,5,2)$ *y para* $(4,4,6)$.

   Pero ahora vamos a utilizar las dos relaciones que hemos visto antes, y tenemos:

$$M_{B\to B'} = M_{B_c\to B'}\cdot M_{B\to B_c} = (M_{B'\to B_c})^{-1}\cdot M_{B\to B_c} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 2\\ 6 & 1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 6\end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6\\ 2 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

   Sea ahora u *el vector cuyas coordenadas en la base* B *son* $3,\ 2,\ 1$*. Sus coordenadas en la base* B' *las podemos calcular como sigue:*

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

   Vamos a comprobarlo. Por ser $3,\ 2,\ 1$ *las coordenadas del vector* u *en la base* B *tenemos que*

   $u = 3\cdot(1,2,3) + 2\cdot(3,5,2) + 1\cdot(4,4,6) = (6,6,5)$

   mientras que por tener coordenadas $4,\ 1,\ 2$ *en la base* B'

   $u = 4\cdot(3,1,6) + 1\cdot(2,5,1) + 2\cdot(3,2,4) = (6,6,5)$.

   Como vemos, coinciden.

6.2. Subespacios vectoriales.

6.2.1. Definición y ejemplos.

Sea V un K-espacio vectorial. Un subconjunto suyo U, no vacío, es un subespacio vectorial si, con las mismas operaciones que tenemos en V, él tiene estructura de espacio vectorial. Para esto, es necesario que en U podamos, tanto sumar como multiplicar por escalares. Precisando esta idea tenemos:

Definición 77. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial, y sea* $U \subseteq V$ *un subconjunto de* V *distinto del vacío. Decimos que* U *es un subespacio vectorial de* V *si:*

- *Para cualesquiera* $u, v \in U$ *se verifica que* $u + v \in U$ *(es decir,* U *es cerrado para sumas).*
- *Para cualquier* $u \in U$ *y* $a \in K$ *se tiene que* $a\cdot u \in U$ *(es decir,* U *es cerrado para producto por escalares).*

Ejemplo 6.2.1.

1. *Sea* U *el conjunto de todos los vectores de* $(\mathbb{Z}_7)^2$ *que tienen las dos coordenadas iguales. Es decir,*

$$U = \{(0,0);\ (1,1);\ (2,2);\ (3,3);\ (4,4);\ (5,5);\ (6,6)\}$$

   Entonces U *es un subespacio vectorial de* $(\mathbb{Z}_7)^2$*, pues la suma de dos elementos de* U *es un elemento de* U*, y el producto de un elemento de* U *por un escalar pertenece a* U.

2. *Si* V *es un* K*-espacio vectorial, entonces el conjunto* V *es un subespacio vectorial. También lo es el conjunto* $\{0\}$*. Estos dos subespacios se denominan subespacios impropios.*

3. *Sea $V = K_n[x]$. Para cada $m \leq n$, el conjunto $U = K_m[x]$ es un subespacio vectorial de V.*

4. *Sea $V = (\mathbb{Z}_3)^3$. El conjunto*

$$U = \{(0,0,1);\ (0,1,0);\ (0,2,2);\ (1,0,0);\ (1,1,2);\ (1,2,1);\ (2,0,2);\ (2,1,1);\ (2,2,0)\}$$

no es un subespacio vectorial. Podemos comprobarlo viendo que $(1,1,2) \in U$, mientras que $2 \cdot (1,1,2) = (2,2,1) \notin U$. Es decir, U no es cerrado para producto por escalares.

También es cierto que U no es cerrado para sumas. Compruébalo.

Notemos que podríamos haber descrito U como $U = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 : x+y+z = 1\}$.

5. *Sea $V = (\mathbb{Z}_5)^3$, y sea U el siguiente subconjunto de V.*

$$U = \{(0,0,0);\ (1,3,2);\ (1,4,2);\ (2,1,4);\ (2,3,4);\ (3,2,1);\ (3,4,1);\ (4,1,3);\ (4,2,3)\}$$

Entonces U es cerrado para producto por escalares. Por ejemplo, $(2,1,4) \in U$ y $3\cdot(2,1,4) = (1,3,2)$ que también pertenece a U. Si tomamos, por ejemplo $(3,2,1) \in U$ y lo multiplicamos por 4 nos da $(2,3,4)$ que también es un elemento de U.

Y así con todos los elementos de U y todos los escalares.

Pero U no es cerrado para sumas. Por ejemplo, $(1,3,2), (2,3,4) \in U$ y su suma vale $(3,1,1)$ que no pertenece a U.

Hay elementos de U que al sumarlos nos da un nuevo elemento de U, por ejemplo, $(1,3,2)$ y $(3,4,1)$. Su suma vale $(4,2,3)$, que pertenece a U. Esto no significa que U sea cerrado para sumas.

6. *El conjunto*

$$U = \{(0,0,0);\ (2,1,0);\ (1,2,0);\ (1,1,2);\ (0,2,2);\ (2,0,2);\ (2,2,1);\ (1,0,1);\ (0,1,1)\}$$

es un subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_3)^3$.

7. *Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$, el conjunto*

$$\{x \in M_{n\times 1}(K) : A \cdot x = 0\}$$

es decir, el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $A \cdot x = 0$, es un subespacio vectorial de $M_{n\times 1}(K)$.

De la misma forma, el conjunto $\left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K^n : A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$ *es un subespacio vectorial de K^n.*

El primer ejemplo que hemos visto se corresponde con el conjunto de soluciones de la ecuación, con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$, $x + 6y = 0$.

El ejemplo anterior se corresponde con las soluciones de la ecuación $x + y + 2z = 0$.

8. *Sea $V = M_n(K)$. Son subespacios vectoriales:*

   - *El conjunto de las matrices triangulares superiores.*
   - *El conjunto de las matrices triangulares inferiores.*
   - *El conjunto de las matrices simétricas ($A = A^t$).*
   - *El conjunto de las matrices antisimétricas ($A + A^t = 0$).*
   - *El conjunto de las matrices diagonales.*

El conjunto de las matrices escalares.

9. *Sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z}\}$. Entonces U no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, pues aunque es cerrado para sumas, no lo es para el producto por escalares ($(1, 2) \in U$, pero $\frac{1}{2} \cdot (1, 2) \notin U$).*

   También es cerrado para sumas, pero no para producto por escalares, el conjunto $U' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0;\ y > 0\}$.

Es claro que si U es un subespacio vectorial de V entonces $0 \in U$. El recíproco, obviamente, no es cierto.

Sea V un K-espacio vectorial, y S un subconjunto de V. En la sección 6.1.2 definimos el conjunto $L(S)$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S. Sea quien sea S, el conjunto $L(S)$ es un subespacio vectorial de V.

Vamos a ver porqué esto es cierto.

Supongamos que $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$.

Tenemos que ver que $L(S)$ es cerrado para sumas y para producto por escalares.

Sean $u, v \in L(S)$. Por tanto, u y v son combinación lineal de los vectores de S, es decir, $u = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_m \cdot u_m$, mientras que $v = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \cdots + b_m \cdot u_m$. Entonces

$$u + v = (a_1 + b_1) \cdot u_1 + (a_2 + b_2) \cdot u_2 + \cdots + (a_m + b_m) \cdot u_m$$

que es combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_m$. Por tanto, $u + v \in L(S)$.

