CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. GRUPO B.

1. Calcula los números reales x que verifican que

$$|3x-1| < x^2 - |x+2|$$

Solución.

La desigualdad que hay que resolver depende de que los dos argumentos de los valores absolutos que aparecen en dicha desigualdad sean mayores o menores que 0. $3x-1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1/3$ y $x+2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -2$. Consideremos ahora los distintos intervalos que nos dan los números anteriores.

- Si $x \leq -2$, entonces $x \leq 1/3$ también y los dos argumentos que aparecen son números menores o iguales a cero con lo que la desigualdad se convierte en

$$1-3x < x^2+x+2 \Longleftrightarrow x^2+4x+1 > 0.$$

Si resolvemos la ecuación $x^2+4x+1=0$ obtenemos las soluciones $x=-2-\sqrt{3}$ y $x=-2-\sqrt{3}$ y $x^2+4x+1>0$ cuando $x<-2-\sqrt{3}$ o $x>-2+\sqrt{3}$. Como en este apartado estamos considerando únicamente valores de x menores o iguales que -2 obtenemos como solución $]-\infty,-2-\sqrt{3}[$.

- Si $-2 \leq x \leq 1/3$ entonces $x+2 \geq 0$ y $3x-1 \leq 0$ y la igualdad queda

$$1-3x < x^2-x-2 \Longleftrightarrow x^2+2x-3 > 0.$$

La ecuación $x^2+2x-3=0$ tiene soluciones $x=1$ y $x=-3$ y será $x^2+2x-3>0$ cuando $x<-3$ o $x>1$. Como en este caso estamos interesados en soluciones en el intervalo $[-2,1/3]$ pues no hay ninguna solución.

- Finalmente, si $x \geq 1/3$ los argumentos de los dos valores absolutos son mayores o iguales a 0 y tenemos la ecuación

$$3x-1 < x^2-x-2 \Longleftrightarrow x^2-4x-1 > 0.$$

La ecuación $x^2-4x-1=0$ tiene soluciones $x=2-\sqrt{5}$ y $x=2+\sqrt{5}$ y será $x^2-4x-1>0$ cuando $x<2-\sqrt{5}$ o $x>2+\sqrt{5}$. Como estamos interesados en soluciones en el intervalo $[1/3,+\infty[$ nos queda entonces $]2+\sqrt{5},+\infty[$.

Uniendo las distintas soluciones que hemos obtenido tenemos que la desigualdad se cumple cuando $x \in]-\infty,-2-\sqrt{3}[\bigcup]2+\sqrt{5},+\infty[$.

2. Demuestra que para todo natural n se verifica que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2n\sqrt{n}-1.$$

Vamos a hacerlo por inducción. Llamaremos $A=\{n\in\mathbb{N}: \ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2n\sqrt{n}-1\}$ y se trata de demostrar que $A=\mathbb{N}$, que es inmediato si demostramos que A es inductivo.

Claramente $1\in A$ ya que a la izquierda de la desigualdad queda 1 y a la derecha queda $2\cdot 1\cdot\sqrt{1}-1=1$ y en este caso se da la igualdad.

Supongamos que, para cierto natural n, se verifica que $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2n\sqrt{n}-1$ y tenemos que demostrar que la desigualdad es cierta también para $n+1$, es decir, que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(n+1)\sqrt{n+1}-1,$$

pero utilizando la hipótesis de inducción tenemos que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2n\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

con lo que basta con demostrar que

$$2n\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(n+1)\sqrt{n+1}-1,$$

es decir, que

$$2n\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(n+1)\sqrt{n+1},$$

o, lo que es lo mismo, que

$$2(n+1)\sqrt{n+1}-2n\sqrt{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

pero

$$2(n+1)\sqrt{n+1}-2n\sqrt{n} \geq 2(n+1)\sqrt{n+1}-2n\sqrt{n+1} = 2\sqrt{n+1}$$

que es mayor que 1 (de hecho es mayor que 2) para cualquier natural, mientras que $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<1$ para cualquier natural con lo que se da la desigualdad buscada y la propiedad se cumple para cualquier natural.

3. Demuestra que, si $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

   Solución. Como se pide demostrar una igualdad válida para todos los naturales se puede intentar hacerlo por inducción. Consideremos $A = \{n \in \mathbb{N} : \ 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}\}$ y vamos a intentar demostrar que es inductivo para concluir que la propiedad es cierta para todos los naturales. Para ver si $1 \in A$ interpretamos la igualdad sustituyendo n por 1 obtenemos a la izquierda de la igualdad $1^2 = 1$ mientras que a la derecha obtenemos $\frac{1\cdot(4\cdot 1^2-1)}{3} = 1$ y la igualdad se cumple.

