Repaso tema 6

1.- Sea $f : Q^3 \rightarrow Q^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x,y,z) = \left(2x + y,\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2z,\ x + y + 5z\right)$$

Sean $B_1 = \{(1,-1,1);\ (2,-2,1);\ (1,1,-1)\}$ y $B_2 = \{(-1,0,0);\ (6,1,2);\ (8,0,-1)\}$
Entonces la matriz de f en las bases B_1 y B_2 es

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 11 \\ \frac{7}{4} & \frac{11}{4} & \frac{7}{2} \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) No tiene sentido la pregunta pues B_2 no es base de Q^3

2.- ¿Cuál de las siguientes aplicaciones lineales $f : (Z_7)^3 \rightarrow (Z_7)^3$ tiene que $N(f) = L\{(1,2,4)\}$ e $\operatorname{Im} f = \{x + 2y + 4z = 0$

a) $f(x,y,z) = (x + y + z,\ x + 2y + 3z,\ y + 3z)$
b) $f(x,y,z) = (6x + y + 5z,\ 4x + y + 2z,\ y + 3z)$
c) $f(x,y,z) = (4x + y + 2z,\ x + y + z,\ y + 3z)$
d) $f(x,y,z) = (2x + 3y + 5z,\ 5x + 4y + 2z,\ 4x + 6y + 3z)$

3.- Sea $f : R^3 \rightarrow R^3$ la aplicacion lineal definida por $f(x,y,z) = (x + y,\ x + z,\ 2x + y + z)$. Las ecuaciones cartesianas del subespacio $\operatorname{Im}(f)$ son

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

c) Puesto que $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 3$, no tiene ecuaciones cartesianas.
d) $\{x + y - z = 0$

4.- Sea $f : (Z_7)^2 \rightarrow (Z_7)^4$ la aplicación lineal definida por las condiciones $f(1,0) = (1,2,0,5)$ y $f(0,1) = (2,2,4,2)$ y sea $g : (Z_7)^4 \rightarrow (Z_7)^2$ la aplicación lineal dada por $g(x,y,z,t) = (x + 4y + z + 3t,\ 2x + y + 5t)$. Sea U el núcleo de g y V la imagen de f. Una base de $U + V$ es

a) $\{(1,2,0,5), (2,2,4,2), (1,0,3,1), (0,1,5,4)\}$
b) $\{(1,0,4,4), (1,0,3,1), (0,1,5,4)\}$
c) $\{(1,2,0,5), (2,2,4,2), (1,4,1,3), (2,1,0,5)\}$
d) $\{(1,2,0,5), (2,2,4,2), (1,1,2,3)\}$

5.- Sea $V = (Z_{11})_2[x]$ y sea $D : V \rightarrow V$ la aplicación derivada. Entonces:

a) $\{0\}$ es una base del núcleo de D y $\{1,x,x^2\}$ una base de la imagen.
b) $\{7\}$ es una base del núcleo de D y $\{6 + 3x, 9 + 10x\}$ una base de la imagen.
c) $\{x\}$ es una base del núcleo de D y $\{1,x^2\}$ una base de la imagen.
d) $\{1\}$ es una base del núcleo de D y $\{1,x\}$ una base de la imagen.

6.- Sea $f:(Z_7)^2 \to (Z_7)^2$ la aplicación lineal $f(x,y) = \left(3x+5y,\ x+y\right)$, y sea $B = \{(1,2),(1,1)\}$ una base de $(Z_7)^2$. Entonces la matriz de f en la base B es

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

7.- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a $f: Z_5^4 \to Z_5^3$ en las bases canónicas de Z_5^4 y Z_5^3. Entonces:

a) f es inyectiva.
b) El núcleo de f es el subespacio de ecuación $x+y+2z+t=0$
c) f es sobreyectiva.
d) La imagen de f es el subespacio generado por $(2,3,2)$ y $(3,1,2)$.

8.- Sea $f:(Z_3)^2 \to (Z_3)^2$ la aplicación lineal cuya matriz en la base $B = \{(1,2),(1,1)\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz de f en la base canónica de $(Z_3)^2$ es

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9.- Sea $f:(Z_3)^4 \to (Z_3)^4$ la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z,t) = \left(2x+y+z,\ 2x+y+z,\ 2x+2y+t,\ y+2z+t\right)$$

Entonces:

a) El vector $(1,2,0,1)$ pertenece a la imagen de f
b) $\dim(N(f) \cap \mathrm{Im}(f)) = 1$
c) $(Z_3)^4 = N(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$
d) $N(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$

10.- Sea $f:(Z_5)^3 \to (Z_5)^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(1,1,1) = (0,2,3)$$
$$f(0,1,2) = (3,1,1)$$
$$(3,2,1) \in N(f)$$

Entonces $f(4,0,3)$ vale

a) $(0,4,4)$ b) $(3,3,4)$ c) $(0,0,0)$ d) $(2,2,4)$

11.- Sea $U_1 \equiv \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$ y $U_2 = \langle (2,3,2),(1,0,1) \rangle$ subespacios vectoriales de $(Z_5)^3$.

a) No existe $f:(Z_5)^3 \to (Z_5)^3$ tal que $N(f) = U_2$ e $\mathrm{Im}(f) = U_1$.

b) Existe una única aplicación lineal $f:(Z_5)^3 \to (Z_5)^3$ tal que $N(f) = U_1$ e $\mathrm{Im}(f) = U_2$.

c) Existe al menos una aplicación lineal $f:(Z_5)^3 \to (Z_5)^3$ tal que $N(f) = U_2$ e $\mathrm{Im}(f) = U_1$.

d) $(Z_5)^3 = U_1 \oplus U_2$.

12.- Dada la aplicación lineal $f: R^4 \to R^3$ $f(x,y,z,t) = (x+z+t, y+2t, +xy+z+t)$, ¿qué afirmación es falsa?

a) La imagen tiene dimensión 3

b) Es sobreyectiva pero no inyectiva.

c) Una base del núcleo es $\{(-1,0,1,0)\}$

d) Es inyectiva pero no sobreyectiva