También se tiene que $a \cdot u = (aa_1) \cdot u_1 + (aa_2) \cdot u_2 + \cdots + (aa_m) \cdot u_m$. Y por tanto, $a \cdot u \in L(S)$.

Denotaremos a este subespacio como el **subespacio generado por S**.

Ejemplo 6.2.2.

1. *En el ejemplo anterior hemos visto que*

$$\{(0, 0, 0);\ (2, 1, 0);\ (1, 2, 0);\ (1, 1, 2);\ (0, 2, 2);\ (2, 0, 2);\ (2, 2, 1);\ (1, 0, 1);\ (0, 1, 1)\}$$

   es un subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_3)^3$. En el ejemplo 6.1.2 vimos que este conjunto es el conjunto de las combinaciones lineales de los vectores $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 2)$.

2. *Hemos visto que $U = \{(0, 0);\ (1, 1);\ (2, 2);\ (3, 3);\ (4, 4);\ (5, 5);\ (6, 6)\}$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_7)^2$. Podemos ver que $U = L(\{(1, 1)\})$.*

Si U es un subespacio de un espacio vectorial, U es espacio vectorial, luego todo lo que hemos visto en secciones precedentes sobre sistemas de generadores, bases, dimensión, dependencia e independencia lineal es válido también ahora.

Ejemplo 6.2.3. *Vamos a calcular una base del subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^4$ generado por los vectores $(1, 2, 3, 4)$ $(3, 1, 2, 3)$, $(4, 3, 4, 0)$.*

Vamos a llamar U a dicho subespacio. Es evidente que un sistema de generadores de ese subespacio es el conjunto $S = \{(1, 2, 3, 4);\ (3, 1, 2, 3);\ (4, 3, 4, 0)\}$, pues todo vector de U es combinación lineal de los vectores de S. Los vectores de S no son linealmente independientes, pues el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

vale 2.

Eso significa que de los tres vectores hay dos que son linealmente independientes, y el tercero es combinación lineal de los otros dos. En este caso, por ejemplo, los vectores $(1, 2, 3, 4)$ $(3, 1, 2, 3)$ son linealmente independientes, mientras que $(4, 3, 4, 0) = 2 \cdot (1, 2, 3, 4) + 4 \cdot (3, 1, 2, 3)$.

Puesto que $\{(1, 2, 3, 4);\ (3, 1, 2, 3);\ (4, 3, 4, 0)\}$ es un sistema de generadores de U, y $(4, 3, 4, 0)$ es combinación lineal de $(1, 2, 3, 4)$ y $(3, 1, 2, 3)$ tenemos que $\{(1, 2, 3, 4);\ (3, 1, 2, 3)\}$ es un sistema de generadores de U. Al ser ambos vectores linealmente independientes, tenemos que $B_U = \{(1, 2, 3, 4);\ (3, 1, 2, 3)\}$ es una base de U. La dimensión de U vale entonces 2.

El siguiente lema nos va a permitir calcular, a partir de un sistema de generadores de un subespacio vectorial, una base lo más sencilla posible.

Lema 6.2.1. *Sea V un K-espacio vectorial, y $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_i, \cdots, u_j, \cdots, u_m\}$ un subconjunto de V. Entonces:*

1. *Si $S_1 = \{u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_i, \cdots, u_m\}$ (es decir, intercambiamos de posición los vectores u_i y u_j - ver nota a pie de página posterior a la proposición 6.1.4 -) entonces $L(S) = L(S_1)$.*
2. *Si $S_2 = \{u_1, \cdots, a \cdot u_i, \cdots, u_j, \cdots, u_m\}$ con $a \neq 0$ (es decir, sustituimos u_i por el resultado de multiplicarlo por un escalar no nulo), entonces $L(S_2) = L(S)$.*
3. *Si $S_3 = \{u_1, \cdots, u_i + a \cdot u_j, \cdots, u_j, \cdots, u_m\}$, con $a \in K$ (es decir, sustituimos u_i por el resultado de sumarle otro vector de S multiplicado por un escalar), entonces $L(S_3) = L(S)$:*

Por tanto, supongamos que tenemos un K-espacio vectorial V y un subespacio vectorial suyo U. De U conocemos un sistema de generadores S. Para hallar una base podemos proceder como sigue:

- Elegimos una base de V. Llamémosla B.
- Formamos la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de S en la base B.
- Calculamos la forma normal de Hermite por columnas de la matriz obtenida en el apartado anterior.
- Las columnas distintas de cero de la forma normal de Hermite son las coordenadas de los vectores de una base del subespacio U.

Ejemplo 6.2.4.

1. *Vamos a calcular una base del subespacio $U \subseteq (\mathbb{Z}_5)^4$ generado por los vectores $(1,2,3,4)$ $(3,1,2,3)$, $(4,3,4,0)$.*

   Tomamos la base canónica. La matriz cuyas columnas son las coordenadas de estos vectores en la base canónica la calculamos en el ejemplo anterior. Hacemos su forma normal de Hermite por columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{13}(1)]{E_{12}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(3)]{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   y por tanto una base del subespacio U es $B_U = \{(1,2,0,3);\ (0,0,1,2)\}$.

2. *Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ un subconjunto de $M_2(\mathbb{Z}_7)$. Vamos a hallar una base del subespacio generado por S. Para ello, tomamos la base*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Formamos la matriz cuyas columnas son las coordenadas de las matrices de S en la base B

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

   y calculamos su forma normal de Hermite por columnas. El resultado es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, una base del subespacio que nos pedían es

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6.2.2. Ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial.

Supongamos que tenemos V un K-espacio vectorial y U un subespacio suyo. ¿Cómo podemos obtener vectores del subespacio U?. Dado un vector, ¿cómo podemos saber si pertenece o no a U?.

En esta sección y la siguiente vamos a responder a estas preguntas. La respuesta a la primera vendrá dada por las ecuaciones paramétricas del subespacio. La segunda, por las ecuaciones cartesianas.

Elegimos una base de V, por ejemplo, $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. Tomamos una base de U, a la que llamaremos B_U. Supongamos que $B_U = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ y que $(v_j)_B = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

Sabemos que todo vector de U se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores de B_U. Por tanto, $u \in U$ si, y sólo si, u es de la forma $b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + \cdots + b_m \cdot v_m$ para algunos escalares $b_1, b_2, \cdots, b_m \in K$. Si $(u)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ entonces $u \in U$ si, y sólo si,

$$\begin{array}{l} x_1 = a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + \cdots + a_{1m} \cdot b_m \\ x_2 = a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 + \cdots + a_{2m} \cdot b_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{n1} \cdot b_1 + a_{n2} \cdot b_2 + \cdots + a_{nm} \cdot b_m \end{array} \qquad \text{para algunos } b_1, b_2, \cdots, b_m \in K$$

Dándole valores a $b_1, b_2, \cdots, b_m$ obtenemos diferentes vectores del subespacio U.

Las ecuaciones que hemos obtenido se denominan **Ecuaciones paramétricas** del subespacio U en la base B, ya que nos permiten obtener las coordenadas de vectores de U en la base B, a partir de los parámetros $b_i \in K$.

Nota:

Las ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial de dimensión m vienen dadas en función de m parámetros.

