Capítulo 5

Matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes.

5.1. Matrices

5.1.1. Generalidades sobre matrices.

Comenzamos recordando qué es un cuerpo y algunas propiedades elementales.

Cuerpos.

Definición 58. *Sea K un conjunto. Decimos que K tiene estructura de cuerpo cuando en K tenemos definidas dos operaciones, que llamaremos* suma *y* producto

$$\begin{array}{ccc} K \times K & \longrightarrow & K \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} K \times K & \longrightarrow & K \\ (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{array}$$

satisfaciendo las siguientes propiedades:

- *Asociativa de la suma: para cualesquiera $a, b, c \in K$ se tiene que $a + (b + c) = (a + b) + c$.*
- *Conmutativa de la suma: para cuqlesquiera $a, b \in K$, $a + b = b + a$.*
- *Elemento neutro para la suma. Hay un elemento, $0 \in K$ tal que para cualquier $a \in K$ se verifica que $a + 0 = a$.*
- *Elemento opuesto para la suma. Para cualquier $a \in K$ existe otro elemento $b \in K$, tal que $a+b = 0$.*

  Únicamente hay un elemento b cumpliendo esta propiedad. Dicho elemento se denota como $-a$.
- *Asociativa del producto: para cualesquiera $a, b, c \in K$ se tiene que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.*
- *Conmutativa de la suma: para cualesquiera $a, b \in K$, $a \cdot b = b \cdot a$.*
- *Elemento neutro para el producto. Hay un elemento, $1 \in K$ tal que para cualquier $a \in K$ se verifica que $a \cdot 1 = a$.*
- *Elemento inverso para el producto. Para cualquier $a \in K \setminus \{0\}$ existe otro elemento $b \in K$, tal que $a \cdot b = 1$.*

  Únicamente hay un elemento b cumpliendo esta propiedad. A dicho elemento lo denotaremos como a^{-1}.
- *Distributiva de la suma respecto al producto. Dados $a, b, c \in K$ se tiene que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.*

Las propiedades cuarta y octava permiten, por una parte, definir la resta o diferencia de dos elementos cualesquiera de K ($a - b = a + (-b)$), y por otra, definir la división de un elemento entre otro siempre que el segundo sea distinto de cero.

Ejemplo 5.1.1. *Son ejemplos de cuerpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Z}_p$, con p un número primo. También, si p es un número primo y n un número natural, $\mathbb{F}_{p^n}$ es un cuerpo.*

No son cuerpos $\mathbb{N}$ (fallan las propiedades cuarta y octava), $\mathbb{Z}$ (falla la propiedad octava) ni $\mathbb{Z}_n$ con n un número compuesto (falla también la propiedad octava).

Vamos a ver algunas propiedades elementales que se tienen en un cuerpo. Muchas de estas son de sobra conocidas.

Propiedades:

Supondremos en todo este apartado que K es un cuerpo.

- Propiedad cancelativa de la suma. Si $a+c = b+c$, entonces $a = b$. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_{11}$, si $x+7 = 4$, entonces $x = 8$, ya que $4 = 8+7$, y por tanto, lo que tenemos es $x+7 = 8+7$.

  Otra forma de decir esto es que para cualquier $c \in K$ la aplicación $f : K \to K$ dada por $f(a) = a + c$ es inyectiva (y por tanto, $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$).

  En esta propiedad no interviene el producto, así que aunque no tengamos ninguna de las propiedades que van de la quinta a la novena, seguiría siendo cierta. Incluso, en los números naturales, en los que falla la cuarta, sigue siendo cierta (pues $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, y en $\mathbb{Z}$ sí se tiene esa propiedad cuarta)

- Consecuencia de esta propiedad es que para cualquier $a \in K$ se tiene que $a \cdot 0 = 0$.

  Pues si $a \in K$ se tiene que $0 + a \cdot 1 = a \cdot 1 = a \cdot (0 + 1) = a \cdot 0 + a \cdot 1$, luego $0 = a \cdot 0$.

- También consecuencia de esta propiedad es que si $a \in K$ entonces $(-1) \cdot a = -a$ (multiplicar por -1 es lo mismo que hacer el opuesto).

  Se tiene por una parte que $a+(-a) = 0$ y por otra que $a+(-1)\cdot a = 1\cdot a+(-1)\cdot a = (1+(-1))\cdot a = 0\cdot a = 0$. Es decir, $a+(-a) = a+(-1)\cdot a$.

- También se tiene que $-(-a) = a$.

  Sea $b = -(-a)$. Entonces $(-a) + b = 0$, y $(-a) + a = 0$. Por tanto, $b = a$.

- Consecuencia de estas últimas es la que podríamos llamar *regla de los signos*. Si $a, b \in K$ entonces $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$, mientras que $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

  Al igual que antes, tenemos que $a \cdot b + (-a) \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = 0 \cdot b = 0$ y que $a \cdot b + (-(a \cdot b)) = 0$. Y análogamente para $a \cdot (-b)$.

  Y ahora $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$.

- Propiedad cancelativa del producto. Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$.

  Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_{13}$ tenemos que si $4 \cdot x = 7 = 4 \cdot 5$ entonces podemos deducir que $x = 5$.

  Al igual que antes, lo que estamos diciendo es que si $a \in K$ y $a \neq 0$, la aplicación $f : K \to K$ dada por $f(x) = a \cdot x$ es inyectiva.

  Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$, entonces $a^{-1}ab = a^{-1}ac$, luego $b = c$.

  Si trabajamos, por ejemplo, en $\mathbb{Z}_{12}$, que no es un cuerpo, esta propiedad falla. Así, tenemos que $9 \cdot 2 = 9 \cdot 10$, y sin embargo no se tiene que $2 = 10$.

  En $\mathbb{Z}$, que tampoco es un cuerpo, esta propiedad es cierta. El motivo es que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, y $\mathbb{Q}$ sí es un cuerpo.

- Si $a, b \in K$, la ecuación $x + a = b$ tiene solución única. Esta solución viene dada por $x = b - a$.

  La existencia de la solución viene garantizada por el hecho de que la aplicación $f : K \to K$ dada por $f(x) = x + a$ es sobreyectiva. La unicidad es consecuencia de que esa aplicación es inyectiva.

  Por ejemplo, en $\mathbb{N}$, la aplicación $n \mapsto n + 5$ es inyectiva, pero no sobreyectiva. Al no ser sobreyectiva, la ecuación $n + 5 = b$ puede tener o no tener solución (depende del valor de b). Al ser inyectiva, caso de tenerla, esa solución es única.

- Si $a, b \in K$ y $a \neq 0$, la ecuación $ax = b$ tiene solución única. Esta solución es justamente $a^{-1} \cdot b$.

- En general, si $a, b, c, d \in K$ y $a \neq c$ la ecuación $ax + b = cx + d$ tiene una única solución.

  Cuando no trabajamos en un cuerpo, pueden darse otras situaciones. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_{18}$.

  1. La ecuación $4x = 7$ no tiene solución.
  2. La ecuación $5x = 8$ tiene una única solución, que es $x = 16$.
  3. La ecuación $15x = 6$ tiene más de una solución. Concretamente tiene tres, que son $x = 4$, $x = 10$ y $x = 16$.

Matrices

Sea K un cuerpo, y m, n números naturales distintos de cero. Supongamos que para cada (i, j) tales que $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq m$ tenemos un elemento de K, que denotaremos como a_{ij}. Lo que tenemos es entonces una matriz de tamaño $m \times n$ con coeficientes en K. Los elementos a_{ij} los ordenaremos como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En definitiva, podemos ver una matriz como una aplicación $\{1, 2, \cdots m\} \times \{1, 2, \cdots, n\} \to K$.

Definición 59. *Sea K un cuerpo, y $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Consideramos los conjuntos $M = \{1, 2, \cdots, m\}$ y $N = \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Una matriz de tamaño $m \times n$ sobre K (o con coeficientes en K) es una aplicación $A : M \times N \to K$. Al elemento $A(i, j)$ lo representaremos como a_{ij}.

Vamos a denotar por $M_{m\times n}(K)$ al conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en K.

Consideramos la aplicación $A : \{1, 2\} \times \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ dada por $A(1, 1) = 3$, $A(2, 1) = -5$, $A(1, 2) = 0$, $A(2, 2) = 2$. Entonces A es una matriz 2×2 sobre $\mathbb{R}$, es decir, $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Normalmente, daremos la matriz A como sigue:

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Observaciones:

1. Aunque para definir una matriz hemos hecho referencia a un cuerpo, los coeficientes de una matriz podrían estar en cualquier otro conjunto que no sea cuerpo. Así, podemos hablar de matrices cuyos coeficientes sean números enteros, sean números naturales, sean elementos de $\mathbb{Z}_n$ (n no necesariamente primo), sean polinomios, o incluso podrían ser matrices. Sin embargo, nos interesan las matrices cuyos coeficientes son elementos de un cuerpo. Ocasionalemnte, en algún ejemplo, podemos hablar de matrices cuyos coeficientes pertenezcan a algunos de los conjuntos anteriores.

2. A los elementos del cuerpo K los denominaremos *escalares*.

3. Si $A \in M_{m\times n}(K)$, diremos que A es una matriz que tiene m filas y n columnas. Los elementos $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ constituyen lo que se llama la fila i-ésima de la matriz, mientras que los elementos $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ constituyen la columna j-ésima de la matriz A.

4. Una matriz en la que coinciden el número de filas y de columnas se denomina *matriz cuadrada*. Al conjunto de todas las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ con coeficientes en K lo denotaremos como $M_n(K)$.

5. Si A es una matriz cuadrada de tamaño n, los elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ constituyen lo que se llama la *diagonal principal* de A, mientras que los elementos $a_{1n}, a_{2n-1}, \cdots, a_{n1}$ forman la denominada *diagonal secundaria*.

6. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$, escribiremos más abreviadamente $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.
   En tal caso, la fila i-ésima sería $(a_{ij})_{1\leq j\leq n}$, la columna j-ésima sería $(a_{ij})_{1\leq i\leq m}$, la diagonal principal (en el caso de que A sea cuadrada), $(a_{ii})_{1\leq i\leq n}$ o $(a_{ij})_{i=j}$, y la diagonal secundaria $(a_{ij})_{i+j=n+1}$

7. Una matriz cuadrada se dice:

   - triangular superior si todos los elementos que están "debajo" de la diagonal principal son nulos, es decir, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$.

- triangular inferior si todos los elementos que están "encima" de la diagonal principal son nulos, es decir, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$.
- diagonal si es triangular inferior y triangular inferior, es decir, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ es diagonal si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$.
- escalar si es diagonal y todos los elementos de la diagonal principal son iguales, es decir, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ es escalar si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$ y $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$.

8. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, la matriz identidad de orden n es la matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal valen todos 1. Esta matriz la denotaremos como Id_n, o si no es necesario indicar el tamaño simplemente como Id.

   Es decir, si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ entonces $A = Id_n$ si $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

9. Para cada $m, n \in \mathbb{N} \setminus 0$ tenemos una matriz de tamaño $m \times n$ en la que todos los coeficientes son nulos. Esta matriz se denomina la matriz nula $m \times n$, y se denota como $0_{m \times n}$ o simplemente 0.

Ejemplo 5.1.2. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_7)$.

La fila segunda es $(1, 6, 2, 1)$. *La columan tercera es* $(0, 2, 4)$ *(o si preferimos,* $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$*).*

Esta matriz claramente no es cuadrada.

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$.

Entonces A es una matriz cuadrada. Es además una matriz triangular superior, pues $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$. Notemos que hemos comprobado que todos los coeficientes a_{ij} con $i > j$ valen cero. Lo que le ocurra a los restantes no influye en que la matriz sea o no triangular superior. Así, $a_{23} = 0$. No es triangular inferior, ya que $a_{12} = 5 \neq 0$. Por tanto no es diagonal.

La matriz $0_{3\times 3}$ es triangular superior, triangular inferior, diagonal y escalar.

Aunque las escribamos igual, no son lo mismo las matrices $Id_3 \in M_3(\mathbb{Z}_5)$ que $Id_3 \in M_3(\mathbb{Z}_2)$.

