Alumno:______________________________ DNI:_____________ Grupo: ____

Lógica y Métodos Discretos

Examen de Teoría

(21/09/2012)

Ejercicio 1. *Sean x_n e y_n las sucesiones definidas por:*

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & y_0 = 0 \\ x_1 = 2 & \\ x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n & y_n = y_{n-1} + n \cdot 2^n \end{array}$$

Es decir, $y_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + \cdots + n \cdot 2^n$.

1. *Calcula los términos x_2, x_3, x_4, x_5 e y_1, y_2, y_3, y_4, y_5.*
2. *Comprueba que $x_n = y_n$ para todo número natural n*
3. *Calcula una expresión para el término general x_n (o de y_n).*

Ejercicio 2. *Sea Q_3 el grafo cuyo conjunto de vértices es $\mathbb{B}^3$, y dos vértices (x, y, z) y (x', y', z') son adyacentes si se diferencian en una coordenada. De forma análoga se define el grafo Q_4 (y el grafo Q_n).*

1. *Estudia si Q_3 y Q_4 son grafos de Euler.*
2. *Comprueba que ambos son grafos de Hamilton. Da un ciclo de Hamilton para cada uno de ellos.*
3. *Calcula el número cromático de Q_3 y Q_4.*
4. *Da una representación plana del grafo Q_3.*
5. *Sea G el dual de Q_3 obtenido en la representación que has hecho en el apartado anterior. Calcula su número cromático. ¿Cuántos colores son necesarios para pintar las caras de un cubo, si dos caras adyacentes deben tener colores diferentes?.*

Ejercicio 3. *Sea $X = \{(0,0);\ (1,0);\ (3,1);\ (4,3);\ (4,4);\ (2,2);\ (3,4);\ (1,3);\ (0,1)\} \subseteq \mathbb{N}^2$. Consideramos en X el orden producto.*

1. *Dibuja el diagrama de Hasse de X.*
2. *Comprueba que X no es un retículo.*
3. *Calcula cotas superiores, cotas inferiores, supremo, ínfimo, elementos maximales, elementos minimales, máximo y mínimo (si existen) de $Y = \{(3,1);\ (2,2);\ (3,4);\ (4,3)\} \subseteq X$.*
4. *Encuentra un subconjunto de $\mathbb{N}^2$ que contenga a X, con 15 elementos a lo sumo, y que sea un retículo. (Opcional: estudia si es distributivo).*

Ejercicio 4. *Dada la función booleana $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ definida por*

$$f(x,y,z,t) = (x+y+\overline{z}+t)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+z)\cdot(x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})\cdot(\overline{x}+y+z+\overline{t})\cdot(x+\overline{z}+t)\cdot(\overline{x}+y+z+t)$$

1. *Calcula la forma normal canónica disyuntiva de f.*
2. *Optimiza la expresión obtenida en el apartado anterior.*

Ejercicio 5.

1. *¿Cuántos números en binario hay con seis cifras, y que contengan la secuencia 10? ¿Y que contengan la secuencia 01?*

2. *Tenemos un grupo con 12 hombres y 9 mujeres, y formamos cuatro parejas (cada pareja está formada por un hombre y una mujer). ¿De cuántas maneras podemos formar esas cuatro parejas?. Si en el grupo, hay un hombre y una mujer que no pueden ir juntos. ¿De cuántas maneras podemos formar entonces las cuatro parejas?*

Ejercicio 6. *Sea* $\alpha = (p \to (q \to (r \to s))) \to ((p \to q) \to (p \to (r \to s)))$. *Comprueba que* α *es una tautología.*

Ejercicio 7. *Sean* $\alpha_1 = \forall y(Q(a,y) \to \exists z(P(z) \wedge R(z,y)))$ *y* $\alpha_2 = \exists x R(x,a) \to \forall z \exists y(R(z,y) \wedge Q(y,z))$ *dos fórmulas de un lenguaje de primer orden, y consideramos la estructura siguiente:*

- *Dominio: Números naturales* ($\mathbb{N}$).
- *Asignación de constantes:* $a = 1$.
- *Asignación de predicados:* $P(x) \equiv x$ *es primo.* $\quad Q(x,y) \equiv x < y. \quad R(x,y) \equiv x|y.$

Estudia si las fórmulas α_1 *y* α_2 *se interpretan como verdaderas o falsas en esta estructura.*

Ejercicio 8. *Dadas las siguientes cláusulas:*

$\alpha_1 = P(x) \vee \neg Q(a,x).$

$\alpha_2 = T(x) \vee \neg P(x).$

$\alpha_3 = Q(x, f(x)) \vee \neg R(x) \vee \neg S(x).$

$\alpha_4 = S(f(f(a))).$

$\alpha_5 = P(a).$

$\alpha_6 = \neg T(f(x)) \vee \neg R(x) \vee \neg S(x).$

$\alpha_7 = S(x) \vee \neg S(f(x)).$

$\alpha_8 = R(x) \vee \neg P(x).$

Comprueba que el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ *es un conjunto de Horn, y que es insatisfacible.*