Si en lugar de partir de una base del subespacio U partimos de un sistema de generadores, pero linealmente dependientes, obtenemos unas ecuaciones similares, aunque el número de parámetros de que dependen es mayor que la dimensión del subespacio. Aún cuando estas ecuaciones nos permitan conseguir todos los vectores del subespacio U en función de una serie de parámetros, cuando nos refiramos a ecuaciones paramétricas supondremos que el número de parámetros es igual a la dimensión del subespacio.

Ejemplo 6.2.5.

1. *Vamos a calcular las ecuaciones paramétricas (referidas a la base canónica) del subespacio* $U \subseteq (\mathbb{Z}_5)^4$ *generado por los vectores* $(1,2,3,4)$ $(3,1,2,3)$ *y* $(4,3,4,0)$.

   Vimos en el ejemplo anterior que una base de este subespacio es $B_U = \{(1,2,0,3);\ (0,0,1,2)\}$. *Por tanto, las ecuaciones paramétricas son:*

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & a & & \\ y & = & 2a & & \\ z & = & & & b \\ t & = & 3a & + & 2b \end{array}$$

Por ejemplo, tomando $a = 3$ *y* $b = 4$ *nos sale* $x = 3$, $y = 1$, $z = 4$, $t = 2$, *lo que nos dice que el vector* $(3, 1, 4, 2) \in U$.

También es una base del subespacio el conjunto $\{(1, 2, 3, 4);\ (3, 1, 2, 3)\}$, *por lo que también las siguientes ecuaciones son ecuaciones paramétricas del subespacio.*

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & a & + & 3b \\ y & = & 2a & + & b \\ z & = & 3a & + & 2b \\ t & = & 4a & + & 3b \end{array}$$

Si ahora tomamos $a = 3$ *y* $b = 0$ *nos da* $x = 3$, $y = 1$, $z = 4$, $t = 2$, *y nos vuelve a salir el vector* $(3, 1, 4, 2)$. *Los vectores que nos salen con las ecuaciones anteriores son los mismos que nos pueden salir con estas, aunque los valores que demos a los parámetros sean diferentes en cada caso.*

Sin embargo, no consideramos ecuaciones paramétricas del subespacio a las siguientes:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & a & + & 3b & + & 4c \\ y & = & 2a & + & b & + & 3c \\ z & = & 3a & + & 2b & + & 4c \\ t & = & 4a & + & 3b & & \end{array}$$

aunque también todo vector de U *puede obtenerse a partir de esas ecuaciones. Por ejemplo, el vector* $(3, 1, 4, 2)$ *podemos obtenerlo haciendo* $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ *nos sale el vector* $(3, 1, 4, 2)$. *Pero haciendo* $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ *nos sale el mismo vector.*

2. *Sea* U *el subespacio de* $M_2(\mathbb{Z}_7)$ *generado por* $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

   Una base de este subespacio, vimos que es

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Y por tanto, las ecuaciones paramétricas de U, *referidas a la base de* $M_2(\mathbb{Z}_7)$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   son

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & a & & & & \\ y & = & & & b & & \\ z & = & & & & & c \\ t & = & 5a & + & 3b & + & c \end{array}$$

6.2.3. Ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial.

Vimos en la sección precedente cómo obtener unas ecuaciones de un subespacio, en función de unos parémetros, de forma que al asignar valores a esos parámetros obteníamos los vectores del subespacio. Buscamos ahora, dado un espacio vectorial V y un subespacio suyo U, las condiciones que deben cumplir los vectores de V (o mejor dicho, las coordenadas de los vectores de V) para pertenecer al subespacio U.

Supongamos que tenemos un espacio vectorial V con una base B, un subespacio vectorial U, una base de U, $B_U = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ de forma que

$$(v_1)_B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}; \qquad (v_2)_B = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}; \qquad \cdots\cdots \qquad (v_m)_B = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

lo que nos dice que las ecuaciones paramétricas de U (en la base B) son

$$\begin{array}{l} x_1 = a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + \cdots + a_{1m} \cdot b_m \\ x_2 = a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 + \cdots + a_{2m} \cdot b_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{n1} \cdot b_1 + a_{n2} \cdot b_2 + \cdots + a_{nm} \cdot b_m \end{array}$$

En tal caso, como los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_m$ son linealmente independientes, el rango de la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ vale m. Por tanto, debe haber una submatriz $m \times m$ con determinante distinto de cero. Supongamos que es la formada por las m primeras filas, es decir,

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \neq 0$$

Se tiene entonces que un vector $v \in V$, cuyas coordenadas en la base B son $x_1, x_2, \cdots, x_n$, pertenece al subespacio U si, y sólo si, es combinación lineal de $v_1, v_2, \cdots, v_m$. Esto se traduce en que

$$rg \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & x_n \end{pmatrix} = m$$

lo que significa que todas las submatrices $(m+1) \times (m+1)$ que contienen como submatriz a la que hemos destacado unas líneas más arriba tienen determinante nulo. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & x_m \\ a_{m+11} & a_{m+12} & \cdots & a_{m+1m} & x_{m+1} \end{vmatrix} = 0; \qquad \cdots\cdots \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & x_m \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & x_n \end{vmatrix} = 0$$

que una vez desarrollados se traducen en $n - m$ ecuaciones.

Podríamos decir que un subespacio vectorial de dimensión m viene dado como las soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo de $n - m$ ecuaciones y n incógnitas.

Ejemplo 6.2.6. *Tenemos el subespacio U de $(\mathbb{Z}_5)^4$ generado por los vectores $(1, 2, 3, 4)$, $(3, 1, 2, 3)$ y $(4, 3, 4, 0)$. Una base de este subespacio hemos visto que es $\{(1, 2, 3, 4); (3, 1, 2, 3)\}$.*

Un vector (x, y, z, t) pertenece a U si, y sólo si, (x, y, z, t) es combinación lineal de los vectores $(1, 2, 3, 4)$ y $(3, 1, 2, 3)$. Puesto que los vectores $(1, 2, 3, 4)$ y $(3, 1, 2, 3)$ son linealmente independientes esto se traduce en que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \\ 4 & 3 & t \end{pmatrix}$$

vale 2. Dado que la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *es regular, decir que el rango de la matriz anterior es 2 significa que todas las submatrices* 3×3 *que podemos formar a partir de ésta* 2×2 *tienen determinante igual a cero, es decir,*

$$det\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 3 & 2 & z \\ 2 & 1 & y \end{pmatrix} = 0; \qquad det\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 3 & 2 & z \\ 4 & 3 & t \end{pmatrix} = 0$$

Calculando ambos determinantes nos queda $4x+3y=0$, $x+4z+3t=0$.

Por tanto hemos visto que un vector $(x,y,z,t)\in U$ *si, y sólo si,* $4x+3y=0$ *y* $x+4z+3t=0$.

