

Números reales y funciones elementales

1 Números reales

Ejercicio 1. Calcula para qué valores de x se verifica que $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.

Ejercicio 2. Encuentra aquellos valores de x que verifican que:

- | | |
|--|-------------------------------|
| a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$, | d) $x^2 \leq x$, |
| b) $x^2 - 5x + 9 > x$, | e) $x^3 \leq x$, |
| c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0$, | f) $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$. |

Ejercicio 3. Discute para qué valores de x se verifica que:

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a) $ x-1 x+2 = 3$, | c) $ x-1 + x+1 < 1$, |
| b) $ x^2 - x > 1$, | d) $ x+1 < x+3 $. |

Ejercicio 4. ¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad $x^2 - (a+b)x + ab < 0$?

1.1 Principio de inducción

Ejercicio 5. Demuestra por inducción que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6. Demuestra que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1$ para cualquier natural mayor o igual que dos.

Ejercicio 7. Prueba que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.

Ejercicio 8. Demuestra que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9. Demuestra que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 10. Demuestra que $1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

2 Funciones elementales

Ejercicio 11. Calcula el dominio de las siguientes las funciones:

- | | |
|---|---|
| a) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ | c) $y = \sqrt{\frac{x}{1- x }}$ |
| b) $y = \log\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right)$ | d) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |

Ejercicio 12. Si $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$, ¿cuáles son los dominios naturales de f , g , $f+g$, $f \cdot g$ y de las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$?

Ejercicio 13. Estudia si son pares o impares las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$

d) $f(x) = e^x - e^{-x}$

b) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(|x|)$

c) $f(x) = e^x + e^{-x}$

f) $f(x) = \cos(x^3)$

Ejercicio 14. ¿Para qué números reales es cierta la desigualdad $e^{3x+8}(x+7) > 0$?

Ejercicio 15. Comprueba que la igualdad $a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$ es cierta para cualquier par de números positivos a y b .

Ejercicio 16. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$

Ejercicio 17. ¿Para qué valores de x se cumple que $\log(x-1)(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2)$?

Ejercicio 18. Prueba que $\log(x + \sqrt{1+x^2}) + \log(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$.

Ejercicio 19. Resuelve la ecuación $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Ejercicio 20. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $a^{\log(\log a) / \log a}$,

b) $\log_a(\log_a(a^{a^x}))$.

Ejercicio 21. Comprueba que si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, entonces $f \circ f \circ f(x) = x$.

Ejercicio 22. Calcula la inversa de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

b) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

Ejercicio 23. ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$?

Ejercicio 24. ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?