   Supongamos ahora que, para cierto natural n se cumple que $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ y veamos si la igualdad es también cierta para $n+1$. En este caso se trata de comprobar si es cierto que
$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2+(2n+1)^2 = \frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}.$$

   Por la hipótesis de inducción el miembro a la izquierda de la igualdad queda
$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2+(2n+1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}+(2n+1)^2,$$
   con lo que, lo único que hay que demostrar es que
$$\frac{n(4n^2-1)}{3}+(2n+1)^2 = \frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3},$$
   que es un ejercicio de aritmética básica.

4. Se define la sucesión $x_1 = \frac{-1}{3}$ y $x_{n+1} = \dfrac{-1}{2+x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula su límite.

   Solución.

   Al tratarse de una sucesión definida por recurrencia se puede intentar demostrar que es monótona y acotada, para concluir que es convergente. Ambas propiedades son suceptibles de ser comprobadas utilizando el principio de inducción.

   Para ver qué tipo de monotonía puede tener la sucesión comprobamos los primeros términos. Tenemos que
$$x_2 = \frac{-1}{2+x_1} = \frac{-1}{2-\frac{1}{3}} = \frac{-3}{5}.$$
   Podemos comprobar ahora también qué ocurre con x_3.
$$x_3 = \frac{-1}{2+x_2} = \frac{-1}{2-\frac{3}{5}} = \frac{-5}{7}.$$

   Entonces se tiene que $-5/7 < -3/5 < -1/3$, es decir, $x_3 < x_2 < x_1$ Consideremos entonces $A = \{n \in \mathbb{N} : \quad x_{n+1} < x_n\}$. Se trata de demostrar que A es inductivo y concluir que la sucesión es decreciente. Claramente $1 \in A$ como hemos visto antes. Supongamos que, para cierto natural n, se tiene que $x_{n+1} < x_n$. Si sumamos 2 la desigualdad se mantiene, $2+x_{n+1} < 2+x_n$. Si invertimos la desigualdad cambia de sentido, es decir $\frac{1}{2+x_{n+1}} > \frac{1}{2+x_n}$. Finalmente, si multiplicamos por -1 la desigualdad vuelve a cambiar de sentido y nos queda

$$x_{n+2} = \frac{-1}{2+x_{n+1}} < \frac{-1}{2+x_n} = x_{n+1},$$

con lo que $n+1 \in A$, y la sucesión es decreciente.

Para concluir que es convergente nos falta comprobar que está acotada (que en una sucesión decreciente es lo mismo que decir que está minorada), pero no tenemos un candidato claro a minorante con el que probar. Si la sucesión estuviera efectivamente minorada entonces sería convergente a cierto número L, que debería verificar que

$$L = \lim\{x_{n+1}\} = \lim\{\frac{-1}{2+x_n}\} = \frac{-1}{2+L},$$

es decir L es solución de la ecuación $x = \frac{-1}{2+x}$. Si resolvemos esta ecuación la única solución que obtenemos es -1, así que (si la sucesión estuviera minorada) tendría que ser $L = -1$, pero en este caso -1 debería ser un minorante de la sucesión. Pues bien, ya tenemos un candidato a minorante. Vamos a ver que $x_n > -1$ para cualquier natural n y lo vamos a demostrar por inducción. Como de costumbre consideramos el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : \ \ x_n > -1\}$. Se trata de comprobar que B es inductivo.

Claramente $1 \in B$ ya que $\frac{-1}{3} > -1$. Supongamos ahora que, para cierto natural n, se verifica que $x_n > -1$; entonces

$$x_n + 2 > 1 \Longrightarrow \frac{1}{x_n+2} < \frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow x_{n+1} = \frac{-1}{x_n+2} > -1,$$

y $x_{n+1} \in B$ y la sucesión está minorada.

Por útimo recordar que, ahora sí, la sucesión es convergente y su límite es -1.

Hay otra forma de hacer este ejercicio sin usar inducción (como herramienta principal, aunque también se usa) que es más corta pero tiene el inconveniente de que hay que caer en un detalle, se puede considerar de idea feliz, ya que, usualmente, es difícil encontrar una fórmula explícita para sucesiones definidas por recurrencia. Veamos de qué estamos hablando...