Definición 78. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial de dimensión* n*, y* $B=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ *una base de* V*.*

Sea U *un subespacio vectorial de dimensión* m *(supondremos* $m<n$*, y llamemos* r *al número* $n-m$*). Llamamos* ecuaciones cartesianas *de* U *(en la base* B*) a cualquier sistema de ecuaciones homogéneo, con* r *ecuaciones y* n *incógnitas*

$$\begin{array}{l} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{r1}x_1+b_{r2}x_2+\cdots+b_{rn}x_n=0 \end{array}$$

tal que las soluciones del sistema son las coordenadas (en la base B*) de los vectores de* U*.*

En tal caso, escribiremos:

$$U\equiv\left\{\begin{array}{l} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{r1}x_1+b_{r2}x_2+\cdots+b_{rn}x_n=0 \end{array}\right.$$

Observaciones:

1. Cuando el espacio vectorial V tenga una base estándar, y las ecuaciones de un subespacio están referidas a esa base, no será necesario especificar esa base.

   Esto será así, por ejemplo, en los espacios K^n, o $M_{n\times 1}(K)$.

2. Cualquier subespacio vectorial U de un espacio vectorial V (salvo el propio V) puede ser descrito como el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo. El número de ecuaciones que lo describe puede ser igual a $n-dim(U)$, o mayor. En el segundo caso, no hablaremos de ecuaciones cartesianas del subespacio U (aunque sea un sistema de ecuaciones que nos determina totalmente el subespacio).

Ejemplo 6.2.7. *En el ejemplo anterior vimos como calcular las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial a partir de las paramétricas, o lo que es lo mismo, a partir de una base del subespacio vectorial. Vamos a ver ahora otras formas de calcularlas.*

Consideramos el mismo subespacio vectorial; es decir, U *es el subespacio de* $(\mathbb{Z}_5)^4$ *generado por* $\{(1,2,3,4);\ (3,1,2,3);\ (4,3,4,0)\}$*.*

Vimos que una base de U *es* $B_U=\{(1,2,3,4);\ (3,1,2,3)\}$ *y por tanto* $(x,y,z,t)\in U$ *si, y sólo si, los vectores* $(1,2,3,4)$*,* $(3,1,2,3)$*,* (x,y,z,t) *son linealmente dependientes. Eso se traduce en que el rango de la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \\ 4 & 3 & t \end{pmatrix}$ *vale 2.*

Realizamos operaciones elementales por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \\ 4 & 3 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & 0 & 3x+y \\ 0 & 3 & 2x+z \\ 0 & 1 & x+t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & x+t \\ 0 & 3 & 2x+z \\ 0 & 0 & 3x+y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & x+t \\ 0 & 0 & 4x+z+2t \\ 0 & 0 & 3x+y \end{pmatrix}$$

y para que el rango de esta matriz sea 2 las dos últimas filas deben ser nulas. Por tanto, nos queda que un vector (x, y, z, t) *pertenece a* U *si, y sólo si,* $4x + z + 2t = 0$ *y* $3x + y = 0$*. Estas serían entonces las ecuaciones cartesianas de* U*.*

También podemos obtener las ecuaciones cartesianas de U *si obtenemos las ecuaciones paramétricas a partir, no de una base cualquiera, sino de una base lo más sencilla posible. Esta base la podemos obtener calculando la forma normal de Hermite por columnas de una matriz cuyas columnas son (las coordenadas de) los vectores de un sistema de generadores del subespacio. En el ejemplo que estamos trabajando, tenemos:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones paramétricas de U *son (ya lo vimos más arriba)*

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & a & & \\ y & = & 2a & & \\ z & = & & & b \\ t & = & 3a & + & 2b \end{array}$$

Y puesto que $dim(U) = 2$ *y* $dim(V) = 4$*, entonces* U *viene dado por* $4 - 2 = 2$ *ecuaciones cartesianas. Fácilmente podemos ver que estas ecuaciones son* $y = 2x$*;* $t = 3x + 2z$*. O lo que es lo mismo,* $3x + y = 0$*;* $3x + 2z + 4t = 0$*.*

Hemos visto como, a partir de un sistema de generadores de un subespacio vectorial podemos sacar una base del subespacio, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas. Vamos a ver cómo, a partir de un subespacio que nos lo dan como las soluciones de un sistema de ecuaciones, podemos obtener una base y las ecuaciones paramétricas. Para esto, lo único que hay que hacer es resolver el sistema. Este sistema nos quedará en función de algunos parámetros (tantos como incógnitas libres). Tendremos entonces las ecuaciones paramétricas del subespacio.

Ejemplo 6.2.8. *Dado el subespacio de* $\mathbb{R}^4$

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & - & t & = & 0 \\ -3x & + & 4y & - & z & - & 2t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 7z & - & 4t & = & 0 \end{array} \right.$$

calcula unas ecuaciones paramétricas y una base de dicho subespacio.

Para esto, escribimos la matriz de coeficientes del sistema, y calculamos su forma normal de Hermite por filas.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto el subespacio U *tiene ecuaciones:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & - & 13z & + & 10t & = & 0 \\ & & y & - & 10z & + & 7t & = & 0 \end{array}$$

Como z *y* t *son las incógnitas libres, llamamos* $a = z$*,* $b = t$ *(esto último no es necesario) y nos quedan las ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 13a & - & 10b \\ y & = & 10a & - & 7b \\ z & = & a & & \\ t & = & & & b \end{array}$$

Y por tanto, una base de U *es* $B_U = \{(13, 10, 1, 0);\ (-10, -7, 0, 1)\}$*.*

6.2.4. Suma e intersección de subespacios vectoriales.

Vamos a estudiar aquí dos operaciones en el conjunto de los subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial.

Proposición 6.2.1. *Sea V un K-espacio vectorial y U_1, U_2 dos subespacios vectoriales de V. Entonces $U_1 \cap U_2$ es un subespacio vectorial de V.*

Demostración:
La demostración de esta proposición es muy sencilla. Basta ver que $U_1 \cap U_2$ es cerrado para sumas y producto por escalares. Sean $u, v \in U_1 \cap U_2$. Entonces:

$$u, v \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow \begin{array}{c} u, v \in U_1 \\ u, v \in U_2 \end{array} \begin{array}{c} \overset{U_1 \text{ es s. vec.}}{\Longrightarrow} \\ \overset{U_2 \text{ es s. vec.}}{\Longrightarrow} \end{array} \begin{array}{c} u+v \in U_1 \\ u+v \in U_2 \end{array} \Longrightarrow u+v \in U_1 \cap U_2$$

■

Ejemplo 6.2.9. *Sea $U_1 \equiv x+2y+z=0$ y $U_2 = L[(1,1,2);(1,1,1)]$ dos subespacios vectoriales de $(\mathbb{Z}_3)^3$. Entonces:*

$$\begin{array}{l} U_1 = \{(0,0,0);\ (1,0,2);\ (2,0,1);\ (0,1,1);\ (1,1,0);\ (2,1,2);\ (0,2,2);\ (1,2,1);\ (2,2,0)\} \\ U_2 = \{(0,0,0);\ (1,1,2);\ (2,2,1);\ (1,1,1);\ (2,2,0);\ (0,0,2);\ (2,2,2);\ (0,0,1);\ (1,1,0)\} \end{array}$$

Y vemos como $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0);\ (1,1,0);\ (2,2,0)\}$, que es un subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_3)^3$.

