EXAMEN DE LMD

Grupos D y E

29 de Junio de 2011

APELLIDOS, NOMBRE: ....

DNI:................................ GRUPO: D E

✓ Rodee con un círculo la letra del grupo al que pertenece.

✓ En todas las preguntas hay que justificar la respuesta incluyendo todos los cálculos o pasos intermedios.

✓ No se corregirán respuestas escritas a lápiz.

✓ Cada pregunta vale 1 punto.

✓ Si procede del plan antiguo y superó la asignatura FLP, tiene la posibilidad de no responder a ninguna de las cuestiones de la parte de Lógica, en cuyo caso éstas contarán como la mitad de su valor.

Si desea esta opción, marque la casilla siguiente. ☐

1. Demuestre por el método de inducción que para todo número entero $n \geq 0$ existe un número entero $k(n)$ tal que

$$7^n - 6 \cdot n + 143 = 36 \cdot k(n).$$

2. A partir del conjunto de números naturales $K = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ordenado con el orden usual, consideramos el conjunto $A = K \times K \times K$ con el orden producto cartesiano.

   a) Calcule los elementos distinguidos del subconjunto

$$B = \{(3, 5, 4), (8, 7, 9), (6, 2, 3), (5, 4, 7)\}.$$

   b) ¿Es A un retículo?

   c) ¿Es A un álgebra de Boole?

3. Sea G un grafo completo de 30 vértices (sin autolazos ni lados paralelos). ¿Cuál es el menor número de lados que hay que suprimir en G para que el grafo resultante:

   a) sea un árbol?

   b) tenga un circuito de Euler?

   c) tenga un ciclo de Hamilton?

   d) sea plano?

   e) sea bipartido?

   Se recuerda que al suprimir un lado ℓ de G no se suprimen los vértices de G incidentes con ℓ.

4. Calcule cuántos números naturales a verifican que $1 \leq a \leq 10000$ y a no es múltiplo de ninguno de los elementos del conjunto $\{20, 24, 45\}$.

5. Tenemos los predicados siguientes:

P(x)	significa que	x es pájaro,
I(x)	significa que	x es insecto,
C(x,y)	significa que	x se come a y.

Utilice estos predicados para traducir cada una de las frases siguientes a un lenguaje de predicados de primer orden:

a) "*Hay pájaros que sólo comen insectos*".

b) "*Todos los pájaros comen insectos*".

6. Sea el lenguaje de predicados de primer orden $\mathfrak{L}$ dado por $\text{Var}(\mathfrak{L}) = \{x, y, z\}$, $\text{Cons}(\mathfrak{L}) = \{a\}$, $\text{Func}(\mathfrak{L}) = \{f^1\}$ y $\text{Rel}(\mathfrak{L}) = \{Q^2\}$.

a) Interprete las fórmulas

$$\alpha_1 = \forall x \exists y Q(x, f(y)),$$
$$\alpha_2 = Q(x, f(a)) \rightarrow \exists y \exists z Q(y, z),$$
$$\alpha_3 = \exists x \exists y (\neg Q(x, y) \wedge Q(f(x), f(y))),$$

utilizando la estructura $\mathcal{E}$ dada por

$$\begin{cases} \text{D} = \mathbb{Z}_6 \\ a^{\mathcal{E}} = 5 \\ f^{\mathcal{E}}(x) = x^2 \\ Q^{\mathcal{E}}(x,y) = \mathbf{1} \text{ si y sólo si } (x,y) \in \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}, \end{cases}$$

y la asignación v en $\mathcal{E}$ tal que

$$v(x) = v(y) = v(z) = 3.$$

b) Para cada una de las fórmulas anteriores, estudie si es válida en $\mathcal{E}$ y si es universalmente válida.

7. Obtenga una forma normal clausular para la fórmula siguiente perteneciente a un lenguaje de predicados de primer orden:

$$\exists y \forall x \Big[\Big(\forall x Q(x, f(y)) \vee \neg P(y) \Big) \rightarrow \neg \exists y \Big(Q(a, x) \wedge P(f(y)) \Big) \Big].$$

8. Sea el conjunto de cláusulas siguiente:

$$\Gamma = \Big\{ R(x,a) \vee P(x) \vee P(y), \neg R(b,x) \vee Q(x, f(y)), \neg P(z) \vee \neg P(x), \neg Q(z, f(z)) \Big\},$$

donde como es usual x, y, z son símbolos de variable y a, b son símbolos de constante. Además todas las variables que aparecen se supone que están cuantificadas universalmente. Estudie si Γ es satisfacible o insatisfacible.