Apellidos: ....

Nombre: .... D.N.I.: ....

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

28 de enero de 2015

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la aplicación definida por $f(m, n) = mn + m + 2n$. Estudia si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

Solución:

La aplicación no es inyectiva. Basta comprobar que $f(2, 0) = f(0, 1) = 2$. Es decir, hemos encontrado dos elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ distintos pero que tienen la misma imagen por f.

La aplicación sí es sobreyectiva, pues para cualquier $m \in \mathbb{N}$ podemos tomar el elemento $(m, 0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que es una preimagen para m (es decir, $f(m, 0) = m$).

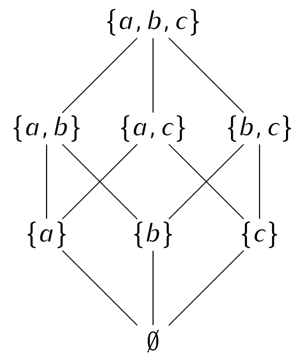
Notemos que lo que hemos hecho es dar una inversa por la derecha de f. Esta inversa es la aplicación $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $g(m) = (m, 0)$. Fácilmente vemos que $f \circ g = Id$.

Ejercicio 2. En $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ consideramos el orden dado por la inclusión y en $D(20)$ la relación de orden dada por divisibilidad, ($a \leq b$ si $b = ac$ para algún $c \in D(20)$). Consideramos en $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) \times D(20)$ el orden producto.

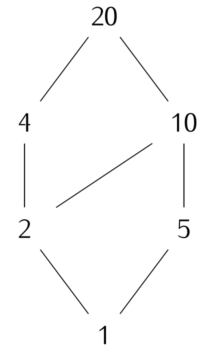
Dado el subconjunto $A = \{(\{a\}, 4), (\{a\}, 2), (\{a, b\}, 2), (\{a, c\}, 10)\} \subseteq \mathcal{P}(\{a, b, c\}) \times D(20)$, describe los elementos notables de A

Solución:

Dibujamos los diagramas de Hasse de los conjuntos $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ y $D(20)$.

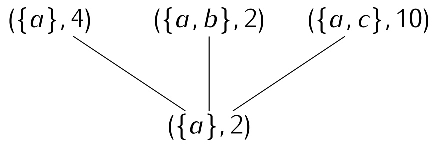


$\mathcal{P}(\{a, b, c\})$



$D(20)$

Y también el del conjunto A.



A partir de este último diagrama vemos que A no tiene máximo y que $(\{a\}, 2)$ es el mínimo. También vemos como los elementos $(\{a\}, 4), (\{a, b\}, 2), (\{a, c\}, 10)$ son maximales (pues no hay en A ninguno mayor que ellos), mientras que el único elemento minimal es $(\{a\}, 2)$.

Las cotas superiores son los elementos de $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) \times D(20)$ que son mayores o iguales que los cuatro elementos de A. Puesto que estamos considerando el orden producto, la primera coordenada debe ser mayor o igual que $\{a\}$, $\{a, b\}$ y $\{a, c\}$ y la segunda mayor o igual que $2, 4, 10$. Fijándonos en el diagrama de $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ y vemos que la primera coordenada sólo puede ser $\{a, b, c\}$ y fijándonos en el de $D(20)$ vemos que la segunda coordenada sólo puede ser 20.

Por tanto, A tiene solo una cota superior que es $(\{a, b, c\}, 20)$. El supremo es entonces $(\{a, b, c\}, 20)$ (pues es la menor de las cotas superiores).

Fácilmente podemos ver que las cotas inferiores son $(\{a\}, 2)$, $(\{a\}, 1)$, $(\emptyset, 2)$ y $(\emptyset, 1)$. El ínfimo es $(\{a\}, 2)$.

En resumen, tenemos:

C. Superiores:	$(\{a, b, c\}, 20)$	C. Inferiores:	$(\{a\}, 2)$, $(\{a\}, 1)$, $(\emptyset, 2)$, $(\emptyset, 1)$
Supremo:	$(\{a, b, c\}, 20)$	Ínfimo:	$(\{a\}, 2)$
El. maximales:	$(\{a\}, 4)$, $(\{a, b\}, 2)$, $(\{a, c\}, 10)$	El. minimales:	$(\{a\}, 2)$
Máximo:	No tiene.	Mínimo:	$(\{a\}, 2)$

Ejercicio 3. Resuelve el siguiente sistema de congruencias

$$\begin{cases} 14x \equiv 10 & (\text{mód } 18) \\ 5x \equiv 4 & (\text{mód } 21) \\ 10x \equiv 12 & (\text{mód } 29) \end{cases}.$$

Solución:

Para resolver el sistema, resolveremos la primera congruencia, la solución la introduciremos en la segunda y la resolveremos y así sucesivamente.

