TEMA 1

Conjuntos, aplicaciones y relaciones.

Ejercicio 1. Dado el conjunto $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y los subconjuntos $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{6, 7, 9\}$, $C = \{3, 8\}$, $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y $T = \{0, 3, 6, 9\}$, calcula los siguientes subconjuntos de X:

$$\overline{(A \cap (B \cup A)) \cup C}; P \cup T;\ P \cap T;\ \overline{P};\ \overline{T};\ \overline{P} \cap T;\ P \cap \overline{T};\ \overline{\overline{P} \cap T}.$$

Calcula también los siguientes subconjuntos de $X \times X$:

$$P \times T;\ \overline{P} \times \overline{P};\ \overline{P} \times \overline{T};\ \overline{P \times T};\ \overline{P} \times T;$$
$$(P \times \overline{T}) \cap (P \times \overline{P});\ (P \cap T) \times (\overline{P} \cap \overline{T}).$$

Ejercicio 2. Da un ejemplo de conjuntos X_1, X_2, Y_1, Y_2 verificando

$$(X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2) \neq (X_1 \cup X_2) \times (Y_1 \cup Y_2)$$

Ejercicio 3. Sea X un conjunto. En $\mathcal{P}(X)$ tenemos definida la operación **diferencia simétrica**

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demuestra que para cualesquiera $A, B, C \subset X$ se tiene:

1. $A\Delta B = B\Delta A$.
2. $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
3. $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.
4. $A\Delta A = \emptyset$.
5. $A\Delta\emptyset = A$.
6. $A\Delta X = \overline{A}$.
7. $A\Delta\overline{A} = X$.
8. $\overline{A\Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Ejercicio 4. Estudia si las siguientes identidades son verdaderas o falsas:

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
2. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$,
3. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$,

4. $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$,
5. $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$,
6. $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$.
7. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
8. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Ejercicio 5. Dado un conjunto X no vacío, y $A, B \subseteq X$, se define la aplicación $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ por la fórmula

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin A \\ 1 \text{ si } x \in A \end{cases}$$

Prueba que:

1. $\chi_A = \chi_B$ si, y sólo si, $A = B$.
2. $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$.
3. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.
4. $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$.
5. $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$.

Ejercicio 6. Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$.
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = |x| + 1$.
3. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{3x+2}{4}$
4. $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2^x 3^y$
5. $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f(x, y) = 2^x(2y + 1)$
6. $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x, y) = 2x + 3y$
7. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n + (-1)^n$

Ejercicio 7. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea $f : X \to X$ la aplicación que cumple que $f(x)$ es el resto obtenido al dividir $3x + 5$ entre 8. ¿Es f inyectiva?, ¿sobreyectiva?, ¿biyectiva?.

Ejercicio 8. Dada la aplicación $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ definida por $f(n) = n^2$, demuestra que tiene más de una inversa por la izquierda, y ninguna inversa por la derecha. Calcula dos inversas por la izquierda.

Ejercicio 9. Sean $X = \{0, 1, \ldots, 4\}$, $Y = \{0, 1, \ldots, 7\}$ y $Z = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Sea $f : X \to Y$ la aplicación que cumple que $f(x)$ es el resto obtenido al dividir x^2 entre 8, y sea $g : Y \to Z$ la aplicación que cumple que $g(x)$ es el resto obtenido al dividir $9x - x^2$ entre 10. ¿Es f inyectiva?, ¿es g inyectiva?, ¿es $g \circ f$ inyectiva?.

Ejercicio 10. Calcula $g \circ f$ y $f \circ g$ cuando sea posible para cada uno de los siguientes pares de aplicaciones:

1. $\begin{array}{c} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{c} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{array}$

2. $\begin{array}{c} \mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Q} \\ x \mapsto \frac{3x+2}{4} \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{c} \mathbb{Q} \xrightarrow{g} \mathbb{Q} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \cup \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & +\sqrt{x} \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

Ejercicio 11. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación $f(x) = 2x + 3$. Calcula, si existe, una aplicación $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x) = 16x^2 - 1$.

