Números reales y funciones elementales

1 Números reales

Ejercicio 1. Calcula para qué valores de x se verifica que $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.

Solución 1. Para quitar denominadores tenemos que multiplicar por $x + 2$.
a) Si $x > -2$, entonces $x + 2 > 0$ y $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \iff 6x - 9 < x + 2 \iff x < \frac{11}{5}$.
b) Si $x < -2$, entonces $x + 2 < 0$ y $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \iff 6x - 9 > x + 2 \iff x > \frac{11}{5}$, que no se verifica.
Resumiendo $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \iff -2 < x < \frac{11}{5}$.

Ejercicio 2. Encuentra aquellos valores de x que verifican que:
a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$,
b) $x^2 - 5x + 9 > x$,
c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0$,
d) $x^2 \leqslant x$,
e) $x^3 \leqslant x$,
f) $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$.

Solución 2.
a) $0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)} \iff 0 < x(1-x) \iff 0 < x < 1$.
b) $x^2 - 5x + 9 > x \iff x^2 - 6x + 9 > 0 \iff (x-3)^2 > 0 \iff x \neq 3$.
c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0 \iff x^3(x-2) < 0 \iff 0 < x < 2$.
d) $x^2 \leq x \iff x^2 - x \leq 0 \iff x(x-1) \leq 0 \iff x \in [0,1]$.
e) $x^3 \leq x \iff x(x-1)(x+1) \leq 0 \iff]-\infty,-1] \cup [0,1]$.
f) Operando obtenemos que

$$x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x \iff x^2 - x - 12 < 0 \iff (x-4)(x+3) < 0,$$

con lo que la desigualdad se cumple cuando los dos factores tienen signos distintos, esto es, cuando $x \in]-3, 4[$.

Ejercicio 3. Discute para qué valores de x se verifica que:
a) $|x-1|\,|x+2| = 3$,
b) $|x^2 - x| > 1$,
c) $|x-1| + |x+1| < 1$,
d) $|x+1| < |x+3|$.

Solución 3.
a) $3 = |x-1|\,|x+2| = |(x-1)(x-2)| \iff (x-1)(x-2) = \pm 3 \iff x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{21}\right)$.
b) Vamos a discutir dos casos por separado,
  i) Si $x \in [0,1]$, $1 < \left|x^2 - x\right| = x - x^2 \iff x^2 - x + 1 < 0$ lo que no ocurre nunca.
  ii) Si $x \notin [0,1]$, $1 < \left|x^2 - x\right| = x^2 - x \iff x^2 - x - 1 > 0 \iff x \notin \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.
c) Nunca se verifica la desigualdad.
d) Vamos a usar que, *para números positivos*, $0 < x < y \iff x^2 < y^2$.

$$\begin{aligned} |x+1| < |x+3| &\iff |x+1|^2 < |x+3|^2 \iff (x+1)^2 < (x+3)^2 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 < x^2 + 6x + 9 \iff -2 < x. \end{aligned}$$

Ejercicio 4. ¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad $x^2 - (a+b)x + ab < 0$?

Solución 4. $0 > x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b) \iff x \in]\min\{a,b\}, \max\{a,b\}[$.

1.1 Principio de inducción

Ejercicio 5. Demuestra por inducción que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Solución 5. Para $n = 1$ la igualdad es inmediata. Supongamos que se cumple para un natural n y veamos que también es cierta para $n+1$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ejercicio 6. Demuestra que $1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Solución 6. Lo demostramos usando el método de inducción. Es inmediato que se cumple la propiedad para $n = 1$. Supongamos que se cumple para un natural fijo n y comprobemos que se cumple para $n+1$:

$$1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}.$$

Ejercicio 7. Prueba que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.

Solución 7. Tenemos que demostrar que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9 para cualquier natural n. Es fácil comprobar que se cumple para $n = 1$. Supongamos que es cierto para un natura fijo n y veamos si es cierto para $n+1$:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 =& (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n^3 + 9n^2 + 27n + 27)\\ =& (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^2) + (9n^2 + 27n + 27).\end{aligned}$$

Para acabar sólo hay que recordar que la suma de dos números divisibles por 9, es divisible por 9.

Ejercicio 8. Demuestra que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Solución 8. Para $n = 1$ la igualdad es inmediata. Supongamos que se cumple para un natural n y veamos que también es cierta para $n+1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

Ejercicio 9. Demuestra que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Solución 9. Similar al Ejercicio 8.