5.1.2. Transformaciones elementales. Forma normal de Hermite.

Matrices escalonadas y escalonadas reducidas.

Sea $A \in M_{m\times n}(K)$. Al primer elemento no nulo de la fila i-ésima, lo llamaremos el *pivote* de esa fila. Obviamente, para hablar del pivote de una fila es necesario que la fila no sea nula, es decir, que algún coeficiente de la fila sea distinto de cero.

Dicho de otra forma, a_{ij} es el pivote de la fila i-ésima si $a_{ij} \neq 0$ y para cada $j' < j$ se tiene que $a_{ij'} = 0$.

De la misma forma, el pivote de una columna es el primer elemento no nulo de esa columna (esto tiene sentido si la columna es no nula). Es decir, a_{ij} es el pivote de la columna j-ésima si $a_{ij} \neq 0$ y $a_{1j} = \cdots a_{i-1j} = 0$.

Ejemplo 5.1.3. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$.

Entonces el pivote de la primera fila es 1 ($a_{11} = 1$), el de la segunda fila es 2 (a_{23}), el de la tercera fila es 3 (a_{31}) y la cuarta fila no tiene pivote (pues la fila es nula).

En cuanto a las columnas, el pivote de la primera columna es 1 (a_{11}), el de la segunda es 3 (a_{12}), el de la tercera columna es 2 (a_{23}), la cuarta columna no tiene pivote y el de la quinta es 2 (a_{15}).

Una vez definido el pivote de una fila (o columna), damos el concepto de matriz escalonada y matriz escalonada reducida.

Definición 60. *Sea $A \in M_{m\times n}(K)$. Se dice que A es escalonada por filas si:*

1. *Cualquier fila que esté debajo de una fila nula es también nula. Es decir, si $a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0$, entonces $a_{i'1} = a_{i'2} = \cdots = a_{i'n} = 0$ para $i' > i$.*

   Esto significa que, caso de haber filas nulas en la matriz A, éstas están todas al final.

2. *El pivote de una fila no nula está a la derecha del pivote de la fila anterior (salvo para la primera fila). Es decir, si a_{ij} es el pivote de la fila i-ésima y $a_{i+1j'}$ es el pivote de la fila $i+1$-ésima, entonces $j < j'$.*

3. *El pivote de cada fila no nula vale 1.*

De la misma forma, se define lo que es una matriz escalonada por columnas. Las tres condiciones quedarían ahora:

1. *Cualquier columna que esté a la derecha de una columna nula es también nula.*

2. *El pivote de una columna no nula está por debajo del pivote de la columna anterior.*

3. *El pivote de cualquier columna no nula vale 1.*

Una matriz que sea escalonada por filas se dice escalonada reducida por filas *si en las columnas donde hay algún pivote (de alguna fila), el resto de elementos son nulos.*

Análogamente, una matriz escalonada por columnas se dice escalonada reducida por columnas *si en las filas donde haya algún pivote, el resto de elementos son nulos.*

Ejemplo 5.1.4.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

A es escalonada por filas. Al no tener filas nulas, la primera condición se satisface automáticamente. Los pivotes de cada fila son todos uno ($a_{11} = 1$, $a_{23} = 1$ y $a_{34} = 1$), y el de la segunda fila está a la derecha del de la primera, y el de la tercera fila está a la derecha del de la segunda. No es escalonada reducida, pues en la cuarta columna hay un pivote (a_{34}) y el elemento a_{14} es distinto de cero.

No es escalonada por columnas, pues el pivote de la segunda columna vale 3.

B no es escalonada, pues la tercera fila es nula, mientras que la cuarta no lo es (y está debajo de la tercera). Las otras dos condiciones para ser escalonada sí las satisface.

No es escalonada por columnas pues el pivote de la segunda columna vale -1 (entre otras cosas).

C no es escalonada por filas pues el pivote de la segunda fila vale 2. Las otras condiciones para ser escalonada (y escalonada reducida) por filas sí se dan en esta matriz.

Claramente no es escalonada por columnas.

D no es escalonada por filas pues el pivote de la tercera fila no está a la derecha del pivote de la segunda fila.

E es escalonada por columnas, pero no escalonada reducida. No es escalonada por filas.

F es escalonada reducida por filas. No es escalonada por columnas.

G es escalonada reducida por filas y por columnas.

H es escalonada reducida por columnas, pero no es escalonada por filas.

- *La matriz identidad es escalonada reducida por filas y por columnas.*

- *La matriz nula es escalonada reducida por filas y por columnas.*

Si $A \in M_{m\times 1}(K)$ *y* A *es escalonada reducida por filas, entonces* $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *ó* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

¿Es cierto que una matriz triangular superior, en la que todos los pivotes valen 1 es escalonada?.

Transformaciones elementales.

Vamos a continuación a definir unas transformaciones que nos van a permitir pasar de una matriz cualquiera a otra que esté en forma escalonada reducida. Las transformaciones que vamos a permitir es lo que vamos a denominar *transformaciones elementales* u *operaciones elementales.*

Las transformaciones elementales las vamos a clasificar en tres grupos, y las denominaremos transformaciones elementales Tipo I, Tipo II y Tipo III. Distinguiremos entre transformaciones elementales por filas y transformaciones elementales por columnas.

Definición 61. *Sea* $A, B \in M_{m\times n}(K)$*. Decimos que* B *se ha obtenido de* A *mediante una transformación elemental por filas*

- *Tipo I, si* B *es el resultado de intercambiar entre sí dos filas de la matriz* A*.*

- *Tipo II, si* B *es el resultado de sustituir una fila de* A *por la misma fila previamente multiplicada por un escalar no nulo.*

- *Tipo III, si* B *se obtiene de* A *sustituyendo una fila por el resultado de sumarle a esa fila otra fila multiplicada por un escalar.*

De la misma forma, podemos hablar de transformaciones elementales tipo I, tipo II y tipo III por columnas.

A la transformación elemental (tipo I) que consiste en intercambiar las filas i*-ésima y* j*-ésima la denotaremos como* E_{ij}*. La transformación elemental que consiste en intercambiar las columnas* i*-ésima y* j*-ésima la denotaremos de la misma forma.*

A la transformación elemental (tipo II) que consiste en multiplicar la fila i*-ésima por* k *la denotaremos como* $E_i(k)$*. También denotaremos así a la transformación elemental que consiste en multiplicar la columna* i*-ésima por* k*.*

A la transformación elemental (tipo III) que consiste en sumarle a la fila i*-ésima la fila* j*-ésima multiplicada por* k *la denotaremos como* $E_{ij}(k)$*. Este nombre nos servirá también para denotar a la transformación elemental que consiste en sumarle a la columna* j*-ésima la columna* i*-ésima multiplicada por* k

Ejemplo 5.1.5. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$*. Las matrices*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \; B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se han obtenido de la matriz A *realizando las transformaciones elementales por filas* E_{13}*,* $E_2(3)$ *y* $E_{21}(3)$ *respectivamente, mientras que las matrices*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \; C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se han obtenido de la matriz A *realizando las transformaciones elementales por columnas* E_{14}*,* $E_1(2)$ *y* $E_{21}(3)$ *respectivamente.*

Notemos que si realizamos una transformación elemental en una matriz, podemos recuperar la matriz original realizando una nueva transformación elemental. Es decir, las transformaciones elementales pueden invertirse. Y la inversa de una transformación elemental es también una transformación elemental, y del mismo tipo.

Por ejemplo, si en una matriz intercambiamos dos filas entre sí, al intercambiarlas de nuevo obtenemos la matriz de partida. Por tanto, la inversa de la transformación E_{ij} es ella misma. Esto lo escribiremos como $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

Si multiplicamos una fila por un escalar no nulo, basta con multiplicar ahora la misma fila por el inverso del escalar (si multiplicamos una fila por 3, y luego la multiplicamos por 3^{-1} es como si no hubiéramos hecho ninguna transformación en la matriz). Tenemos entonces que $E_i(k)^{-1} = E_i(k^{-1})$.

Por último, si a una fila le sumamos otra multiplicada por un escalar, basta con restársela para obtener la matriz original. Es decir, $E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$.

Las transformaciones elementales permiten definir una relación en el conjunto de matrices de un mismo tamaño.

Definición 62. *Sean $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Se dice que A es equivalente por filas a B, y escribiremos $A \sim_f B$, si podemos pasar de A a B realizando transformaciones elementales por filas.*

De la misma forma se define lo que significa que A es equivalente por columnas a B.

Proposición 5.1.1. *La relación $\sim_f$ es una relación de equivalencia en el conjunto de las matrices $m \times n$ con coeficientes en K.*

Demostración:

Hay que comprobar que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva. Vamos a verlo:

Reflexiva. Dada $A \in M_{m\times n}(K)$, si le aplicamos la transformación elemental $E_1(1)$ (multiplicamos la primera fila por 1) obtenemos la misma matriz, luego $A \sim_f A$.

Simétrica. Supongamos que $A \sim_f B$. Esto significa que puedo pasar de A a B mediante la realización de transformaciones elementales por filas. Para pasar de B a A basta con realizar las inversas de estas transformaciones elementales en sentido inverso.

Supongamos que estas transformaciones son $E_1, E_2, \cdots, E_k$. Entonces, si tomamos la matriz B y realizamos las transformaciones $E_k^{-1}, \cdots E_2^{-1}, E_1^{-1}$, obtenemos la matriz A, luego $B \sim_f A$.

Transitiva. Si se puede pasar de A a B realizando transformaciones elementales por filas, y de B a C realizando transformaciones elementales por filas, entonces podremos pasar de A a C realizando transformaciones elementales por filas. Primero las que nos transforman A en B, y luego las que nos transforman B en C.

Es decir, hemos visto que si $A \sim_f B$ y $B \sim_f C$ entonces $A \sim_f C$.

■

Con esta relación de equivalencia, la clase de equivalencia de una matriz está formada por esa matriz y todas las que pueden obtenerse a partir de ella realizando transformaciones elementales por filas.

Ejemplo 5.1.6. *Consideramos el conjunto $M_2(\mathbb{Z}_2)$, que tiene 16 elementos. Vamos a calcular todas las clases de equivalencia con la relación de ser equivalentes por filas.*

- $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$
- $\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$
- $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$
- $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$
- $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$

Matrices elementales.

Vamos a hacer corresponder a cada operación elemental una matriz. Esta matriz es el resultado de aplicar la operación elemental a la matriz identidad.

Tendremos entonces matrices elementales tipo I, tipo II y tipo III. El nombre que daremos a estas matrices es el mismo que hemos empleado para denotar a la operación elemental.

Es decir. Supongamos que E es una operación elemental. Vamos a denotar por E a la matriz que resulta de realizar la operación elemental E sobre la matriz identidad.

No es necesario distinguir entre operación elemental por filas y operación elemental por columnas, pues el resultado de aplicar la transformación elemental por filas E a la matriz identidad es el mismo que el resultado de aplicar la transformación por columnas.

Por ejemplo. Consideramos la transformación E_{24}. Si intercambiamos las filas 2 y 4 de la matriz identidad (5×5) el resultado es

$$E_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es el mismo que si intercambiamos las columnas segunda y cuarta de la matriz identidad.

Si tomamos una transformación tipo II, por ejemplo, $E_3(4)$, realizada tanto por filas como por columnas nos da la matriz

$$E_3(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último, si tomamos la transformación elemental $E_{25}(2)$, realizada por filas supone sumarle a la fila segunda, la quinta multiplicada por 2, lo que nos da la matriz

$$E_{25}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es lo mismo que si a la columna quinta le sumamos la segunda multiplicada por 2.

Tenemos por tanto, las matrices elementales

- Tipo I. Matrices E_{ij}. Estas matrices son iguales a la matriz identidad salvo en las posiciones (i, i), (i, j), (j, i) y (j, j), que están cambiados los ceros por unos y viceversa.
- Tipo II. Matrices $E_i(k)$. Estas son iguales a la matriz identidad salvo en la posición (i, i), que en lugar de 1 vale k.
- Tipo III. Matrices $E_{ij}(k)$. Estas son iguales a la matriz identidad salvo que en la posición (i, j), en lugar de cero vale k.

