Cálculo
1ºE Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial (I)
Curso 2013/2014

1. **(2 puntos)** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$x_1 = 1$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_n+3}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+3} = \sqrt{4/2} = \sqrt{2} > x_1 = 1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n < x_{n+1} \ \Rightarrow\ x_n+3 < x_{n+1}+3 \ \Rightarrow\ \sqrt{x_n+3} < \sqrt{x_{n+1}+3}$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_n+3} < \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_{n+1}+3} \ \Rightarrow\ x_{n+1} < x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por el $x_1 = 1$. Veamos que está acotada superiormente por 2. Esto es, que $x_n \leq 2\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1 \leq 2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 2$.

- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 2$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \leq 2 \;\Rightarrow\; x_n + 3 \leq 5 \;\Rightarrow\; \sqrt{x_n+3} \leq \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_n+3} < \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{5} \;\Rightarrow\; x_{n+1} \leq \sqrt{\frac{5}{2}} \leq 2$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

b) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+3}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+3} \;\Rightarrow\; 2x^2 = x+3 \;\Rightarrow\; 2x^2 - x - 3 = 0 \;\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 3/2$ y $x = -1$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que 1. El motivo es que $1 \leq x_n \leq 3/2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 3/2$.

2. **(2 puntos)** Calcula el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{ \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log\left(\sqrt{n+1}\right)} \right\}$$

Solución: Observamos que tenemos un cociente donde el denominador, claramente, crece a infinito. Aplicamos el criterio de Stolz y, si llamamos a_n al numerador y b_n al denominador, tendremos que estudiar el límite del siguiente cociente:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right]}{\log(\sqrt{n+2})-\log(\sqrt{n+1})} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\log\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)\log\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)} = \frac{1}{\log\left[\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+1}\right]}$$

Estudiamos aparte la sucesión: $\left\{\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+1}\right\} = \left\{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right\}$ ya que presenta una indetermincaión del tipo "1^∞". Podríamos aplicar el criterio del número e, o bien, escribir la sucesión de forma que nos aparezca una muy conocida. De hecho:

$$\left\{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right\} = \left\{\left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{1/2}\right\} \to e^{1/2}$$

ya que la base tiende al número e. Por tanto:

$$\lim \left\{ \log \left[\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \right)^{n+1} \right] \right\} = \log(e^{1/2}) = \frac{1}{2}$$

Como $\lim \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim \left\{ \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log\left(\sqrt{n+1}\right)} \right\} = 2$$

3. **(3 puntos)** Calcula el límite de la sigiente sucesión:

$$\left\{ 3^n \log\left(1+\frac{7}{3^n+n^2}\right) \right\}$$

Como consecuencia del límite anterior deduce el carácter de la serie:

$$\sum \log\left(1+\frac{7}{3^n+n^2}\right)$$

Solución: Por las propiedades del logaritmo, la sucesión dada se puede reescribir como sigue:

$$\left\{ \log \left[\left(1+\frac{7}{3^n+n^2}\right)^{3^n} \right] \right\}$$

Como la sucesión $\left(1+\frac{7}{3^n+n^2}\right)^{3^n}$ presenta una indeterminación del tipo "1^∞", aplicamos la regla del número e:

$$3^n \left[1+\frac{7}{3^n+n^2}-1\right] = 3^n \left[\frac{7}{3^n+n^2}\right] = \frac{7\,3^n}{3^n+n^2} \to 7$$

Por tanto, $\left(1+\frac{7}{3^n+n^2}\right)^{3^n} \to e^7$ y de aquí se tiene que:

$$\left\{ 3^n \log\left(1+\frac{7}{3^n+n^2}\right) \right\} = \left\{ \log \left[\left(1+\frac{7}{3^n+n^2}\right)^{n^2} \right] \right\} \to \log(e^7) = 7$$

Vamos ahora a deducir el carácter de la serie $\sum \log\left(1+\frac{7}{3^n+n^2}\right)$. Basta con escribir la sucesión que acabamos de estudiar de la siguiente forma:

$$3^n \log\left(1+\frac{7}{3^n+n^2}\right) = \frac{\log\left(1+\frac{7}{3^n+n^2}\right)}{\frac{1}{3^n}} \to 7 \neq 0$$

Haciendo uso del criterio de comparación por paso al límite, ambas series, la del numerador y la del denominador ($\sum \frac{1}{3^n}$) tienen el mismo carácter. Como es conocido que la serie $\sum \frac{1}{3^n}$ es convergente, la serie que nos proponen también es convergente.

4. **(3 puntos)** Estudia la posible convergencia de las siguientes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n+5}{2n+8}\right)^{-n^2}$

   b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{(-3)^{n+1}}{6^n} + \frac{2^n}{3^{n+1}}\right)$. Si es convergente, calcula su suma.

   Solución:

   a) Aplicamos el criterio de la raíz (ya que el término general presenta una potencia n-sima). Por tanto, estudiamos el límite de $\sqrt[n]{a_n}$, siendo $a_n = \left(\frac{2n+5}{2n+8}\right)^{-n^2}$.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{2n+8}\right)^{-n^2}} = \left(\frac{2n+5}{2n+8}\right)^{-n^2/n} = \left(\frac{2n+5}{2n+8}\right)^{-n}$$

   Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo "1^∞", por lo que aplicamos el criterio del número e:

$$(-n)\left[\frac{2n+5}{2n+8} - 1\right] = (-n)\left[\frac{2n+5-2n-8}{2n+8}\right] = \frac{3n}{2n+8} \to \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{2n+8}\right)^{-n^2}} \to e^{3/2} > 1$$

   Por tanto, el criterio de la raíz nos asegura que la serie dada es divergente.

   b) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-3)^{n+1}}{6^n} + \frac{2^n}{3^{n+1}}\right) = \sum_{n\geq 1}(-3)\left(\frac{-3}{6}\right)^n + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$= -3\sum_{n\geq 1}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

   Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{2}| < 1$ y $|\frac{2}{3}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$, nos queda entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-3)^{n+1}}{6^n}+\frac{2^n}{3^{n+1}}\right) &= -3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&= -3\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n-1\right]+\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right] \\
&= -3\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}}-1\right]+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{3}}-1\right]=\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Granada, 28 de noviembre de 2013