

ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Convocatoria Febrero 2011

(01/02/2011)

Alumno: _____ Grupo: _____ DNI: _____

Ejercicio 1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $P = \{2, 3, 5, 7\}$. En $\mathcal{P}(X)$ definimos la relación de equivalencia

$$A \sim B \text{ si, y sólo si, } A \setminus P = B \setminus P$$

Entonces el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/\sim$ tiene cardinal

- (a) 64.
- (b) 4.
- (c) 16.
- (d) 10.

Justifica la respuesta.

Ejercicio 2.

1. Resuelve el siguiente sistema de congruencias en \mathbb{Z}

$$\begin{cases} 5x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \\ 4x \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$$

2. Calcula, si existe, el inverso para el producto de 295 en \mathbb{Z}_{1274} .

Ejercicio 3. Resuelve en $\mathbb{Z}_5[x]$ la ecuación

$$(x^2 + 1) \cdot u(x) + (3x + 2) \cdot v(x) = x + 1$$

Ejercicio 4. Sean U el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^4$ generado por los vectores $u_1 = (3, 5, 2, 3)$, $u_2 = (1, 6, 3, 4)$ y $u_3 = (6, 4, 4, 4)$; y sea W el subespacio dado por las ecuaciones $\begin{cases} 2x + y + 5z + 3t = 0 \\ x + 4y + 6z + 5t = 0 \end{cases}$.

Entonces una base de $U \cap W$ es:

- a) $\{(5, 2, 1, 6)\}$.
- b) $\{(6, 1, 1, 1)\}$.
- c) $\{(5, 2, 1, 6), (6, 1, 1, 1)\}$.
- d) $\{(1, 2, 1, 4), (1, 1, 1, 2)\}$.

Justifica la respuesta.

Ejercicio 5. Sea el espacio vectorial $V = (\mathbb{Z}_5)^3$ y sea U el subespacio vectorial de V generado por $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 1)$.

¿Para cuál de los siguientes subespacios vectoriales W de V se verifica que $V = U \oplus W$?

- a) $W = \langle (3, 4, 3) \rangle$.
- b) $W = \langle (2, 1, 3), (3, 4, 2) \rangle$.
- c) $W = \langle (2, 3, 1), (4, 1, 2) \rangle$.
- d) $W = \left\{ (x, y, z) \in V : \begin{array}{l} 4x + 2y = 0 \\ x + 4z = 0 \end{array} \right\}$.

Justifica la respuesta.

Ejercicio 6. Da una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ que verifique que el vector $(1, 2, -1)$ pertenezca al núcleo de f , que $f(1, -1, 0) = (3, 1, 2)$ y que $\text{Im}(f)$ sea el subespacio de ecuación $x - y - z = 0$.

Calcula la matriz de f en la base $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

Ejercicio 7. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z}_5 :

$$\left. \begin{array}{rrcr} 2x & + & y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 4 \\ 3x & + & (a+2)y & + & 2z & = & 2 \end{array} \right\}$$

Discútelos según el valor del parámetro a .

Si para $a = 4$ es compatible, resuélvelo.

Ejercicio 8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$. Estudia si A es diagonalizable, y en caso afirmativo, calcula una matriz regular P y una matriz diagonal D tal que $P \cdot D \cdot P^{-1}$ sea igual a A .