Ejercicio 12. Sean f y g dos aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces

a) f puede ser la aplicación $f(x) = x + \sqrt{2}$

b) g puede ser la aplicación $g(x) = x^2$

c) f no es inyectiva

d) $(f \circ g)(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 13. Estudia en que casos existe una aplicación satisfaciendo las condiciones que se exigen:

1. $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4$, $f([x]_8) = [x]_4$.
2. $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8$, $f([x]_4) = [x]_8$.
3. $f : \mathbb{Z}_8/R_g \to \mathbb{Z}_4$, $f(\overline{[x]_8}) = [x]_4$, donde $g : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$ verifica $g([x]_8) = [x]_8^2$.
4. $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8$, $f([x]_4) = [x^2]_8$.
5. $f : \mathbb{Z}_8/R_g \to \mathbb{Z}_2$, $f(\overline{[x]_8}) = [x]_2$ y g es la misma aplicación del apartado 3.
6. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $f(\frac{a}{b}) = a + b$.
7. $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f([x]_5) = [E(\frac{x}{2})]_5$, donde E es la función *parte entera*.
8. $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$, $f([x]_3) = [x^2]_6$.

Ejercicio 14. ¿Cuál de las siguientes reglas define una aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

(a) $f(n) = n^2 - 1$.

(b) $f(n) = n^2 - 60n + 800$.

(c) $f(n) = \frac{n^3+6n^2+8n}{3}$.

(d) $f(n) = \frac{n^3+5n^2+6n}{6}$.

Justifica los cuatro casos.

Ejercicio 15. Dados los conjuntos A y B tales que $|A \times B| = 112$ y $|\mathcal{P}(A)| = 256$, entonces $|B|$ vale

a) 12 b) 17 c) 9 d) 14

Ejercicio 16. Sean A y B dos conjuntos tales que $|A| = 8$ y $|B| = 9$. De los siguientes cuatro conjuntos, ¿cuál tiene cardinal distinto de los restantes?

a) $\mathcal{P}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$

b) El conjunto de todas las aplicaciones de A en $\mathcal{P}(\mathcal{B})$

c) $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \times \mathcal{P}(\mathcal{B})$

d) El conjunto de todas las aplicaciones de B en $\mathcal{P}(\mathcal{A})$

Ejercicio 17. Sean los conjuntos $A = \{2k|k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}\}$ y $B = \{2k + 1|k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}\}$ Entonces el cardinal del conjunto

$$((\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})) \setminus (A \times B)$$

es

a) infinito b) 4 c) 9 d) 6

Ejercicio 18. Sea X un conjunto con 7 elementos y A un subconjunto de X tal que $\emptyset \neq A \neq X$. Entonces el cardinal del conjunto $\mathcal{P}(A \times \overline{A})$ **no** puede ser:

a) 2^6 b) 2^7 c) 2^{10} d) 2^{12}

Ejercicio 19. En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales definimos la siguiente relación:

$$xRy \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

1. Prueba que R es una relación de equivalencia.
2. Describe el conjunto cociente $\mathbb{R}/R$.

Ejercicio 20. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $P = \{2, 3, 5, 7\}$. En $\mathcal{P}(X)$ definimos la relación de equivalencia

$$A \; R \; B \text{ si, y sólo si, } A \setminus P = B \setminus P$$

Describe el conjunto cociente.

Ejercicio 21. Sea $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. En $X \times X$ definimos la relación:

$$(a, b)R(c, d) \text{ si } |a| + |b| = |c| + |d|.$$

¿Es una relación de equivalencia? En caso afirmativo calcula el cardinal del conjunto cociente.

Ejercicio 22. Sea $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Para cada $A \subseteq X$ llamamos ΣA a la suma de los elementos de A, es decir, $\Sigma\{-3, -2, 0, 4\} = -1$ por ejemplo. Convenimos también que $\Sigma\varnothing = 0$. Sea R la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$ definida por $A \; R \; B$ si y sólo si $\Sigma A = \Sigma B$.

1. Prueba que R es una relación de equivalencia.
2. Describe el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R$.

Ejercicio 23. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea R la siguiente relación sobre X

$$xRy \iff x + y \leq 6.$$

1. Describe explícitamente el conjunto $R \subseteq X \times X$ que define la relación binaria.
2. ¿Es R una relación reflexiva?, ¿es R una relación simétrica?, ¿es R una relación antisimétrica?, ¿es R una relación transitiva?

Ejercicio 24. En $\mathbb{Z}$ definimos la relación de equivalencia xRy si $9 \mid (x^2 - y^2)$. Describe $\mathbb{Z}/R$.

