APELLIDOS: .... GRUPO: ...

NOMBRE: .... D.N.I.: ....

ALEM, Examen final

03 de febrero de 2016

1. Sea X un conjunto y $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Decide razonadamente si es necesariamente cierta la siguiente igualdad:

$$(A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

2. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y R la relación de equivalencia en X definida por:

$$xRy \quad \text{si} \quad 4 \mid x + 3y$$

Calcula el conjunto cociente, dando explícitamente todos sus elementos.

3. Dado el sistema de congruencias:

$$\begin{aligned} 15x &\equiv 7 \pmod{16} \\ 30x &\equiv 38 \pmod{56} \end{aligned}$$

estudia si tiene solución y en caso afirmativo, da todas las soluciones comprendidas entre -100 y 100.

4. En este ejercicio trabajamos en $\mathbb{Z}_{53}$.
   a) Calcula 247^{3645}.
   b) Resuelve la ecuación $17x - 32 = 43 - (5x - 8)$.
5. Dados los polinomios $p(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ y $q(x) = x^4 + x^3 + x + 2$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_3$:
   a) Calcula $\mathrm{mcd}(p(x), q(x))$.
   b) Calcula las raíces de $p(x)$.
   c) Encuentra una factorización de $p(x)$ como producto de irreducibles.
6. Disponemos de 14 caramelos para repartir entre 4 niños. Da razonadamente el número de formas de repartir los caramelos entre los niños en cada uno de los siguientes supuestos:
   a) Cada niño debe recibir al menos un caramelo.
   b) Ningún niño puede recibir más caramelos que los otros tres compañeros juntos.
   c) El número de caramelos que ha de recibir cada niño es par.

7. Dado el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & & & = & 2 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 4 \\ x & + & 2y & & & + & t & = & 4 \\ x & + & y & + & z & + & 3t & = & 0 \end{array}$$

calcula todas sus soluciones.

8. Sea $B = \{(1,1,-2);\ (3,1,2);\ (4,2,-1)\}$ un subconjunto de $\mathbb{Q}^3$ y sea B_c la base canónica de dicho espacio vectorial.
   a) Comprueba que B es una base.
   b) Calcula las matrices del cambio de base de B a B_c y de B_c a B.
   c) Calcula las coordenadas del vector $v = (3,-1,2)$ en la base B.

9. Sea $V = (\mathbb{Z}_7)^3$ y las aplicaciones lineales $f, g \colon V \longrightarrow V$ definidas por las siguientes igualdades:

$$f(x,y,z) = (3x+4y+2z, 5x+y+3z, 4y+6z)$$
$$g(x,y,z) = (2x+y, x+z, 6y+2z)$$

   Sea $U = N(g)$ y $W = \mathrm{Im}(f)$. Entonces:
   a) Calcula una base de $U + W$. ¿Es dicha suma directa?
   b) ¿Cuál es la dimensión de $\mathrm{Im}(g)$?

10. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_3)$$

estudia si A es o no diagonalizable, y en caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea una matriz diagonal D y di cuál es la matriz D.