- Resolvemos la primera congruencia:
  $14x \equiv 10$ (mód 18) $mcd(14, 18) = 2$ que es divisor de 10. Dividimos todo por 2.
  $7x \equiv 5$ (mód 9). El inverso de 7 módulo 9 vale 4. Multiplicamos entonces ambos miembros por 4.
  $28x \equiv 20$ (mód 9). Reducimos módulo 9.
  $x \equiv 2$ (mód 9).
  Y ya tenemos la solución de la primera congruencia: $x = 2 + 9k : k \in \mathbb{Z}$.
- $x = 2 + 9k$. Introducimos esta solución en la segunda congruencia y la resolvemos.
  $5(2 + 9k) \equiv 4$ (mód 21). Operamos y reducimos módulo 21.
  $10 + 45k \equiv 4$ (mód 21)
  $45k \equiv 4 - 10$ (mód 21)
  $3k \equiv 15$ (mód 21) Ahora $mcd(3, 21) = 3$ que es divisor de 15. Dividimos todo por 3.
  $k \equiv 5$ (mód 7)
  Y la solución es $k = 5 + 7k' : k' \in \mathbb{Z}$.
- $x = 2 + 9k$. Sustituimos el valor de k en esta solución.
- $x = 2 + 9(5 + 7k') = 47 + 63k'$. Esta es la solución de las dos primeras congruencias. La introducimos en la tercera y la resolvemos.
  $10(47 + 63k') \equiv 12$ (mód 29) Operamos y reducimos módulo 29.
  $470 + 630k' \equiv 12$ (mód 29)
  $630k' \equiv 12 - 470$ (mód 29)
  $21k' \equiv 6$ (mód 29) $mcd(21, 29) = 1$. Multiplicamos ambos miembros por el inverso de 21 módulo 29, que vale 18 (calculado al final).
  $378k' \equiv 108$ (mód 29) Reducimos módulo 29.
  $k' \equiv 21$ (mód 29)
  La solución de esta congruencia es $k' = 21 + 29k''$.
- Sustituimos k' en la solución que teníamos de las dos primeras congruancias, y así tendremos la solución al sistema.

$$x = 47 + 63k' = 47 + 63(21 + 29k'') = 1370 + 1827k''$$

Nos queda calcular el inverso de 21 módulo 29.
Realizamos las divisiones:

$29 = 21 \cdot 1 + 8.$
$21 = 8 \cdot 2 + 5.$
$8 = 5 \cdot 1 + 3.$
$5 = 3 \cdot 1 + 2.$
$3 = 2 \cdot 1 + 1.$

Y con estos cálculos completamos la tabla:

r	c	v
29		0
21		1
8	1	v_1
5	2	v_2
3	1	v_3
2	1	v_4
1	1	v_5

$v_1 = v_{-1} - c_1 \cdot v_0 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$
$v_2 = v_0 - c_2 \cdot v_1 = 1 - 2 \cdot (-1) = 3$
$v_3 = v_1 - c_3 \cdot v_2 = -1 - 1 \cdot 3 = -4$
$v_4 = v_2 - c_4 \cdot v_3 = 3 - 1 \cdot (-4) = 7$
$v_5 = v_3 - c_5 \cdot v_4 = -4 - 1 \cdot 7 = -11$

r	c	v
29		0
21		1
8	1	-1
5	2	3
3	1	-4
2	1	7
1	1	-11

Y tenemos que 21^{-1} (mód 29) $= -11$ (mód 29) $= 18$.

Ejercicio 4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que el número $10a + b$ es múltiplo de 19. Demuestra que entonces $a + 2b$ es también múltiplo de 19.

