ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Convocatoria Extraordinaria Septiembre 2013.

(12/09/2013)

Ejercicio 1. En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales definimos la siguiente relación binaria: mRn si m es múltiplo de n. Entonces:

a) R no es reflexiva.

b) R no es simétrica.

c) R no es transitiva.

d) R es una relación de equivalencia.

Ejercicio 2. Sean A y B dos conjuntos. Entonces podemos asegurar que $A \setminus (A \setminus B)$ es igual a:

a) A.

b) B.

c) $A \cap B$.

d) $A \cup B$.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la aplicación definida por $f(m, n) = m \cdot n + 1$. Entonces:

a) f es inyectiva y sobreyectiva.

b) f es inyectiva pero no sobreyectiva.

c) f no es inyectiva, pero sí es sobreyectiva.

d) f no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

Ejercicio 4. Dado el sistema de ecuaciones en congruencias:

$$\left.\begin{array}{rcll} 6x & \equiv & 3 & \pmod{15} \\ 8x & \equiv & 2 & \pmod{14} \\ 5x & \equiv & 5 & \pmod{10} \end{array}\right\}$$

a) no tiene solución.

b) tiene 15 soluciones en el intervalo $[1000, 2000]$.

c) tiene una única solución en el intervalo $[1000, 2000]$.

d) tiene a 93 como la menor solución entera positiva.

Ejercicio 5. La suma de las cifras de 29^{-1} en $\mathbb{Z}_{81}$ vale:

a) 7.

b) 9.

c) 5.

d) 3.

Ejercicio 6. La expresión de un número en base 7 es 123. Entonces la expresión de dicho número en base 6 es:

a) 130.

b) 140.

c) 150.

d) 200.

Ejercicio 7. La ecuación

$$(x^2+2x+1)\cdot u(x)+(x^2+3x+2)\cdot v(x)=x^2+6$$

con coeficientes en $\mathbb{Z}_7[x]$

a) tiene infinitas soluciones.

b) no tiene solución.

c) tiene una única solución.

d) tiene exactamente 7 soluciones.

Ejercicio 8. Sean $a(x)=x^4+x^3+3x^2+2x+4$ y $b(x)=x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ dos polinomios de $\mathbb{Z}_5[x]$. El máximo común divisor de $a(x)$ y $b(x)$ es un polinomio de grado

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

Ejercicio 9. Sea $p(x)$ el polinomio de menor grado en $\mathbb{Z}_7[x]$ que interpola a los puntos $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,6)$, $(5,5)$ (es decir, $p(1)=2$, $p(2)=1$, etc. Entonces:

a) $p(x)=3x^3+6x^2+2x+5$.

b) $p(x)=2x^3+5x^2+5x+4$.

c) $p(x)=3x^2+4x+2$.

d) $p(x)=3x^4+4x^3+2x^2+4x+3$.

Ejercicio 10. El término independiente del inverso (para el producto) de $2x^2+2$ en $\mathbb{Z}_3[x]_{x^3+2x^2+2}$ vale:

a) 2.

b) 0.

c) No existe el inverso, pues $\mathbb{Z}_3[x]_{x^3+2x^2+2}$ no es un cuerpo.

d) 1.

Ejercicio 11. Sean A y B dos matrices cuadradas 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ tales que

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

a) $A^2-B^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $A^2-B^2=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

c) No existen matrices con las condiciones que nos da el enunciado.

d) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & a \end{array}\right\}$$

a) Existe un único valor de a para el que el sistema es compatible.

b) Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

c) Si $a \neq 1$ el sistema es incompatible.

d) El sistema es siempre incompatible.

Ejercicio 13. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$. El rango de A vale:

a) 3.

b) 1.

c) 2.

d) 4.

Ejercicio 14. Sean $B_1 = \{(1,0,1);\ (1,-1,0);\ (2,1,2)\}$ y $B_2 = \{(2,1,1);\ (1,0,1);\ (1,-1,1)\}$ dos bases de $\mathbb{Q}^3$, y sea u el vector de $\mathbb{Q}^3$ cuyas coordenadas en B_1 son $(1,1,1)$. Las coordenadas de u en B_2 son:

a) $(4,0,3)$.

b) $(1,1,1)$.

c) $(0,2,-1)$.

d) $(0,0,0)$.

Ejercicio 15. Sea U el subespacio de $\mathbb{Q}^3$ generado por los vectores $(1,1,1)$ y $(1,2,3)$. Entonces:

a) Existe un único x en el intervalo $[-5,5]$, tal que $(1,x,5) \in U$.

b) Existe un único x en el intervalo $[-1,1]$ tal que $(1,x,5) \in U$.

c) Existen tres valores de x en el intervalo $[-5,5]$ tales que $(1,x,5) \in U$.

d) Existen infinitos valores de x en el intervalo $[-5,5]$ tales que $(1,x,5) \in U$.

Ejercicio 16. Sea U el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^3$ generado por los vectores $(3,5,2)$, $(2,1,6)$ y W el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^4$ de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 4z & = & 0 \\ 5x & + & 6y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$. Entonces:

a) $\{(2,1,6);\ (5,2,6)\}$ es una base de $U + W$.

b) $\{(1,4,3);\ (2,1,4)\}$ es una base de $U + W$.

c) $U + W = (\mathbb{Z}_7)^3$.

d) $U + W = U$.

Ejercicio 17. ¿Para cuál de las siguientes aplicaciones lineales $f : (\mathbb{Z}_2)^3 \to (\mathbb{Z}_2)^3$ se verifica que el núcleo es el subespacio generado por el vector $(1,0,1)$ y la imagen es el subespacio de ecuación $x + y + z = 0$?

a) $f(x,y,z) = (x+z, x+z, y)$.

b) $f(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y)$.

c) $f(x, y, z) = (x + y + z, y, x + z)$.

d) $f(x, y, z) = (x + y + z, 0, x + y + z)$.

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ una aplicación lineal sobreyectiva. Entonces:

a) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(N(f))$.

b) f no es inyectiva.

c) f es un isomorfismo.

d) No existe una aplicación lineal con tales características.

Ejercicio 19. Sea $A \in M_3(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donde a, b, c son números racionales. Entonces:

a) Tanto A como A^2 son diagonalizables.

b) A es diagonalizable, pero A^2 no lo es.

c) A^2 es diagonalizable, pero no A.

d) A y A^2 tienen los mismos valores propios.

Ejercicio 20. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. Entonces:

a) A tiene tres valores propios y es diagonalizable.

b) A tiene tres valores propios y no es diagonalizable.

c) A tiene dos valores propios y es diagonalizable.

d) A tiene dos valores propios y no es diagonalizable.