

## Projekt 3 z przedmiotu Metody Numeryczne

### Sprawozdanie

# Wstęp

Interpolacja jest bardzo ważnym zagadnieniem informatyki i analizy danych. Często mamy do czynienia z sytuacją, gdzie dostajemy próbki danych zmierzone w konkretnych momentach w czasie, a potrzebujemy znać również wartości pośrednie. Interpolacja jest w stanie wyznaczyć te wartości z dużą dokładnością, wyznaczając funkcję przechodzącą przez punkty, które znamy. Mając taką funkcję możemy wyznaczyć wartości dowolnych innych punktów pomiędzy zmierzonymi. Do metod interpolacji należą między innymi interpolacja Lagrange'a oraz interpolacja funkcjami sklejanymi.

## Interpolacja Lagrange'a

Powstała jako próba znalezienia lepszej metody niż metoda wielomianowa. Polega na znalezieniu  $n$  funkcji  $\phi$ , po jednej dla każdego węzła interpolacji, które określone są wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Następnie aby wyznaczyć wartość funkcji interpolującej w  $x$  korzystamy ze wzoru:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n y_i \phi_i(x)$$

gdzie  $y_i$  jest wartością  $i$ -tego węzła interpolacji. Metoda Lagrange'a jest łatwa w implementacji, a także stabilna numerycznie.

## Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia

Metoda ta polega na interpolacji lokalnej, czyli interpoluje się każdy przedział pomiędzy węzłami osobną funkcją – wielomianem trzeciego stopnia. Dla  $n+1$  węzłów mamy  $n$  przedziałów, po 4 współczynniki dla każdego, co w sumie daje  $n*4$  niewiadomych do wyznaczenia. W węzłach wartości funkcji interpolującej są znane, co daje nam  $n$  równań dla początków przedziałów i  $n$  równań dla końców przedziałów. Dodatkowo zakładamy, że wartości pierwszych pochodnych na krańcach między przedziałami są równe, co generuje kolejne  $(n-1)$  równań. Tak samo możemy założyć, żeby drugie pochodne również były równe, co łącznie daje nam  $4n-2$  równań. Brakujące 2 równania można np. przeznaczyć na założenie, że druga pochodna na początku i końcu funkcji będzie

wynosiła 0. Taki układ równań należy rozwiązać dowolną metodą. Wtedy wartość funkcji interpolującej w punkcie  $x$  wynosi:

$$F(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

gdzie  $i$  jest numerem przedziału do którego należy  $x$ , a  $x_i$  jest początkiem tego przedziału.

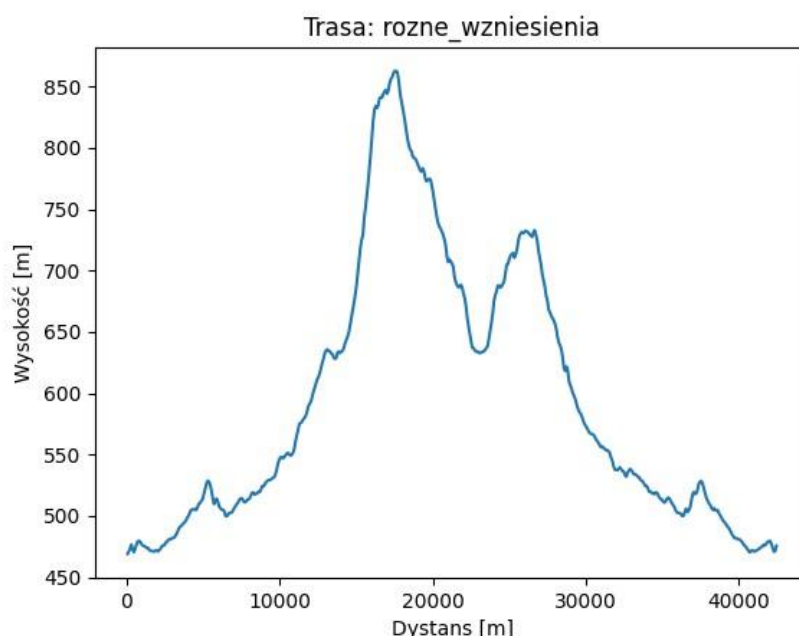
## Porównanie metod

Do analizy metod interpolacji wykorzystałem 3 profile wysokościowe tras, o różnych charakterystykach. Z  $n$  punktów składających się na profil wybierałem  $k$  węzłów interpolacji, a następnie interpolowałem pozostałe  $(n-k)$  punktów, aby móc bezpośrednio porównać dokładność interpolacji. Przy określaniu tej dokładności przydatny był błąd średniokwadratowy (MSE), który jednoznacznie wskazywał jak bardzo funkcja interpolująca odbiega od interpolowanej. Błąd MSE wyznaczałem ze wzoru:

$$MSE = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^M (y_i - y_i^{apr})^2}}{M}$$

