Prueba de clase 27 de Marzo de 2015

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**________________

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS TEST[1]

	a)	*b)*	*c)*	*d)*
Pregunta 1	V	F	F	F
Pregunta 2	V	F	F	F
Pregunta 3	F	V	F	V
Pregunta 4	F	F	V	F
Pregunta 5	F	F	V	V

PREGUNTAS TEST.

Ejercicio 1. *En un álgebra de Boole* B *se definen las operaciones* $a \uparrow b = \overline{ab}$ *y* $a \downarrow b = \overline{a+b}$. *Entonces:*

a) $\overline{x \uparrow y} = \overline{x} \downarrow \overline{y}$

b) $(x \downarrow y) \uparrow z = xy\overline{z}$

c) $(x \uparrow y) \uparrow z = x \uparrow (y \uparrow z)$

d) $(x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y) = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$

Ejercicio 2. *Denotamos por* $D(m)$ *al conjunto de los divisores del número natural* m *dotados con las operaciones* $\vee =$*m.c.m. y* $\wedge =$*m.c.d. Entonces:*

a) $D(105)$ *es un álgebra de Boole con 3 coátomos: 35,21 y 15.*

b) $D(90)$ *es un álgebra de Boole con 3 átomos: 2,5 y 9.*

c) $D(27)$ *es un álgebra de Boole con 3 átomos: 1,3 y 9.*

d) $D(154)$ *es un álgebra de Boole con 3 coátomos: 7,14 y 77.*

Ejercicio 3. *Dadas las funciones booleanas* $f, g : \mathbb{B}^5 \to \mathbb{B}$ *dadas por*

$$f = M_0 \cdot M_1 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_{10} \cdot M_{15} \cdot M_{22} \cdot M_{23} \cdot M_{28} \cdot M_{30}$$
$$g = m_0 + m_5 + m_{15} + m_{21} + m_{23} + m_{24} + m_{27} + m_{31}$$

se tiene:

a) $f + g = M_1 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_{10} \cdot M_{22} \cdot M_{28} \cdot M_{30}$

b) $fg = m_5 + m_{21} + m_{24} + m_{27} + m_{31}$

c) $\overline{g} = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_7 \cdot M_8 \cdot M_9 \cdot M_{10} \cdot M_{11} \cdot M_{12} \cdot M_{13} \cdot M_{14} \cdot M_{16} \cdot M_{17} \cdot M_{18} \cdot M_{19} \cdot M_{20} \cdot M_{22} \cdot M_{25} \cdot M_{26} \cdot M_{28} \cdot M_{29} \cdot M_{30}$

d) $\overline{f} = m_0 + m_1 + m_4 + m_6 + m_{10} + m_{15} + m_{22} + m_{23} + m_{28} + m_{30}$

Ejercicio 4. *Señala si cada una de las siguientes afirmaciones es equivalentes a*

$$\Gamma \vDash \alpha \to (\beta \to \neg\gamma)$$

[1] Cada casilla del cuadro debe ser rellenada con V (verdadero) o F (falso).

a) $\Gamma \cup \{\gamma\} \vDash \alpha \to \beta$

b) $\Gamma \cup \{\alpha \to \beta\} \vDash \neg\gamma$

c) $\Gamma \cup \{\alpha,\, \beta, \gamma\}$ *es insatisfacible.*

d) $\Gamma \cup \{\alpha,\, \beta \to \neg\gamma\}$ *es satisfacible.*

Ejercicio 5. *Indica en cada caso si el siguiente conjunto de fórmulas es insatisfacible*

a) $\{a \to (b \to c), \neg b \to \neg a, \neg c\}$

b) $\{a \to (b \to c), \neg b \to \neg a,\, c\}$

c) $\{a \vee b \to c,\, \neg b \to a,\, \neg c\}$

d) $\{\neg b \to \neg a,\, (\neg b \to \neg a) \to c,\, \neg c\}$

FIN DE LAS PREGUNTAS TEST

Ejercicio 6. *Sea* $f : \mathbb{B}^5 \to \mathbb{B}$ *la función dada por*

$$f(x, y, z, t, u) = xyz\bar{t}\bar{u} + \bar{x}y\bar{z}tu + \bar{x}yz\bar{t}u + zu(x\bar{y} \oplus x\bar{t}) + (x \downarrow u)yz\bar{t} + ytu(z \oplus x)$$

