TEMA 5

Espacios Vectoriales.

Ejercicio 1. Sean $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (2,0,1)$ y $v_4 = (1,0,2)$ cuatro vectores de $\mathbb{Q}^3$. Comprueba que son linealmente dependientes, y di cuáles de ellos son combinación lineal del resto.

Ejercicio 2. Estudia si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes:

En $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$:

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,
2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

En $\mathbb{Q}_2[x]$ (polinomios con coeficientes racionales de grado menor o igual que 2):

1. $\{x + x^2,\ -x - x^2\}$,
2. $\{1 + 2x + 3x^2,\ 1 - x + x^2,\ 1 + x - x^2,\ x + 2x^2\}$,
3. $\{x + 2x^2,\ 1 + x + 2x^2,\ 2 + 2x + x^2\}$.

Encuentra en todos los casos un subconjunto con el mayor número posible de vectores linealmente independientes.

Ejercicio 3. Determina si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

1. En $\mathbb{Q}^4$, $(\mathbb{Z}_2)^4$, $(\mathbb{Z}_3)^4$, $(\mathbb{Z}_5)^4$ y $(\mathbb{Z}_7)^4$: $(3,-1,-4,0)$, $(0,1,8,-1)$, $(3,-1,5,4)$, $(0,0,3,3)$.
2. $1 - x$ y x en $\mathbb{Q}_2[x]$.
3. En $\mathbb{Q}_3[x]$ y $(\mathbb{Z}_5)_4[x]$: $-x$, $x^2 - 2x$, $3x + 5x^2$.
4. En $(\mathbb{Z}_3)_3[x]$: $2x$, $x^3 - 3$, $1 + x - 4x^3$, $x^3 + 18x - 9$.
5. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. En un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, tenemos unos vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n, x$ cuyas coordenadas en una cierta base vienen dadas a continuación.

1. $$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1,0,1) \\ e_2 = (1,2,2) \\ e_3 = (0,1,1) \end{array}\right\} x = (1,0,2)$$

2. $$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1,1,1,1) \\ e_2 = (0,1,1,1) \\ e_3 = (0,0,1,1) \\ e_4 = (0,0,0,1) \end{array}\right\} x = (1,0,1,0)$$

Comprueba que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base en cada uno de los casos, y halla las coordenadas del vector x en dicha base. Da también las matrices de cambio de base.

Ejercicio 5. Para las bases de $\mathbb{Q}^3$

$$B = \{(4,0,7);\ (2,1,1);\ (3,1,3)\}; \quad B' = \{(1,0,2);\ (4,1,5);\ (1,0,3)\}$$

calcula las matrices de cambio de base.

Ejercicio 6. Sea $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ con

$$w_1 = (1,0,0,-1), w_2 = (0,1,-1,0), w_3 = (0,1,0,-1), w_4 = (0,1,1,1).$$

1. Demuestra que B es una base de $(\mathbb{Z}_{11})^4$.
2. Sea $x = -3(1,2,0,0) + 2(-1,0,1,1) + (0,0,-2,1) - 2(-1,0,-1,0)$. Calcula las coordenadas de x respecto de la base B.
3. Calcula las matrices de cambio de base $M_{B_C B}$ y $M_{B B_C}$.
4. Si $B' = \{(1,2,0,0), (-1,0,1,1), (0,0,-2,1), (-1,0,-1,0)\}$, demuestra que B' es una base de $(\mathbb{Z}_{11})^4$ y calcula $M_{B \to B'}$.

Ejercicio 7. Estudia si son o no subespacios los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Q}^3$:

1. $W = \{(a, b, a+b) \in \mathbb{Q}^3 /\ \ a, b \in \mathbb{Q}\}$
2. $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 /\ \ a + b + c = 1\}$
3. $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 /\ \ a^2 + b^2 + c^2 = 0\}$
4. $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 /\ \ a^2 - b^2 = 0\}$

Ejercicio 8. Determina si los siguientes conjuntos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ son subespacios vectoriales:

1. $H = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}) /\ \ A \text{ tiene inversa } \}$
2. $H = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}) /\ \ A = -2A^t\}$

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos damos un espacio vectorial V y un subconjunto suyo H. Determina en que casos es H un subespacio vectorial de V.

1. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$
2. $V = \mathbb{R}^3$; $H =$ el plano xy
3. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_5)$; $H = \{D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_5) \mid D \text{ es diagonal}\}$
4. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_7)$; $H = \{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_7) \mid T \text{ es triangular superior}\}$
5. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$; $H = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}) \mid S \text{ es simétrica}\}$
6. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$; $H = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & c \end{pmatrix}\right\}$.
7. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$; $H = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2) \mid A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
8. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $H = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
9. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{11})$; $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{11}) \mid \text{rango}(A) = 1\}$
10. $V = (\mathbb{Z}_5)_4[x]$; $H = \{p \in (\mathbb{Z}_5)_4[x] \mid gr(p) = 4\}$.
11. $V = \mathbb{Q}_4[x]$; $H = \{p \in \mathbb{Q}_4[x] \mid p(0) = 0\}$.
12. $V = (\mathbb{Z}_2)_n[x]$; $H = \{p \in (\mathbb{Z}_2)_n[x] \mid p(0) = 1\}$.

Ejercicio 10. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{Q})$ y sea $H_1 = \{x \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{Q}) \mid Ax = 0\}$; muestra que H_1 es un subespacio de $\mathbb{Q}^m$. Sea $H_2 = \{x \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{Q}) \mid Ax \neq 0\}$; muestra que H_2 no es un subespacio de $\mathbb{Q}^m$.

Ejercicio 11. Halla las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_5)^3$ generado por los vectores $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$.

Ejercicio 12. Completa $\{(1,1,0),(2,1,1)\}$ a una base de $\mathbb{Q}^3$.

Ejercicio 13. Calcula las ecuaciones cartesianas y paramétricas del subespacio $U_1 + U_2 \subseteq (\mathbb{Z}_7)^3$, donde

$$U_1 = \big\langle (1,1,0),(2,0,0) \big\rangle, \quad U_2 = \big\langle (0,0,1),(2,1,3) \big\rangle.$$

¿Es $\mathbb{Z}_7^3 = U_1 \oplus U_2$?

Ejercicio 14. Dada la base $B = \{(1,0,1,1);\ (0,1,1,0);\ (1,1,1,1);\ (0,1,0,1)\}$ de $(\mathbb{Z}_2)^4$, calcula las coordenadas del vector $(0,0,0,1)$ en la base B.

Ejercicio 15. Para cada una de las siguientes parejas de subespacios de $\mathbb{Q}^4$ calcula $U \cap W$ y $U + W$.

1.
$$U = \{(a,b,-b,a)/\ a,b \in \mathbb{Q}\}$$
$$W = \{(a,b,0,c)/\ a,b,c \in \mathbb{Q}\}$$

2.
$$U \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \lambda + \mu \\ x_4 = \lambda + \mu + \gamma \end{cases}$$
$$W \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda + \mu + \gamma \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \lambda \end{cases}$$

3.
$$U = \langle (1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1) \rangle$$
$$W \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 16. Sea U el subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^3$ generado por los vectores $(2,3,1)$ y $(1,4,3)$, y W el subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^3$ de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$. Calcula unas ecuaciones cartesianas o implícitas del subespacio $U + W$.

Ejercicio 17. Encuentra la dimensión del subespacio generado por los siguientes conjuntos de vectores:

1. $\{(1,2),(0,1),(-1,3)\}$ en $(\mathbb{Z}_5)^2$
2. $\{1 + x + x^2, 2 - x^2 + x^3, 1 - x - 2x^2 + x^3, 1 + 3x + 4x^2 - x^3\}$ en $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ejercicio 18. Sea $V = \mathbb{Z}_3^4$ y sean los subespacios vectoriales

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in V \;\middle|\; \begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right\} \qquad W = \langle (1,1,1,1),(0,1,0,1) \rangle.$$

1. ¿Cuántos elementos hay en W?
2. Calcula bases de $U + W$ y $U \cap W$.
3. Calcula las ecuaciones paramétricas y cartesianas (o implícitas) de $U + W$ y $U \cap W$.