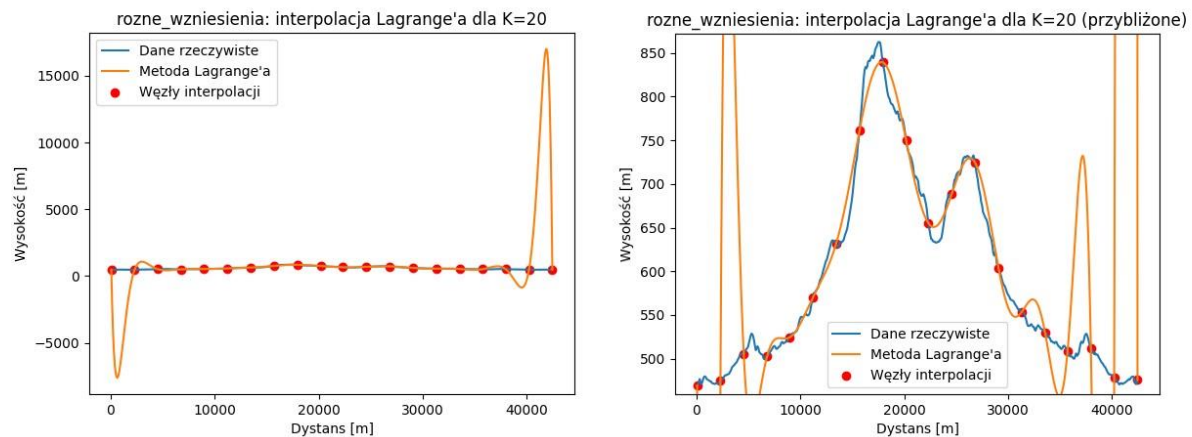
gdzie  $M$  oznacza liczbę punktów interpolowanych.

Pierwszą trasą jaką wykorzystałem była trasa z pliku *rozne\_wzniesienia.txt*, która wyglądała następująco:



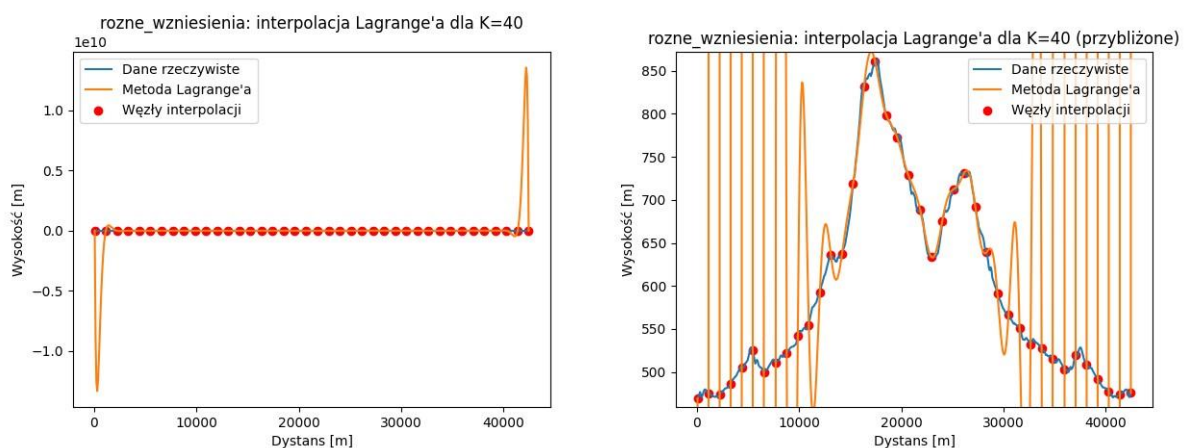
Wykres 1: Trasa 1

Składa się z 2 wyraźnych wzniesień, z ostrymi szczytami i dość stromymi wzniesieniami. Dla takiej trasy interpolacja Lagrange'a wypadła następująco:



