

Cálculo
1ºA Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial (I)
Curso 2013/2014

1. (2 puntos) Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$x_1 = 0$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.
- b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1} = \sqrt{1/2} > x_1 = 0$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n < x_{n+1} \Rightarrow 1 + x_n < 1 + x_{n+1} \Rightarrow \sqrt{1+x_n} < \sqrt{1+x_{n+1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+x_n} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por $x_1 = 0$. Veamos que está acotada superiormente por 1. Esto es, que $x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 0 \leq 1$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 1$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 1$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \leq 1 \Rightarrow 1 + x_n \leq 2 \Rightarrow \sqrt{1+x_n} \leq \sqrt{2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+x_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1 \Rightarrow x_{n+1} \leq 1$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

- b) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(1+x) \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 1$ y $x = -1/2$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que 0. El motivo es que $0 \leq x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 1$.

2. (2 puntos) Calcula el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{ \frac{1! + 3! + 5! \cdots (2n-1)!}{(2n-1)!} \right\}$$

Solución: Observamos que tenemos un cociente donde el denominador, claramente, crece a infinito. Aplicamos el criterio de Stolz y, si llamamos a_n al numerador y b_n al denominador, tendremos que estudiar el límite del siguiente cociente:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \frac{1! + 3! + 5! \cdots (2n-1)! + (2n+1)! - [1! + 3! + 5! \cdots (2n-1)!]}{(2n+1)! - (2n-1)!} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n+1)! - (2n-1)!} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)![(2n+1)(2n) - 1]} \\ &= \frac{(2n+1)(2n)}{(2n+1)(2n) - 1} = \frac{4n^2 + 2n}{4n^2 + 2n - 1} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

ya que se trata de un cociente de polinomios del mismo grado y con el mismo coeficiente principal.

Como $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 1$, aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim \left\{ \frac{1! + 3! + 5! \cdots (2n-1)!}{(2n-1)!} \right\} = 1$$

3. (3 puntos) Calcula el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{ \log(n) \log \left(1 + \frac{1}{\log(n^2 + 1)} \right) \right\}$$

Como consecuencia del límite anterior deduce el carácter de la serie:

$$\sum \log \left(1 + \frac{1}{\log(n^2 + 1)} \right)$$

Solución: Por las propiedades del logaritmo, la sucesión dada se puede reescribir como sigue:

$$\left\{ \log \left[\left(1 + \frac{1}{\log(n^2 + 1)} \right)^{\log(n)} \right] \right\}$$

Como la sucesión $\left(1 + \frac{1}{\log(n^2 + 1)} \right)^{\log(n)}$ presenta una indeterminación del tipo “ 1^∞ ”, aplicamos la regla del número e :

$$\begin{aligned} \log(n) \left[1 + \frac{1}{\log(n^2 + 1)} - 1 \right] &= \log(n) \left[\frac{1}{\log(n^2 + 1)} \right] = \frac{\log(n)}{\log(n^2 + 1)} \\ \frac{\log(n)}{\log \left(n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right)} &= \frac{\log(n)}{2 \log(n) + \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \\ \frac{\frac{\log(n)}{\log(n)}}{\frac{2 \log(n)}{\log(n)} + \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}{\log(n)}} &= \frac{1}{2 + \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}{\log(n)}} \rightarrow 1/2 \end{aligned}$$

Por tanto, $\left\{ \left(1 + \frac{1}{\log(n^2 + 1)} \right)^{\log(n)} \right\} \rightarrow e^{1/2}$ y de aquí se tiene que:

$$\left\{ \log(n) \log \left(1 + \frac{1}{\log(n^2 + 1)} \right) \right\} = \left\{ \log \left[\left(1 + \frac{1}{\log(n^2 + 1)} \right)^{\log(n)} \right] \right\} \rightarrow \log(e^{1/2}) = \frac{1}{2}$$

Vamos ahora a deducir el carácter de la serie $\sum \log \left(1 + \frac{1}{\log(n^2 + 1)} \right)$. Basta con escribir la sucesión que acabamos de estudiar de la siguiente forma:

$$\log(n) \log \left(1 + \frac{1}{\log(n^2 + 1)} \right) = \frac{\log \left(1 + \frac{1}{\log(n^2 + 1)} \right)}{\frac{1}{\log(n)}} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$$

Haciendo uso del criterio de comparación por paso al límite, ambas series, la del numerador y la del denominador ($\sum \frac{1}{\log(n)}$) tienen el mismo carácter. Como es conocido que la serie $\sum \frac{1}{\log(n)}$ es divergente, la serie que nos proponen también es divergente.

4. (3 puntos) Estudia la posible convergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}$$

b) $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n}{4^n} - \frac{2^n}{3^{n+1}} \right)$. Si es convergente, calcula su suma.

Solución:

- a) Aplicamos el criterio del cociente, ya que aparecen factores en la expresión del término general de la serie. Así, si llamamos $a_n = \frac{3^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3^n} = \frac{3}{2n+1} \rightarrow 0 < 1$$

Por tanto, la serie dada es convergente.

- b) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n}{4^n} - \frac{2^n}{3^{n+1}} \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-1}{4} \right)^n - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{4}| < 1$ y $|\frac{2}{3}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \right)$, nos queda entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{4^n} - \frac{2^n}{3^{n+1}} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{4} \right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{4}} \right) - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Granada, 27 de noviembre de 2013