
Sucesiones de números reales

1 Sucesiones

Ejercicio 1. Prueba que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x}$.

Ejercicio 2. Sea a un número real positivo y definamos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero.

Ejercicio 3. Demuestra que la sucesión $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \geq 1$ es convergente y calcular su límite.

E **Ejercicio 4.** Se considera la sucesión definida por recurrencia por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

E **Ejercicio 5.** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1$. Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$.

E **Ejercicio 6.** Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$.

a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural n .

b) Demuestra que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente.

c) Calcula su límite.

Ejercicio 7. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Estudiar el comportamiento de la sucesión $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a}{2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2 Criterios de convergencia

Ejercicio 8. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y calcular su límite cuando exista.

a) $\left\{ \frac{1 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5} \right\}$

b) $\left\{ \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{n!} \right\}$

c) $\left\{ \frac{1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n}{n} \right\}$

d) $\left\{ \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right\}$

Ejercicio 9. Calcula el límite de las siguientes sucesiones

a) $\left\{ \frac{\log(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)}{n \log(n)} \right\},$

c) $\left\{ \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n^2} \right\}$

b) $\left\{ \frac{n^2 \sqrt{n}}{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \dots + n\sqrt{n}} \right\}$

Ejercicio 10. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \right\}$

b) $\left\{ \frac{1}{n} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2) \dots (3n+n)} \right\}$

$$c) \left\{ \frac{1}{n} \sqrt[n]{(2n)!} \right\}$$

$$d) \left\{ \frac{\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}}{n+1} \right\}$$

Ejercicio 11. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$a) \left\{ \left(1 + \frac{1}{n^2 + 1} \right)^{n^2 + 56n + 5} \right\}$$

$$c) \{(1 + \log(n+1) - \log(n))^n\}$$

$$b) \left\{ \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 2n + 1} \right)^{\frac{n^2 + 5}{n+2}} \right\}$$

Ejercicio 12. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$a) \left\{ \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log(n)} \right\}$$

$$b) \left\{ \frac{\log(n+1)!}{\log(n+1)^n} \right\}$$

Ejercicio 13. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$a) \left\{ \left(\frac{n+1}{n^2 + n + 5} \right)^{\frac{1}{1+\log(n)}} \right\}$$

$$b) \left\{ \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$c) \left\{ \frac{\cos(\sqrt{n^2 + 1}) \log(n)}{n} \right\}$$

Ejercicio 14. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$a) \left\{ \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)^{n+1}}} \right\}$$

$$b) \left\{ \frac{\log(n!)}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}} \right\}$$

E **Ejercicio 15.** Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{ \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \right\}.$$

E **Ejercicio 16.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \log \left(\frac{3n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 5n} \right) \right)^{4n+1}.$$