Ejercicio 25. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros definimos la siguiente relación:

$$x\,R\,y \Leftrightarrow \text{ el valor absoluto de } x^2 - y^2 \text{ no es un número primo}$$

a) no es reflexiva

b) es relación de equivalencia

c) no es transitiva

d) no es simétrica

Ejercicio 26. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $S = \{a, c, e\}$. Definimos en $\mathcal{P}(X)$ la relación R_S como sigue:

$$A\ R_S\ B \text{ si, y sólo si, } A\Delta B \subseteq S$$

1. Demuestra que R_S es una relación de equivalencia.
2. Describe las clases de equivalencia de $\emptyset$ y de $\{b\}$.
3. Comprueba que para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$, hay una biyección entre $[A]$ y $\mathcal{P}(S)$.
4. Describe el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R_S$.
5. Da una biyección entre $\mathcal{P}(X \setminus S)$ y $\mathcal{P}(X)/R_S$.

Ejercicio 27. Dibuja el diagrama de Hasse de $(D(20), |)$.

1. Dado $B = \{4, 10, 2\}$, encuentra sus elementos notables.
2. Encuentra los elementos minimales de $B = D(20) \setminus \{1\}$.

Ejercicio 28. Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Dibuja el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}(X)$. Encuentra los elementos minimales y maximales de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\}$.

Ejercicio 29. Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ las siguientes relaciones binarias:

- $(a, b) \leq_1 (c, d)$ si $(3a + 1)2^b \leq (3c + 1)2^d$.
- $(a, b) \leq_2 (c, d)$ si $(2a + 1)2^b \leq (2c + 1)2^d$.

- $(a,b) \leq_3 (c,d)$ si $(2a+1)2^d \leq (2c+1)2^b$.

1. Estudia cual o cuales de las relaciones anteriores es una relación de orden.
2. Estudia cual o cuales de las relaciones anteriores es una relación de orden total.
3. En los casos en que la relación sea un orden, di cómo están ordenados los siguientes conjuntos.

   a) $\{(0,0),\ (1,0),\ (2,0),\ \cdots,(n,0)\}$.
   b) $\{(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ \cdots,(0,n)\}$.
   c) $\{(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ \cdots,(n,n)\}$.

Ejercicio 30. Sean p y q dos números primos distintos. Dibuja el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados: $(D(p^2),|)$, $(D(p^3),|)$, $(D(p\cdot q),|)$, $(D(p^2\cdot q),|)$, $(D(p^2\cdot q^2),|)$.

Ejercicio 31. Sean p y q dos números primos distintos, como en el ejercicio anterior. Dibuja el diagrama de Hasse de cada uno de los siguientes conjuntos ordenados: $D(p)\times D(q)$, $D(p^2)\times D(q)$, $D(p^2)\times D(q^2)$ (en cada caso estamos considerando el orden producto).

Compara estos diagramas con los obtenidos en el ejercicio anterior.

Dibuja también los diagramas de Hasse de los anteriores conjuntos ordenados considerando el orden lexicográfico.

Ejercicio 32. Consideramos el conjunto ordenado $D(24)\times D(72)$. Para cada uno de los conjuntos siguientes, indica cuáles serían los elementos distinguidos (máximo, maximales, cotas superiores, etc.)

a) $\{(x,x) : x \in D(24)\}$.

b) $\{(2,1),(12,9),(8,6),(6,12)\}$.

c) $\left\{(x,\frac{72}{x}) : x \in D(24)\right\}$.

d) $\{(x,3x) : x \in D(24)\}$.

Ejercicio 33. Consideramos en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ el orden producto. Para cada uno de los siguientes subconjuntos, halla el máximo, el mínimo, las cotas superiores, las cotas inferiores, el supremo, el ínfimo, los elementos maximales y los elementos minimales.

a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\}$.

b) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1\right\}$.

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|=5\}$.

d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \max\{x,y\}\leq 3\}$.

e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x+3y\leq 5\}$.

Ejercicio 34. Sea $A = \{(1,2);\ (4,3);\ (3,5);\ (2,7);\ (4,8);\ (6,9);\ (6,7);\ (5,9)\} \subseteq \mathbb{N}^2$. Consideramos en A el orden inducido por el orden producto en $\mathbb{N}^2$, y el orden inducido por el orden lexicográfico.

Calcula las cotas inferiores, elementos minimales, ínfimo, mínimo, supremo, elementos maximales y máximo en ambos casos.

Ejercicio 35. Sea $\varnothing \neq X$ un conjunto y $f : X \to \mathbb{N}$ una aplicación de conjuntos. Definimos en X la siguiente relación binaria $x \leq_f y$ si y sólo si $f(x_1) \leq f(x_2)$.

1. ¿Qué propiedad debe verificar f para que $\leq_f$ sea una relación de orden total?
2. En el caso particular de $X = \mathbb{N}^2$ demuestra que para la función $f(a,b) = 2^a 3^b$, $\leq_f$ es un orden total.