Solución:
Podemos resolver este ejercicio de varias formas:

1. Primera forma:
   Supongamos que $10a + b$ es múltiplo de 19. Si multiplicamos este número por 2, seguirá siendo múltiplo de 19, luego el número $20a + 2b$ es múltiplo de 19. Si ahora le restamos un múltiplo de 19 el resultado seguirá siendo múltiplo de 19. Le restamos entonces $19a$ y el resultado es $a + 2b$. Por tanto, $a + 2b$ es múltiplo de 19.
2. Segunda forma:
   Si $10a + b$ es múltiplo de 19 eso significa que $10a + b = 19k$ para algún número $k \in \mathbb{Z}$. En tal caso, tenemos que $b = 19k - 10a$ luego:
   $$a + 2b = a + 2(19k - 10a) = a + 38k - 20a = 38k - 19a = 19(2k - a)$$
   Luego $a + 2b$ es múltiplo de 19.
3. Tercera forma:
   Decir que $10a+b$ es múltiplo de 19 significa que $10a+b \equiv 0 \mod 19$. Transformamos esta congruencia en otras equivalentes:
   $$10a + b \equiv 0 \mod 19; \;\; 10a \equiv -b \mod 19; \;\; 20a \equiv -2b \mod 19; \;\; a \equiv -2b \mod 19; \;\; a + 2b \equiv 0 \mod 19$$
   Y por tanto, si $10a + b$ es múltiplo de 19 entonces también lo es $a + 2b$.

Ejercicio 5. Sea $A = \mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x^2+1}$. Calcula, si es posible, $(x+1)^2(x^3+x+1)^{-1}$. ¿Es A un cuerpo?

Solución:

Lo primero que tenemos que ver es si x^3+x+1 tiene inverso en $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x^2+1}$. Para que sea así, debe ocurrir que $mcd(x^4+x^2+1, x^3+x+1)$ sea igual a 1.

Calculamos este máximo común divisor realizando las correspondientes divisiones:

- $x^4+x^2+1 = (x^3+x+1)\cdot x + (x+1)$.
- $x^3+x+1 = (x+1)\cdot(x^2+x)+1$.

Y por tanto, $mcd(x^4+x^2+1, x^3+x+1) = 1$. Existe entonces el inverso. Procedemos a calcularlo por el algoritmo extendido de Euclides. Aprovechamos las divisiones que ya hemos hecho:

r	c	v
x^4+x^2+1		0
x^3+x+1		1
$x+1$	x	
1	x^2+x	

$$v_1 = 0 - 1\cdot x = 0 + x = x$$
$$v_2 = 1 - (x^2+x)\cdot x = 1 + x^3 + x^2$$

r	c	v
x^4+x^2+1		0
x^3+x+1		1
$x+1$	x	x
x	x^2+x	x^3+x^2+1

Y por tanto, $(x^3+x+1)^{-1} = x^3+x^2+1$. Ahora realizamos los cálculos:

$$(x+1)^2(x^3+x+1)^{-1} = (x^2+1)\cdot(x^3+x^2+1) = x^5+x^4+x^3+1 = x^2+x$$

Esta última igualdad es debido a que x^2+x es el resto de la división de $x^5+x^4+x^3+1$ entre x^4+x^2+1. El cociente de dicha división es $x+1$.

Para responder a si A es un cuerpo necesitamos saber si el polinomio $m(x) = x^4+x^2+1$ es irreducible o no lo es. Puesto que tiene grado cuatro, debemos buscar divisores de grado 1 o divisores de grado 2.

Divisores de grado 1 no tiene, ya que $m(x)$ no tiene raíces, pues $m(0) = m(1) = 1$.

Debemos entonces dividirlo por el único irreducible de grado dos que existe, y que es x^2+x+1. Al realizar la división comprobamos que $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)^2$.

Por tanto $m(x)$ no es irreducible (tiene un divisor de grado 2) luego A no es un cuerpo.