Forma normal de Hermite.

Vamos a ver a continuación cómo, dada una matriz cualquiera, podemos transformarla en una matriz escalonada reducida por filas realizando transformaciones elementales por filas.

Teorema 5.1.1. *Sea $A \in M_{m\times n}(K)$. Entonces existe $B \in M_{m\times n}(K)$ escalonada reducida por filas y que es equivalente por filas a A.*

Demostración: Vamos a hacer la demostración por inducción en n. Para esto, hemos de demostrar el resultado para $n = 1$, y supuesto cierto para cualquier matriz $m\times n$, demostrarlo para matrices $m\times(n+1)$.

- Caso base: $n = 1$.

  Aquí hay que comprobar que cualquier matriz $m\times 1$ puede transformarse, mediante transformaciones elementales por filas, en una matriz escalonada reducida por filas. En el ejemplo 5.1.4 vimos como tiene que ser esta matriz.

  Distinguimos dos casos:

  - $A = 0$. En tal caso, ya A es escalonada reducida por filas.
  - $A \neq 0$. En este caso, debe haber al menos un elemento distinto de cero. Vamos a transformar esta matriz en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ en tres etapas (alguna de ellas podría no ser necesaria).

    1. Hacemos que a_{11} sea distinto de cero. Esto puede conseguirse, por ejemplo, intercambiando la fila primera con otra (que sea distinta de cero).
    2. Hacemos que a_{11} valga 1. Esto puede conseguirse, por ejemplo, multiplicando la primera fila por a_{11}^{-1}, o sumando a la primera fila (es decir, a a_{11}) alguna otra multiplicada por algún número.
    3. Hacemos que todos los elementos que están bajo a_{11} valgan cero. Por ejemplo, si $a_{i1} \neq 0$ podemos, a la fila i-ésima, sumarle la primera multiplicada por $-a_{i1}$ (es decir, la transformación $E_{i1}(-a_{i1})$).

- Paso de inducción:

  Suponemos que cualquier matriz $m \times n$ puede transformarse en una matriz escalonada reducida por filas mediante la realización de transformaciones elementales por filas.

  Sea $A \in M_{m\times(n+1)}(K)$, y $A' \in M_{m\times n}(K)$ la matriz que resulta de suprimir la última columna de A.

  Por hipótesis de inducción, podemos pasar de A' a una matriz escalonada reducida por filas realizando transformaciones elementales por filas. Llamemos a esta matriz H'. Realizamos estas transformaciones en la matriz A. El resultado es una matriz $H \in M_{m\times(n+1)}(K)$ cuyas primeras n columnas son las columnas de H'.

  Supongamos que las primeras l filas de la matriz H' son distintas de cero, mientras que las filas $l + 1, \cdots, m$ son nulas.

  Al igual que antes, pueden darse dos situaciones:

  - Las filas $l+1, \cdots, m$ de H son nulas. En tal caso, la matriz H es escalonada reducida por filas.
  - Alguna fila de H de las que hemos dicho en el apartado anterior es distinta de cero. En tal caso, debe haber algún elemento $i \geq l + 1$ tal que $a_{in+1} \neq 0$. Entonces, procedemos de forma muy parecida a como hicimos en el caso $n = 1$.

    1. Hacemos una transformación para que $a_{l+1\ n+1}$ sea distinto de cero. En esta transformación no podemos cambiar ninguna de las primeras l filas.
    2. Hacemos que a_{l+1n+1} valga 1. Al igual que antes, las l primeras filas debemos dejarlas como están.
    3. Con transformaciones tipo III, hacemos que todos los elementos de la última columna, salvo a_{l+1n+1} sean nulos.

  La matriz resultante es una matriz escalonada reducida por filas.

■

La demostración nos sugiere cómo obtener una matriz escalonada reducida por filas a partir de una matriz dada A. Hay que ir de izquierda a derecha. En primer lugar, hacemos que la matriz formada por la primera columna sea escalonada reducida por filas. Luego, nos vamos a las dos primeras columnas, y nos aprovechamos del trabajo que hemos hecho. Y así sucesivamente hasta llegar a la última.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.1.7. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. *Vamos a transformarla en una matriz escalonada reducida por filas.*

Nos fijamos en la primera columna. Como es distinta de cero, vamos a realizar transformaciones elementales en A *hasta que se quede* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Estas podrían ser las siguientes:*

En primer lugar, multiplicamos la primera fila por 3. A continuación, vamos a sumarle a la segunda fila la primera multiplicada por $-3 = 2$, *y a la tercera le vamos a restar la primera multiplicada por 2 (le sumamos la primera multiplicada por 3).*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos ahora a la segunda columna. Puesto que debajo de la primera fila hay elementos distintos de cero, buscamos primero que el elemento a_{22} *sea distinto de cero (eso ya lo tenemos), luego que sea igual a 1 (podemos, multiplicar la segunda fila por cuatro) y por último, hacemos cero todos los demás elementos de la segunda columna.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya hemos completado las dos primeras columnas. Nos fijamos entonces en las tres primeras, y vemos que también forman una matriz escalonada reducida por filas. Por tanto, nos vamos a la cuarta, y aquí ya vemos que no. Puesto que $a_{34} = 1$ *únicamente hemos de hacer ceros en los elementos que están por encima.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y ya tenemos una matriz escalonada reducida por filas.

Aquí hemos seguido un camino para obtener una matriz escalonada reducida por filas. Podríamos haber optado por realizar otras transformaciones elementales, como por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(2)}$$

$$\xrightarrow{E_2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(1)]{E_{13}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos como llegamos a la misma matriz escalonada reducida por filas.

Esto que ha ocurrido aquí no es casual. Elijamos el camino que elijamos para obtener una matriz escalonada reducida por filas, siempre vamos a llegar al mismo resultado. Esto es consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 5.1.2. *Sean* $A, B \in M_{m\times n}(K)$ *dos matrices escalonadas reducidas por filas. Si* $A \sim_f B$ *entonces* $A = B$.

La demostración de este teorema se hará más adelante.

A partir de este teorema y el anterior podemos concluir que si $A \in M_{m\times n}(K)$ entonces hay una única matriz escalonada reducida por filas a la que podemos llegar desde A haciendo transformaciones elementales por filas. Esta matriz la denominaremos **Forma normal de Hermite (por filas)** de A. De la misma forma, puede demostrarse que toda matriz A es equivalente por columnas a una única matriz escalonada reducida por columnas. Esta matriz se denomina **Forma normal de Hermite (por columnas)** de A.

Ejemplo 5.1.8. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. *Entonces la forma normal de Hermite por filas de* A *es*

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma normal de Hermite por columnas de A *es* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Se deja como ejercicio comprobarlo.*

En el ejemplo 5.1.6 podemos ver cómo cada una de las clases de equivalencia en el conjunto $M_2(\mathbb{Z}_2)$ *tiene una única matriz que es escalonada reducida por filas.*

La forma normal de Hermite nos permite definir el rango de una matriz.

Definición 63. *Sea* $A \in M_{m\times n}(K)$. *Se define el rango (por filas) de* A *como el número de filas no nulas de su forma normal de Hermite (por filas). Denotaremos a este número como* $rg(A)$

Ejemplo 5.1.9. *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$, *entonces* $rg(A) = 3$, *pues la forma normal de Hermite de* A *tiene tres filas distintas de cero.*

$rg(Id_n) = n$, *pues la identidad es escalonada reducida por filas (también por columnas) y todas las filas son distintas de cero.*

5.1.3. Operaciones con matrices.

Vamos en esta sección a centrarnos en la aritmética de las matrices. Definiremos la suma, el producto por escalares, y el producto de matrices, y veremos algunas de sus propiedades.

Suma de matrices.

Definición 64. *Sean* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ *dos matrices de tamaño* $m \times n$ *con coeficientes en el cuerpo* K. *Definimos la matriz* $A + B$ *como sigue:*

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

es decir, la matriz que resulta de sumar uno a uno los coeficientes de las matrices A *y* B. *Esta definición podríamos haberla escrito, más abreviadamente*

$$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} + (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

Ejemplo 5.1.10. *Vamos a sumar dos matrices con coeficientes en* $\mathbb{Z}_7$*.*

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 6+6 & 1+4 \\ 0+1 & 3+4 & 2+5 \\ 1+4 & 5+0 & 5+2 \\ 3+6 & 2+1 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices.

Sean $A, B, C \in M_{m\times n}(K)$ tres matrices, y sea $O \in M_{m\times n}(K)$ la matriz en la que todos los coeficientes son nulos. Entonces:

- $A + (B + C) = (A + B) + C$. Es decir, la suma es asociativa.
- $A + B = B + A$. Es decir, la suma de matrices es conmutativa.
- $A + O = A$. La matriz O es un elemento neutro para la suma.
- Existe $A' \in M_{m\times n}(K)$ tal que $A + A' = O$. Toda matriz tiene elemento opuesto para la suma. Normalmente, denotaremos a la matriz A' como $-A$.

Esto nos dice que el conjunto $(M_{m\times n}(K), +)$ es un grupo abeliano.

Producto de matrices por escalares.

Definición 65. *Sean* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$ *y* $a \in K$*. Definimos el producto del escalar* a *por la matriz* A *como*

$$a \cdot A = \begin{pmatrix} a\cdot a_{11} & a\cdot a_{12} & \cdots & a\cdot a_{1n} \\ a\cdot a_{21} & a\cdot a_{22} & \cdots & a\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a\cdot a_{m1} & a\cdot a_{m2} & \cdots & a\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

es decir, la matriz que resulta de multiplicar cada uno de los coeficientes de la matriz A *por el escalar* a*. Esta definición podríamos haberla escrito, más abreviadamente*

$$a \cdot (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = (a \cdot a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$$

Ejemplo 5.1.11. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{2} \\ -4 & \frac{-5}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$*. Entonces:*

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ \frac{4}{3} & 0 & -1 \\ -8 & -5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad y \ \frac{1}{3} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{-4}{3} & \frac{-5}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices por escalares.

Sean $A, B \in M_{m\times n}(K)$ dos matrices, y $a, b \in K$. Entonces:

- $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$ (distributividad respecto a la suma de matrices).
- $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$ (distributividad respecto a la suma de escalares).
- $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$ (pseudoasociatividad).
- $1 \cdot A = A$ (identidad).

Producto de matrices.

Para poder multiplicar dos matrices A y B es necesario que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B.

Vamos a empezar definiendo el producto de una matriz $A \in M_{1\times n}(K)$ por una matriz $B \in M_{n\times 1}(K)$. El resultado, será una matriz 1×1.

Definición 66. *Sea* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in M_{1\times n}(K)$, *y* $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(K)$. *Se define la matriz* $A \cdot B$ *como la matriz* 1×1 *dada por:*

$$A \cdot B = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} \right)$$

Por ejemplo, para matrices con coeficientes reales

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \left(2 \cdot (-1) + 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 2 \right) = \left(-2 + 1 + 2 \right) = (1)$$

Vamos entonces ya con la definición general

Definición 67.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$ *y* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \in M_{n\times p}(K)$ *dos matrices, donde, como hemos dicho antes, el número de columnas de* A *coincide con el número de filas de* B. *Vamos a denotar por* F_i *a la matriz* $1 \times n$ *que se corresponde con la fila* i*-ésima de* A, *y por* C_k *a la matriz* $n \times 1$ *que se corresponde con la columna* k*-ésima de* B, *es decir,* $F_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ *y* $C_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$. *Entonces se define la matriz* $A \cdot B$ *como*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1 & F_1 \cdot C_2 & \cdots & F_1 \cdot C_p \\ F_2 \cdot C_1 & F_2 \cdot C_2 & \cdots & F_2 \cdot C_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_m \cdot C_1 & F_m \cdot C_2 & \cdots & F_m \cdot C_p \end{pmatrix}$$

donde hemos identificado la matriz $F_i \cdot C_k$ *(que es una matriz* 1×1*) con su único coeficiente.*

Esto podíamos haberlo escrito de forma más compacta

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \cdot (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}}$$

Es decir, para obtener el elemento (i, k) de la matriz $A \cdot B$ hay que multiplicar los elementos de la fila i-ésima de A por los elementos de la columna k-ésima de B.

