Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

Convocatoria de Febrero. Curso 2013-2014

(13/02/2014)

ALUMNO/A:______________________ GRUPO:_____ DNI:__________

1. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $Y = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$. En $\mathcal{P}(X)$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$A \ R \ B \quad \text{si, y sólo si,} \quad A \setminus Y = B \setminus Y$$

   Entonces el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R$:
   a) tiene 6 elementos
   b) tiene 16 elementos
   c) tiene 64 elementos
   d) tiene 1024 elementos
2. Sea $B = \{(2, 4);\ (4, 0);\ (4, 3);\ (7, 3)\}$. Consideramos en B el orden inducido por el orden producto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Entonces:
   a) B no tiene ínfimo y sus elementos maximales son $(4, 3)$, $(7, 3)$.
   b) $(1, 1)$ es una cota inferior de B, y $(7, 3)$ su único elemento maximal.
   c) B no tiene máximo, y sus elementos maximales son $(2, 4)$ y $(7, 3)$.
   d) B tiene un único elemento maximal, que es $(7, 4)$, y que coincide con el supremo.
3. Dado el sistema de congruencias:

$$\left.\begin{array}{rcrl} 38x & \equiv & 30 & \text{mód } 70 \\ 59x & \equiv & 5 & \text{mód } 85 \end{array}\right\}$$

   a) Tiene solución, pero ninguna entre 1000 y 10000.
   b) Tiene 15 soluciones entre 1000 y 10000.
   c) Tiene 3 soluciones entre 1000 y 10000.
   d) No tiene solución.
4. Sea $n = (2^5)^8 - (5^8)^4$. El resto de dividir n entre 11 es:
   a) 0
   b) 3
   c) 6
   d) 9
5. Sea el anillo $A = \mathbb{Z}_3[x]_{x^4+2x+1}$. Entonces:
   a) A es un cuerpo con 3^4 elementos.
   b) A es un anillo con 4^3 elementos que no es un cuerpo, y en el que el inverso de $[x^2 + x + 1]$ vale $[x^2 + 2x]$.
   c) A es un cuerpo en el cual el inverso de $[x]$ es $[2x^3 + 1]$.
   d) A no es un cuerpo, pero el elemento $[x^2 + x + 1]$ tiene inverso y vale $[2x^2 + x]$.
6. Tenemos 15 caramelos (todos iguales) que queremos repartir entre 4 niños. ¿De cuántas formas podemos hacerlo si a cada niño hay que darle al menos un caramelo?
   a) 364.
   b) 1365.
   c) 330.
   d) 32760.

7. Dado el sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & ay & = & 2 \\ (a-1)x & + & 2ay & = & 3-a \\ (a+1)x & & & = & a+1 \end{array}\right.$$
podemos afirmar que:
a) es compatible determinado, independientemente del valor de a.
b) la compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a.
c) es siempre compatible, aunque depende del valor de a que sea compatible determinado o indeterminado.
d) es incompatible, independientemente del valor de a.

8. Sea U_1 el subespacio de $(\mathbb{Z}_3)^4$ generado por los vectores $(2,1,2,0)$, $(2,0,2,1)$ y $(0,2,0,1)$, y sea U_2 el subespacio de $(\mathbb{Z}_3)^4$ de ecuaciones
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & y & & & + & t & = & 0 \end{array}\right. .$$
Entonces:
a) $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ y una base de $U_1 \cap U_2$ es $\{(1,0,2,2)\}$.
b) $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$.
c) $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ y una base de $U_1 \cap U_2$ es $\{(2,2,2,2)\}$.
d) $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ y una base de $U_1 \cap U_2$ es $\{(2,1,0,0)\}$.

9. Sea $B = \{(1,2,3);\ (3,1,1);\ (4,2,1)\}$ una base de $(\mathbb{Z}_5)^3$, y sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ la aplicación lineal dada por
$$f(x,y,z) = (4y+2z, 2x+4y+z, 3x+2z)$$
La matriz de f en la base B es:
a) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_5)$. Entonces:
a) A tiene cuatro valores propios distintos y es diagonalizable.
b) A tiene tres valores propios distintos y es diagonalizable.
c) A tiene dos valores propios distintos y no es diagonalizable.
d) Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.