Ejercicio 6. Discute el siguiente sistema de ecuaciones en $\mathbb{Z}_3$ en función del valor de a:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & 2z & + & t & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & & & = & 1 \\ & & y & + & z & + & at & = & 1 \\ x & & & + & 2az & & & = & 2 \end{array}\right. .$$

Solución:

Vamos a tomar la matriz ampliada del sistema y realizar transformaciones elementales por filas hasta llevarla a una forma lo más reducida posible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2a & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(2)]{E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2a+1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 & 2 \\ 0 & 0 & 2a+1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{43}(a+2)]{E_{13}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a & 2a+2 \end{pmatrix}$$

Y ahora distinguimos casos:

- $a = 0$. En este caso, la última fila quedaría (0 0 0 0 2), que se corresponde con la ecuación $0 = 2$. El sistema es entonces incompatible (tendríamos que $rg(A) = 3$ y $rg(A|b) = 4$).
- $a = 1$. En este caso, la última fila sería (0 0 0 2 1) que se corresponde con la ecuación $2t = 1$. Podemos ver que en este caso el sistema es compatible determinado ($rg(A) = rg(A|b) = 4$), y la solución sería $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $t = 2$.
- $a = 2$. La última fila es (0 0 0 0 0). Entonces, $rg(A) = rg(A|b) = 3$ y el sistema es compatible indeterminado. Tiene tres soluciones que son: $x = 0$, $y = 2$, $z = 2$, $t = 0$; $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 1$ y $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 2$.

También puede hacerse calculando el rango de la matriz A y el de la ampliada, y para ello nos valemos de los determinates. En primer lugar, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Luego $rg(A) \geq 3$ y $rg(A|b) \geq 3$ independientemente del valor de a. Ahora calculamos el determinante de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 2a+1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 2a+1 & 2 \end{vmatrix} = 2-(a+2)(2a+1) = 2+a^2+a+1 = a^2+a$$

Puesto que $a^2 + a = a(a + 1)$ tenemos que si $a = 0$ ó $a = 2$, el determinante de A vale 0, mientras que si $a = 1$, el determinante de A vale $2 \neq 0$.

Por tanto, si $a = 0, 2$, $rg(A) = 3$ mientras que si $a = 1$, $rg(A) = 4$ en cuyo caso el sistema es compatible determinado.

Estudiamos que le pasa a la matriz $(A|b)$ cuando $a = 0$. Para eso calculamos el determinante formado por las columnas primera, segunda, tercera y quinta.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) = 2 \neq 0$$

Luego $rg(A|b) = 4$. Como el rango de A valía 3, en este caso ($a = 0$) el sistema es incompatible.

Por último estudiamos que le pasa a la matriz $(A|b)$ cuando $a = 2$. Hacemos igual que antes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

El último determinante vale cero ya que la matriz tiene dos filas iguales. Por tanto $rg(A|b) = 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

En resumen tenemos:

- $a = 0$. $rg(A) = 3$, $rg(A|b) = 4$. Sistema incompatible.
- $a = 1$. $rg(A) = 4$, $rg(A|b) = 4$. Sistema compatible determinado.
- $a = 2$. $rg(A) = 3$, $rg(A|b) = 3$. Sistema compatible indeterminado.

Ejercicio 7. En el espacio vectorial $(\mathbb{Z}_5)^4$ consideramos los subespacios vectoriales

$$U = \langle (0,1,1,1),(2,0,2,0)\rangle = L[(0,1,1,1),(2,0,2,0)]$$
$$W \equiv \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ \quad 2x+y+2t=0 \end{cases}.$$

Calcula unas ecuaciones cartesianas de $U+W$ y comprueba si $(1,2,2,2) \in U+W$.

Solución:

Puesto que nos piden calcular la suma de los subespacios necesitamos una base de cada uno de ellos (con un sistema de generadores bastaría). Una base de U la tenemos, pues nos la da el enunciado. Dicha base es $B_U = \{(0,1,1,1);\ (2,0,2,0)\}$.

Calculamos entonces una base de W. Como tenemos las ecuaciones cartesianas, resolvemos el sistema que nos define W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$W \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & + & 4z & + & t & = 0 \\ & y & + & 2z & & & = 0 \end{array} \right. \quad \text{es decir, } W \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & z+4t \\ y & = & 3z \end{array} \right.$$

Dándole a z y a t los valores 1 0 y 0, 1 obtenemos una base de W: $B_W = \{(1,3,1,0);\ (4,0,0,1)\}$.

Si ahora unimos las dos bases lo que obtenemos es un sistema de generadores de $U+W$. A partir de ellos vamos a obtener una base:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(1)]{E_{21}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(2)]{\substack{E_{12}(2) \\ E_{32}(4)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{43}(4)]{E_{13}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por tanto vemos que una base de $U+W$ es $B_{U+W} = \{(1,0,0,4);\ (0,1,0,0);\ (0,0,1,1)\}$.