Calcula una expresión reducida de f *como suma de productos, y expresa* $\overline{f}$ *usando únicamente los operadores* `producto` *y* complemento*.*

Solución 1. *En primer lugar calculamos los mintérminos que describen a esta función; algunos vienen ya determinados:*

$xyz\bar{t}\bar{u}$	11100	(28)
$\bar{x}y\bar{z}tu$	01011	(11)
$\bar{x}yz\bar{t}u$	01101	(13)

calculamos el resto:

$$zu(x\bar{y} \oplus x\bar{t}) = zu(x\bar{y}\,\overline{x\bar{t}} + \overline{x\bar{y}}x\bar{t}) = zu(x\bar{y}(\bar{x} + t) + (\bar{x} + y)x\bar{t}) = x\bar{y}ztu + xyz\bar{t}u$$

lo que nos proporciona los mintérminos 10111, (23) *y* 11101, (29)*. Ahora*

$$(x \downarrow u)yz\bar{t} = (\overline{x + u})yz\bar{t} = \bar{x}yz\bar{t}\bar{u}$$

que da el mintérmino 01100, (12)*. Por último*

$$ytu(z \oplus x) = ytu(z\bar{x} + \bar{z}x) = \bar{x}yztu + xy\bar{z}tu$$

que son los mintérminos 01111, (15) *y* 11011, (27)*. Así que*

$$f(x, y, z, t, u) = \Sigma_5 m(11, 12, 13, 15, 23, 27, 28, 29)$$

Usando el algoritmo de Quine-McClusky, por ejemplo, realizamos la minimización.

Procedemos a obtener las agrupaciones

con lo que en la primera tabla el mintérmino 23 es un implicante primo. Calculando las agrupaciones en la tabla anterior aparece

$$\_\,110\,\_\,,\ (12, 13, 28, 29)$$

nº de unos	minterm-binario	minterm-decimal
2	01100	12
	01011	11
3	01101	13
	11100	28
	01111	15
3	10111	23
	11011	27
	11101	29

Agrupación	minterm implicados
0110_	12,13
_1100	12,28
01_11	11,15
_1011	11,27
011_1	13,15
_1101	13,29
1110_	28,29

y nos quedan 3 implicantes primos en la segunda tabla: $01\_11, \_1011, 011\_1$.

Procedemos ahora a seleccionar qué implicantes primos son esenciales. Con los tres i.p. esenciales solo queda por cubrir el mintérmino 15, y podemos optar por cualquiera de los dos i.p. restantes. Así que tenemos dos posibles soluciones:

$$f(x,y,z,t,u) = x\overline{y}ztu + y\overline{z}tu + yz\overline{t} + \overline{x}ytu$$

o bien

$$f(x,y,z,t,u) = x\overline{y}ztu + y\overline{z}tu + yz\overline{t} + \overline{x}yzu$$

Para dar una expresión de $\overline{f}$ *usamos una reducida de* f *y complementamos:*

$$\overline{f}(x,y,z,t,u) = \overline{x\overline{y}ztu + y\overline{z}tu + yz\overline{t} + \overline{x}ytu} =$$

$$= \overline{(x\overline{y}ztu)}\,\overline{(y\overline{z}tu)}\,\overline{(yz\overline{t})}\,\overline{(\overline{x}ytu)}$$

que es una expresión en la que solo se usan productos y complementos.

Tabla de i.p.