También se puede escribir el producto de las matrices $A \times B$ en forma extendida como

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \cdots + a_{2n}b_{np} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \cdots + a_{mn}b_{n2} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

Notemos que el número de filas de $A \cdot B$ es igual al número de filas de A, mientras que el número de columnas de $A \cdot B$ es igual al número de columnas de B.

Vamos a ver algún ejemplo de multiplicación de matrices.

Ejemplo 5.1.12. *Vamos a multiplicar dos matrices con coeficientes en* $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 3+4\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot 1+4\cdot 0 \\ 0\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot 3 & 0\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas mismas matrices pueden multiplicarse en orden inverso

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices.

Sean $A, A' \in M_{m\times n}(K)$, $B, B' \in M_{n\times p}(K)$ y $C \in M_{p\times q}(K)$. Entonces:

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (asociatividad del producto).
- $Id_m \cdot A = A \cdot Id_n = A$ (identidad).
- $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$.
- $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$.
- $a \cdot (A \cdot B) = (a \cdot A) \cdot B$.

Todas estas propiedades son elementales, y de fácil demostración, a excepción de la primera. Vamos a intentar demostrarla. Esta demostración es un poco engorrosa, debido a la gran cantidad de subíndices que aparecen.

Vamos a denotar por $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ a los coeficientes de la matriz A. Por $(b_{jk})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq k\leq p}}$ a los coeficientes de la matriz B, y por $(c_{kl})_{\substack{1\leq k\leq p \\ 1\leq l\leq q}}$ a los coeficientes de la matriz C.

Vamos a llamar $(\alpha_{ik})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq k\leq p}}$ a los coeficientes de la matriz $A\cdot B$, y $(\beta_{jl})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq l\leq q}}$ a los coeficientes de la matriz $B \cdot C$. Entonces, por definición de las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot C$ se tiene que

$\alpha_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.

$\beta_{jl} = b_{j1}c_{1l} + b_{j2}c_{2l} + \cdots + b_{jp}c_{pl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}$.

Sea γ_{il} el coeficiente (i, l) de la matriz $(A\cdot B)\cdot C$. Este coeficiente se obtiene multiplicando los elementos de la fila i-ésima de $A \cdot B$ por los elementos de la columna l-ésima de C. Es decir:

$$\begin{aligned}
\gamma_{il} &= \alpha_{i1}c_{1l} + \alpha_{i2}c_{2l} + \cdots + \alpha_{ip}c_{pl} = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j1}\right) c_{1l} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j2}\right) c_{2l} + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jp}\right) c_{pl} = \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j1}c_{1l} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j2}c_{2l} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jp}c_{pl} = \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}
\end{aligned}$$

Es decir, el coeficiente γ_{il} se obtiene como la suma de $n \cdot p$ términos, uno por cada coeficiente de la matriz B. Cada término es el producto de un coeficiente de la matriz B, un coeficiente de la fila i-ésima de A, y un coeficiente de la columna l-ésima de C.

Sea ahora δ_{il} el coeficiente (i, l) de la matriz $A \cdot (B \cdot C)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\delta_{il} &= a_{i1}\beta_{1l} + a_{i2}\beta_{2l} + \cdots + a_{in}\beta_{nl} = \\
&= a_{i1}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{1k}c_{kl}\right) + a_{i2}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{2k}c_{kl}\right) + \cdots + a_{in}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{nk}c_{kl}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_{i1}b_{1k}c_{kl} + \sum_{k=1}^{p} a_{i2}b_{2k}c_{kl} + \cdots + \sum_{k=1}^{p} a_{in}b_{nk}c_{kl} = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl}
\end{aligned}
$$

Y vemos que la suma es la misma que la que nos da γ_{il}. Es decir, $\gamma_{il} = \delta_{il}$. Y esto para cualesquiera i, l tales que $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq l \leq q$.

Por tanto, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Vamos a continuación el efecto que ocasiona multiplicar una matriz cualquiera A por una matriz elemental. Para esto, vamos a ver algunos ejemplos:

Ejemplo 5.1.13. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. *Entonces:*

- *Vamos a multiplicar la matriz A por matrices elementales a la izquierda.*

$$E_{23}\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1(3)\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(3)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21}(2)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Y ahora multiplicamos la matriz A por matrices elementales a la derecha.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{14}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de esto, es fácil ver:

Proposición 5.1.2. *Sea $A \in M_{m\times n}(K)$, y sean $E \in M_m(K)$ y $F \in M_n(K)$ matrices elementales (por tanto E y F denotan también transformaciones elementales). Entonces:*

1. *$E \cdot A$ es la matriz que se obtiene aplicando a la matriz A la transformación elemental por filas E.*
2. *$A \cdot F$ es la matriz que se obtiene aplicando a la matriz A la transformación elemental por columnas F.*

Es decir, multiplicar por matrices elemetales a la izquierda es lo mismo que realizar transformaciones elementales por filas, mientras que multiplicar por matrices elementales a la derecha es lo mismo que realizar transformaciones elementales por columnas.

Vamos a utilizar este resultado para demostrar el teorema 5.1.2. Para esto, necesitamos los siguientes lemas. El primero no es más que aplicar esta última proposición varias veces, mientras que el segundo es traducir la multiplicación de matrices a transformaciones por filas.

Lema 5.1.1. *Sean $A, B \in M_{m\times n}(K)$ dos matrices, y supongamos que son equivalentes por filas. Entonces existe una matriz P tal que $P \cdot A = B$.*

Demostración: Puesto que A y B son equivalentes por filas, podemos pasar desde A hasta B realizando transformaciones elementales por filas. Supongamos que estas transformaciones elementales son $E_1, E_2, \cdots, E_k$. Sea P la matriz $E_kE_{k-1}\cdots E_1$ (es decir, la matriz que resulta de aplicar las mismas transformaciones elementales necesarias para pasar de A a B, a la matriz identidad). Entonces se tiene que

$$P \cdot A = (E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1)A = B$$

■

Lema 5.1.2. *Sean $P \in M_{m\times n}(K)$, $A \in M_{n\times p}(K)$, y sea $B = P \cdot A$. Denotamos por F_j^A a la fila j-ésima de la matriz A y por F_i^B a la fila i-ésima de la matriz B. Es decir, $F_j^A = (a_{j1}\ a_{j2}\ \cdots\ a_{jp})$, y $F_i^B = (b_{i1}\ b_{i2}\ \cdots\ b_{ip})$.*

Entonces $F_i^B = p_{i1}F_1^A + p_{i2}F_2^A + \cdots + p_{in}F_n^A = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}F_j^A$.

La demostración de este lema es inmediata. Por ejemplo, el primer elemento de F_i^B es b_{i1}, mientras que el primer elemento de $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}F_j^A$ es $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}a_{j1}$, es decir, el elemento $(i, 1)$ de la matriz $P \cdot A$.

Con esto, podemos demostrar ya el teorema 5.1.2, que decía que si $A, B \in M_{m\times n}(K)$ eran dos matrices escalonadas reducidas por filas, y equivalentes por filas, entonces $A = B$.

Demostración teorema 5.1.2.

Vamos a demostrar el siguiente enunciado:

> Sean $A, B \in M_{m\times n}(K)$ escalonadas reducidas. Supongamos que existen $P, Q \in M_m(K)$ tales que $P \cdot A = B$ y $Q \cdot B = A$. Entonces $A = B$.

lo que a partir del lema 5.1.2 nos dará una demostración del teorema.

Lo vamos a hacer por inducción en m. Notemos primero que si una de las matrices es la matriz nula, entonces la otra también lo es. Es más, si una columna de una de las matrices es nula, entonces la misma columna de la otra matriz es también nula.

- Caso base.

  Supongamos que tanto A como B son matrices $1 \times n$, y que son escalonadas reducidas, y existen matrices $P, Q \in M_{1\times 1}(K)$ tales que $P \cdot A = B$ y $Q \cdot B = A$. Como el primer elemento no nulo de ambas matrices fila vale uno, entonces $p_{11} = q_{11} = 1$, luego $A = B$.

- Hipótesis de inducción.

  Supongamos que el resultado es cierto para matrices que tengan $m-1$ filas. Es decir, si $A', B' \in M_{(m-1)\times p}(K)$ son matrices escalonadas reducidas por filas, y tenemos $P', Q' \in M_{m-1}(K)$ tales que $P'A' = B'$ y $Q'B' = A'$, podemos deducir que $A' = B'$.

- Paso inductivo.

  Sean $A, B \in M_{m\times n}(K)$, escalonadas reducidas por filas, y $P, Q \in M_m(K)$ tales que $P\cdot A = B$ y $Q \cdot B = A$.

  Sea a_{1i_1} el pivote de la primera fila de A. Podemos suponer que se encuentra en la primera columna (es decir, $i_1 = 1$). De no ser así, podríamos eliminar la primera columna de A y de B y repetir el razonamiento (las matrices resultantes son también escalonadas reducidas por filas, si multiplicamos la primera por P obtenemos la segunda, y si multiplicamos la segunda por Q obtenemos la primera).

  Por tanto, tenemos que $a_{11} = 1$, y de la misma forma, $b_{11} = 1$. Y todos los demás elementos de la primera columna, tanto de A como de B son nulos. Entonces:

  $1 = b_{11} = p_{11}a_{11} + p_{12}a_{21} + \cdots + p_{1m}a_{m1} = p_{11}\cdot 1 + p_{12}\cdot 0 + \cdots + p_{1m}\cdot 0 = p_{11}$. Es decir, $p_{11} = 1$.

  $0 = b_{21} = p_{21}a_{11} + p_{22}a_{21} + \cdots + p_{2m}a_{m1} = p_{21}\cdot 1 + p_{22}\cdot 0 + \cdots + p_{2m}\cdot 0 = p_{21}$. Es decir, $p_{21} = 0$.

  Y repitiendo el proceso con los demás elementos de la primera columna, llegamos a que $p_{11} = 1$ y $p_{21} = \cdots = p_{m1} = 0$. De la misma forma obtenemos que $q_{11} = 1$ y $q_{21} = \cdots = q_{m1} = 0$.

  Ahora, con el lema 5.1.2 tenemos:

  $$\begin{aligned} F_2^B &= p_{21}F_1^A + p_{22}F_2^A + \cdots + p_{2m}F_m^A = p_{22}F_2^A + \cdots + p_{2m}F_m^A \\ F_m^B &= p_{m1}F_1^A + p_{m2}F_2^A + \cdots + p_{mm}F_m^A = p_{m2}F_2^A + \cdots + p_{mm}F_m^A \\ F_2^B &= q_{21}F_1^B + q_{22}F_2^B + \cdots + q_{2m}F_m^B = q_{22}F_2^B + \cdots + q_{2m}F_m^B \\ F_m^A &= q_{m1}F_1^B + q_{m2}F_2^B + \cdots + q_{mm}F_m^B = q_{m2}F_2^B + \cdots + q_{mm}F_m^B \end{aligned}$$

  Es decir, si A' y B' son las matrices que resultan de eliminar la primera fila en A y en B respectivamente, y P' y Q' son las matrices que resultan de eliminar de P y Q la primera fila y la primera columna, se tiene que $P'A' = B'$, y que $Q'B' = A'$.

  Además, A' y B' son matrices con $m-1$ filas. Por la hipótesis de inducción, deducimos que $A' = B'$.

  Queda, por último, comprobar que la primera fila de A coincide con la primera fila de B.

