ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Convocatoria Febrero 2012

Alumno:____ **DNI:**____________

(07/02/2012)

Ejercicio 1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. El cardinal del conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$ es:

(a) 2^{12}.

(b) 2^7.

(c) 7^2.

(d) 12^2.

Ejercicio 2. ¿Cuál de las siguientes reglas define una aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

(a) $f(n) = n^2 - 1$.

(b) $f(n) = n^2 - 60n + 800$.

(c) $f(n) = \frac{n^3+6n^2+8n}{3}$.

(d) $f(n) = \frac{n^3+5n^2+6n}{6}$.

Ejercicio 3. En $\mathbb{Z}_{12}$ definimos la relación de equivalencia xRy si $x^2 = y^2$. Entonces el cardinal del conjunto cociente vale:

(a) 1

(b) 4

(c) 6

(d) 12

Ejercicio 4. Disponemos de 45 billetes de 20 euros, y 18 billetes de 50 euros. ¿De cuántas formas distintas podemos conseguir 1110 euros?

(a) 7.

(b) 11.

(c) 9.

(d) 5.

Ejercicio 5. ¿Para que valor de m no es verdad que $3^6 \equiv 9 \text{ mód } m$?

(a) $m = 8$.

(b) $m = 10$.

(c) $m = 12$.

(d) $m = 14$.

Ejercicio 6. Dado el sistema de congruencias

$$\begin{array}{rcll} 22x & \equiv & 26 & \text{mód } 36 \\ 13x & \equiv & 38 & \text{mód } 51 \end{array}$$

(a) No tiene solución pues 51 y 36 no son primos relativos.

(b) No tiene solución pues 22 no tiene inverso módulo 36.

(c) Tiene una única solución comprendida entre 1000 y 2000.

(d) Tiene cuatro soluciones comprendidas entre 1000 y 2000.

Ejercicio 7. Sea $A = \mathbb{Z}_5[x]_{x^4+3x^3+3x^2+x+2}$, y sea $p(x) = x^2 + 1 \in A$. Entonces:

(a) $p(x)$ no tiene inverso en A pues $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 2$ tiene a $x = 1$ como raíz.

(b) $p(x)$ no tiene inverso en A pues $x^2 + 1$ no es irreducible.

(c) $p(x)$ tiene inverso en A y vale $2x^3 + x^2 + 4x + 1$.

(d) $p(x)$ tiene inverso en A y vale $x^3 + x^2 + 4x + 2$.

Ejercicio 8. De los siguientes anillos, indica cuál es un cuerpo con 125 elementos:

(a) $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x+1}$.

(b) $\mathbb{Z}_3[x]_{x^5+x^2+2}$.

(c) $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x^2+4}$.

(d) $\{a(x) \in \mathbb{Z}_5[x] : \ gr(a(x)) \leq 124\}$.

Ejercicio 9. El resto de dividir 5514^{1838} entre 7 es:

(a) 6.

(b) 1.

(c) 4.

(d) 3.

Ejercicio 10. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Q}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & b \\ x & + & by & + & z & = & a \end{array}$$

(a) El sistema es siempre compatible indeterminado.

(b) Si $a = b = 1$ el sistema es incompatible.

(c) Existen valores de a y b para los que el sistema es compatible determinado.

(d) El sistema es compatible indeterminado si, y sólo si, $a \cdot b = 1$.

Ejercicio 11. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$. Entonces el determinante de A vale:

(a) 3.

(b) 4.

(c) 1.

(d) 0.

Ejercicio 12. ¿Para cuál de los siguientes cuerpos el polinomio $p(x) = x^6 - 1$ verifica que $mcd(p(x), p'(x)) \neq 1$?

(a) $K = \mathbb{Q}$.

(b) $K = \mathbb{Z}_3$.

(c) $K = \mathbb{Z}_5$.

(d) $K = \mathbb{Z}_7$.

Ejercicio 13. Dado el conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ donde $u_1 = (3, 1, 5, 2)$, $u_2 = (4, 2, 1, 6)$ y $u_3 = (6, 1, 1, 6)$ son tres vectores de $(\mathbb{Z}_7)^4$.

(a) S puede ser ampliado a una base añadiéndole el vector $(1, 1, 1, 1)$.

(b) S no puede ser ampliado a una base pues los vectores de S son linealmente dependientes.

(c) Los vectores $\{u_1, u_2, u_3, u_1 + u_2 + u_3\}$ forman una base de $(\mathbb{Z}_7)^4$.

(d) Los vectores de S son linealmente independientes.

Ejercicio 14. Sea U_1 el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^4$ generado por $\{(1, 2, 0, 2);\ (0, 1, 4, 0)\}$ y U_2 el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^4$ de ecuaciones $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 5t & = & 0 \\ 3x & & & & & + & t & = & 0 \end{array}\right.$. Una base de $U_1 + U_2$ es

(a) $\{(1, 2, 3, 1);\ (2, 0, 2, 5);\ (1, 0, 0, 4)\}$.

(b) $\{(1, 2, 3, 1);\ (2, 0, 2, 5)\}$.

(c) $\{(1, 0, 0, 0);\ (0, 1, 0, 0);\ (0, 0, 1, 0);\ (0, 0, 0, 1)\}$.

(d) $\{(1, 0, 0, 4);\ (0, 1, 0, 6);\ (1, 1, 0, 3)\}$.

Ejercicio 15. Sean A y B dos matrices cuadradas 2×2 con coeficientes reales tales que

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

(a) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$.

(b) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$.

(c) No existen matrices con las condiciones que nos da el enunciado.

(d) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 16. Sea $V = (\mathbb{Z}_{11})_2[x]$, es decir, el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_{11}$, y sea $D : V \to V$ la aplicación derivada. Entonces:

(a) $\{7\}$ es una base del núcleo de D y $\{6 + 3x, 9 + 10x\}$ una base de la imagen.

(b) $\{1\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x\}$ una base de la imagen.

(c) $\{0\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x, x^2\}$ una base de la imagen.

(d) $\{x\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x^2\}$ una base de la imagen.

Ejercicio 17. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$.

Entonces:

(a) A tiene tres valores propios distintos, y por tanto es diagonalizable.

(b) A tiene dos valores propios distintos, y no es diagonalizable.

(c) A tiene dos valores propios distintos, y es diagonalizable.

(d) A tiene un único valor propio.

Ejercicio 18. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + 3y, 7x + z)$

(a) Una base de la imagen es $\{(1, 0);\ (0, 1)\}$.

(b) f es inyectiva.

(c) f no es sobreyectiva.

(d) El núcleo de f tiene dimensión 2.

Ejercicio 19. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$. Entonces A^{105} vale

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(c) A.

(d) La matriz identidad.

Ejercicio 20. Sea U el subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_5)^4$ generado por los vectores $(1, 0, 1, 2);\ (0, 4, 1, 1)$. Las ecuaciones cartesianas de U son:

(a) $\left\{ 4x + 2y + 3z + 4t = 0 \right.$.

(b) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 4y & + & 4z & & & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & + & 4t & = & 0 \end{array} \right.$.

(c) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & + & z & + & 4t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & & & + & 4t & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \end{array} \right.$.

(d) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 4y & + & 4z & & & = & 0 \end{array} \right.$.