Puesto que $dim(U+W) = 3$ y $U+W$ es subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^4$, el subespacio $U+W$ viene dado por $4-3=1$ ecuación cartesiana. Para calcularla escribimos las ecuaciones paramétricas, y esto lo hacemos teniendo en cuenta que un vector $(x,y,z,t) \in U+W$ si, y sólo si, es combinación lineal de los vectores de la base. Por tanto, deben poder expresarse de la forma:

$$(x,y,z,t) = a(1,0,0,4) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,1)$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{array}{ccccc} x & = & a & & \\ y & = & & b & \\ z & = & & & c \\ t & = & 4a & & + \ c \end{array}$$

Y aquí vemos que si $(x,y,z,t) \in U+W$ se tiene que $t = 4x+z$. Por tanto, $U+W \equiv x+4z+t=0$. Y ya tenemos las ecuaciones cartesianas de $U+W$ (en este caso, la ecuación cartesiana).

Para comprobar si $(1,2,2,2) \in U+W$ basta comprobar si satisface la ecuación. Puesto que $1+4\cdot 2+2 = 1 \neq 0$ dicho vector no pertenece a $U+W$.

Ejercicio 8. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ la única aplicación lineal tal que

$$\begin{array}{c} \ker(f) = N(f) \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{array} \right. \\ V_2 = \langle (1,0,1), (1,1,0) \rangle = L[(1,0,1), (1,1,0)] \end{array}.$$

donde V_2 denota el subespacio propio de valor propio 2.

Calcula $M_{B_c}(f) = A(f; B_c, B_c)$ donde B_c es la base canónica de $(\mathbb{Z}_7)^3$.

Solución:

Recordemos que el subespacio propio de valor propio 2 está formado por todos los vectores $u \in (\mathbb{Z}_7)^3$ tales que $f(u) = 2 \cdot u$.

Calculamos ahora una base del núcleo de f. Como tenemos las ecuaciones de dicho subespacio, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego $N(f) \equiv \left\{ \begin{array}{ccccc} x & & + & 5z & = & 0 \\ & y & + & 2z & = & 0, \end{array} \right.$ es decir, $N(f) \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 2z \\ y & = & 5z \end{array} \right.$

Teniendo esto en cuenta, los distintos datos que nos dan sobre la aplicación f nos dicen:

- $(2,5,1) \in N(f)$, es decir, $f(2,5,1) = (0,0,0)$.
- $(1,0,1)$ es un vector de valor propio 2, es decir, $f(1,0,1) = (2,0,2)$.
- $(1,1,0)$ es un vector de valor propio 2, es decir, $f(1,1,0) = (2,2,0)$.

Y puesto que $B = \{(2,5,1);\ (1,0,1);\ (1,1,0)\}$ forma una base de $(\mathbb{Z}_7)^3$ tenemos todo lo necesario para determinar la aplicación lineal f.

Notemos que las columnas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ son las coordenadas de los vectores $f(2,5,1)$, $f(1,0,1)$ y $f(1,1,0)$ en la base canónica. Por tanto, tenemos que $A = M_{B,B_c}(f)$.

Para calcular la matriz de f en la base canónica tenemos en cuenta que $M_{B_c}(f) = M_{B,B_c}(f) \cdot M_{B_c \to B}$ y que

$$M_{B_c \to B} = (M_{B \to B_c})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$M_{B_c}(f) = M_{B,B_c}(f) \cdot M_{B_c \to B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

De aquí podemos calcular una expresión explícita para f: $f(x,y,z) = (3x+6y+6z, 6x+3y+z, 4x+3y+5z)$. Es fácil comprobar, con esta expresión, que $f(2,5,1) = (0,0,0)$, $f(1,0,1) = (2,0,2)$ y $f(1,1,0) = (2,2,0)$.

Otra forma de resolver este ejercicio sería la siguiente:

Conocemos cuanto vale $f(2,5,1)$, $f(1,0,1)$ y $f(1,1,0)$. Necesitamos calcular $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ y $f(0,0,1)$. Para esto, escribimos estos tres vectores como combinación lineal de los vectores de la base B.

