
TEMA 2

Elementos de combinatoria

..... 2.1

Principios generales.

Existen dos principios generales que debemos estudiar para adentrarnos en las técnicas de conteo. Aunque la interpretación más intuitiva de los mismos se refiere a posibilidades de elección dentro de una gama de alternativas, la presentación más algebraica hace referencia a cardinales de conjuntos. La cuenta más simple que podemos analizar es la siguiente.

Proposición 1 (Principio de la suma). Sean $A, B \subseteq X$ con $A \cap B = \emptyset$. Entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.

En términos de opciones y elecciones debemos interpretar el principio de la suma de la siguiente forma. Para tomar una decisión tenemos dos alternativas. La primera nos lleva a seleccionar una opción entre n posibles, y la segunda una opción entre m posibles. Si no hay opciones comunes entre ambas alternativas entonces nuestra actuación consiste en decantarnos por una de las $n + m$ opciones totales.

Corolario 2. Para cualesquiera $A, B \subseteq X$, $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$.

Demostración. Basta con escribir $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ y $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ y aplicar la Proposición 1. \square

El siguiente principio analiza aquellas situaciones en las que tenemos que realizar varias elecciones consecutivas entre alternativas no necesariamente iguales.

Proposición 3 (Principio del producto). Si X_1, \dots, X_r son conjuntos de cardinal finito entonces $|X_1 \times \dots \times X_r| = |X_1| \cdots |X_r|$.

La interpretación de este principio es la siguiente: Si tenemos que realizar cadena de k selecciones independientes, la primera entre n_1 posibilidades, la segunda entre n_2 y así sucesivamente hasta la última selección que debemos realizar entre n_k alternativas, las alternativas totales entre las que debemos optar son $n_1 n_2 \cdots n_k$.

..... 2.2

Orden importa. Factorial

El principio del producto nos permite calcular el número de palabras de longitud dada r que podemos formar con un alfabeto de n caracteres. Este número es n^r . La clave está en que podemos repetir las letras en cada elección. Vamos a analizar a continuación situaciones en las que no podemos realizar dicha repetición. Recordemos que el factorial de un natural $n \in \mathbb{N}$ se define recursivamente

como

$$0! = 1, \quad (n + 1)! = (n + 1)n!,$$

lo que podemos interpretar como

$$n! = n(n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

cuando $n \geq 1$.

Definición 4. Sean $r \leq n$ dos naturales. Una r -permutación en n es una aplicación inyectiva $\sigma : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Al conjunto de las r -permutaciones en n lo denotamos $P(n, r)$.

Proposición 5.

$$|P(n, r)| = \frac{n!}{(n - r)!} = n(n - 1) \cdots (n - r + 1)$$

Demostración. Aplicación directa de la proposición 3, ya que comenzamos con n alternativas y tras cada elección tenemos una posibilidad menos para la siguiente. \square

Corolario 6. El número de permutaciones de un conjunto de n elementos (aplicaciones biyectivas del conjunto en si mismo) es $n!$.

Definición 7. Una *partición ordenada* en un conjunto X es una partición en la que los subconjuntos están ordenados. Si bien los subconjuntos están ordenados, los elementos dentro de cada subconjunto no lo están.

El siguiente lema es intuitivo y fácil de demostrar a partir del principio de la suma. Además es muy útil para comprobar otros resultados.

Lema 8 (Lema de conteo). Sea $\phi : A \rightarrow B$ una aplicación sobreyectiva entre conjuntos finitos. Para cada $b \in B$ llamamos $\phi^{-1}(b) = \{a \in A \mid \phi(a) = b\}$. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\phi^{-1}(b)| = k$ para todo $b \in B$, entonces $|A| = k \cdot |B|$.

Demostración. Basta observar que $A = \bigcup_{b \in B} \phi^{-1}(b)$, que la unión anterior es disjunta y aplicar la Proposición 1.

□

Proposición 9. Sea X un conjunto con $|X| = n$, y sean n_1, \dots, n_k números naturales tales que $n = n_1 + \dots + n_k$. El número de particiones ordenadas $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ con

$|A|_j = n_j$ para cada $1 \leq j \leq k$ es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Demostración. Consecuencia de la Proposición 5 y del Lema 8: Sea $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow X$ una biyección y sea ϕ la aplicación que lleva σ en una partición ordenada $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ llevando $\sigma(1), \dots, \sigma(n_1)$ a A_1 , $\sigma(n_1+1), \dots, \sigma(n_1+n_2)$ a A_2 , etcétera. Entonces $\phi^{-1}(\langle A_1, \dots, A_k \rangle) = n_1! \cdots n_k!$. Como existen $n!$ permutaciones en X concluimos que el número de particiones ordenadas es $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$. \square

El número de particiones ordenadas coincide con el número de permutaciones que podemos hacer en un conjunto con elementos repetidos.