  Sea r el´número de filas no nulas de A, que coincide con el número de filas no nulas de B. Y sean $i_2, \cdots, i_r$ las columnas donde se encuentran los pivotes de estas filas. Es decir, $a_{2i_2} = a_{3i_3} = \cdots a_{ri_r} = b_{2i_2} = b_{3i_3} = \cdots = b_{ri_r} = 1$, y el resto de elementos de estas columnas son nulos. Entonces:

  $$\begin{aligned} 0 &= b_{1i_2} = p_{11}a_{1i_2} + p_{12}a_{2i_2} + \cdots p_{1n}a_{ni_2} = 0 + p_{12} + \cdots + 0 = p_{12}. \\ 0 &= b_{1i_3} = p_{11}a_{1i_3} + p_{12}a_{2i_3} + p_{13}a_{3i_3} + \cdots + p_{1m}a_{mi_3} = 0 + 0 + p_{13} + \cdots + 0 = p_{13}. \\ 0 &= b_{1i_r} = p_{11}a_{1i_r} + p_{12}a_{2i_r} + \cdots p_{1r}a_{ri_r} + \cdots + p_{1m}a_{mi_r} = 0 + 0 + \cdots p_{1r} + \cdots + 0 = p_{1r}. \end{aligned}$$

  De donde:

  $$\begin{aligned} F_1^B &= p_{11}F_1^A + p_{12}F_2^A + \cdots + p_{1r}F_r^A + p_{1r+1}F_{r+1}^A + \cdots + p_{1m}F_m^A = \\ &= 1\cdot F_1^A + 0\cdot F_2^A + \cdots + 0\cdot F_r^A + p_{1r+1}\cdot 0 + \cdots + p_{1m}\cdot 0 = F_1^A \end{aligned}$$

  Y con esto concluimos, pues la primera fila de la matriz A coincide con la primera fila de la matriz B.

En general, el producto de matrices no es conmutativo (si lo fuera, sería lo mismo hacer transformaciones elementales por filas que hacerlo por columnas). Podría darse el caso de que dadas dos matrices A y B, el producto $A\cdot B$ existiera, pero no así el producto $B\cdot A$. Podría darse también el caso de que existan tanto $A\cdot B$ como $B\cdot A$, pero que ambos fueran matrices de distinto tamaño, como ha ocurrido en el ejemplo anterior. Por tanto, no pueden ser iguales.

Pero incluso en el caso de que ambos productos existan, y sean del mismo tamaño (algo que ocurre cuando estamos con matrices cuadradas $n\times n$), puede ocurrir que $A\cdot B$ y $B\cdot A$ sean diferentes.

Ejemplo 5.1.14.

- *Sean* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Entonces:*

  $$A\cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 5 \\ -1 & -6 & 12 \\ -14 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \textit{mientras que } B\cdot A = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -9 \\ -14 & 7 & -15 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- *Sean ahora* $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. *En este caso:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 16 & 9 & -5 \\ 9 & 6 & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

- *Sean ahora* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Entonces:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{mientras que } B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

El hecho de que el producto de matrices no sea conmutativo hace que algunas propiedades que estamos acostumbrados a utilizar no valgan ahora para matrices. Por ejemplo, en general $(A+B)^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$. Lo que se tiene es que $(A+B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$. Obviamente, para matrices que conmutan ($A \cdot B = B \cdot A$) si se da la igualdad primera.

De la misma forma, $(A-B)^2 = A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2$, mientras que $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - A \cdot B + B \cdot A - B^2$.

Con los ejemplos de matrices que acabamos de ver, calcula las matrices que aquí se indican y comprueba lo que acabamos de decir.

Matriz traspuesta.

Definición 68. *Sea* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(K)$. *Se define la matriz traspuesta de A como la matriz*

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

que es una matriz de tamaño $n \times m$.

Es decir, A^t es la matriz cuyas filas son las columnas de A y cuyas columnas son las filas de A.

Ejemplo 5.1.15.

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ *entonces* $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Propiedades de la matriz traspuesta.

Sean $A, B \in M_{m \times n}(K)$, $C \in M_{n \times p}(K$ y $a \in K$. Entonces:

- $(A+B)^t = A^t + B^t$.
- $(a \cdot A)^t = a \cdot A^t$.
- $(A^t)^t = A$.
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Notemos que si E es una matriz elemental, entonces E^t también lo es. Más concretamente, $(E_{ij})^t = E_{ij}$, $(E_i(k))^t = E_i(k)$ y $(E_{ij}(k)) = E_{ji}(k)$.

Por tanto, si tomamos una matriz A, le hacemos una transformación elemental por filas $(E \cdot A)$, y hacemos la traspuesta $((E \cdot A)^t)$, es lo mismo que si hacemos la traspuesta de A (A^t) y le hacemos una operación elemental por columnas $(A^t \cdot E^t)$.

Puesto que la traspuesta de una matriz escalonada reducida por filas es una matriz escalonada reducida por columnas tenemos que si H es la forma normal de Hermite por columnas de A y H' es la forma normal de Hermite por filas de A^t, entonces $H = (H')^t$ (para hacer la forma normal de Hermite por columnas de una matriz podemos hacer la forma normal de Hermite por filas de su traspuesta, y después hacer la traspuesta del resultado).

Ejemplo 5.1.16. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{Z}_7)$. *Calculamos su forma normal de Hermite por columnas:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta podría haberse obtenido también haciendo la forma normal de Hermite por filas de $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y haciendo la traspuesta del resultado final.

5.1.4. Matrices regulares.

Definición 69. *Sea* $A \in M_n(K)$. *Se dice que* A *es regular, o invertible, si existe* $B \in M_n(K)$ *tal que* $A \cdot B = B \cdot A = Id_n$.

Observaciones:

Si A es regular, sólo puede haber una matriz B que cumpla la anterior propiedad, pues si $B \cdot A = Id_n$ y $A \cdot C = Id_n$ entonces $B = B \cdot Id_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = Id_n \cdot C = C$. Esto último nos permite hablar, en el caso de una matriz regular A, de la matriz **inversa** de A. Esta matriz se denota como A^{-1}, y está definida por la propiedad $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id_n$.

Dada $A \in M_{m\times n}(K)$, podemos definir lo que es una inversa por la derecha de A. Sería una matriz $B \in M_{n\times m}(K)$ tal que $A \cdot B = Id_m$. De la misma forma, podemos definir lo que es una inversa por la izquierda de A. Una matriz $C \in M_{n\times m}(K)$ tal que $C \cdot A = Id_n$. Una matriz puede tener varias (o infinitas) inversas por la izquierda, o puede tener varias inversas por la derecha. Cuando una matriz tiene más de una inversa por la derecha, entonces no tiene inversa por la izquierda, y viceversa.

Ejemplo 5.1.17.

- *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)$ *es regular, y su inversa es* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *como puede comprobarse fácilmente sin más que efectuando las correspondientes multiplicaciones.*

- *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_3)$ *no es regular. Si* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *fuera la inversa de* A *se tendría que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego $a_{11} + 2a_{21} = 1$ *y* $2a_{11} + a_{21} = 0$. *Sumando ambas igualdades tendríamos* $0a_{11} + 0a_{21} = 1$, *lo cual no es posible.*

- *Consideramos* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_2)$. *Entonces, tanto* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *como* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *son inversas por la derecha de* A.
- *La matriz identidad es regular, y su inversa es ella misma.*
- *Todas las matrices elementales son regulares, y sus inversas son matrices elementales del mismo tipo. De hecho, se tiene:*

  $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$.
  $(E_i(k))^{-1} = E_i(k^{-1})$ *(recordemos que* $k \neq 0$*).*
  $(E_{ij}(k))^{-1} = E_{ij}(-k)$.

Proposición 5.1.3.

1. *Sea* $A \in M_n(K)$. *Si* A *es invertible, entonces* A^{-1} *también lo es, y su inversa vale* A *(es decir,* $(A^{-1})^{-1} = A$*).*
2. *Si* $A, B \in M_n(K)$ *son regulares, entonces* $A \cdot B$ *también lo es y* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
3. *El apartado anterior se generaliza fácilmente a 3 ó más matrices. Si* $A_1, A_2, \cdots, A_k \in M_n(K)$ *son regulares, entonces* $A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_k$ *es regular y* $(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot \cdots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.

Ejemplo 5.1.18. *Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *dos matrices con coeficientes en* $\mathbb{Z}_5$. *Entonces:* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *(como puede comprobarse fácilmente), mientras que* $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Si calculamos $A^{-1} \cdot B^{-1}$ *nos da* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, *que multiplicado por* $A \cdot B$ *no sale la identidad, mientras que* $B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. *Y podemos comprobar que es la matriz inversa de* $A \cdot B$.

Hemos visto la definición de matriz regular y matriz inversa, pero no hemos visto nada para ver cuando una matriz tiene inversa, y caso de tenerla, encontrarla. Un primer paso, importante, para esto es el siguiente:

Proposición 5.1.4. *Sea* $A \in M_n(K)$. *Entonces* A *es regular si, y sólo si,* $rg(A) = n$.

Veamos una demostración de esto.
Demostración:
Supongamos que A es regular, y que $rg(A) < n$. Vamos a llegar a una contradicción, lo que significará que las dos cosas a la vez no pueden darse.

Sea H la forma normal de Hermite por filas de A. Eso significa que podemos obtener H realizando transformaciones elementales por filas en la matriz A, o lo que es lo mismo, multiplicando por matrices elementales a la izquierda. Es decir, $H = E_k \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$. Si llamamos P a la matriz $E_k \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1$ entonces se tiene que P es regular (es producto de matrices regulares) y $H = P \cdot A$.

Puesto que $rg(A) < n$, la matriz H tendrá al menos una fila nula, luego su última fila será cero.

Sea B la matriz dada por $b_{nn} = 1$ y $b_{ij} = 0$ para el resto de coeficientes, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $0 = B \cdot H = B \cdot P \cdot A$. Si multiplicamos a la derecha por las matrices A^{-1} y P^{-1} tenemos que:

$$0 = 0 \cdot A^{-1} \cdot P^{-1} = B \cdot P \cdot A \cdot A^{-1} \cdot P^{-1} = B \cdot P \cdot P^{-1} = B$$

lo cual sabemos que no es cierto. Aquí está la contradicción.

Recíprocamente, si $rg(A) = n$, entonces la forma normal de Hermite de A tiene n pivotes, y como A tiene n columnas, la forma normal de Hermite de A es la identidad. Por tanto, se tiene que $Id = E_k \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$, y de aquí es fácil ver que la matriz A es regular y su inversa es $E_k \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1$.

■

Vamos a analizar este resultado, junto con la demostración que hemos hecho.

En primer lugar, y puesto que sabemos como calcular el rango de una matriz, podemos ver cuando una matriz es regular o no.

Además, si es regular, su forma normal de Hermite por filas es la identidad. Y hemos visto que si $Id = E_k \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$, entonces $A^{-1} = E_k \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1$. Y esta matriz puede obtenerse realizando en la matriz identidad las mismas transformaciones elementales por filas que realizamos en la matriz A su forma normal de Hermite.

Esto nos da una forma para calcular la inversa de una matriz cuadrada. Tomamos la matriz A, que es de tamaño $n \times n$, y formamos una matriz de tamaño $n \times 2n$ añadiendo a la derecha una matriz identidad. Realizamos transformaciones elementales por filas hasta conseguir que A se transforme en la identidad (si no es posible, es que A no tiene inversa). La matriz en que se haya transformado la identidad es la inversa de A. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5.1.19.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$. *Formamos la matriz* $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Ahora calculamos su forma normal de Hermite.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(4)} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Nótese que en cada una de las matrices que se han ido obteniendo, si multiplicamos la matriz formada por las columnas 3 y 4 por la matriz A el resultado es la submatriz formada por las columnas 1 y 2.

Por ejemplo, si nos fijamos en la matriz central, $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Notemos también que hemos visto que toda matriz regular es producto de matrices elementales.

Y por tanto, se tiene también que dos matrices A y B son equivalentes por filas si, y sólo si, existe una matriz regular P tal que $P \cdot A = B$.

Esta matriz P se obtiene realizando sobre la identidad las mismas transformaciones elementales que realizamos para pasar desde A hasta B.

De la misma forma, dos matrices A y B son equivalentes por columnas si, y sólo si, existe una matriz regular Q tal que $A \cdot Q = B$.

