Alumno:____ DNI:________________ Grupo: C

Lógica y Métodos Discretos

Examen de Teoría

(12/09/2011)

1. Sea mul la función dada por:

$$\mathrm{mul}(a,0) = 0,$$
$$\mathrm{mul}(a,n) = \begin{cases} \mathrm{mul}\left(2a, \frac{n}{2}\right), & \text{si } n \text{ es par} \\ \mathrm{mul}\left(2a, \frac{n-1}{2}\right) + a, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

   a) Calcula $\mathrm{mul}(5,8)$, $\mathrm{mul}(7,10)$ y $\mathrm{mul}(10,13)$.

   b) Demuestra por inducción que $\mathrm{mul}(a,n) = a \cdot n$, para todo $a, n \in \mathbb{N}$.

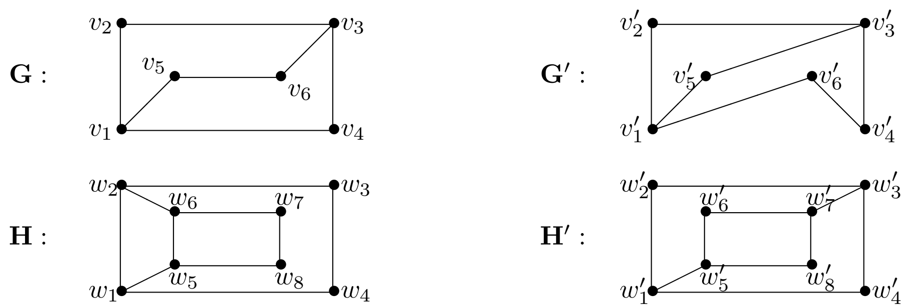
2. Sea u_n la sucesión definida por:

$$u_0 = 1$$
$$u_1 = 4$$
$$u_n = 4(u_{n-1} - u_{n-2}), \text{ si } n \geq 2$$

   Encuentra una expresión para el término general u_n y calcula u_{25}.

3. Un comité de tres personas toma decisiones por votos, votando sí o no a cada propuesta. Una propuesta prospera cuando recibe al menos dos de los tres votos. Da una función booleana de tres variables que valga 1 cuando, y sólo cuando, prospere la propuesta sobre la que se vota. Simplifica dicha función y diseña un circuito combinacional que la realice.

4. Sean G, G', H y H' los grafos siguientes:



   Estudia si los grafos G y G' son isomorfos, y si H y H' son isomorfos.

5. Consideremos todos los números de 0 a 9999 tal y como aparecen actualmente en las matrículas de los automóviles matriculados en España. Responde a las siguentes cuestiones:

   a) ¿En cuántos de ellos aparecen cuatro dígitos distintos?

   b) ¿En cuántos de ellos aparecen exactamente tres dígitos distintos?

   c) ¿En cuántos de ellos aparecen exactamente dos dígitos distintos?

6. Decide si el siguiente conjunto de fórmulas es o no satisfacible:

$$\{\neg a \vee a \vee c;\ b \vee c; \neg a \vee c \vee d \vee e;\ \neg e;\ a \vee \neg c \vee \neg d;\ \neg a \vee \neg d;\ c \vee \neg d;\ a \vee d;\ \neg c \vee d\}$$

   y caso de ser satisfacible, encuentra una valoración (interpretación) que lo satisfaga.

7. Dada la fórmula $\alpha = \forall x \exists y(P(x,y) \to P(y,x)) \to \exists x \exists y(P(y,x) \to \neg P(x,y))$, estudia si α es universalmente válida, es satisfacible y refutable o es una contradicción.

8. Considera las siguientes fórmulas:

   - $\varphi_1 = \exists x(Q(x) \wedge \forall y(P(y) \to R(x,y)))$
   - $\varphi_2 = \forall x(Q(x) \to \exists y(P(y) \wedge S(x,y))$
   - $\varphi_3 = \forall x(\exists y(S(x,y) \wedge R(x,y)) \to T(x))$
   - $\psi = \exists x(T(x) \wedge Q(x))$

   y, demuestra que:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi$$