Puesto que la intersección de dos subespacios vectoriales U_1 y U_2 está formada por los vectores que pertenecen a los dos subespacios simultáneamente, para calcularla, buscamos las condiciones que deben cumplir los vectores para pertenecer a U_1 (ecuaciones cartesianas de U_1), y las condiciones que debe cumplir para pertenecer a U_2 (ecuaciones cartesianas de U_2). Si juntamos las ecuaciones cartesianas de ambos (es decir, imponemos a un vector que satisfaga las ecuaciones de U_1 y U_2), obtenemos las condiciones que debe cumplir un vector para pertenecer a la intersección.

Por tanto, para hallar la intersección de dos subespacios U_1 y U_2 juntamos las ecuaciones cartesianas de U_1 y las de U_2.

Ejemplo 6.2.10.

1. *En el ejemplo anterior, las ecuaciones cartesianas de U_1 son $x+2y+x=0$, mientras que las de U_2 son $2x+y=0$ (esta ecuación puede obtenerse de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$).*

   Por tanto, tenemos que $U_1 \cap U_2 \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \end{array} \right.$

   Para obtener una base, resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   y nos queda en función de la incógnita libre y. Le damos a y el valor 1, y nos queda el vector $(1,1,0)$. Una base de $U_1 \cap U_2$ es entonces $\{(1,1,0)\}$.

2. *Sean $U_1 = L[(1,1,1,1);\ (3,1,6,4);\ (5,2,3,5)]$ y $U_2 = L[(4,2,5,4);\ (2,3,4,5);\ (0,6,1,2)]$ dos subespacios de $(\mathbb{Z}_7)^4$. Vamos a calcular una base de $U_1 \cap U_2$. Para esto, necesitamos las ecuaciones cartesianas de U_1 y las de U_2. Calculamos una base de ambos, escribiendo los vectores como columnas de una matriz y hallando la forma de Hermite por columnas.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $dim(U_1) = 3$ y viene dado por una ecuación, mientras que $dim(U_2) = 2$, y viene dado por dos ecuaciones. Fácilmente se ve que las ecuaciones son:

$$U_1 \equiv \quad 2x + 2y + 4z + 6t = 0 \qquad\qquad U_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} & & y & + & z & & & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & & & 6t & = & 0 \end{array} \right.$$

El subespacio $U_1 \cap U_2$ viene dado por las ecuaciones que resultan de unir la de U_1 con las dos de U_2. Resolvemos el sistema que nos resulta:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $U_1 \cap U_2$ viene dado por dos ecuaciones, luego $dim(U_1 \cap U_2) = 4 - 2 = 2$. Una base puede obtenerse haciendo $z = 1$, $t = 0$ y $z = 0$, $t = 1$. Nos queda $B_{U_1 \cap U_2} = \{(6, 6, 1, 0);\ (4, 0, 0, 1)\}$.

Notemos que puesto que $U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$ y $dim(U_1 \cap U_2) = dim(U_2)$ entonces $U_1 \cap U_2 = U_2$. Por tanto, también es base de $U_1 \cap U_2$ el conjunto $\{(1, 0, 0, 2);\ (0, 1, 6, 5)\}$.

Notemos también que $U_2 \subseteq U_1$, pues los dos vectores que generan U_2 satisfacen la ecuación de U_1.

Hemos visto que la intersección de subespacios es un subespacio vectorial. Para la unión no ocurre lo mismo.

Por ejemplo. Sean $U = \{(0, 0, 0);\ (1, 1, 2);\ (2, 2, 1)\}$ y $W = \{(0, 0, 0);\ (1, 0, 1);\ (2, 0, 2)\}$ dos subespacios vectoriales de $(\mathbb{Z}_5)^3$. Entonces

$$U \cup W = \{(0, 0, 0);\ (1, 0, 1);\ (1, 1, 2);\ (2, 0, 2);\ (2, 2, 1)\}$$

no es un subespacio vectorial, pues no es cerrado para sumas. Por ejemplo, $(1, 0, 1) \in U \cup W$, $(1, 1, 2) \in U \cup W)$ pero $(1, 0, 1) + (1, 1, 2) = (2, 1, 0) \notin U \cup W$. Sí es cierto que la unión de dos subespacios es cerrada para producto por escalares.

El papel de la unión lo juega lo que se denomina *subespacio suma.*

Definición 79. *Sea V un K-espacio vectorial, y U, W subespacios vectoriales. Se define la suma de los subespacios U y W como el conjunto*

$$U + W = \{u + w : u \in U;\ w \in W\}$$

es decir, el conjunto de todos los vectores de V que se pueden escribir como suma de un vector de U y un vector de W.

De forma análoga se define la suma de tres o más subespacios. Como el conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como suma de un vector del primer subespacio, más un vector del segundo, más un vector del tercero y así sucesivamente.

Ejemplo 6.2.11. *Consideramos los subespacios de $(\mathbb{Z}_3)^3$ $U = \{(0, 0, 0);\ (1, 1, 2);\ (2, 2, 1)\}$ y $W = \{(0, 0, 0);\ (1, 0, 1);\ (2, 0, 2)\}$. Vamos a calcular la suma de estos dos subespacios. Para ello, vamos a sumar cada vector de U con cada vector de W.*

$+$	$(0,0,0)$	$(1,0,1)$	$(2,0,2)$
$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(1,0,1)$	$(2,0,2)$
$(1,1,2)$	$(1,1,2)$	$(2,1,0)$	$(0,1,1)$
$(2,2,1)$	$(2,2,1)$	$(0,2,2)$	$(1,2,0)$

Por tanto, $U + W = \{(0, 0, 0);\ (1, 0, 1);\ (2, 0, 2);\ (1, 1, 2);\ (2, 1, 0);\ (0, 1, 1);\ (2, 2, 1);\ (0, 2, 2);\ (1, 2, 0)\}$.

La siguiente proposición nos dice que la suma de subespacios es un subespacio vectorial, y además nos va a dar una forma para determinarla.

Proposición 6.2.2. *Sea V un K-espacio vectorial, y U, W dos subespacios vectoriales. Entonces $U+W$ es un subespacio vectorial de V.*

Además, si S_U es un sistema de generadores de U y S_W es un sistema de generadores de W se tiene que $S_U \cup S_W$ es un sistema de generadores de $U+W$.

En el caso de que hagamos la suma de tres o más subespacios, el resultado sigue siendo cierto. La suma de subespacios es un subespacio vectorial.

Para obtener un sistema de generadores del subespacio suma basta tomar un sistema de generadores de cada uno de los sumandos y unirlos.

Demostración:

Vamos a comprobar en primer lugar que $U+W$ es un subespacio vectorial de V. Para ello hemos de comprobar que $U+W$ es cerrado para sumas y para producto por escalares.

- $U+W$ es cerrado para sumas.

  Sean $v, v' \in U+W$. Entonces tanto v como v' son suma de un vector de U y W, es decir, $v = u+w$, donde $u \in U$; $w \in W$ y $v' = u' + w'$, donde $u' \in U$ y $w' \in W$.

  Entonces $v + v' = u + w + u' + w' = (u + u') + (w + w')$. Y puesto que $u + u' \in U$ (ya que U es cerrado para sumas), y $w + w' \in W$ (por el mismo motivo) vemos que $v + v'$ es suma de un vector de U y un vector de W, luego $v + v' \in U + W$.

- $U+W$ es cerrado para producto por escalares.