5.1.5. Matrices equivalentes y rango.

Dada una matriz A, hemos definido su rango como el número de filas no nulas de su forma normal de Hermite por filas. Vamos a ver en esta sección que si lo hubiéramos definido usando la forma normal de Hermite por columnas, el resultado sería el mismo. Para llegar a esto, iremos demostrando algunos lemas sencillos.

1. Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ y $P \in M_m(K)$ regular. Entonces $rg(A) = rg(P \cdot A)$.

   Este resultado es fácil de probar con lo que ya tenemos, pues al ser las matrices A y $P \cdot A$ equivalentes por filas, su forma normal de Hermite por filas es la misma.

2. Sea $H \in M_{m\times n}(K)$ escalonada reducida por filas, y $Q \in M_n(K)$. Entonces $rg(H \cdot Q) \leq rg(H)$.

   Sea s el número de filas no nulas de $H \cdot Q$ y r el número de filas no nulas de H. Entonces $s \leq r$, ya que si la fila i-ésima de H es nula, la fila i-ésima de $H \cdot Q$ también lo es. Además, $r = rg(H)$ (por ser H escalonada reducida por filas).

   Para calcular el rango de $H \cdot Q$ podemos realizar transformaciones elementales por filas en esa matriz, pero únicamente entre las s filas no nulas. Por tanto, su forma normal de Hermite tendrá, como mucho, esas s filas no nulas. Es decir, $rg(H \cdot Q) \leq s \leq r = rg(H)$.

3. Si $A \in M_{m\times n}(K)$ y $Q \in M_n(K)$ entonces $rg(A \cdot Q) \leq rg(A)$

   Sea H la forma normal de Hermite por filas de A, y P regular tal que $P \cdot A = H$. Entonces

$$rg(A) = rg(P \cdot A) = rg(H) \geq rg(H \cdot Q) = rg(P^{-1} \cdot H \cdot Q) = rg(P^{-1} \cdot P \cdot A \cdot Q) = rg(A \cdot Q)$$

4. Si $A \in M_{m\times n}(K)$ y $Q \in M_n(K)$ regular, entonces $rg(A) = rg(A \cdot Q)$.

$$rg(A) \geq rg(A \cdot Q) \geq rg(A \cdot Q \cdot Q^{-1}) = rg(A)$$

   Por tanto, todas las desigualdades son igualdades.

5. Si A es escalonada reducida por columnas, entonces su rango es igual al número de columnas no nulas.

   Sea r el número de columnas no nulas. Ahora habría que calcular la forma normal de Hermite por filas de A. Esta puede calcularse intercambiando filas de forma que queden en primer lugar todas las filas donde hay algún pivote. Esas filas tienen 1 en el lugar del pivote y cero en el resto.

   En las columnas donde haya un pivote (las r primeras) podemos hacer cero todos los demás elementos, realizando transformaciones elementales por filas, de forma que al final nos quedan r filas no nulas, con un uno y todo lo demás cero en cada una de esas filas. Por tanto, el rango de esta matriz es r.

6. El rango de una matriz A es igual al número de columnas no nulas de su forma normal de Hermite por columnas.

   Si H es la forma normal de Hermite por columnas de A, entonces $H = A \cdot Q$, y por una parte $rg(A) = rg(A \cdot Q) = rg(H)$, y por ser H escalonada reducida por columnas, su rango es el número de columnas distintas de cero.

7. $rg(A) = rg(A^t)$

   Esto es inmediato a partir de lo dicho anteriormente.

Definición 70. *Sean $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Se dice que A y B son equivalentes si existe $P \in M_m(K)$ y $Q \in M_n(K)$, regulares, tales que $B = P \cdot A \cdot Q$*

Es fácil comprobar que esta relación es una relación de equivalencia en el conjunto $M_{m\times n}(K)$.

Notemos que si A y B son equivalentes por filas, entonces son equivalentes (en este caso $Q = Id$), y que si A y B son equivalentes por columnas entonces son equivalentes (ahora $P = Id$).

Podemos ver fácilmente que dos matrices A y B son equivalentes si, y sólo si, se puede pasar de una a otra realizando transformaciones elementales por filas y/o columnas.

Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son equivalentes, y sin embargo no son equivalentes por filas ni equivalentes por columnas.

Podemos pasar de A a B intercambiando las dos filas, y luego intercambiando las dos columnas. Pero si hacemos transformaciones sólo por filas no podremos obtener B a partir de A (pues la segunda columna será siempre cero), mientras que si hacemos transformaciones sólo por columnas tampoco podremos obtener B a partir de A.

Es claro que si A y B son equivalentes, entonces $rg(A) = rg(B)$. El recíproco es también cierto. De hecho se tiene que:

Proposición 5.1.5. *Sea $A \in M_{m\times n}(K)$, y sea $r = rg(A)$. Entonces A es equivalente a la matriz*

$$\left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

donde algunos de los bloques podrían no aparecer. Así, si $r = m$ (es decir, el rango es igual al número de filas), entonces los bloques inferiores no aparecen, y quedaría la matriz $\left(\begin{array}{c|c} Id_m & 0 \end{array}\right)$, mientras que si $rg(A) = n$, entonces no aparecerían los de la derecha, y quedaría $\left(\begin{array}{c} Id_n \\ \hline 0 \end{array}\right)$.

La demostración se deja como ejercicio.

5.2. Sistemas de ecuaciones lineales.

5.2.1. Definición y ejemplos.

Ecuación lineal.

Supongamos que K es un cuerpo. Una ecuación lineal con coeficientes en K es una expresión de la forma

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b$$

o si preferimos $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde $a_i \in K$, $b \in K$ y $x_i \notin K$.

A los elementos $a_1, \cdots, a_n$ se les conoce como *coeficientes*, al elemento b, *término independiente*, mientras que $x_1, \cdots, x_n$ son las *incógnitas*.

El término lineal hace referencia a que las incógnitas aparecen siempre con exponente 1.

Es usual también denotar a las incógnitas con las letras x, y, z, etc.

Una solución de una ecuación lineal es una asignación de un elemento de K a cada una de las incógnitas de forma que, después de realizar las correspondientes operaciones, se satisfaga la igualdad.

Por ejemplo, son ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ las siguientes:

$$x + 3y = 4; \qquad 2x + z = 2; \qquad x + 3y + 2z = 0$$

donde hemos escrito x en lugar de $1x$.

No son ecuaciones lineales:

$$2x + 3y^2 = 1; \qquad 3xy + z = 2; \qquad x + y^{-1} = 1$$

La asignación $x = 1$, $y = 1$ es una solución de la ecuación $x + 3y = 4$, pues si en la expresión $x + 3y$ sustituimos x por 1 e y por 1 obtenemos $1 + 3 \cdot 1 = 4$. También es solución la asignación $x = 3$, $y = 2$. No es solución la asignación $x = 2$, $y = 3$.

Sistema de ecuaciones.

Definición 71. *Sea K un cuerpo. Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas con coeficientes en K es un conjunto de m ecuaciones lineales con coeficientes en K de la forma*

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Una solución del sistema es una asignación de un elemento de K a cada incógnita de forma que sea solución de todas las ecuaciones simultáneamente.

Dos sistemas se dice que son equivalentes si el conjunto de soluciones de ambos es el mismo, es decir, si toda solución del primero es solución del segundo y viceversa.

Ejemplo 5.2.1. *Consideramos el sistema de ecuaciones con coeficientes en* $\mathbb{Z}_7$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y & = & 2 \\ 4x+3y & = & 4 \end{array}\right.$$

Entonces $x=3$, $y=2$ *es una solución del sistema, ya que es solución de ambas ecuaciones* ($3+3\cdot 2 = 3+6 = 2$ *y* $4\cdot 3+3\cdot 2 = 5+6 = 4$)*. Sin embargo,* $x=5$, $y=6$ *no es solución del sistema, pues aunque es solución de la primera ecuación* ($5+3\cdot 6 = 5+4 = 2$) *no es solución de la segunda* ($4\cdot 5+3\cdot 6 = 6+4 = 3$).

Los sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 3 \\ & & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad y \qquad \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & 1 \\ & & y & = & 1 \end{array}\right.$$

son equivalentes. Ambos tienen como única solución la asignación $x=1$, $y=1$.

Los sistemas con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & 6 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 1 \\ 4x & + & 3y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \qquad y \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & 6 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 1 \\ 5x & + & 5y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right.$$

no son equivalentes, pues $x=2$, $y=2$, $z=0$ *es solución del segundo sistema pero no lo es del primero, pues no es solución de la tercera ecuación* ($4\cdot 2+3\cdot 2+0 = 0$).

Se tiene, no obstante, que toda solución del primer sistema es solución del segundo (la única solución del primero es $x=1$, $y=2$, $z=3$*)*

Dado un sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

vamos a formar las siguientes matrices:

- Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
- Matriz de términos independientes: $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
- Matriz incógnita: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- Matriz ampliada: $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

En tal caso, el sistema podemos escribirlo como $A\cdot x = b$.

5.2.2. Discusión y resolución de sistemas.

Los sistemas de ecuaciones lineales podemos clasificarlos en :

- Sistemas incompatibles (SI). Si no tienen ninguna solución.
- Sistemas compatibles. Si tienen al menos una solución.

  A su vez, los sistemas compatibles podemos clasificarlos en :

  - Sistemas compatibles determinados (SCD). Si tienen exactamente una solución.
  - Sistemas compatibles indeterminados (SCI). Si tienen más de una solución.

Discutir un sistema de ecuaciones es estudiar a cual de estos grupos pertenece.

Ejemplo 5.2.2.

El sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right.$$

es compatible determinado, y su única solución es $x=\frac{7}{5}$, $y=\frac{3}{5}$.

El sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 6 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 1 \\ 5x & + & 5y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right.$$

es compatible indeterminado, pues $x=2$, $y=2$, $z=0$ *es una solución, y* $x=1$, $y=2$, $z=3$ *es otra solución del sistema. De hecho, este sistema tiene 7 soluciones distintas.*

El sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 2 \\ 3x & + & 4y & = & 2 \end{array}\right.$$

es incompatible. Si $x=a$, $y=b$ *fuera una solución, entonces* $a+3\cdot b=2$, *luego* $3\cdot(a+3\cdot b)=3\cdot 2$, *es decir,* $3\cdot a+4\cdot b=1$, *pero en ese caso no puede ser solución de la segunda ecuación.*

Podemos dar sistemas de una ecuación y una incógnita que sean incompatibles, compatibles determinados y compatibles indeterminados.

- *Incompabible:* $0x=1$.
- *Compatible determinado:* $2x=3$.
- *Compatible indeterminado:* $0x=0$.

Supongamos que tenemos un sistema $A\cdot x=b$.

Si multiplicamos por una matriz regular a la izquierda P, tendríamos el sistema $(P\cdot A)\cdot x=P\cdot b$, es decir, un sistema cuya matriz de coeficientes es $P\cdot A$ y cuya matriz de términos independientes es $P\cdot b$.

Este sistema es equivalente al anterior, ya que cualquier solución de $A\cdot x=b$ es solución de $P\cdot A\cdot x=P\cdot b$, y cualquier solución de $P\cdot A\cdot x=P\cdot b$ es solución de $A\cdot x=b$ (basta multiplicar por P^{-1})

La matriz ampliada del sistema $A\cdot x=b$ es $(A|b)$, mientras que la del sistema $P\cdot A\cdot x=P\cdot b$ es $P\cdot(A|b)$.

A partir de esto podemos concluir que:

> Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada $(A|b)$, y sea C una matriz equivalente por filas a $(A|b)$. Entonces el sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es C es equivalente (tiene las mismas soluciones) que el sistema de partida.
>
> En particular, podemos tomar como C la forma normal de Hermite de la matriz $(A|b)$.

