TEMA 2

Elementos de combinatoria

• 2.1

Principios generales.

Existen dos principios generales que debemos estudiar para adentrarnos en las técnicas de conteo. Aunque la interpretación más intuitiva de los mismos se refiere a posibilidades de elección dentro de una gama de alternativas, la presentación más algebraica hace referencia a cardinales de conjuntos. La cuenta más simple que podemos analizar es la siguiente.

Proposición 1 (Principio de la suma). *Sean $A, B \subseteq X$ con $A \cap B = \varnothing$. Entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

En términos de opciones y elecciones debemos interpretar el principio de la suma de la siguiente forma. Para tomar una decisión tenemos dos alternativas. La primera nos lleva a seleccionar una opción entre n posibles, y la segunda una opción entre m posibles. Si no hay opciones comunes entre ambas alternativas entonces nuestra actuación consiste en decantarnos por una de las $n + m$ opciones totales.

Corolario 2. *Para cualesquiera $A, B \subseteq X$, $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$.*

Demostración. Basta con escribir $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ y $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ y aplicar la Proposición 1. □

El siguiente principio analiza aquellas situaciones en las que tenemos que realizar varias elecciones consecutivas entre alternativas no necesariamente iguales.

Proposición 3 (Principio del producto). *Si $X_1, \dots, X_r$ son conjuntos de cardinal finito entonces $|X_1 \times \cdots \times X_r| = |X_1| \cdots |X_r|$.*

La interpretación de este principio es la siguiente: Si tenemos que realizar cadena de k selecciones independientes, la primera entre n_1 posibilidades, la segunda entre n_2 y así sucesivamente hasta la última selección que debemos realizar entre n_k alternativas, las alternativas totales entre las que debemos optar son $n_1 n_2 \cdots n_k$.

• 2.2

Orden importa. Factorial

El principio del producto nos permite calcular el número de palabras de longitud dada r que podemos formar con un alfabeto de n caracteres. Este número es n^r. La clave está en que podemos repetir las letras en cada elección. Vamos a analizar a continuación situaciones en las que no podemos realizar dicha repetición. Recordemos que el factorial de un natural $n \in \mathbb{N}$ se define recursivamente como

$$0! = 1, \qquad (n+1)! = (n+1)n!,$$

lo que podemos interpretar como

$$n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

cuando $n \geq 1$.

Definición 4. Sean $r \leq n$ dos naturales. Una *r-permutación* en n es una aplicación inyectiva $\sigma : \{1, \dots, r\} \to \{1, \dots, n\}$. Al conjunto de las r-permutaciones en n lo denotamos $P(n, r)$.

Proposición 5.

$$|P(n,r)| = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1) \cdots (n-r+1)$$

Demostración. Aplicación directa de la proposición 3, ya que comenzamos con n alternativas y tras cada elección tenemos una posibilidad menos para la siguiente. □

Corolario 6. *El número de permutaciones de un conjunto de n elementos (aplicaciones biyectivas del conjunto en si mismo) es $n!$.*

Definición 7. Una *partición ordenada* en un conjunto X es una partición en la que los subconjuntos están ordenados. Si bien los subconjuntos están ordenados, los elementos dentro de cada subconjunto no lo están.

El siguiente lema es intuitivo y fácil de demostrar a partir del principio de la suma. Además es muy útil para comprobar otros resultados.

Lema 8 (Lema de conteo)**.** *Sea $\phi : A \to B$ una aplicación sobreyectiva entre conjuntos finitos. Para cada $b \in B$ llamamos $\phi^{-1}(b) = \{a \in A \mid \phi(a) = b\}$. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\phi^{-1}(b)\right| = k$ para todo $b \in B$, entonces $|A| = k \cdot |B|$.*

Demostración. Basta observar que $A = \bigcup_{b\in B} \phi^{-1}(b)$, que la unión anterior es disjunta y aplicar la Proposición 1. □

Proposición 9. *Sea X un conjunto con $|X| = n$, y sean $n_1, \dots, n_k$ números naturales tales que $n = n_1 + \cdots + n_k$. El número de particiones ordenadas $\langle A_1, \dots, A_k\rangle$ con $|A|_j = n_j$ para cada $1 \leq j \leq k$ es*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Demostración. Consecuencia de la Proposición 5 y del Lema 8: Sea $\sigma : \{1, \dots, n\} \to X$ una biyección y sea ϕ la aplicación que lleva σ en una partición ordenada $\langle A_1, \dots, A_k\rangle$ llevando $\sigma(1), \dots, \sigma(n_1)$ a A_1, $\sigma(n_1+1), \dots, \sigma(n_1+n_2)$ a A_2, etcétera. Entonces $\phi^{-1}(\langle A_1, \dots, A_k\rangle) = n_1! \cdots n_k!$. Como existen $n!$ permutaciones en X concluimos que el número de particiones ordenadas es $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$. □

El número de particiones ordenadas coincide con el número de permutaciones que podemos hacer en un conjunto con elementos repetidos.

