Ejemplo de cálculo de capacidad usando el Teorema de Gauss

Isabel M. Tienda Luna

En este documento analizaremos cómo solucionar ejercicios usando el teorema de Gauss utilizando el ejemplo del problema 28 de la relación de problemas.

1. Teorema de Gauss

El Teorema de Gauss establece que el flujo del campo eléctrico a través de una **superficie cerrada** es igual a la suma de las cargas contenidas en esa superficie cerrada dividido por la constante dieléctrica.

$$\phi = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

2. Condensador esférico

En el problema 28 de la relación de problemas se pide calcular la capacidad de un condensador esférico que es aquel que está formado por dos conductores esféricos concéntricos de distintos radios (R_A y R_B). Además se pide expresar el campo eléctrico en función de la carga una de las esferas. El condensador en cuestión se muestra en la figura 1.

2.1. Analizando el problema

Como puede verse, al establecer una diferencia de potencial entre los dos conductores, cada uno de ellos se carga con una carga Q. El conductor que ponemos a potencial positivo (el de radio R_A) se carga con una carga +Q y el que ponemos a menor potencial (el de radio R_B) se carga con una carga -Q. Llamaremos a esa diferencia de potencial que se establece entre los dos conductores $V_A - V_B$. Esta diferencia es positiva porque V_A es mayor que V_B.

Además, cada una de las esferas que forman el condensador son conductoras y según hemos visto en clase, la carga se distribuye unifórmemente en su superficie. Por tanto, **sólo hay carga en la superficie de cada una de las esferas conductoras y no en su interior**.

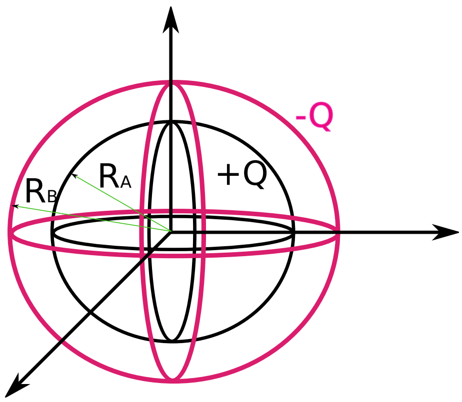

Figura 1: Condensador Cilíndrico.

2.2. ¿Qué tengo que calcular?

En este problema me piden dos cosas:

1. que calcule la capacidad del condensador.
2. que calcule la expresión del campo eléctrico en función de la carga de uno de los conductores.

2.3. ¿Cómo calculo la capacidad?

La capacidad de un condensador se define como:

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} \tag{2}$$

donde Q es el valor de la carga de uno de los conductores que forman el condensador. Siempre pondremos el valor de esta carga con signo positivo. Por otro lado, como ya hemos dicho antes, $V_A - V_B$ es la diferencia de potencial entre los dos conductores que forman el condensador. Esta diferencia será positiva, esto es, calcularemos siempre la diferencia entre el potencial mayor menos el potencial menor. Como puede verse en la ecuación 2, para calcular la capacidad necesito saber la diferencia de potencial.

2.4. ¿Cómo calculo la diferencia de potencial entre los conductores?

Para calcular la diferencia de potencial entre los conductores, **no** podemos usar la fórmula:

$$V = k\frac{Q}{r} \tag{3}$$

porque la expresión anterior **sólo se puede usar para cargas puntuales**, cargas que están en un punto concreto. En nuestro caso, la carga no está concentrada en un punto concreto sino que se encuentra distribuía sobre la superficie del conductor.

2.4.1. ¿Pero no existe ninguna forma de que yo pueda usar la fórmula 3?

Si, existe una posibilidad y es que yo consiga calcular cuanta carga hay en cada punto concreto de la superficie de la esfera (esto son muuuuuchos puntos). Si soy capaz de hacer esto, entonces sabría la carga que hay en cada punto y para cada una de esas cargas podría usar la expresión 3. Pero las cosas no son tan fáciles porque para cada una de esas cargas puntuales de la superficie, además de calcular el valor de la carga, tendría que calcular la distancia entre el punto donde se encuentra esta carga y el punto donde queremos calcular el potencial (r). Con esos dos datos ya sí que podríamos calcular el potencial de cada carga de la superficie usando la fórmula 3 y una vez que tuviérmos todos los potenciales podríamos sumarlos para calcular el potencial total. Este procedimiento no es nada sencillo.

2.4.2. ¿Existe alguna alternativa más sencilla?

