EXAMEN FINAL
CÁLCULO
GRADO EN INFORMÁTICA

1. (3 ptos.)

   a) Demuestra que la sucesión $x_n = \frac{2n-7}{3n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es monótona y acotada.

   b) Calcula el límite de la sucesión $\left\{\left[1 + \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^n\right\}$. Como consecuencia, estudia el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left[1+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-n^2}$.

   c) Calcula el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{1+3+5\cdots+(2n-1)}{n\ \log(n)}\right\}$.

Solución:

a) Es fácil ver que se trata de una sucesión convergente, con límite igual a $\frac{2}{3}$ (se trata de una sucesión que es cociente de polinomios del mismo grado; por tanto, su límite es el cociente de los coeficientes principales). Un vez que sabemos que es convergente, es entonces acotada, ya que “Toda sucesión convergente es acotada". Vamos a ver ahora que es monótona. Comparamos los dos primeros términos:

$$x_1 = \frac{2-7}{5} = \frac{-5}{5} = -1 < x_2 = \frac{-3}{8}$$

Veamos que se trata de una sucesión monótona creciente. En efecto, siendo n un natural cualquiera, comparemos x_n con x_{n+1}. En concreto, demostremos que $x_n < x_{n+1}$; es decir:

$$\begin{aligned}
x_n < x_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{2n-7}{3n+2} < \frac{2(n+1)-7}{3(n+1)+2} \\
&\Leftrightarrow \frac{2n-7}{3n+2} < \frac{2n-5}{3n+5} \\
&\Leftrightarrow (2n-7)(3n+5) < (2n-5)(3n+2) \\
&\Leftrightarrow 6n^2 - 11n - 35 < 6n^2 - 11n - 10 \Leftrightarrow -25 < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Ya que la última desigualdad a la que hemos llegado es cierta en todo $\mathbb{N}$, la sucesión verifica $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; es decir, es monótona creciente. Juntando esta información con la que teníamos de su convergencia a $2/3$, podemos ya añadir a la afirmación inicial de acotación que sus cotas son:

$$-1 \leq x_n \leq 2/3\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Se trata de una sucesión que presenta una indeterminación del tipo "1^∞", ya que la base tiende a 1, y el exponente a ∞. Aplicamos entonces el criterio del número e y analizamos la siguiente sucesión:

$$n\left[1+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)-1\right]=n\ \log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\to 1$$

puesto que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\to e$. Por tanto, aplicando el criterio del número e:

$$\text{lím}\left\{\left[1+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^n\right\}=e^1=e$$

Nos piden, ahora, que estudiemos, como consecuencia del límite anterior, el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left[1+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-n^2}$. Observamos que el término general de la serie propuesta nos invita a utilizar el criterio de la raíz. Esto es, si llamamos $a_n=\left[1+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-n^2}$, estudiamos la siguiente sucesión:

$$\sqrt[n]{a_n}=\left[1+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-n^2/n}=\left[1+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-n}\to 1/e<1$$

¿Cómo hemos llegado tan rápido al valor del límite? La sucesión que nos ha quedado al aplicar el criterio de la raíz no es más que la inversa que hemos estudiado anteriormente. Como la anterior convergía a e, la que estudiamos ahora converge a $1/e$, que es menor que 1. Por tanto, por el criterio de la raíz, la serie propuesta es convergente.

c) Aplicamos el criterio de Stolz (tenemos una indeterminación de "$\frac{\infty}{\infty}$" y además la sucesión del denominador es creciente). Llamemos $a_n=1+3+5\cdots+(2n-1)$ y $b_n=n\ \log(n)$. Estudiamos entonces el límite de la sucesión: $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ y nos queda:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}&=\frac{2n+1}{(n+1)\log(n+1)-n\log(n)}\\&=\frac{2n+1}{n\log(n+1)-n\log(n)+\log(n+1)}\\&=\frac{2n+1}{n\log(\frac{n+1}{n})+\log(n+1)}\\&=\frac{2n+1}{\log\left((\frac{n+1}{n})^n\right)+\log(n+1)}\end{aligned}$$

Observamos en el numerador la sucesión $2n+1$ que diverge a $+\infty$; en el denominador una suma de sucesiones donde el primer sumando converge a 1 (ya que $(\frac{n+1}{n})^n\to e\ \Rightarrow\ \log((\frac{n+1}{n})^n)\to 1$) y el segundo sumando es $\log(n+1)$ que también diverge a $+\infty$. Tenemos, por tanto, una sucesión que presenta una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$", pero que se puede evitar dividiendo en el numerador y en el denominador por la sucesión n. Así, nos queda:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{2+1/n}{\frac{\log\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)}{n} + \frac{\log(n+1)}{n}} \to +\infty$$

ya que el numerador tiende a 2, y el denominador tiende a cero, y donde hemos hecho uso de la escala de infinitos. Concluimos entonces que:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1+3+5\cdots+(2n-1)}{n\ \log(n)}\right\} = +\infty$$

2. (2 ptos.)

   a) Estudia el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}}{3^n\ \log(n)}$.

   b) Calcula $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2^n}{3^{n+1}}$.