Ejemplo 5.2.3. *Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en* $\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right.$$

vamos a calcular la forma de Hermite de la matriz ampliada.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{-1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Luego el sistema de partida es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{7}{5} \\ y & = & \frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Sea ahora el sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & 6 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 1 \\ 5x & + & 5y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right.$$

Al igual que antes, calculamos la forma normal de Hermite de la matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(2)]{E_{21}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(6)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(1)]{E_{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto, el sistema es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & & + & 5z & = & 2 \\ & y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

donde hemos quitado la última ecuación. Este sistema podríamos escribirlo

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+2z \\ y & = & 2 \end{array}\right.$$

y vemos que para cada valor de z que elijamos, tenemos una solución del sistema. El sistema es por tanto compatible indeterminado.

Por último, para el sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & 2 \\ 3x & + & 4y & = & 2 \end{array}\right.$$

procedemos de igual forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la última ecuación es de la forma $0 = 1$, lo cual sabemos que no es posible. El sistema es por tanto incompatible.

Vamos a analizar los distintos casos que se nos han presentado. En primer lugar, si tenemos un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es escalonada reducida (bastaría con que fuera escalonada), llamaremos *incógnitas principales* a las que se corresponden con los pivotes de la matriz ampliada (es decir, aquellas que son la primera incógnita de alguna ecuación) e *incógnitas libres* al resto.

En el primer sistema del ejemplo anterior tanto x como y son incógnitas principales, mientras que no hay incógnitas libres.

En el segundo sistema del ejemplo anterior son incógnitas principales x e y, mientras que z es incógnita libre.

En el tercer sistema la x es principal, y la y es libre.

Supongamos que tenemos un sistema de m ecuaciones y n incógnitas de la forma $A \cdot x = b$. Sea H_A la forma normal de Hermite de A y $H_{(A|b)}$ la forma normal de Hermite de $(A|b)$. Es claro que las n primeras columnas de $H_{(A|b)}$ coinciden con las columnas de H_A. Los tres casos que tenemos son los siguientes:

- Nos queda una ecuación de la forma $0 = 1$. Obviamente, en este caso el sistema es incompatible. Si esto ocurre es porque en H_A hay una fila nula que es distinta de cero en $H_{(A|b)}$. Dicho de otra forma, porque $rg(A) < rg(A|b)$.

- No tenemos ninguna ecuación de la forma $0 = 1$ y todas las incógnitas son principales. Es decir, $rg(A) = rg(A|b)$ y este rango coincide con el número de incógnitas (pues el rango es igual al número de pivotes). El sistema es equivalente a uno de la forma

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & & & & = & c_1 \\ & x_2 & & & = & c_2 \\ & & \ddots & & & \\ & & & x_n & = & c_n \end{array}\right.$$

que es compatible determinado.

- No tenemos ninguna ecuación de la forma $0 = 1$ ($rg(A) = rg(A|b)$) y hay incógnitas libres ($rg(A) < n$). En este caso, podemos despejar las incógnitas principales, y nos quedan en función de las libres. Cada valor que le demos a una de éstas nos proporciona una solución del sistema. El sistema es por tanto compatible indeterminado.

Como resumen de esto último tenemos el teorema de Rouché-Frobenius.

Teorema 5.2.1. *Sea $A \cdot x = b$ un sistema de m ecuaciones y n incógnitas. Entonces:*

$$\left\{\begin{array}{lll} rg(A) = rg(A|b) & \textit{Sistema compatible.} & \left\{\begin{array}{ll} rg(A) = n & \textit{Sistema compatible determinado.} \\ rg(A) < n & \textit{Sistema compatible indeterminado.} \end{array}\right. \\ & & \\ rg(A) < rg(A|b) & \textit{Sistema incompatible.} & \end{array}\right.$$

5.3. Determinantes.

Vamos a definir en esta sección el determinante de una matriz cuadrada. Esto será un número que le asociemos a la matriz, y veremos como recoge algunas propiedades de dicha matriz.

5.3.1. Definición de determinante.

En esta sección, si $A \in M_{m\times n}(K)$ es una matriz, con $n, m \geq 2$, vamos a denotar por A_{ij} a la matriz de tamaño $(m-1) \times (n-1)$ que resulta de eliminar de A la fila i-ésima y la columna j-ésima.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ entonces $A_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, mientras que $A_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Definición 72. *Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$. Definimos el determinante de A, de forma recursiva, como sigue:*

- Si $n = 1$, entonces $det(A) = a_{11}$.

- Supuesto definido el determinante de cualquier matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, definimos el determinante de A como

$$det(A) = a_{11} \cdot \alpha_{11} + a_{21} \cdot \alpha_{21} + \cdots + a_{n1} \cdot \alpha_{n1}$$

donde $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$.

Vamos a ver a continuación cómo calcular el determinante de matrices 2×2 y matrices 3×3.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Entonces $\alpha_{11} = (-1)^{1+1} det(A_{11}) = (-1)^2 det(a_{22}) = a_{22}$ y $\alpha_{21} = (-1)^{2+1} det(A_{21}) = (-1) det(a_{12}) = -a_{12}$.

Por tanto

$$det(A) = a_{11} \cdot \alpha_{11} + a_{21} \cdot \alpha_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Si ahora la matriz A es 3×3, es decir, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tenemos que:

- $\alpha_{11} = (-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$.
- $\alpha_{21} = (-1)^{2+1} det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -(a_{12} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{32}) = a_{13} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{33}$.
- $\alpha_{31} = (-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}$.

Por tanto,

$$det(A) = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

El determinante de la matriz Id_n vale 1. Esto puede probarse fácilmente por inducción.

Para $n = 1$ el resultado es trivial.

Suponemos que $det(Id_{n-1}) = 1$. Entonces $det(Id_n) = 1 \cdot \alpha_{11} = det(Id_{n-1}) = 1$.

A continuación vamos a enunciar una serie de propiedades que nos serán de utilidad para el cálculo de determinantes de cualquier tamaño.

Propiedades:

1 Si en una matriz intercambiamos dos filas, el valor del determinante cambia de signo. Lo mismo si intercambiamos dos columnas.

En particular, $det(E_{ij}) = -det(Id) = -1$.

Y por tanto, si $A \in M_n(K)$ entonces $det(E_{ij} \cdot A) = -det(A) = det(E_{ij}) \cdot det(A)$ y $det(A \cdot E_{ij}) = -det(A) = det(A) \cdot det(E_{ij})$

2 Si en una matriz multiplicamos una fila (o una columna) por un escalar no nulo, el valor del determinante queda multiplicado por el escalar.

Si tomamos como $A = Id$, entonces $det(E_i(k)) = k$. Tenemos entonces que

$det(E_i(k) \cdot A) = det(E_i(k)) \cdot det(A)$ y $det(A \cdot E_i(k)) = det(A) \cdot det(E_i(k))$.

3 Si en una matriz a una fila (resp. columna) le sumamos otra fila (resp. columna) multiplicada por un escalar, el valor del determinante no varía.

Tomando $A = Id$ tenemos que $det(E_{ij}(k)) = 1$, de donde $det(E_{ij}(k) \cdot A) = det(E_{ij}(k)) \cdot det(A)$ y $det(A \cdot E_{ij}(k)) = det(A) \cdot det(E_{ij}(k))$.

En resumen, tenemos que si E es una matriz elemental, entonces $det(E \cdot A) = det(A \cdot E) = det(A) \cdot det(E)$.

4 Si una matriz tiene una fila o una columna nula, el determinate vale cero.

Todas estas propiedades pueden demostrarse por inducción en n (donde n es el tamaño de la matriz).

A partir de estas propiedades, y con lo que ya sabemos, es fácil ver que:

5 Si A es regular, $det(A) \neq 0$.

Si A es regular, es producto de matrices elementales, luego su determinante es el producto de los determinantes de estas matrices, y todos son distintos de cero.

6 Si A ó B es regular, entonces $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$

Ya que en ese caso, bien A, bien B es producto de matrices elementales.

7 Si A no es regular, $det(A) = 0$.

Pues en tal caso, existe P regular tal que $P \cdot A = H$, y H tiene al menos alguna fila nula. Por tanto, $det(A) = det(P^{-1} \cdot H) = det(P^{-1}) \cdot det(H) = det(P^{-1}) \cdot 0 = 0$.

8 Si A y B son matrices cuadradas, $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

Si A ó B es regular, ya está visto. En el caso de que ninguna de las dos sea regular, ambos miembros de la igualdad valen cero.

9 $det(A) = det(A^t)$.

Si A no es regular, tampoco lo es A^t, y en ese caso los dos determinantes son nulos.

Si A es regular, entonces $A = E_1 \cdot E_2 \cdots E_m$, luego $A^t = (E_m)^t \cdot (E_{m-1})^t \cdots (E_2)^t \cdot (E_1)^t$.

El resultado es consecuencia de que $det(E_i) = det((E_i)^t)$.

10 Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, entonces para cualquier j entre 1 y n se tiene que

$$det(A) = a_{1j} \cdot \alpha_{1j} + a_{2j} \cdot \alpha_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot \alpha_{nj}$$

Para $j = 1$ lo que tenemos es justo la definición que hemos dado de determinante.

Sea B la matriz que resulta de colocar la columna j-ésima de A en primer lugar, y desplazar las columnas $1, 2, \cdots, j-1$ una posición a la izquierda. Por ejemplo, si A tiene 8 columnas, y $j = 5$, entonces el orden de las columnas en B es $5, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8$.

Notemos que $det(A) = (-1)^{j-1} det(B)$, pues podemos pasar desde A hasta B realizando $j-1$ intercambios de columnas (se podría hacer intercambiando la columna j-ésima con la que tiene justo a la izquierda, hasta que llegue al primer lugar).

Por otra parte, la matriz A_{ij} es igual a la matriz B_{i1} (al eliminar la columna j de A nos queda lo mismo que si eliminamos la columna primera de B).

Por tanto $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} det(B_{i1}) = (-1)^{j-1}(-1)^{i+1} det(B_{i1}) = (-1)^{j-1}\beta_{i1}$

Con todo esto tenemos que

$$det(A) = (-1)^{j-1} det(B) = (-1)^{j-1}(b_{11}\beta_{11} + b_{21}\beta_{21} + \cdots + b_{n1}\beta_{n1})$$

$$det(A) = (-1)^{j-1}(a_{1j}(-1)^{j-1}\alpha_{1j} + a_{2j}(-1)^{j-1}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}(-1)^{j-1}\alpha_{nj})$$

y puesto que $(-1)^{j-1}(-1)^{j-1} = 1$ tenemos lo que queríamos.

11 Para cualquier i entre 1 y n se tiene que

$$det(A) = a_{i1} \cdot \alpha_{i1} + a_{i2} \cdot \alpha_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot \alpha_{in}$$

Esto es consecuencia de las dos propiedades anteriores.

Las propiedades décima y undécima es lo que se conoce como desarrollo de Laplace de un determinante por la columna j-ésima, o por la fila i-ésima.

Veamos algunos ejemplos para el cálculo de determinates.

Ejemplo 5.3.1. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$. *Vamos a calcular su determinante.*

$$det(A) = det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -5 \cdot det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (-5)\cdot(-2) = 3$$

donde los pasos seguidos han sido:

- A la tercera fila, y a la cuarta fila le sumamos la primera multiplicada por 5. De esta forma, el valor del determinante no varía y conseguimos que en la tercera columna, todos los elementos salvo uno sean nulos.

- Desarrollamos por la tercera columna. Entonces únicamente nos queda el elemento $(1,3)$ *por su adjunto, que es el determinante* 3×3 *que aparece.*

- Hacemos ceros en la primera columna. Para eso, le sumamos a la primera fila y a la tercera fila, la segunda.

- Desarrollamos por la primera columna. Como el único elemento distinto de cero está en la posición $(1,2)$*, el determinante que nos quede hay que multiplicarlo por* -1.

- Por último, calculamos el determinante de la matriz 2×2 *que nos queda.*

Determinates y matriz inversa.