- $(1,0,0) = a(2,5,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0)$. Esto nos da lugar al sistema

  $$\begin{array}{ccccccc} 2a & + & b & + & c & = & 1 \\ 5a & & & + & c & = & 0 \\ a & + & b & & & = & 0 \end{array}$$

  que resolvemos a continuación:

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{13}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[E_{31}(5)]{E_{21}(2)} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{2}(4)} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[E_{32}(1)]{E_{12}(6)} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{3}(5)} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[E_{23}(3)]{E_{13}(4)} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

  Y que nos da la solución $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$. Notemos que estos valores coinciden con los de la primera columna de la matriz $M_{B_c \to B}$. A partir de aquí calculamos $f(1,0,0)$.

$$f(1,0,0) = f(5(2,5,1) + 2(1,0,1) + 3(1,1,0)) = 5f(2,5,1) + 2f(1,0,1) + 3(1,1,0) = 5(0,0,0) + 2(2,0,2) + 3(2,2,0) = (3,6,4)$$

  Y esto nos da la primera columna de la matriz $M_{B_c}(f)$.

- $(0,1,0) = a'(2,5,1) + b'(1,0,1) + c'(1,1,0)$. El sistema que resulta tiene como solución $a' = 2$, $b' = 5$, $c' = 5$.

$$f(0,1,0) = f(2(2,5,1) + 5(1,0,1) + 5(1,1,0)) = 2f(2,5,1) + 5f(1,0,1) + 5(1,1,0) = 2(0,0,0) + 5(2,0,2) + 5(2,2,0) = (6,3,3)$$

  Y ya tenemos la segunda columna de $M_{B_c}(f)$.

- $(0,0,1) = a''(2,5,1) + b''(1,0,1) + c''(1,1,0)$. El sistema que resulta tiene como solución $a'' = 2$, $b'' = 6$, $c'' = 4$

$f(0,0,1) = f(2(2,5,1) + 6(1,0,1) + 4(1,1,0)) = 2f(2,5,1) + 6f(1,0,1) + 4(1,1,0) = 2(0,0,0) + 6(2,0,2) + 4(2,2,0) = (6,1,5)$

Ejercicio 9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7),$$

calcula, si es posible, matrices $P, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7)$ tales que D es diagonal y $A = PDP^{-1}$.

Solución:

Notemos que nos piden es encontrar una matriz regular P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea una matriz diagonal.

De existir esta matriz P, sus columnas serían vectores propios de A. Por tanto hemos de ver si la matriz A tiene una base de vectores propios, o lo que es lo mismo si A es diagonalizable.

Comenzamos entonces calculando el polinomio característico de A, que es igual al determinante de la matriz $A - \lambda Id$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 1 \\ 6 & 4-\lambda & 2 \\ 5 & 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda) + 6\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 5 - (1\cdot 5(4-\lambda) + 1\cdot 6(6-\lambda) + 2\cdot 4(5-\lambda)) \\
&= (20 - 5\lambda - 4\lambda + \lambda^2)(6-\lambda) + 24 + 10 - (20 - 5\lambda + 36 - 6\lambda + 40 - 8\lambda) \\
&= (\lambda^2 - 9\lambda + 20)(6-\lambda) + 34 - (96 - 19\lambda) \\
&= (6\lambda^2 - \lambda^3 - 54\lambda + 9\lambda^2 + 120 - 20\lambda) + 34 - 96 + 19\lambda \\
&= -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 55\lambda + 58 \\
&= 6\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2
\end{aligned}$$

Continuamos calculando los valores propios, es decir, las raíces de este polinomio. Calculamos también sus multiplicidades algebraicas.

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & & 6 & 0 & 1 \\ \hline & 6 & 0 & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & & 5 & 5 & 5 \\ \hline & 6 & 6 & 6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 6 & 6 & 6 \\ 2 & & 5 & 1 \\ \hline & 6 & 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & 6 & 4 \\ 2 & & 5 \\ \hline & 6 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & 6 & 4 \\ 3 & & 4 \\ \hline & 6 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & 6 & 4 \\ 4 & & 3 \\ \hline & 6 & 0 \end{array}$$

Y vemos que tiene dos valores propios: $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad algebraica $m_2 = 2$ y $\lambda_2 = 4$ con multiplicidad algebraica $m_4 = 1$.

Vamos con la multiplicidad geométrica. Puesto que si λ es un valor propio su multiplicdad geométrica d_λ verifica que $1 \leq d_\lambda \leq m_\lambda$ sabemos que la multiplicidad geométrica del valor propio 4 vale 1 mientras que la del valor propio 2 puede valer 1 ó 2.