Solución:

a) Aplicamos el criterio del cociente, siendo $a_n = \frac{\sqrt{n}}{3^n\ \log(n)}$:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}\ \log(n+1)}\ \frac{3^n\ \log(n)}{\sqrt{n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}}\ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\ \frac{\log(n)}{\log(n+1)} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\ \frac{\log(n)}{\log(n(1+1/n))} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\ \frac{\log(n)}{\log(n)+\log(1+1/n)}\end{aligned}$$

dividimos numerador y denominador por $\log(n)$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\ \frac{1}{1+\frac{\log(1+1/n)}{\log(n)}} \to 1/3 < 1$$

Por tanto, la serie propuesta es convergente.

b) En primer lugar, observamos que se trata de una serie dada como una combinación lineal de series geométricas convergentes. En efecto:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{3+2^n}{3^{n+1}} = \sum_{n\geq 1}\frac{3}{3^n\ 3} + \sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{3^{n+1}} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Las series geométricas que aparecen son $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n}$ y $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, ambas convergentes ya que sus respectivas razones, $1/3$ y $2/3$, son menores que 1. Recordemos, además, que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad \forall\, |r| < 1.$$

Entonces, aplicando esta fórmula, y la descomposición hecha más arriba, nos queda:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) \\
&= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right) + \frac{1}{3}(3-1) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

3. (1.5 ptos.) Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como

$$f(x) = 2\arctan(x) - 2x + \log(x^2+1)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

a) Determina el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

b) Calcula el conjunto imagen de f.

Solución: La función es derivable. Antes de responder a las dos cuestiones planteadas, vamos a estudiar la monotonía de la función:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - 2 + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2-2(1+x^2)+2x}{1+x^2} = \frac{2x-2x^2}{1+x^2}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \iff x = 0, 1$. La derivada es positiva en $]0,1[$ y negativa si $x > 1$ o $x < 0$ con lo que la función es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $]-\infty, 0]$ y en $[1, +\infty[$. Además

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

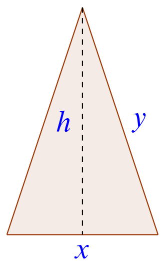
y $f(0) = 0$ con lo que que $f(1)$ es positivo (f es creciente en $[0,1]$). Con todo esto ya podemos responder a las dos cuestiones:

a) f tiene dos soluciones: una en el intervalo $]-\infty, 0]$ (el cero) y otra en $[1, +\infty[$.

b) La imagen de la función es $\mathbb{R}$.

4. (1.5 pto.) Demuestra que entre todos los triángulos isósceles de perímetro dado, P, el de mayor área es el equilátero.

Solución: Si la base del triángulo mide x, h es su altura e y es la longitud de los dos lados iguales, entonces el perímetro es $x + 2y = P$. Usando esta identidad podemos relacionar x e y. El teorema de Pitágoras nos relaciona las tres variables.



$$x + 2y = P$$
$$\frac{x^2}{4} + h^2 = y^2$$

La función a maximizar es el área, base por altura dividido por dos. Escrito en términos de la variable y, vamos a buscar el máximo de la función (salvo el “dividido por 2"que no lo hemos puesto)

$$f(y) = (P - 2y)\sqrt{y^2 - \frac{1}{4}(P-2y)^2} = (P-2y)\sqrt{Py - \frac{P^2}{4}}.$$

Calculamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} f'(y) &= -2\sqrt{Py - \frac{P^2}{4}} + (P-2y)\frac{P}{2\sqrt{Py - \frac{P^2}{4}}} \\ &= \frac{-4\left(Py - \frac{P^2}{4}\right) + (P-2y)P}{2\sqrt{Py - \frac{P^2}{4}}} = 0 \\ &\iff -4\left(Py - \frac{P^2}{4}\right) + (P-2y)P = 0 \\ &\iff -6Py + 2P^2 = 0 \\ &\iff y = P/3 \end{aligned}$$

Como

$$f'(y) = \frac{2P(P-3y)}{2\sqrt{Py - \frac{P^2}{4}}}$$

la derivada es positiva si $y < P/3$ y negativa si $y > P/3$ de donde se deduce que f tiene su máximo, absoluto y relativo, en $y = P/3$ como se quería demostrar.

5. (2 ptos.) Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{\tan^2(x)} e^{-t^2}\, dt}{x^2}$

b) $\int \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\, dx$

Solución:

a) Estamos ante una indeterminación de la forma $0/0$ que vamos a resolver aplicando la primera regla de L'Hôpital. Calculamos el límite del cociente de las derivadas. Nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\tan^4(x)} 2\tan(x)(1+\tan^2(x))}{2x} = 1,$$

ya que

$$\lim_{x\to 0} e^{-\tan^4(x)} = e^0 = 1, \quad \lim_{x\to 0} 1+\tan^2(x) = 1$$

y

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \cos(x) = 1.$$

b) Para calcular la primitiva usamos el método de integración por partes. Vamos a calcular la derivada de $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ en primer lugar:

$$\left(\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Usamos ahora el método de integración por partes.

$$\begin{aligned}\int \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\, dx &= \begin{bmatrix} u = \log(x+\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{bmatrix} \\ &= x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \\ &= x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}.\end{aligned}$$

Granada, 10 de febrero de 2012