  Sea ahora $v \in U+W$ y $a \in K$. Entonces $v = u+w$ con $u \in U$ y $w \in W$ y por tanto $a\cdot v = a\cdot u+a\cdot w$, y puesto que $a\cdot u \in U$ (pues U es cerrado para producto por escalares) y $a\cdot w \in W$ podemos concluir que $a \cdot v \in U + W$.

Supongamos ahora que $S_U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ es un sistema de generadores de U, y que $S_W = \{w_1, w_2, \cdots, w_p\}$ es un sistema de generadores de W. Tenemos que comprobar que todo vector de $U+W$ se puede poner como combinación lineal de los vectores de $S_U \cup S_W$.

Sea $v \in U + W$. Por pertenecer a la suma, $v = u + w$, donde $u \in U$ y $w \in W$.

Tenemos que u es combinación lineal de los vectores de S_U, es decir, existen escalares $a_1, a_2, \cdots, a_m \in K$ tales que $u = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_m \cdot u_m$.

De la misma forma, existen escalares $b_1, b_2, \cdots, b_p \in K$ tales que $w = b_1 \cdot w_1 + b_2 \cdot w_2 + \cdots + b_p \cdot w_p$. Por tanto,

$$v = u + w = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_m \cdot u_m + b_1 \cdot w_1 + b_2 \cdot w_2 + \cdots + b_p \cdot w_p$$

es decir, v es combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_m, w_1, w_2, \cdots, w_p$, como queríamos. ■

Ejemplo 6.2.12.

1. *Ya hemos calculado la suma de los subespacios de $(\mathbb{Z}_3)^3$ $U = \{(0,0,0);\ (1,1,2);\ (2,2,1)\}$ y $W = \{(0,0,0);\ (1,0,1);\ (2,0,2)\}$. Podemos ver como $U_1 + U_2$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_3)^3$.*

   Además, se tiene que $B_U = \{(1,1,2)\}$ es una base de U, mientras que $B_W = \{(1,0,1)\}$ es una base de W. La unión de ambas es $\{(1,1,2);\ (1,0,1)\}$, que podemos ver que es un sistema de generadores de $U+W$ (de hecho es una base).

2. *Sean los subespacios de $(\mathbb{Z}_7)^4$ siguientes:*

$$U = L[(3,1,5,2);\ (5,3,6,1);\ (4,5,2,5)] \qquad W \equiv \left\{ \begin{array}{r} 2x + \ y + 3z + \ t = 0 \\ 4x + 3y + 2z + 6t = 0 \\ 3y + 2z + 5t = 0 \end{array} \right.$$

   Vamos a calcular una base y las ecuaciones del subespacio $U+W$.

   Para hallar la suma, necesitamos un sistema de generadores de cada uno de los subespacios. De U lo tenemos. Vamos a calcular uno de W, para lo que resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego W viene dado por dos ecuaciones, y su dimensión vale por tanto 2. Le damos a las incógnitas libres z y t los valores $z = 1$, $t = 0$ y $z = 0$, $t = 1$ y obtenemos así una base de W, que es $B_W = \{(0, 4, 1, 0);\ (5, 3, 0, 1)\}$.

Unimos los sistemas de generadores que tenemos de U y W, y eso nos da un sistema de generadores de $U + W$. Por tanto, $\{(3, 1, 5, 2);\ (5, 3, 6, 1);\ (4, 5, 2, 5);\ (0, 4, 1, 0);\ (5, 3, 0, 1)\}$ es un sistema de generadores de $U+W$. A partir de él vamos a obtener una base. Formamos la matriz cuyas columnas son estos vectores, y hallamos su forma normal de Hermite por columnas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, una base de $U+W$ es $B_{U+W} = \{(1, 0, 0, 3);\ (0, 1, 0, 0);\ (0, 0, 1, 0)\}$. Viene dado entonces por una ecuación cartesiana, que es $4x + t = 0$.

Vamos a fijarnos en los dos ejemplos que hemos hecho. En el primero, cada vector del espacio suma $U + W$ sólo se puede expresar de una forma como suma de un vector de U más un vector de W. Por ejemplo, el vector $(0, 2, 2)$ lo ponemos como $(0, 2, 2) = (2, 2, 1) + (1, 0, 1)$, con $(2, 2, 1) \in U$ y $(1, 0, 1) \in W$. Es fácil ver que no hay otra forma de escribirlo como suma de un vector de U y un vector de W.

Sin embargo, en el segundo ejemplo podemos ver que no ocurre así. Por ejemplo, el vector $(0, 2, 3, 0) \in U + W$, pues satisface la ecuación que lo define. Podemos escribirlo como

$(0, 2, 3, 0) = (5, 3, 6, 1) + (2, 6, 4, 6) = (1, 1, 4, 3) + (6, 1, 6, 4) = (0, 4, 0, 0) + (0, 5, 3, 0)$.

Y tenemos que $(5, 3, 6, 1) \in U$, ya que es uno de los vectores del sistema de generadores; $(1, 1, 4, 3) \in U$, pues $(1, 1, 4, 3) = 3(3, 1, 5, 2) + 4(5, 3, 6, 1)$; $(0, 4, 0, 0) \in U$ pues $(0, 4, 0, 0) = 2(3, 1, 5, 2) + 3(5, 3, 6, 1)$.

Y $(2, 6, 4, 6),\ (6, 1, 6, 4),\ (0, 5, 3, 0) \in W$ pues los tres cumplen las ecuaciones que definen a W.

Hemos escrito un vector de $U + W$ de tres formas distintas como suma de un vector de U más un vector de W (de hecho, en este caso puede escribirse de 7 formas distintas).

Definición 80. *Sea V un K-espacio vectorial y U, W subespacios suyos. Se dice que el subespacio $U+W$ es suma directa de los subespacios U y W si todo vector de $U + W$ se expresa de forma única como suma de un vector de U y un vector de W. En caso de que la suma de dos subespacios U y W sea directa emplearemos la notación $U \oplus W$.*

Si tenemos un conjunto finito de subespacios vectoriales $U_1, U_2, \cdots, U_k$ y $W = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$, se dice que W es suma directa de los subespacios $U_1, U_2, \cdots, U_k$ si todo vector de W se expresa de forma única como suma de un vector de U_1, más un vector de U_2 y así hasta un vector de U_k.

En el primer caso del ejemplo anterior la suma de los subespacios U y W es directa, mientras que en el segundo hemos visto como no lo es.

Proposición 6.2.3. *Sea V un K-espacio vectorial, y U, W subespacios suyos. Entonces la suma de U y W es directa si, y sólo si, $U \cap W = \{0\}$.*

Para el caso de que tengamos tres o más subespacios la condición de que la suma sea directa es un poco más complicada. Por ejemplo, en el caso de tres, U_1, U_2, U_3, la suma de ellos es directa si, y sólo si, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ y $(U_1 + U_2) \cap U_3 = \{0\}$.

Demostración:

Supongamos que la suma de U y W es directa, es decir, que todo vector de $U + W$ se expresa de forma única como suma de un vector de U y un vector de W. Vamos a comprobar que $U \cap W = \{0\}$.