Lo siguiente es calcular los subespacios propios y de esta forma tendremos d_2 y d_4.

Primero calculamos V_2. Este subespacio viene dado por unas ecuaciones cuya matriz de coeficientes es $A - 2Id$. Es decir,

$$V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & z & = & 0 \\ 6x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 5x & + & 4y & + & 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

Calculamos la forma normal de Hermite de su matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(15)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(2)]{E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $V_2 \equiv x + 5y + 5z = 0$ de donde $d_2 = dim(V_2) = 2$.

Una base de V_2 es $B_{V_2} = \{(2,1,0);\ (2,0,1)\}$.

Para calcular V_4 repetimos lo mismo. Calculamos la forma normal de Hermite de $A - 4Id$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(2)]{E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(2)]{E_{12}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego V_4 viene dado por las ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 5z & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 0. \end{array} \right.$ La dimensión es entonces 1 y una base es $B_{V_4}\{(2,4,1)\}$.

Con lo que hemos hecho hasta ahora podemos saber que la matriz A es diagonalizable, y una base de vectores propios es $B = \{(2,1,0);\ (2,0,1);\ (2,4,1)\}$. Los dos primeros son vectores propios de valor propio 2 y el tercero es un vector propio de valor propio 4.

Si tomamos como P a la matriz cuyas columnas son estos cuatro vectores, es decir, $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ que es una matriz diagonal.

Tenemos entonces las matrices D y P que nos pedía el enundiado.

Ejercicio 10. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra COCODRILO? ¿Cuántas de ellas tienen las tres O juntas? ¿En cuántas de ellas aparecen juntas una C y una R?

Solución:
Hacemos cada uno de los tres apartados.

1. En primer lugar tenemos que ordenar las siguientes letras: C O C O D R I L O.

   Tenemos 9 letras, de las cuales hay tres iguales entre sí (O,O,O) y otras dos iguales entre sí (C,C). Luego lo que tenemos son permutaciones con repetición de 9 objetos de los que hay 3 de un tipo, 2 de otro tipo, y del resto hay sólo uno. El número total de tales ordenaciones es:

$$\frac{9!}{3!\cdot 2!} = \frac{362880}{6\cdot 2} = 30240$$

2. Para ver en cuantas ordenaciones aparecen las tres O juntas consideramos las tres O como una única letra (que representaremos como X). Tenemos entonces que ordenar las letras C C D R I L X. Y en cada una de estas ordenaciones sustituimos la X por OOO.

   Hay un total de 7 letras de las que hay dos repetidas. El número total de ordenaciones es:

$$\frac{7!}{2!} = \frac{5040}{2} = 2520$$

3. Ahora contamos las ordenaciones en las que aparecen juntas una C y una R. Distinguimos dos casos: aquellos en los que nos encontramos con la secuencia CR y aquellos en los que nos encontramos con la secuencia RC.

   Para los primeros, consideramos las letras CR como una letra que representaremos como Y. En tal caso, hemos de ordenar las letras C O O D I L O Y, y eso puede hacerse de

$$\frac{8!}{3!} = \frac{40320}{6} = 6720$$

   Para los segundos se procede de igual forma y nos resulta que tenemos también 6720 ordenaciones.

   Pero aquellas ordenaciones en las que tengamos CRC las hemos contado dos veces, pues aparece tanto la secuencia CR como la secuencia RC. Esto ocurre en $\frac{7!}{3!} = 840$ formas.

   Por tanto, el número total de ordenaciones en las que aparecen juntas una C y una R es

$$6720 + 6720 - 840 = 12600$$

   Este apartado podría entenderse como que habría que contar en cuantas ordenaciones de las 2520 que nos han salido en el apartado 2 (y no de las 30240 totales, como lo hemos hecho) aparecen juntas una C y una R.

   En tal caso, el ejercicio se haría igual pero contando inicialmente las ordenaciones de las letras C C D R I L X. El resultado es entonces:

$$6! + 6! - 5! = 720 + 720 - 120 = 1320$$

   Pues contaríamos primero dos veces las ordenaciones de C D I L X Y (una en la que Y es la secuencia CR y otra en la que Y es la secuencia RC) y luego restaríamos las ordenaciones de D I L X Z (donde Z representa a CRC).