Proposición 10. *Dado un conjunto de n elementos que tiene n_1 elementos repetidos de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo y así sucesivamente hasta n_k de un tipo k-esimo. El número de permutaciones de dicho conjunto es*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Demostración. Si ordenamos los elementos y consideramos el conjunto X de las posiciones que ocupan, dar una permutación es equivalente a dar una partición ordenada $\langle A_1, \dots, A_k\rangle$ donde A_i contiene las posiciones que ocupan los n_i elementos de tipo i-ésimo. □

2.3 Orden no importa. Coeficientes binomiales

Definición 11. Llamemos $\binom{n}{r}$ al número de subconjuntos de r elementos que tiene un conjunto de n elementos. Entonces

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Estos números reciben el nombre de coeficientes binomiales, debido sobre todo al teorema 13 que veremos con posterioridad.

Corolario 12. *El número de cadenas compuestas por $n - r$ ceros y r unos es $\binom{n}{r}$*

Demostración. Cada una de las cadenas referidas es la imagen de la aplicación característica de un subconjunto con cardinal r del conjunto $\{1, \dots, n\}$, luego hay tantas cadenas como subconjuntos de r elementos. □

Entre otras, los coeficientes binomiales satisfacen las siguientes propiedades para $r \leq n$

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r},$$
$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}.$$

Teorema 13. *Sea A un anillo. Para cualesquiera $a, b \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r} = \\ &= \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n\end{aligned}$$

Proposición 14. *Existen $\binom{n+k-1}{k-1}$ formas de descomponer $n \in \mathbb{N}$ como suma de k números naturales.*

Demostración. La aplicación

$$\langle n_1, \ldots, n_k \rangle \longmapsto \underbrace{0 \cdots 0}_{n_1} 1 \underbrace{0 \cdots 0}_{n_2} 1 \cdots 1 \underbrace{0 \cdots 0}_{n_k}$$

es una biyección entre el conjunto de las descomposiciones de n como suma de k naturales y cadenas con n ceros y $k-1$ unos, así el resultado es consecuencia directa del Corolario 12. $\square$

Corolario 15. *Existen $\binom{n+k-1}{k-1}$ formas de distribuir n objetos indistinguibles en k cajas distinguibles.*

Corolario 16. *Existen $\binom{n+k-1}{k-1}$ formas de seleccionar n objetos entre k objetos distintos, permitiendo repeticiones.*

2.4 Otros principios de conteo

Teorema 17 (Principio de inclusión-exclusión). *Sean $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ subconjuntos finitos. Entonces*

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|,$$

es decir, sumamos los cardinales de los conjuntos obtenidos al realizar la intersección de un número impar de subconjuntos y restamos los cardinales de los conjuntos obtenidos al intersecar un número par de subconjuntos.

La fórmula se entiende más claramente si la describimos para tres y cuatro conjuntos:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C| \\ |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| \\ &\qquad - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ &\qquad + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\end{aligned}$$

Terminamos con otro principio aparentemente sencillo, pero de gran utilidad a la hora de resolver problemas. Se le conoce con el nombre de principio del palomar o de Dirichlet.

Proposición 18 (Principio de Dirichlet). *Sea $\{A_1, \ldots, A_k\}$ una partición de un conjunto X tal que $|X| = n$. Existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $|A_i| \geq \frac{n}{k}$.*

Demostración. Como consecuencia de la Proposición 1 (principio de la suma) $|X| = |A_1| + \cdots + |A_k|$. Si para todo i $|A_i| < \frac{n}{k}$, necesariamente tendríamos que $|X| < k\frac{n}{k} = n$, lo que es imposible. $\square$

Corolario 19. *Sea $\varphi : X \to Y$ una aplicación entre conjuntos finitos tales que $|X| > k|Y|$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Existe $y \in Y$ tal que $\left|\varphi^{-1}(y)\right| > k$.*

Demostración. Sencilla aplicación de la Proposición 18 a la partición $\{\varphi^{-1}(y) \mid y \in Y\} \setminus \{\varnothing\}$ de X. $\square$