La otra alternativa que tenemos es usar el Teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico creado por la distribución de carga y luego usar la relación:

$$V_A - V_B = -\int_{R_B}^{R_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{4}$$

para calcular el potencial.

2.4.3. ¿Y no puedo calcular el campo con la fórmula $\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$ y evitar usar el Teorema de Gauss?

Claro que sí. Pero entonces de nuevo tendríamos que saber cuánta carga hay en cada uno de los puntos de la superficie de la esfera y para cada uno de esos puntos tendríamos que calcular el vector $\vec{r}$ que va desde el punto donde está la carga al punto donde queremos calcular el campo. Una vez que hayamos hecho esto para todos los puntos de la superficie de la esfera, el campo total será la contribución de todos los campos creados por las cargas situadas en todos los puntos de la superficie de la esfera (sólo tenemos que sumar, o lo que es lo mismo, integrar). Este procedimiento es muy complicado ya que cada carga de la superficie está en un punto distinto y, por tanto, tiene un $\vec{r}$ distinto.

2.4.4. Vale, veo claro que tengo que usar el Teorema de Gauss porque va a simplificar los cálculos.

¡Enhorabuena! Ya podemos empezar a usar el Teorema de Gauss.

3. Aplicamos el Teorema de Gauss

Para aplicar el Teorema de Gauss, seguimos una serie de pasos:

1. Estimo hacía dónde va el campo. Por tratarse de conductores esféricos, el campo va a ir en la dirección radial (dirección del radio) y será saliente o entrante dependiendo del signo de la carga con la que se haya cargado el conductor porque, como hemos visto en clase, las cargas positivas son fuentes de campo y las negativas sumideros.

2. Escojo una superficie cuyo vector/es de superficie sean **siempre** paralelos o perpendiculares a la dirección del campo. De entre las superficies estudiadas en clase (esfera, cilindro y cubo) la única que cumple la condición anterior es la esfera puesto que su vector de superficie tiene la dirección radial y es saliente. Por tanto, este vector de superficie tendrá la misma dirección que el campo creado por la esfera cargada.

3. Aplico el Teorema de Gauss. Antes de aplicar el Teorema de Gauss tengo que elegir el punto en el que voy a calcular el campo y para eso tengo que analizar el problema que estoy tratando. En este caso hay tres zonas diferentes donde tengo que considerar el cálulo del campo:

   - dentro de la esfera de radio R_A
   - entre las dos esferas
   - fuera de la esfera de radio R_B

4. Aplico la definición de flujo: $\Phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{S}$.

5. Igualo el valor del flujo calculado con el Teorema de Gauss con el valor de flujo calculado con su definición.

3.1. Cálculo del campo eléctrico en un punto a una distancia r del centro de las esferas y dentro de la esfera de radio R_A

Esta sería una situación como la que se muestra en la figura 2. Para aplicar el Teorema de Gauss tomamos una esfera de radio r (*Paso 2*). Esto es, una esfera que pasa por el punto donde queremos calcular el campo. Ya tenemos el tipo de superficie de Gauss escogida (*Paso 2*) y también sus

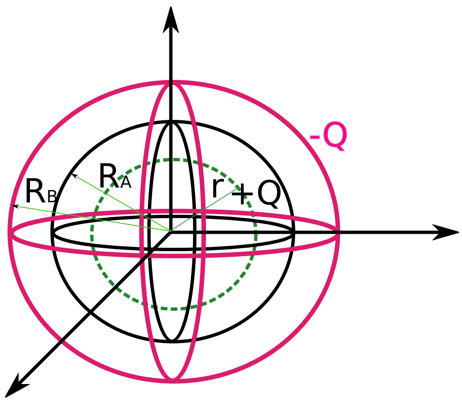

Figura 2: Cálculo del campo eléctrico en un punto a una distancia r del centro de las esferas y dentro de la esfera de radio R_A.

dimensiones así que ya podemos aplicar el Teorema (*Paso 3*):

$$\Phi = \frac{\sum Q_{dentro}}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

donde $\sum Q_{dentro}$ es la suma de todas las cargas que hay dentro de la superficie de Gauss, esto es, todas las cargas que hay dentro de la superficie de radio r (en verde en la figura 2).

Como hemos dicho que las esferas son conductoras, toda la carga que poseen se encuentra en su superficie, por tanto, dentro de la esfera de Gauss (verde) no hay ninguna carga ($\sum Q_{dentro}$=0). Si $\sum Q_{dentro}$=0, entonces el flujo a través de la esfera de Gauss (verde) es cero $\Phi = 0$.