Ejercicio 10. Demuestra que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1$ para cualquier natural mayor o igual que dos.

Solución 10. Lo demostramos usando el método de inducción. Es inmediato que se cumple la propiedad para $n = 1$. Supongamos que se cumple para un natural fijo n y comprobemos que se cumple para $n+1$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\leq\frac{1}{2}(1+1)=1.$$

2 Funciones elementales

Ejercicio 11. Calcula el dominio de las siguientes las funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$

b) $y = \log\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right)$

c) $y = \sqrt{\frac{x}{1-|x|}}$

d) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Solución 11.
a) El dominio es $]-\infty, -2[\cup[2, +\infty[$.
b) El dominio es $\mathbb{R} \setminus [2, 3]$.
c) El dominio es $]-\infty, -1[\cup[0, 1[$.
d) El dominio es $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

Ejercicio 12. Si $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$, ¿cuáles son los dominios naturales de f, g, $f + g$, $f \cdot g$ y de las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$?

Solución 12.
a) El dominio de f es $\mathbb{R}^*$.
b) El dominio de g es $\mathbb{R}^+$.
c) El dominio de $f + g$ es $\mathbb{R}^+$.
d) El dominio de $f \circ g$ es $\mathbb{R}^+$.
e) El dominio de $g \circ f$ es $\mathbb{R}^+$.

Ejercicio 13. Estudia si son pares o impares las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x+1| - |x-1|$

b) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

c) $f(x) = e^x + e^{-x}$

d) $f(x) = e^x - e^{-x}$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(|x|)$

f) $f(x) = \cos(x^3)$

Solución 13.
a) $f(x) = |x+1| - |x-1|$ es impar.
b) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ es impar.
c) $f(x) = e^x + e^{-x}$ es par.
d) $f(x) = e^x - e^{-x}$ es impar.
e) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ es par.
f) $f(x) = \cos(x^3)$ es par.

Ejercicio 14. ¿Para qué números reales es cierta la desigualdad $e^{3x+8}(x+7) > 0$?

Solución 14. La desigualdad es cierta si $x > -7$.

Ejercicio 15. Comprueba que la igualdad $a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$ es cierta para cualquier par de números positivos a y b.

Solución 15. Tomando logaritmos en la primera parte de la expresión:

$$\log\left(a^{\log(b)}\right) = \log(b)\,\log(a)$$

y, haciendo lo mismo en la segunda parte:

$$\log\left(b^{\log(a)}\right) = \log(a)\,\log(b).$$

Por tanto, por la inyectividad de la función logaritmo, tendríamos que ambas expresiones coinciden; es decir:

$$\log\left(a^{\log(b)}\right) = \log\left(b^{\log(a)}\right) \implies a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$$

Ejercicio 16. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$

Solución 16. Aplicando la definición de la función logaritmo con otra base distinta del número e, tenemos que:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log(x)}} = \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log b}} + \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log(c)}} + \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log(d)}}.$$

Por tanto

$$\frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\log(b)}{\log(a)} + \frac{\log(c)}{\log(a)} + \frac{\log(d)}{\log(a)} = \frac{\log(bcd)}{\log(a)}$$

Entonces, igualando numeradores y utilizando la inyectividad de la función logaritmo nuevamente:

$$\log(x) = \log(bcd) \implies x = bcd.$$

Ejercicio 17. ¿Para qué valores de x se cumple que $\log(x-1)(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2)$?

Solución 17. En primer lugar, para qee el primer miembro de esta identidad tenga sentido, ha de verificarse que $(x-1)(x-2) > 0$, es decir, que $x < 1$ o que $x > 2$. Entonces, partiendo de esa premisa, descomponemos el estudio en dos casos:
a) Si $x < 1$, entonces:

$$\log(x-1)(x-2) = \log|(x-1)(x-2)| = \log|x-1| + \log|x-2| = \log(1-x) + \log(2-x)$$

b) Si $x > 2$, entonces la fórmula planteada sí es correcta, puesto que las expresiones $x-1$ y $x-2$ son ambas positivas.