Ejercicio 19. En el conjunto $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios en una indeterminada de grado menor o igual que n se considera la suma usual y se define el producto por escalares reales

$$ap(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \neq 1 \\ p(x) & \text{si} \quad a = 1 \end{cases}$$

Estudia si $\mathbb{R}_n[x]$ con estas operaciones tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 20. Demuestra las siguientes afirmaciones:

1. Un conjunto de vectores que tiene dos vectores iguales es linealmente dependiente.
2. Un conjunto de vectores en el que un vector es múltiplo de otro es linealmente dependiente.

Ejercicio 21. Determina si los siguientes conjuntos de vectores generan al espacio vectorial dado:

1. En $(\mathbb{Z}_5)_2[x]$: $1+4x, 3+4x^2$.
2. En $(\mathbb{Z}_5)_2[x]$: $1+4x, 3+4x^2, x$.
3. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 22. Muestra que $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ puede ser generada por matrices regulares.

Ejercicio 23. Los siguientes subconjuntos y familias de vectores de algunos espacios vectoriales son subespacios y bases de estos. Verifica la verdad o falsedad de esta afirmación en los ejemplos siguientes:

1. $\{(a,b) \in (\mathbb{Z}_3)^2 \mid b = 1\}; \{(2,1)\}$
2. $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid (x-1) \text{ divide a } p(x)\}; \{x-1, x^2-1\}$.

Ejercicio 24. ¿Cuántas bases hay en $(\mathbb{Z}_2)^2$?

Ejercicio 25. En el espacio de las matrices simétricas de orden 2, consideramos las bases

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Calcula las matrices de cambio de base entre ambas.
2. Calcula las coordenadas de la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
en las bases B y B'.

Ejercicio 26. Sea $V = (\mathbb{Z}_7)^4$, y sean U_1 y U_2 los siguientes subespacios vectoriales de V:

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle (1,4,4,0), (2,2,1,2), (0,0,3,6) \rangle \\ U_2 &\equiv \left\{ 2x + 5y + t = 0 \right. \end{aligned}$$

1. Calcula una base de $U_1 \cap U_2$.
2. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $(1,1,0,0)$ en la base anterior?

Ejercicio 27. Determina si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{Q}_n[x]$:

1. $P_1 = \left\{ a + bx^2 + cx^3 \in \mathbb{Q}_n[x] / \ a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$
2. $P_2 = \{p(x) \in \mathbb{Q}_n[x] / \ p(x) + p(-x) = 0\}$
3. $P_3 = \{p(x) \in \mathbb{Q}_n[x] / \ p(x) + p'(x) = 0\}$

Ejercicio 28. Para los subespacios de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Q})$

$$U = \left\{ A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Q}) / \ A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \right\}$$

$$W = \left\{ A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Q}) / \ A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A \right\}$$

calcular $U \cap W$ y $U + W$.

Ejercicio 29.

1. Calcula la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\{(b,0,0,0),(0,a,1,1+a),(a,1+a,1+a,2+2a),(b,0,0,1-a)\}$$

según los valores de a y b.

2. ¿Cuál es el número máximo de vectores linealmente independientes en el conjunto

$$\{(b,0,a,b),(0,a,1+a,0),(0,1,1+a,0),(0,1+a,2+2a,1-a)\}$$

según los valores de a y b?