Pasamos ahora a aplicar el *Paso 4*, usar la definición de flujo:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E\, dS = E \oint dS = E\, S_{esfera\, de\, Gauss} \tag{6}$$

donde la expresión anterior se obtiene primero quitando el producto escalar porque el campo y la superficie son paralelos y segundo teniendo en cuenta que fijada la superficie, el campo sólo depende de la distancia a la que lo estemos calculando y es independiente del trozo de superficie dS que consideremos y, por tanto, puede salir de la integral.

Finalmente, aplico el Paso 5 donde igualo lo obtenido con el Teorema de Gauss a lo obtenido en los cálculos usando la definición de flujo:

$$0 = E\, S_{esfera\, de\, Gauss} \tag{7}$$

Para que un producto $E\, S_{esfera\, de\, Gauss}$ sea cero, o bien $E = 0$ o bien $S_{esfera\, de\, Gauss} = 0$. Pero $S_{esfera\, de\, Gauss}$ no puede ser cero porque $S_{esfera\, de\, Gauss} = 4\pi r^2$ y r no es cero. Por tanto, la única posibilidad es que $E = 0$.

3.2. Cálculo del campo eléctrico en un punto a una distancia r del centro de las esferas y situado entre ellas

Esta sería una situación como la que se muestra en la figura 3. Para aplicar el Teorema de Gauss tomamos una esfera de radio r (*Paso 2*). Esto es, una esfera que pasa por el punto donde queremos calcular el campo. Ya tenemos el tipo de superficie de Gauss escogida (*Paso 2*) y también sus

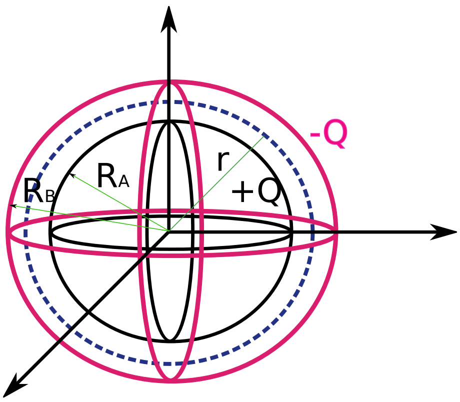

Figura 3: Cálculo del campo eléctrico en un punto a una distancia r del centro de las esferas y situado entre ellas.

dimensiones así que ya podemos aplicar el Teorema (*Paso 3*):

$$\Phi = \frac{\sum Q_{dentro}}{\varepsilon_0} \tag{8}$$

donde $\sum Q_{dentro}$ es la suma de todas las cargas que hay dentro de la superficie de Gauss, esto es, todas las cargas que hay dentro de la superficie de radio r (en azul en la figura 2).

Como hemos dicho que las esferas son conductoras, toda la carga que poseen se encuentra en su superficie, por tanto, dentro de la esfera de Gauss (azul) sólo está la carga que hay en la esfera de radio R_A (Q). Por tanto, $\sum Q_{dentro} = Q$, entonces el flujo a través de la esfera de Gauss (azul) es $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$.

Pasamos ahora a aplicar el *Paso 4*, usar la definición de flujo:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E\, dS = E \oint dS = E\, S_{esfera\, de\, Gauss} \tag{9}$$

donde la expresión anterior se obtiene primero quitando el producto escalar porque el campo y la superficie son paralelos y segundo teniendo en cuenta que fijada la superficie, el campo sólo depende de la distancia a la que lo estemos calculando y es independiente del trozo de superficie dS que consideremos y, por tanto, puede salir de la integral.

Finalmente, aplico el Paso 5 donde igualo lo obtenido con el Teorema de Gauss a lo obtenido en los cálculos usando la definición de flujo:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E\, S_{esfera\,de\,Gauss} \tag{10}$$

Como $S_{esfera\,de\,Gauss} = 4\pi r^2$, el módulo del campo eléctrico tiene la siguiente expresión:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \tag{11}$$

3.3. Cálculo del campo eléctrico en un punto a una distancia r del centro de las esferas y fuera de la esfera de radio R_B

Esta sería una situación como la que se muestra en la figura 4. Para aplicar el Teorema de Gauss tomamos una esfera de radio r (*Paso 2*). Esto es, una esfera que pasa por el punto donde queremos calcular el campo. Ya tenemos el tipo de superficie de Gauss escogida (*Paso 2*) y también sus