		11	12	13	15	23	27	28	29
⋆	10111					✓			
	01_11	✓			✓				
⋆	_1011	✓					✓		
	011_1			✓	✓				
⋆	_110_		✓	✓				✓	✓
		✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓

Ejercicio 7. *Dadas las fórmulas:*

- $\alpha_1 = a \vee (d \wedge (\neg a \to e))$.
- $\alpha_2 = a \wedge b \to e \vee d$.
- $\alpha_3 = (b \leftrightarrow d) \to c$.
- $\alpha_4 = d \to ((a \to b) \wedge (a \to \neg b))$.
- $\beta = (d \to a) \to (b \wedge e)$.

estudia si es cierto que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vDash \beta$. *Caso de no ser cierto, da una interpretación que lo muestre.*

Solución 2. *Se trata de estudiar si es cierta la consecuencia lógica*

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vDash (d \to a) \to (b \wedge e)$$

Así que usando el Teorema de la Deducción es equivalente a

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, d \to a\} \vDash b \wedge e$$

y transformando en un problema de insatisfacibilidad de un conjunto de fórmulas queda

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, d \to a, \neg(b \wedge e)\} \vDash \square$$

Calculamos la forma clausular de cada una de las fórmulas del conjunto:

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 \equiv a \vee (d \wedge (a \vee e)) \equiv (a \vee d) \wedge (a \vee e) \\
\alpha_2 \equiv \neg(a \wedge b) \vee e \vee d \equiv \neg a \vee \neg b \vee e \vee d \\
\alpha_3 \equiv \neg((\neg b \vee d) \wedge (b \vee \neg d)) \vee c \equiv ((b \wedge \neg d) \vee (\neg b \wedge d)) \vee c \equiv \\
\equiv ((b \vee d) \wedge (\neg d \vee \neg b)) \vee c \equiv (b \vee d \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg d \vee c) \\
\alpha_4 \equiv \neg d \vee ((\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)) \equiv (\neg d \vee \neg a \vee b) \wedge (\neg d \vee \neg a \vee \neg b)) \\
d \to a \equiv \neg d \vee a \\
\neg(b \wedge e) \equiv \neg b \vee \neg e
\end{array}$$

Ahora sustituyendo cada fórmula por las cláusulas a las que da lugar, el problema original es equivalente a

$$\{a \vee d,\ a \vee e,\ \neg a \vee \neg b \vee e \vee d,\ b \vee d \vee c,\ \neg b \vee \neg d \vee c,\ \neg d \vee \neg a \vee b,\ \neg d \vee \neg a \vee \neg b,\ \neg d \vee a,\ \neg b \vee \neg e\} \vDash \square$$

Para el que podemos usar el algoritmo de Davis-Putnam. Hay un literal puro (paso 2), $\lambda = c$, *así que eliminamos las cláusulas donde aparece:*

$$\{a \vee d,\ a \vee e,\ \neg a \vee \neg b \vee e \vee d,\ \neg d \vee \neg a \vee b,\ \neg d \vee \neg a \vee \neg b,\ \neg d \vee a,\ \neg b \vee \neg e\}$$

Ahora, como no hay cláusulas unit ni literales puros, usamos el Paso 3, y eligiendo un literal cualquiera, por ejemplo a, obtenemos dos conjuntos que deben ser ambos insatisfacibles para que lo sea el inicial. Cuando $\lambda = a$ *queda*

$$\{\neg b \vee e \vee d,\ \neg d \vee b,\ \neg d \vee \neg b,\ \neg b \vee \neg e\}$$

donde de nuevo debemos aplicar el Paso 3, por ejemplo para $\lambda = \neg b$ *y obtendremos:*

$$\{\neg d\}$$

que es satisfacible para la interpretación $I(d) = 0$. *No hace falta entonces examinar el conjunto de cláusulas para* $\lambda = b$ *ni* $\lambda = \neg a$.

Así que la consecuencia lógica no ocurre, y la interpretación que lo prueba se ha obtenido en el algoritmo

$$I(\neg d) = 1,\ I(\neg b) = 1,\ I(a) = 1,\ I(c) = 0$$

y cualquier valor para $I(e)$.