Ejercicio 30. De las siguientes aplicaciones decide cuáles son lineales y cuáles no.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_1(x,y,z) = (x+y, y+z, z-x)$$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_2(x,y,z) = (xy, yz, -zx)$$
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_3(x,y) = (x+y, x-y, 2x+2y)$$
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_4(x,y) = (x+1, y, x)$$
5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_5(x,y,z) = (x+1, x+2, x+3)$$
6. $f_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$f_6(x,y,z) = (x,z)$$
7. $f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_7(x) = (x, 2x, 3x)$$
8. $f_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f_8(x,y) = x^2 + y^2$$

Ejercicio 31. Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

1. $f : (\mathbb{Z}_3)^2 \to (\mathbb{Z}_3)^2$, $f(x,y) = (x+1, y+2)$.
2. $f : V \to V'$, $f(v) = 0$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(r) = r^2$.
4. $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^2$, $f(x,y,z) = (x+y+z, 28x+92z)$.

Ejercicio 32. Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 4 y V' un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 3. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ bases de V y V'. Se considera la única aplicación lineal $f : V \to V'$ que verifica:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 4v_1' + 7v_2' + 2v_3' \\ f(v_2) &= -v_1' + 3v_2' + 9v_3' \\ f(v_3) &= v_2' + 2v_3' \\ f(v_4) &= 2v_1' - v_2' - 8v_3' \end{aligned}$$

Se pide:

1. Escribe la matriz asociada a f respecto de las bases B y B'.

2. Calcula la dimensión de los subespacios núcleo e imagen de f.

3. ¿Es f una aplicación lineal inyectiva?¿Y sobreyectiva? Justifica las respuestas.

Ejercicio 33. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (3x + 2y - z, 5x - 2y, -9x + 10y - 2z)$$

1. ¿Pertenece el vector $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ a la imagen de f?

2. ¿Existe algún vector de la forma $(2, 5, \lambda)$ que pertenezca al núcleo de f?

3. ¿Es f un isomorfismo de espacios vectoriales?

Ejercicio 34. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^2$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x+2y+z, 2z)$. Calcula las ecuaciones implícitas y paramétricas de $\ker(f)$ y de $\mathrm{im}(f)$.

Ejercicio 35. Calcula la matriz asociada respecto de las bases canónicas de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que lleva

$$\begin{array}{lcl} u_1 = (1, 1, 2) & \text{en} & v_1 = (1, 0, 1, 2) \\ u_2 = (0, 1, 1) & \text{en} & v_2 = (0, 1, -1, 1) \\ u_3 = (1, 1, 0) & \text{en} & v_3 = (0, 1, 1, 0) \end{array}$$

Calcula el núcleo y la imagen.

Ejercicio 36. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ que verifica

$$\begin{array}{l} (1, 1, 1) \in \ker(f) \\ f(1, 2, 1) = (1, 1, 2) \\ f(1, 2, 2) = (0, 1, 1) \end{array}$$

1. Calcula la matriz de f en la base canónica.

2. Calcula las dimensiones del núcleo y la imagen de f.

Ejercicio 37. Construye una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ de forma que $f(0, 1) = (28, 92)$ y $f(1, 0) = (92, 28)$.

Ejercicio 38. Construye una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_3)^3 \to (\mathbb{Z}_3)^4$ de forma que

$$\mathrm{im}(f) = \langle (1, 2, 0, 2), (2, 0, 2, 0) \rangle.$$

Ejercicio 39. Construye una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_2)^3 \to (\mathbb{Z}_2)^3$ de forma que el vector $(1, 0, 1)$ pertenezca al núcleo de f y los ectores $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ a la imagen.

Ejercicio 40. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$, $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y, 3x + 2y + z)$. Calcula una base de $\ker(f)$ y una base de $\mathrm{im}(f)$.