Vamos a usar los determinantes para calcular la inversa de una matriz. Para esto, necesitamos comprobar previamente que si A es una matriz cuadrada $n \times n$ e $i \neq k$ entonces

$$a_{i1}\alpha_{k1} + a_{i2}\alpha_{k2} + \cdots + a_{in}\alpha_{kn} = 0$$

Para comprobar esto, sea B la matriz que coincide con A en todas las filas, salvo en la fila k-ésima. Esta fila sería la fila i-ésima de A. Es claro que $det(B) = 0$, ya que B tiene dos filas iguales (la fila i-ésima y la fila k-ésima. Si desarrollamos por su fila k-ésima tenemos que

$$0 = b_{k1}\beta_{k1} + b_{k2}\beta_{k2} + \cdots + b_{kn}\beta_{kn}$$

$b_{kj} = a_{ij}$ para $j = 1, 2, \cdots, n$, mientras que $\beta_{kj} = \alpha_{kj}$ (pues al quitar la fila k-ésima de A y B queda la misma matriz). De ahí se deduce la igualdad anterior.

De la misma forma, si $j \neq k$

$$a_{1j}\alpha_{1k} + a_{2j}\alpha_{2k} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nk} = 0$$

Ejemplo 5.3.2. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. *Entonces:*

$$\alpha_{21} = -det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2; \quad \alpha_{22} = det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 4; \quad \alpha_{32} = -det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

y entonces $a_{31}\alpha_{21} + a_{32}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{32} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 0$.

Notemos que esto es lo que nos saldría si desarrollamos por la segunda fila el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

A partir de esto, tenemos que:

Proposición 5.3.1. *Sea* $A \in M_n(K)$. *Sea* $Adj(A) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$. *Entonces*

$$A \cdot Adj(A)^t = Adj(A)^t \cdot A = det(A) \cdot Id_n$$

Notemos que $Adj(A)^t = Adj(A^t)$.
Demostración:
Tenemos que calcular el producto

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

El elemento (i,k) de ese producto vale $a_{i1}\alpha_{k1} + a_{i2}\alpha_{k2} + \cdots + a_{in}\alpha_{kn}$. Cuando $i = k$, eso vale justo $det(A)$, mientras que cuando $i \neq k$ esa suma vale cero.
Para el producto en el otro sentido se hace de forma análoga.
■

Teorema 5.3.1. *Sea $A \in M_n(K)$. Si A es regular entonces*

$$A^{-1} = det(A)^{-1} \cdot Adj(A^t)$$

Ejemplo 5.3.3. *Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. Vamos a calcular la matriz adjunta. Tres de los elementos ya los hemos calculado.*

$$\alpha_{11} = det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2; \quad \alpha_{12} = -det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1; \quad \alpha_{13} = det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$\alpha_{31} = det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1; \quad \alpha_{32} = -det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2; \quad \alpha_{13} = det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

luego $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculamos los productos $A \cdot Adj(A^t)$ y $Adj(A^t) \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 3 & 3\cdot 2+1\cdot 4+0\cdot 1 & 3\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 2 \\ 2\cdot 2+3\cdot 1+1\cdot 3 & 2\cdot 2+3\cdot 4+1\cdot 1 & 2\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 2 \\ 2\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 3 & 2\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 1 & 2\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y vemos que en ambos casos sale $2 \cdot Id_3$.

A partir de lo anterior tenemos que $A^{-1} = 2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Determinantes y rango.

Vamos a ver en esta sección cómo usar los determinates para calcular el rango de una matriz.
Momentáneamente, dada una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$, vamos a denotar como $rg^d(A)$ al orden de la mayor submatriz cuadrada de A con determinante distinto de cero. Vamos a comprobar que $rg(A) = rg^d(A)$.
Notemos en primer lugar que si A tiene una submatriz cuadrada $r \times r$ con determinante distinto de cero, y E es una operación elemental, entonces $E \cdot A$ tiene también una submatriz cuadrada $r \times r$ con determinante distinto de cero.
Este resultado es trivial si E es una operación elemental tipo I o tipo II.

Para ver que ocurre si hacemos una operación elemental tipo III, supongamos que $F_1, F_2, \cdots, F_r$ son las r filas que forman la submatriz regular. Denotaremos al determinante de esta matriz como $det(F_1, F_2, \cdots, F_r)$. Obviamente, si la operación elemental no cambia ninguna de las filas $F_1, F_2, \cdots, F_r$, el resultado es también trivial. Por tanto, tenemos una transformación tipo III en la que se reemplaza una de estas r filas por el resultado de sumarle otra fila multiplicada por un escalar. Para simplificar, supongamos que es F_1, que es sustituida por $F_1' = F_1 + kF_l$.

Si F_l es una de las filas $F_2, \cdots, F_r$, entonces $det(F_1', F_2, \cdots, F_r) = det(F_1, F_2, \cdots, F_r) \neq 0$, y ya lo tenemos.

Si F_l es una fila distinta de estas, tenemos que:

$$det(F_1', F_2, \cdots, F_r) = det(F_1 + k \cdot F_l, F_2, \cdots, F_r) = det(F_1, F_2, \cdots, F_r) + k \cdot det(F_l, F_2, \cdots, F_r)$$

y puesto que $det(F_1, F_2, \cdots, F_r) \neq 0$, bien $det(F_l, F_2, \cdots, F_r)$, bien $det(F_1', F_2, \cdots, F_r)$ son distintos de cero, y ambos son determinantes de submatrices $r \times r$ de $E \cdot A$.

A partir de esto, se tiene que si E es una matriz elemental, entonces $rg^d(A) \leq rg^d(E \cdot A)$, luego

$$rg^d(A) \leq rg^d(E \cdot A) \leq rg^d(E^{-1} \cdot E \cdot A) = rg^d(A)$$

es decir, $rg^d(A) = rg^d(E \cdot A)$. Y de aquí es fácil ver que si P es una matriz regular, $rg^d(A) = rg^d(P \cdot A)$. Tomando P de forma que $P \cdot A$ sea la forma normal de Hermite de A entonces tenemos que $rg^d(A) = rg^d(H_A)$. Y esto último vale $rg(A)$ (pues podemos considerar la submatriz formanda por las filas distintas de cero de H_A y las columnas donde están los pivotes. Esta submatriz es la identidad).

Ejemplo 5.3.4. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_3)$. *Entonces, puesto que det* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ *tenemos que* $rg(A) \geq 2$.

Calculamos los determinantes de las submatrices 3×3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Y como no podemos formar más submatrices 3×3, *el rango de la matriz vale* 2.

En el ejemplo anterior se han calculado cuatro determinates de matrices 3×3 para comprobar que el rango no era tres. Podríamos habernos ahorrado dos de ellos. Para eso, una vez que hemos encontrado una submatriz 2×2 con determinante distinto de cero (la formada por las dos primeras filas y las dos primeras columnas), nos podíamos haber limitado a calcular el determinante de las matrices 3×3 que contuvieran a dicha submatriz 2×2. De esta forma, de los cuatro determinantes que hemos hallado, bastaría haber calculado los dos primeros, y la conclusión sería la misma.

Determinantes y sistemas de ecuaciones.

Para terminar el tema vamos a ver como podemos, por medio de los determinantes, calcular la solución de un sistema de ecuaciones compatible.

Lo haremos en primer lugar con los denominados *sistemas de Cramer.* Un sistema de Cramer es un sistema en el que la matriz de coeficientes es regular.

Un tal sistema podemos escribirlo como $A \cdot x = b$, con A una matriz $n \times n$ regular. Con estas condiciones, el sistema es compatible determinado, pues $rg(A) = n$ y $rg(A|b) = n$. En tal caso, tenemos que la solución viene dada por:

$$x_1 = det(A)^{-1} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \cdots \quad x_n = det(A)^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Es decir, para obtener el valor de la incógnita x_i, calculamos el determinante de la matriz que resulta de sustituir la columna i-ésima de A por la columna de los términos independientes. El resultado lo multiplicamos por el inverso de $det(A)$.

Esto es lo que se conoce como *Regla de Cramer.*

El motivo de esto es que del sistema $A \cdot x = b$ podemos despejar x, multiplicando por A^{-1}, y nos queda que $x = A^{-1} \cdot b$. Con lo que sabemos de la matriz inversa, tenemos que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = det(A)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = det(A)^{-1} \begin{pmatrix} b_1\alpha_{11} + b_2\alpha_{21} + \cdots + b_n\alpha_{n1} \\ b_1\alpha_{12} + b_2\alpha_{22} + \cdots + b_n\alpha_{n2} \\ \vdots \\ b_1\alpha_{1n} + b_2\alpha_{2n} + \cdots + b_n\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

es decir, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} det(A)^{-1}(b_1\alpha_{11} + b_2\alpha_{21} + \cdots + b_n\alpha_{n1}) \\ det(A)^{-1}(b_1\alpha_{12} + b_2\alpha_{22} + \cdots + b_n\alpha_{n2}) \\ \vdots \\ det(A)^{-1}(b_1\alpha_{1n} + b_2\alpha_{2n} + \cdots + b_n\alpha_{nn}) \end{pmatrix}$

Si calculamos el desarrollo de Laplace del determinante $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ por la primera columna, nos sale justamente $b_1\alpha_{11} + b_2\alpha_{21} + \cdots + b_n\alpha_{n1}$. Para el resto de incógnitas se procede de igual forma.

Ejemplo 5.3.5. *Consideramos el sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_{11}$*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 7y & + & 9z & = & 1 \\ 10x & + & y & + & 3z & = & 7 \\ 5x & + & 2y & + & 6z & = & 9 \end{array} \right.$$

Este es un sistema de Cramer, pues det $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 10 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 2+4+6-1-2-2 = 7 \neq 0$. *Por tanto es compatible determinado, y su solución es:*

- $x = 7^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 7 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 8 \cdot (6+5+2-4-6-8) = 8 \cdot (-5) = 8 \cdot 6 = 4$

- $y = 7^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 10 & 7 & 3 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) = 10.$

- $z = 7^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot 6 = 4.$

En el caso de que el sistema no sea de Cramer, pero sea compatible, también podemos hacer uso de la regla anterior.

Supongamos que $A \cdot x = b$ es un sistema compatible. Eso significa que $rg(A) = rg(A|b)$. Llamemos r al rango. Por tanto, hay una submatriz $r \times r$ de A con determinante distinto de cero. Vamos a suponer que esta submatriz es la formada por las r primeras filas y las r primeras columnas. Significa eso que las restantes ecuaciones podemos suprimirlas (al hacer la forma de Hermite quedarían cero). Escribimos entonces el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1r}x_n \end{array} \right.$$

Para cualquier valor de las incógnitas $x_{r+1}, \cdots, x_n$ nos queda un sistema compatible determinado, y que podemos resolver por la regla de Cramer. La solución es entonces:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}$$

$$x_r = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r-1} & b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r-1} & b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr-1} & b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 5.3.6. *Consideramos el sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & + & 4z & + & 2t & = & 5 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ x & + & 5y & + & 3z & & & = & 5 \end{array} \right.$$

Tomamos la submatriz formada por las dos primeras filas y las columnas primera y tercera, y calculamos su determinante:

$$det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 9 - 20 = 3 \neq 0$$

Calculamos todos los determinates 3×3 que podemos formar añadiéndole una fila y una columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Con los dos primeros vemos que $rg(A) = 2$, y con el tercero que $rg(A|b) = 2$. El sistema es por tanto compatible indeterminado. Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones, y dejamos a la izquierda los términos correspondientes a las incógnitas x y z.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 3x & + & 4z & = & 5 & + & 6y & + & 5t \\ 5x & + & 3z & = & 1 & + & 3y & + & 5t \end{array} \right.$$

Y por tanto

$$x = 3^{-1} \begin{vmatrix} 5 + 6y + 5t & 4 \\ 1 + 3y + 5t & 3 \end{vmatrix} = 5[3(5 + 6y + 5t) - 4(1 + 3y + 5t)] = 5(11 + 6y - 5t) = 6 + 2y + 3t$$

$$z = 3^{-1} \begin{vmatrix} 3 & 5 + 6y + 5t \\ 5 & 1 + 3y + 5t \end{vmatrix} = 5[3(1 + 3y + 5t) - 5(5 + 6y + 5t)] = 5(-22 - 21y - 10t) = 2 + 6t$$