Sea $v \in U \cap W$. Entonces podemos escribir $v = v + 0 = 0 + v$. Y en ambos casos, tenemos escrito v como suma de un vector de U más un vector de W. Puesto que la forma es única, deducimos que $v = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $U \cap W = 0$. Sea $v \in U + W$. Supongamos que v se expresa de dos formas como suma de un vector de U y un vector de W, es decir, $v = u + w = u' + w'$. En ese caso, tenemos que $u - u' = w' - w$, y por tanto, $u - u' \in U \cap W$ (pertenece a U pues es diferencia de dos vectores de U, y pertenece a W pues es diferencia de dos vectores de W). Al ser $U \cap W = \{0\}$ tenemos que $u = u'$, y de ahí, $w = w'$. ■

Ejemplo 6.2.13.

1. *En el ejemplo de los subespacios dos subespacios de* $(\mathbb{Z}_3)^3$, $U = \{(0,0,0);\ (1,1,2);\ (2,2,1)\}$ *y* $W = \{(0,0,0);\ (1,0,1);\ (2,0,2)\}$ *se ve claro que* $U \cap W = \{(0,0,0)\}$. *Por tanto, la suma de ambos subespacios es directa, como ya sabíamos.*

2. *En el ejemplo de los subespacios de* $(\mathbb{Z}_7)^4$

$$U = L[(3,1,5,2);\ (5,3,6,1);\ (4,5,2,5)] \qquad W \equiv \left\{ \begin{array}{r} 2x + \ y + 3z + \ t = 0 \\ 4x + 3y + 2z + 6t = 0 \\ 3y + 2z + 5t = 0 \end{array} \right.$$

las ecuaciones de U *son* $\left\{ \begin{array}{l} 3x + z = 0 \\ 4x + t = 0 \end{array} \right.$. *Con estas ecuaciones y las que definen las de* W *calculamos las de la intersección, y una vez simplificadas nos queda*

$$U \cap W \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2t & = & 0 \\ & y & & + & t & = & 0 \\ & & z & + & t & = & 0 \end{array} \right.$$

luego $U \cap W$ *tiene dimensión* 1, *y una base suya es* $\{(2,1,1,6)\}$.

3. *Sea* $U = L[(1,0,1,0);\ (0,1,0,1)]$ *y* $W = L[(1,0,0,1);\ (0,1,1,0)]$ *subespacios vectoriales de* $(\mathbb{Z}_2)^4$. *Entonces*

$$U = \{(0,0,0,0);\ (1,0,1,0);\ (0,1,0,1);\ (1,1,1,1)\}$$
$$W = \{(0,0,0,0);\ (1,0,0,1);\ (0,1,1,0);\ (1,1,1,1)\}$$

Y $U + W \equiv x + y + z + t = 0$. *Puesto que la* $U \cap W \neq \{(0,0,0,0)\}$ *la suma no es directa. De hecho, cada vector de* $U + W$ *se expresa de dos formas distintas como suma de un vector de* U *y un vector de* W.

$$\begin{array}{ccccc}
(0,0,0,0) & = & (0,0,0,0) + (0,0,0,0) & = & (1,1,1,1) + (1,1,1,1) \\
(1,0,1,0) & = & (1,0,1,0) + (0,0,0,0) & = & (0,1,0,1) + (1,1,1,1) \\
(0,1,0,1) & = & (0,1,0,1) + (0,0,0,0) & = & (1,0,1,0) + (1,1,1,1) \\
(1,1,1,1) & = & (1,1,1,1) + (0,0,0,0) & = & (0,0,0,0) + (1,1,1,1) \\
(1,0,0,1) & = & (0,0,0,0) + (1,0,0,1) & = & (1,1,1,1) + (0,1,1,0) \\
(0,0,1,1) & = & (1,0,1,0) + (1,0,0,1) & = & (0,1,0,1) + (0,1,1,0) \\
(1,1,0,0) & = & (0,1,0,1) + (1,0,0,1) & = & (1,0,1,0) + (0,1,1,0) \\
(0,1,1,0) & = & (1,1,1,1) + (1,0,0,1) & = & (0,0,0,0) + (0,1,1,0)
\end{array}$$

De hecho, el número de formas distintas de expresar un vector como suma de un vector de U *y un vector de* W *es igual al cardinal de* $U \cap W$.

4. *Sean los subespacios de* $\mathbb{R}^3$ *siguientes:*

$$U_1 = L[(1,2,1)]; \quad U_2 = L[(2,1,-1)]; \quad U_3 = L[(-1,0,1)]$$

Entonces $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{(0,0,0)\}$ *pero la suma no es directa. Por ejemplo,* $(2,3,1)$ *pertenece a* $U_1 + U_2 + U_3$ *y se puede expresar de varias (infinitas) formas como suma de un vector de* U_1, *un vector de* U_2 *y un vector de* U_3.

$(2,3,1) = (1,2,1) + (2,1,-1) + (-1,0,1) = 2 \cdot (1,2,1) - (2,1,-1) - 2 \cdot (-1,0,1)$.

Proposición 6.2.4. *Sean V un K-espacio vectorial y U, W dos subespacios vectoriales suyos. Entonces*

$$dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

Demostración:

Sea $B_{U\cap W} = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ una base de $U \cap W$. Estos vectores pertenecen a U y son linealmente independientes. Por tanto, podemos formar una base de U que los contenga. Sea esta $B_U = \{v_1, v_2, \cdots, v_r, u_1, u_2, \cdots, u_s\}$. De la misma forma, podemos encontrar una base de W que también los contenga. Sea esta $B_W = \{v_1, v_2, \cdots, v_r, w_1, w_2, \cdots, w_t\}$.

Vamos a ver que el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_r, u_1, u_2, \cdots, u_s, w_1, w_2, \cdots, w_t\}$ es una base de $U+W$.

Como este conjunto es $B_U \cup B_W$, por la proposición 6.2.2 tenemos que es un sistema de generadores de $U+W$. Vamos a comprobar que son linealmente independientes. Para esto, consideramos una combinación lineal de estos vectores igualada a cero:

$$0 = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_r \cdot v_r + b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \cdots + b_s \cdot u_s + c_1 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2 + \cdots + c_t \cdot w_t$$

Entonces el vector $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_r \cdot v_r + b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \cdots + b_s \cdot u_s$ pertenece a $U \cap W$, ya que es combinación lineal de los vectores de B_U (y por tanto pertenece a U), y también $v = -c_1 \cdot w_1 - c_2 \cdot w_2 - \cdots - c_t \cdot w_t$, y por tanto pertenece a W.

Al ser elemento de $U \cap W$, es combinación lineal de los vectores de $B_{U\cap W}$, luego

$$v = d_1 \cdot v_1 + d_2 \cdot v_2 + \cdots + d_r \cdot v_r \Longrightarrow d_1 \cdot v_1 + d_2 \cdot v_2 + \cdots + d_r \cdot v_r + c_1 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2 + \cdots + c_t \cdot w_t = 0$$

Y como los vectores de B_W son linealmente independientes deducimos que $d_1 = d_2 = \cdots = d_r = c_1 = c_2 = \cdots = c_t = 0$. Tenemos ahora una combinación lineal de los vectores de B_U igualada a cero:

$$0 = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_r \cdot v_r + b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \cdots + b_s \cdot u_s$$

Luego $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = b_1 = b_2 = \cdots = b_s = 0$.

De la combinación inicial hemos deducido que todos los coeficientes son iguales a cero. Por tanto, los vectores de $B_U \cup B_W$ son linealmente independientes.