Ejercicio 41. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_3)$. Encuentra la matriz de f respecto de la base canónica y respecto de la base $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$. Halla la imagen mediante f de los siguientes subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^3$:

1. $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

2. $V_2 = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_5\}$

3. $V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) = t(1, -1, 1) \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$

Ejercicio 42. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z, 2x, y + z)$$

1. Calcula una base del núcleo de f.

2. Calcula ecuaciones implícitas (o cartesianas) de la imagen de f.

3. Calcula la expresión matricial de f respecto de las bases

$$B = \{(1,0,0),(0,1,-1),(1,1,1)\}$$

$$B' = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$$

Ejercicio 43. Da una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^4$ tal que $(1,-1) \in \ker(f)$ y $f(3,2) = (2,-1,3,-2)$. Describe explícitamente cuanto vale $f(x,y)$ para cualquier vector $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$.

Ejercicio 44. Da una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ que verifique que el vector $(1,2,-1)$ pertenezca al núcleo de f, que $f(1,-1,0) = (3,1,2)$ y que $\mathrm{im}(f)$ sea el subespacio de ecuación $x - y - z = 0$.

Calcula la matriz de f en la base $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$

Ejercicio 45. Prueba que las siguientes aplicaciones son lineales.

1. $D : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dada por
$$D(p(x)) = p'(x)$$
2. $S : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por
$$S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$$
3. $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por
$$T(A) = \frac{1}{2}(A - A^t)$$
4. $I_{[0,1]} : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ dada por
$$I_{[0,1]}(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$$
5. $P : M_2(\mathbb{R}) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ dada por
$$P(A) = PA \text{ con } P \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Ejercicio 46. Para las aplicaciones lineales del ejercicio anterior calcula:

1. La matriz asociada respecto de las bases estándar adecuadas.
2. El núcleo y la imagen.

Ejercicio 47. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados. Halla las matrices respecto de las bases estándar de las que lo sean:

1. $M_B : M_2(\mathbb{Z}_3) \to M_{2\times 1}(\mathbb{Z}_3)$ dada por $M_B(A) = AB$ con $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $S_B : M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$ dada por $S_B(A) = A + B$ con $B \in M_2(\mathbb{Q})$ fija.
3. $C_B : M_2(\mathbb{Z}_5) \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ dada por $C_B(A) = AB - BA$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ dada por $A(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$

Ejercicio 48. Se considera la aplicación $\det : M_2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ que asocia a cada matriz su determinante. Responde a las siguientes cuestiones y justifica la respuesta:

1. ¿Es det una aplicación lineal?
2. ¿Es det una aplicación inyectiva?
3. ¿Es det una aplicación sobreyectiva?

Ejercicio 49. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z) = (x + y + z, x - y - z, 2x, y + z)$$

1. Calcula una base del núcleo de f

2. Calcula las ecuaciones cartesianas de la imagen de f

3. Calcula la expresión matricial de f respecto de las bases B y B', donde

$$B = \{(1,0,0),(0,1,-1),(1,1,1)\}$$
$$B' = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$$

Ejercicio 50. Para la aplicación lineal $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{array}{rcl} f_a(1,1,1) & = & (a,a,a) \\ f_a(0,1,1) & = & (-a,0,0) \\ f_a(1,0,1) & = & (1,1-a,0) \end{array} \qquad \text{para un parámetro } a \in \mathbb{R}$$

se pide:

1. La matriz de f_a respecto de la base canónica.

2. Según los valores de a, estudia las dimensiones del núcleo y la imagen de f_a.

3. La matriz de f_a respecto de la base $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$.

Ejercicio 51. Dadas $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante $f(x_1,x_2,x_3) = (x_2,x_3,0)$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_3,x_2)$ calcular $f^n = f \circ \overset{n}{\cdots} \circ f$ y $g \circ f$. [Sugerencia: calcula las matrices de f y g].

Ejercicio 52. Construye una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de manera que $(0,1,0) \in \ker(f)$ y que $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$.

Ejercicio 53. Se consideran los subespacios de $(\mathbb{Z}_3)^4$

$$U = \left\{ \begin{array}{r} x-y-z=0 \\ t=0 \end{array} \right. \qquad\qquad W = \langle (1,1,1,1),(0,1,0,1) \rangle$$

1. Da una aplicación lineal no nula f de W en U y calcula $f(1,0,1,0)$.

2. ¿Cuántas aplicaciones lineales sobreyectivas hay de W a $U+W$?

