Alumno:_______________________________ DNI:____________ Grupo: ____

Lógica y Métodos Discretos

Examen de Teoría

(05/07/2012)

Ejercicio 1. *Sea x_n la sucesión definida por*

$$x_0 = 0; \qquad x_1 = \frac{4}{3}; \qquad x_n = x_{n-1} + 2 \cdot x_{n-2} + 2^n$$

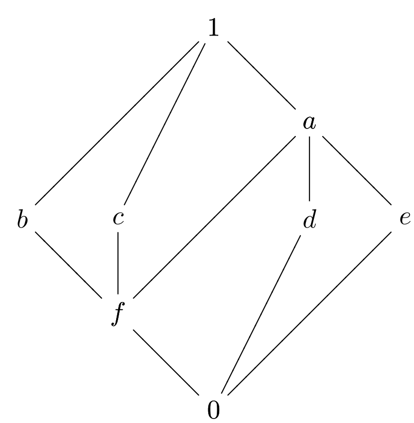
1. *Calcula los términos x_2, x_3, x_4.*
2. *Encuentra una relación de recurrencia lineal homogénea para la sucesión x_n.*
3. *Calcula una expresión para el término general x_n.*
4. *Calcula x_{10}.*

Ejercicio 2. *Construye un grafo con 7 vértices, que tenga dos vértices de grado 2, uno de grado 3, tres de grado 4 y uno de grado 5.*

1. *¿Es dicho grafo plano?*
2. *¿Es conexo?*
3. *¿Tiene algún camino, o circuito de Euler? En caso afirmativo, da uno.*
4. *¿Cuál es su número cromático?*

Ejercicio 3. *Sea L el conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse es*

Figura 1:



1. *Comprueba que es un retículo.*
2. *Estudia si es distributivo.*
3. *Calcula todos los elementos que tienen complemento. ¿Forman estos elementos un subrretículo?*
4. *Sea $S = \{a, b, c, f\}$. Calcula los elementos notables de este conjunto (cotas superiores, cotas inferiores, supremo, ínfimo, máximo, mínimo, elementos maximales y elementos minimales).*

Ejercicio 4. *Dada la función booleana $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ dada por*

$$f(x, y, z, t) = x + (y\,\overline{z}) + t \downarrow (x \downarrow z)$$

1. *Calcula la forma normal canónica disyuntiva de f y la forma normal canónica conjuntiva de $\overline{f}$.*
2. *Simplifica la expresión de f obtenida en el apartado anterior.*
3. *Expresa f usando únicamente las operaciones suma y complementario.*

Ejercicio 5. *Tenemos 7 velas. Tres con forma de 1, dos con forma de 2 una con forma de 5 y una con forma de 8.*

1. *¿Cuántos números podemos formar con las 7 velas?.*
2. *¿Cuántos de ellos tienen juntos el 5 y el 8?.*
3. *¿Cuántos hay que tengan juntos un 1 y un 5?.*
4. *¿Cuántos números hay que sean mayores que 5000000?.*
5. *¿Cuántos hay en los que se alternan cifras pares con cifras impares?.*

En todos los apartados de este ejercicio, en cada número hay que usar las 7 velas.

Ejercicio 6. *Sea $\alpha = a \to (b \wedge \neg c)$ y $\beta = (a \leftrightarrow \neg b) \vee c$. Encuentra una fórmula γ tal que para cualquier interpretación se verifique que $I(\gamma) = I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta)$. Calcula la forma clausular de γ.*

Ejercicio 7. *Sea $\alpha = \neg\exists x\forall y(P(x,y) \to P(x,x)) \wedge \forall x\forall y\forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$.*
Estudia si α es universalmente válida, satisfacible y refutable o contradicción.

Ejercicio 8. *Considera las siguientes fórmulas:*

- $\alpha_1 = \exists y\forall x(Q(x,y) \to R(x))$
- $\alpha_2 = \exists x\neg P(x,x) \to \forall x\forall y Q(x,y)$
- $\alpha_3 = \forall x\forall y(P(x,y) \to Q(f(x),y))$
- $\alpha_4 = \forall x(R(f(x)) \to P(x,a))$
- $\beta = \exists x(P(a,x) \wedge Q(f(x),x))$.

Demuestra que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vDash \beta$.
¿Es posible encontrar una deducción lineal-input de la cláusula vacía?. Razona la respuesta.