Tenemos entonces:

$dim(U \cap W) = r$; $dim(U) = r+s$; $dim(W) = r+t$; $dim(U+W) = r+s+t$. Es decir:

$$dim(U+W) = r+s+t = (r+s)+(r+t)-r = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

■

Ejemplo 6.2.14.

Vamos a comprobar esta fórmula en los ejemplos que hemos trabajado durante la sección. Y luego, haremos un ejemplo más.

1. *En el caso de los dos subespacios de $(\mathbb{Z}_3)^3$ tenemos que $dim(U) = 1$, $dim(W) = 1$, $dim(U+W) = 2$ y $dim(U \cap W) = 0$. La fórmula nos diría que $2 = 1+1-0$, que obviamente es cierta.*

2. *Ahora vemos el caso de los dos subespacios de $(\mathbb{Z}_7)^4$. Aquí $dim(U) = 2$, $dim(W) = 2$, $dim(U+W) = 3$ y $dim(U \cap W) = 1$.*

3. *En el ejemplo de los subespacios de $(\mathbb{Z}_2)^4$ la situación es la misma que en el que acabamos de ver.*

4. *Sea $U = L[(1,2,3,4);\ (2,1,4,4)]$ y $W \equiv \left\{ \begin{array}{r} x+\ y+z+\ t=0 \\ 2x+3y+z+2t=0 \end{array} \right.$ dos subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^4$. Vamos a calcular la suma y la intersección de ambos.*

   Para calcular la suma, necesitamos un sistema de generadores de W (de U ya lo tenemos. Esto lo conseguimos resolviendo el sistema que nos define al subespacio W

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que nos da como base de W, $B_W = \{(3,1,1,0);\ (4,0,0,1)\}$

Y puesto que $rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$ *tenemos que* $dim(U+W) = 4$. *Luego* $U + W = (\mathbb{Z}_5)^4$.

La fórmula de las dimensiones nos dice que $dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) - dim(U+W) = 2 + 2 - 4 = 0$. *Por consiguiente* $U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$.

6.2.5. Subespacio complementario.

Definición 81. *Sea V un K-espacio vectorial, y $U \subseteq V$ un subespacio vectorial. Se dice que W es un complementario de U si $V = U \oplus W$.*

Obviamente, si W es un complementario de U entonces U es un complementario de W.

Ejemplo 6.2.15.

1. *Sea* $U \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ 4x & & & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$ *un subespacio de* $(\mathbb{Z}_5)^3$. *Entonces el subespacio* $W \equiv 3x + 2y + 2z = 0$ *es un complementario de* U.

   Para comprobarlo, vamos a hallar la suma y la intersección de ambos. Como tenemos las ecuaciones, empezamos por la intersección.

   En primer lugar reducimos las ecuaciones de U

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Y vemos que $dim(U) = 1$, *pues viene dado por dos ecuaciones.*

   Para hallar $U \cap W$ juntamos las ecuaciones de U y W

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Y vemos como $U \cap W = \{(0,0,0)\}$.

   Con la fórmula de las dimensiones tenemos que $dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 1 + 2 - 0 = 3$, *luego* $U + W = (\mathbb{Z}_5)^3$.

2. *Dado un espacio vectorial V, el subespacio V tiene como complementario al subespacio $\{0\}$.*

Notemos que si W es un complementario del subespacio U entonces todo vector de V se expresa de forma única como suma de un vector de U y un vector de W.

La siguiente proposición nos va a decir como calcular un complementario de un subespacio vectorial.

Proposición 6.2.5. *Sea V un K-espacio vectorial, y U un subespacio vectorial suyo. Entonces U tiene un complementario.*

Demostración:

Supongamos que $B_U = \{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ es una base de U. Ampliamos esta base a una base de V. $B_V = \{u_1, u_2, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n\}$. Sea ahora W el subespacio generado por los vectores que hemos añadido, es decir, $W = L[u_{r+1}, \cdots, u_n]$. Notemos que $dim(W) = n - r$, pues los vectores $u_{r+1}, \cdots, u_n$ son linealmente independientes (forman parte de una base). Además se tiene que

$U + W = V$, pues un sistema de generadores de $U + W$ es $B_U \cup \{u_{r+1}, \cdots, u_n\} = B_V$.

$dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) - dim(U+W) = r + (n-r) - n = 0$. Por tanto, $U \cap W = \{0\}$.

Es decir, hemos demostrado que $V = U + W$ y que $U \cap W = \{0\}$, luego $V = U \oplus W$. ■

La demostración que hemos hecho nos dice como calcular un complementario. Basta tomar una base del subespacio y ampliarla a una base del espacio total. Los vectores que añadimos forman una base de un complementario.

Ejemplo 6.2.16.

1. *Sea* $U \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & 2y & - & z & - & t & = & 0 \\ & & y & - & z & - & t & = & 0 \\ x & & & - & z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$ *un subespacio de* $\mathbb{R}^4$*. Vamos a calcular un complementario de* U*.*

   Para ello, vamos a obtener una base de U*, lo que hacemos resolviendo el sistema*

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Luego una base de U *es* $B_U = \{(1,1,1,0);\ (1,1,0,1)\}$*.*

   Ampliamos esta base a una base de $\mathbb{R}^4$*.* $B = \{(1,1,1,0);\ (1,1,0,1);\ (0,1,0,0);\ (0,0,0,1)\}$*.*

   Por tanto, $W = L[(0,1,0,0);\ (0,0,0,1)]$ *es un complementario para* U*.*

2. *Sea* $U = \{(0,0,0);\ (1,1,0);\ (1,0,1);\ (0,1,1)\} \subseteq (\mathbb{Z}_2)^3$*.* U *es un subespacio vectorial (su ecuación es* $x + y + z = 0$*).*

   Los siguientes subespacios son todos ellos complementarios de U*.*

   $W_1 = \{(0,0,0);\ (1,0,0)\}$.

   $W_2 = \{(0,0,0);\ (0,1,0)\}$.

   $W_3 = \{(0,0,0);\ (0,0,1)\}$.

   $W_4 = \{(0,0,0);\ (1,1,1)\}$.

Dado un espacio vectorial V, el conjunto de todos los subespacios vectoriales de V es un retículo.

Este conjunto tiene un orden, dado por la inclusión. El supremo de dos subespacios es el subespacio suma (es el menor subespacio que contiene a los dos), y el ínfimo viene dado por la intersección (es el mayor subespacio de V contenido en ambos).

Este retículo tiene máximo (V) y mínimo ($\{0\}$).

Si $dim(V) \geq 2$ este retículo no es distributivo. Para verlo, tomemos u, v dos vectores linealmente independientes. Entonces los subespacios

$$\{0\}; \quad U_1 = L[u]; \quad U_2 = L[v]; \quad U_3 = L[u+v]; \ W = L[u,v]$$

forman un subretículo isomorfo al diamante (notemos que $dim(U_1) = dim(U_2) = dim(U_3) = 1$, mientras que $dim(W) = 2$).

Hemos visto que el retículo es complementado. Cada subespacio vectorial tiene complemento. El número de complementos podría ser infinito (por ejemplo, si $U = L[(1,1)] \subseteq \mathbb{R}^2$).