Ejercicio 54. Sabiendo que la aplicación f lleva los vectores

$$B_1 = \{u_1 = (1,0,0), \quad ,u_2 = (1,1,0), \quad u_3 = (1,1,1)\}$$

de $\mathbb{Z}_7^3$ en los vectores

$$B_2 = \{w_1 = (2,1,2), \quad ,w_2 = (3,1,2), \quad w_3 = (6,2,3)\}$$

relativamente, encontrar las matrices $M(f;B_c)$, $M(f;B_1B_2)$, $M(f;B_1)$, $M(f;B_2,B_c)$, donde B_c es la base canónica.

Ejercicio 55. Prueba que si $\dim(V) > \dim(V')$, entonces no existe ninguna aplicación lineal inyectiva de V en V'.

Ejercicio 56. Para las siguientes matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$ calcula sus valores propios y los subespacios propios correspondientes:

1. $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4.
$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 57. Encuentra $A \in M_3(\mathbb{R})$ con autovalores 1,2 y -1 y autovectores $(1,-1,1)$, $(4,-5,3)$ y $(-3,5,2)$.

Ejercicio 58. En $\mathbb{R}^4$ se considera el endomorfismo que, respecto de la base canónica, viene dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Prueba que es diagonalizable.
2. Calcula una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios del endomorfismo.

Ejercicio 59. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(K),$$

1. Estudia si A es diagonalizable en los casos $K = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$, calculando la matriz de paso cuando sea diagonalizable.
2. Calcula A^{227} en los casos en los que A es diagonalizable.

Ejercicio 60. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(K),$$
Estudia si A es diagonalizable en los casos $K = \mathbb{Z}_3, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Ejercicio 61. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ es un endomorfismo con valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$. Supongamos que la ecuación cartesiana de V_2 es $x + y + 4z = 0$, y que V_4 está generado por $(1,1,0)$. Calcula la matriz de f en la base canónica.

Ejercicio 62. Estudia para qué valores de los parámetros a y b es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 63. Calcula los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} p/2 & (p-q)/4 & q/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ q/2 & (q-p)/4 & p/2 \end{pmatrix}$$

en función de los parámetros que aparecen. ¿Para qué valores de p y q la matriz tiene un único valor propio?

Ejercicio 64. Calcula los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ (2b+a)/2 & a & b & b \\ a/2 & 0 & a & 0 \\ -a/2 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

y calcula para qué valores de los parámetros a y b la matriz es diagonalizable.

Ejercicio 65. Sea $f : (\mathbb{Z}_{13})^3 \to (\mathbb{Z}_{13})^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x, y, z) = (7x + 12y + 4z, x + 6y + 3z, 5x + 6y + 12z)$$

1. Halla la matriz de f en la base canónica.
2. Estudia si f es diagonalizable, y en caso afirmativo halla una base devectores propios.
3. Calcula A^{2431}.
4. Calcula $f^{2432}(1, 2, 3)$.

Ejercicio 66. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. Estudia si es posible encontrar una matriz regular P de forma que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea una matriz diagonal, y en caso afirmativo, da una.

Ejercicio 67. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x, y, z) = (4z, 2x + 2y + z, x)$$

1. Halla la matriz de f en la base canónica (llamémosla A)
2. Estudia si f es diagonalizable, y en caso afirmativo hallar una base de vectores propios.
3. Calcula A^{703}.
4. Halla $f^{704}(1, 2, 3)$.

Ejercicio 68. Dada la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_7)^4 \to (\mathbb{Z}_7)^4$ que, respecto de la base canónica, viene dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calcula la imagen del vector $v = (1, 1, 1, 1)$ por f. ¿Es un vector propio de A?
2. Calcula las dimensiones del núcleo y la imagen de f, así como una base de cada uno de estos subespacios.
3. Calcula los valores propios de A.