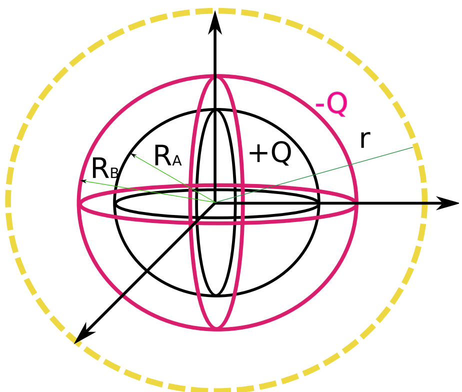

Figura 4: Cálculo del campo eléctrico en un punto a una distancia r del centro de las esferas y fuera de la esfera de radio R_B.

dimensiones así que ya podemos aplicar el Teorema (*Paso 3*):

$$\Phi = \frac{\sum Q_{dentro}}{\varepsilon_0} \tag{12}$$

donde $\sum Q_{dentro}$ es la suma de todas las cargas que hay dentro de la superficie de Gauss, esto es, todas las cargas que hay dentro de la superficie de radio r (en amarillo en la figura 4).

Como hemos dicho que las esferas son conductoras, toda la carga que poseen se encuentra en su superficie, por tanto, dentro de la esfera de Gauss (amarillo) la carga total ($\sum Q_{dentro}$) es $+Q - Q = 0$. Si $\sum Q_{dentro}$=0, entonces el flujo a través de la esfera de Gauss (amarillo) es cero $\Phi = 0$.

Pasamos ahora a aplicar el *Paso 4*, usar la definición de flujo:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E\, dS = E \oint dS = E\, S_{esfera\, de\, Gauss} \tag{13}$$

donde la expresión anterior se obtiene primero quitando el producto escalar porque el campo y la superficie son paralelos y segundo teniendo en cuenta que fijada la superficie, el campo sólo depende de la distancia a la que lo estemos calculando y es independiente del trozo de superficie dS que consideremos y, por tanto, puede salir de la integral.

Finalmente, aplico el Paso 5 donde igualo lo obtenido con el Teorema de Gauss a lo obtenido en los cálculos usando la definición de flujo:

$$0 = E\, S_{esfera\, de\, Gauss} \tag{14}$$

Para que un producto $E\, S_{esfera\, de\, Gauss}$ sea cero, o bien $E = 0$ o bien $S_{esfera\, de\, Gauss} = 0$. Pero $S_{esfera\, de\, Gauss}$ no puede ser cero porque $S_{esfera\, de\, Gauss} = 4\pi r^2$ y r no es cero. Por tanto, la única posibilidad es que $E = 0$.

3.4. Expresión final del campo eléctrico

Si unimos en una sola expresión todo lo calculado en esta sección, podremos escribir el campo eléctrico creado por un condensador esférico como:

$$E = \begin{cases} 0 & si \quad r < R_A \\ \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} & si \quad R_A \leq r \leq R_B \\ 0 & si \quad r > R_B \end{cases} \tag{15}$$

4. Calculando la diferencia de potencial $V_A - V_B$

Como ya tenemos la expresión del campo eléctrico, para calcular la diferencia de potencial entre los conductores esféricos sólo hay que usar la relación que existe entre ambos:

$$V_A - V_B = -\int_{R_B}^{R_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{16}$$

4.1. ¿Qué valor de los tres que he calculado para el campo tengo que usar?

Como tengo que calcular la diferencia de potencial entre el conductor de radio R_A y el de radio R_B, tendré que usar la expresión del campo válida en el rango de valores de r que estén comprendidos entre R_A y R_B. Esto es:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

Y ahora ya podemos aplicar la relación entre campo eléctrico y potencial:

$$\begin{aligned}
V_A - V_B &= -\int_{R_B}^{R_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} &(17)\\
&= -\int_{R_B}^{R_A} E\, dr &(18)\\
&= -\int_{R_B}^{R_A} \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\, dr &(19)\\
&= -\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi} \int_{R_B}^{R_A} \frac{dr}{r^2} &(20)\\
&= \left.\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r}\right|_{R_B}^{R_A} &(21)\\
&= \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi R_A} - \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi R_B} = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right) &(22)
\end{aligned}$$

5. Calculando la Capacidad

Una vez que conocemos la expresión para la diferencia de potencial entre los conductores esféricos que forman el condensador, usamos la definición de capacidad para calcular su expresión:

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)} = \frac{\varepsilon_0 4\pi}{\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)} \qquad (23)$$