Cálculo

1ºE Grado en Ingeniería Informática

Primer Parcial (Tipo I)

Curso 2014/2015

1. **(2.5 puntos)** Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}\right)^{1/x^2}.$$

Solución: El límite pedido presenta una indeterminación del tipo “1^∞”.

Aplicamos la regla del número e. Esto es,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}\right)^{1/x^2}=e^L \iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}-1\right)=L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)\,x^2}$$

aplicamos la regla de L’Hôpital, ya que que presenta una indeterminación del tipo “$0/0$”. Pero antes de eso, apartamos el factor $1/(\cos^2(x))$ que no tiende a cero (tiende a 1); es decir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2(x)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-1-\cos^2(x)}{x^2}$$

Nos queda entonces calcular el segundo límite que es el que presenta una indeterminación del tipo “$0/0$”.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-1-\cos^2(x)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{2x}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\operatorname{sen}^2(x)+2\cos^2(x)}{2}=\frac{4}{2}=2\end{aligned}$$

Obsérvese que hemos aplicado la regla de L’Hôpital dos veces consecutivas.

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}\right)^{1/x^2}=e^2\ .$$

2. **(3 puntos)** Se considera la función $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$.

   a) ¿Existe algún $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?

   b) ¿Es estrictamente monónota la función f?

   c) Calcula la imagen de f.

   Solución:

   a) Para responder a la pregunta vamos a ver si hay algún punto en el que la recta tangente tenga pendiente cero (así sería horizontal). Es decir, vamos a buscar algún punto en el que la función derivada se anule (la función dada es derivable por ser composición de derivables). Calculamos su derivada:

   $$f'(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\right) = e^{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{2}{(1-x)^2}\ .$$

   Es evidente que la derivada no se anula nunca; por tanto, no existe ningún punto del dominio donde la recta tangente sea horizontal.

   b) La derivada de f es positiva (todos sus factores lo son). En consecuencia, la función es estrictamente creciente en $]-\infty,1[$ y también en $]1,+\infty[$.

   c) Para calcular la imagen descomponemos el dominio en la unión de $]-\infty,1[$ y $]1,+\infty[$.

   $$f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = f(]-\infty,1[)\cup f(]1,+\infty[) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to 1_-} f(x)[\cup]\lim_{x\to 1_+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$$

   Hemos aplicado en cada subintervalo la continuidad y monotonía creciente de la función f. Para terminar, calculamos los límites planteados:

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$
   $$\lim_{x\to 1_-} f(x) = +\infty$$
   $$\lim_{x\to 1_+} f(x) = 0$$
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}\ .$$

   Por tanto, la imagen es $\left]0,\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e},+\infty\right[= \mathbb{R}^+\setminus\{\frac{1}{e}\}$.

3. **(2.5 puntos)** Determina el número de soluciones reales de la ecuación:

   $$3x^4 - 8x^3 = 24\ .$$

Solución: Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 24$$

Determinar el número de soluciones reales de la ecuación planteada es equivalente a determinar el número de ceros de la función f.

En principio, al tratarse de una función polinómica de grado par, no tenemos garantías de que tenga algún cero. Por tanto, estudiamos la derivada de f.

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x-2)$$

Observamos que la derivada se anula en dos puntos (los puntos críticos de f son $x = 0$ y $x = 2$). Sabemos entonces, aplicando el teorema de Rolle, que f, a lo sumo, tendrá 3 ceros. Vamos a determinar cuántos exactamente tiene con el análisis de la función.

Estudiamos los intervalos de monotonía determinados por los puntos críticos. Esto es:

$$\begin{aligned} x < 0 \ &\Rightarrow f'(x) < 0 \ \Rightarrow f \ \text{ es estrictamente decreciente} \\ 0 < x < 2 \ &\Rightarrow f'(x) < 0 \ \Rightarrow f \ \text{ es estrictamente decreciente} \\ x > 2 \ &\Rightarrow f'(x) > 0 \ \Rightarrow f \ \text{ es estrictamente creciente} \end{aligned}$$

Por tanto, en el punto $x = 2$ se alcanza un mínimo relativo y en $x = 0$ no se alcanza extremo. Además, $f(0) = -24$; y $f(2) = -40$. La función en $-\infty$ tiende a $+\infty$ y decrece a -24. Aplicando el teorema de Bolzano, aseguramos la existencia de un cero antes de $x = 0$. Por otra parte, la función sigue decreciendo al mínimo (absoluto) en $x = 2$ donde vale -40, y entonces comienza a crecer hasta $+\infty$. Entonces, la función tiene otro cero después de $x = 2$. En consecuencia, f tiene dos ceros.

4. **(2 puntos)** De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos sumen 10, halla las dimensiones de aquél cuyo perímetro sea mínimo.

   Solución: Llamemos x e y a los catetos del triángulo rectángulo dado. Sabemos que $x + y = 10 \ \Leftrightarrow \ y = 10 - x$. Para obtener el perímetro, tenemos que sumar todos sus lados (catetos e hipotenusa). Es claro que la hipotenusa es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, el perímetro será:

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 10 + \sqrt{x^2 + (10-x)^2} = 10 + \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$$

   La función que hay que optimizar es:

$$f(x) = 10 + \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$$

Esta función se podría definir en todo $\mathbb{R}$, pero como x e y representan dimensiones, consideramos como dominio de f el intervalo $[0,10]$. Al ser un intervalo compacto, vamos a calcular los puntos críticos en el interior. Para ello calculamos la derivada de f:

$$f'(x) = \frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \iff x = 5 \in]0,10[$. Para finalizar, evaluamos f en los extremos del intervalo y comparamos con $f(5)$:

$$f(0) = 20 = f(10) > f(5) = 10 + \sqrt{50}$$

Concluimos entonces que el mínimo absoluto de f se alcanza en $x = 5$. Así que la solución del problema es que los catetos del triángulo sean iguales a 5.

Granada, 28 de noviembre de 2014