Proposición 10. *Dado un conjunto de n elementos que tiene n_1 elementos repetidos de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo y así sucesivamente hasta n_k de un tipo k -ésimo. El número de permutaciones de dicho conjunto es*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Demostración. Si ordenamos los elementos y consideramos el conjunto X de las posiciones que ocupan, dar una permutación es equivalente a dar una partición ordenada $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ donde A_i contiene las posiciones que ocupan los n_i elementos de tipo i -ésimo. \square

..... 2.3
Orden no importa. Coeficientes binomiales

Definición 11. Llamemos $\binom{n}{r}$ al número de subconjuntos de r elementos que tiene un conjunto de n elementos. Entonces

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Estos números reciben el nombre de coeficientes binomiales, debido sobre todo al teorema 13 que veremos con posterioridad.

Corolario 12. El número de cadenas compuestas por $n-r$ ceros y r unos es $\binom{n}{r}$

Demostración. Cada una de las cadenas referidas es la imagen de la aplicación característica de un subconjunto con cardinal r del conjunto $\{1, \dots, n\}$, luego hay tantas cadenas como subconjuntos de r elementos. \square

Entre otras, los coeficientes binomiales satisfacen las siguientes propiedades para $r \leq n$

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= 1, & \binom{n}{r} &= \binom{n}{n-r}, \\ \binom{n+1}{r} &= \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}.\end{aligned}$$

Teorema 13. *Sea A un anillo. Para cualesquiera $a, b \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^r b^{n-r} = \\ &= \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b +\end{aligned}$$

Proposición 14. *Existen $\binom{n+k-1}{k-1}$ formas de descomponer $n \in \mathbb{N}$ como suma de k números naturales.*

Demostración. La aplicación

$$\langle n_1, \dots, n_k \rangle \mapsto \underbrace{0 \dots 01}_{n_1} \underbrace{0 \dots 01}_{n_2} \dots \underbrace{10 \dots 0}_{n_k}$$

es una biyección entre el conjunto de las descomposiciones de n como suma de k naturales y cadenas con n ceros y $k-1$ unos, así el resultado es consecuencia directa del Corolario 12. \square

Corolario 15. *Existen $\binom{n+k-1}{k-1}$ formas de distribuir n objetos indistinguibles en k cajas distinguibles.*

Corolario 16. *Existen $\binom{n+k-1}{k-1}$ formas de seleccionar n objetos entre k objetos distintos, permitiendo repeticiones.*

..... 2.4

Otros principios de conteo

Teorema 17 (Principio de inclusión-exclusión). *Sean A_1, \dots, X subconjuntos finitos. Entonces*

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|,$$

es decir, sumamos los cardinales de los conjuntos obtenidos al realizar la intersección de un número impar de subconjuntos y restamos los cardinales de los conjuntos obtenidos al intersecar un número par de subconjuntos.

La fórmula se entiende más claramente si la describi-

mos para tres y cuatro conjuntos:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| \\ &\quad - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\end{aligned}$$

Terminamos con otro principio aparentemente sencillo, pero de gran utilidad a la hora de resolver problemas. Se le conoce con el nombre de principio del palomar o de Dirichlet.

Proposición 18 (Principio de Dirichlet). *Sea $\{A_1, \dots, A_k\}$ una partición de un conjunto X tal que $|X| = n$. Existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $|A_i| \geq \frac{n}{k}$.*

Demostración. Como consecuencia de la Proposición 1 (principio de la suma) $|X| = |A_1| + \cdots + |A_k|$. Si para todo i $|A_i| < \frac{n}{k}$, necesariamente tendríamos que $|X| < k \frac{n}{k} = n$, lo que es imposible. \square

Corolario 19. *Sea $\varphi : X \rightarrow Y$ una aplicación entre conjuntos finitos tales que $|X| > k|Y|$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Existe $y \in Y$ tal que $|\varphi^{-1}(y)| > k$.*

Demostración. Sencilla aplicación de la Proposición 18 a la partición $\{\varphi^{-1}(y) \mid y \in Y\} \setminus \{\emptyset\}$ de X . \square