Si pretendemos una igualdad que sea correcta en cualquier caso (siempre que $x \neq 1$ y $x \neq 2$) habría que escribirla así:

$$\log|(x-1)(x-2)| = \log|x-1| + \log|x-2|$$

Ejercicio 18. Prueba que $\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = 0$.

Solución 18. Aplicando las propiedades del logaritmo tenemos que:

$$\log\left(\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right) = \log\left(1 + x^2 - x^2\right) = \log(1) = 0.$$

Ejercicio 19. Resuelve la ecuación $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$.

Solución 19. Tomamos logaritmos en ambos miembros de la ecuación:

$$x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x \iff \log\left(x^{\sqrt{x}}\right)=\log\left(\sqrt{x}^x\right) \iff \sqrt{x}\,\log(x)=x\,\log\left(\sqrt{x}\right)$$
$$\iff \sqrt{x}\,\log(x)=\frac{x}{2}\,\log(x) \iff \log(x)\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)=0.$$

Para que el producto valga cero, alguno de los dos factores tiene que ser cero. La primera solución que tenemos es $x=1$, obtenida de resolver $\log(x)=0$. Por otra parte, tenemos que resolver la ecuación:

$$\sqrt{x}-\frac{x}{2}=0 \implies 2\sqrt{x}=x \implies 4x=x^2 \implies x(x-4)=0$$

Por tanto, y como $x\neq 0$, tendremos que $x=4$. En resumen, la ecuación planteada tiene dos soluciones: $x=1$ y $x=4$.

Ejercicio 20. Simplifica las siguientes expresiones:
a) $a^{\log(\log a)/\log a}$,
b) $\log_a\left(\log_a(a^{a^x})\right)$.

Solución 20.
a) Tomamos logaritmos y nos queda:

$$\log\left(a^{\log(\log a)/\log a}\right)=\frac{\log(\log(a)}{\log(a)}\,\log(a)=\log(\log(a))$$

Por tanto, por la inyectividad de la función logaritmo:

$$a^{\log(\log a)/\log a}=\log(a)$$

b) Utilizamos la definición de logaritmo en base a:

$$\log_a\left(\log_a(a^{a^x})\right)=\frac{\log\left(\frac{\log(a^{a^x})}{\log(a)}\right)}{\log(a)}=\frac{\log\left(a^x\,\frac{\log(a)}{\log(a)}\right)}{\log(a)}=\frac{\log(a^x)}{\log(a)}=x\,\frac{\log(a)}{\log(a)}=x$$

Ejercicio 21. Comprueba que si $f(x)=\frac{1}{1-x}$, entonces $f\circ f\circ f(x)=x$.

Solución 21.

$$(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)\left(\frac{1}{1-x}\right)=f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right)=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x.$$

Ejercicio 22. Calcula la inversa de las siguientes funciones
a) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$ b) $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

Solución 22.
a)

$$\begin{aligned} y = \frac{e^x}{1+e^x} &\iff (1+e^x)y = e^x \\ &\iff y = e^x(1-y) \\ &\iff e^x = \frac{y}{1-y} \\ &\iff x = \log\left(\frac{y}{1-y}\right) = \log(y) - \log(1-y). \end{aligned}$$

Por tanto, $f^{-1}(y) = \log(y) - \log(1-y)$.
b) $y = \sqrt[3]{1-x^3} \iff 1 - x^3 = y^3 \iff 1 - y^3 = x^3 \iff x = \sqrt[3]{1-y^3}$. Por tanto $f = f^{-1}$.

Ejercicio 23. ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$?

Solución 23. Dado que estamos con números mayores o iguales que cero, elevamos al cuadrado

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \iff x + y = x + y + 2\sqrt{x}\sqrt{y} \iff 2\sqrt{xy} = 0,$$

lo que ocurre si, y sólo si, x o y son cero.

Ejercicio 24. ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

Solución 24. En primer lugar, obsérvese que x e y tienen que ser distintos de cero. Desarrollemos la identidad

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \iff \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{xy} \iff (x+y)^2 = xy$$

(observa que x e y tienen el mismo signo al ser su producto un número positivo)

$$\iff x^2 + y^2 + 2xy = xy \iff x^2 + y^2 = -xy,$$

lo que no puede ocurrir nunca: $x^2 + y^2$ es positivo y $-xy$, como acabamos de decir, es negativo. En consecuencia, la igualdad del ejercicio no se cumple *nunca*.