Si nos fijamos en los tres primeros términos de la sucesión ocurre que

$$x_1 = \frac{-1}{3}, \ \ x_2 = \frac{-3}{5}, \ \ x_3 = \frac{-5}{7}.$$

Si ahora hacemos $x_4 = \frac{-1}{2-5/7} = \frac{-7}{9}$ parece claro que la fórmula que tenemos es que $x_n = \frac{-(2n-1)}{2n+1}$. Esta fórmula la hemos sacado estudiando los cuatro primeros términos de la sucesión pero...¿se cumple para todo natural? Vamos a ver que sí, que dicha fórmula es cierta para todo natural y lo vamos a demostrar también por inducción. Consideremos $C = \{n \in \mathbb{N} : \ \ x_n = \frac{-(2n-1)}{2n+1}\}$. Se trata, por supuesto, de demostrar que C es inductivo. Claramente $1 \in C$. Si ahora suponemos que un natural arbitrario $n \in C$, eso significa que $x_n = \frac{-(2n-1)}{2n+1}$, tenemos entonces que

$$x_{n+1} = \frac{-1}{2+x_n} = \frac{-1}{2+\frac{-(2n-1)}{2n+1}} = \frac{-2n-1}{2n+3} = \frac{-(2(n+1)-1)}{2(n+1)+1},$$

y $n+1 \in C$ con lo que $x_n = \frac{-(2n-1)}{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A partir de aquí el cálculo del límite es claro, por ser x_n cociente de dos polinomios del mismo grado.

5. Calcula el límite de la sucesión

$$\{x_n\} = \left\{ \left(\frac{\log(n+a)}{\log(n)} \right)^{n\log(n)} \right\},$$

siendo $a > 0$.

Solución. Teniendo en cuenta que

$$\lim \left\{ \frac{\log(n+a)}{\log(n)} - 1 \right\} = \lim \left\{ \frac{\log(n+a) - log(n)}{\log(n)} \right\} = \lim \left\{ \frac{\log\left(\frac{n+a}{n}\right)}{\log(n)} \right\} = 0,$$

obtenemos que $\lim \left\{ \frac{\log(n+a)}{\log(n)} \right\} = 1$ y estamos ante una indeterminación de la forma 1^∞. Si utilizamos la regla de número e obtenemos que

$$\lim \left\{ \left(\frac{\log(n+a)}{\log(n)} \right)^{n\log(n)} \right\} = e^L \Longleftrightarrow \lim \left\{ n\log(n) \left(\frac{\log(n+a)}{\log(n)} - 1 \right) \right\} = L,$$

pero

$$\begin{aligned} L = \lim \left\{ n\log(n) \left(\frac{\log(n+a)}{\log(n)} - 1 \right) \right\} &= \lim \left\{ n\left(\log(n+a) - log(n)\right) \right\} \\ = \lim \left\{ n\log\left(\frac{n+a}{n} \right) \right\} &= \lim \left\{ \log \left(\frac{n+a}{n} \right)^n \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, utilizando otra vez la regla del número e, tenemos que

$$e^L = \lim \left\{ \left(\frac{n+a}{n} \right)^n \right\} \Longleftrightarrow L = \lim \left\{ n \left(\frac{n+a}{n} - 1 \right) \right\} = \lim \left\{ \frac{an}{n} \right\} = a,$$

y el límite buscado será e^a.

6. Estudia si es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)!}{\log(2^2\sqrt[3]{2}) \cdot \log(2^3\sqrt[3]{3}) \cdots \log(2^n\sqrt[3]{n})}$.

Solución. Vamos a utilizar el criterio del cociente. Si llamamos

$$a_n = \frac{(n-1)!}{\log(2^2\sqrt[3]{2}) \cdot \log(2^3\sqrt[3]{3}) \cdots \log(2^n\sqrt[3]{n})},$$

tendremos que

$$a_{n+1} = \frac{n!}{\log(2^2\sqrt[3]{2})\cdot\log(2^3\sqrt[3]{3})\cdots\log(2^n\sqrt[3]{n})\cdot\log(2^{n+1}\sqrt[3]{n+1})}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n!\cdot\cancel{\log(2^2\sqrt[3]{2})}\cdot\cancel{\log(2^3\sqrt[3]{3})}\cdots\cancel{\log(2^n\sqrt[3]{n})}}{(n-1)!\cancel{\log(2^2\sqrt[3]{2})}\cdot\cancel{\log(2^3\sqrt[3]{3})}\cdots\cancel{\log(2^n\sqrt[3]{n})}\cdot\log(2^{n+1}\sqrt[3]{n+1})}\\ &= \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\log(2^{n+1}\sqrt[3]{n+1})} = \frac{n}{(n+1)\log(2)+\frac{\log(n+1)}{3}}.\end{aligned}$$

Si ahora dividimos numerador y denominador por $n+1$ obtenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n}{n+1}}{log(2)+\frac{1}{3}\cdot\frac{\log(n+1)}{n+1}}.$$

Tomando límites obtenemos que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\log(2)} > 1$ y la serie no es convergente.

Granada, 3 de diciembre de 2012