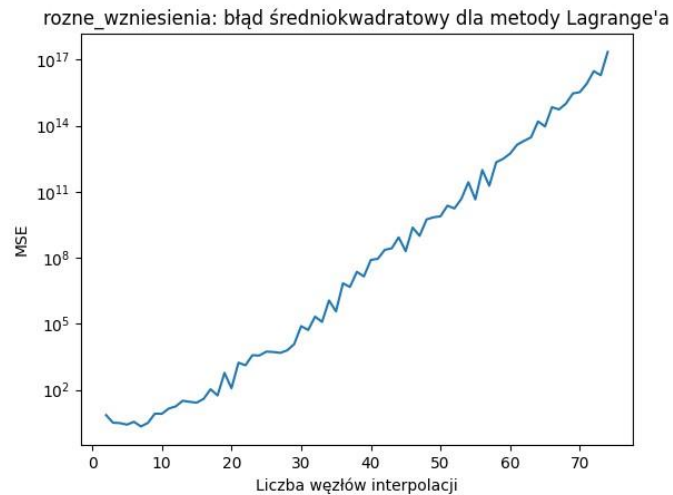
Wykres 2: Interpolacja Lagrange'a dla K=20

Dla 20 węzłów interpolacji metoda Lagrange'a wypadła dość słabo. Na końcach funkcji wyraźnie widać efekt Rungego, co jest niestety dużą wadą tej metody. Jeśli spojrzymy na środek funkcji, wycinając 50 wartości na końcach, widać że interpolacja Lagrange'a radzi sobie lepiej i jest w stanie przybliżyć kształt rzeźby terenu. Jednak nie jest to dokładne przybliżenie, ze względu na zbyt małą ilość węzłów.



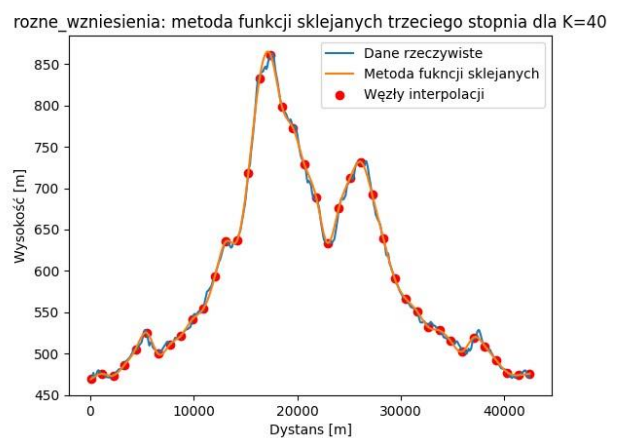
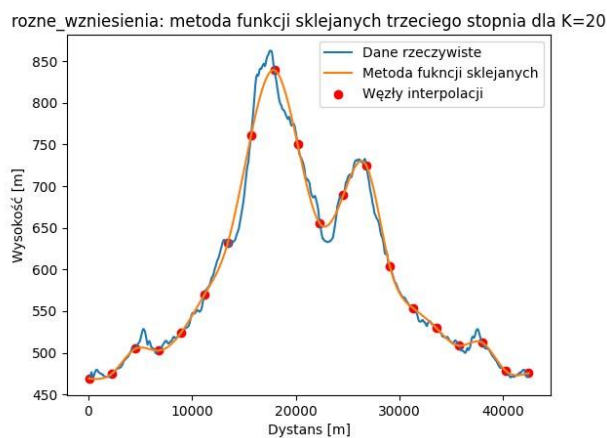
Wykres 3: Interpolacja Lagrange'a dla K=40

Niestety zwiększenie ilości węzłów nie pomaga w uzyskaniu dokładnego przybliżenia, ponieważ wraz ze wzrostem liczby węzłów, efekt Rungego jest również większy. Nie tylko odchyłki jakie wywołuje mają większe wartości, ale też są szersze, sprawiając że coraz większa część funkcji jest nieprawidłowo interpolowana. Potwierdza to błąd średniokwadratowy, który wraz ze wzrostem liczby węzłów jest coraz większy.



Wykres 4: MSE dla metody Lagrange'a

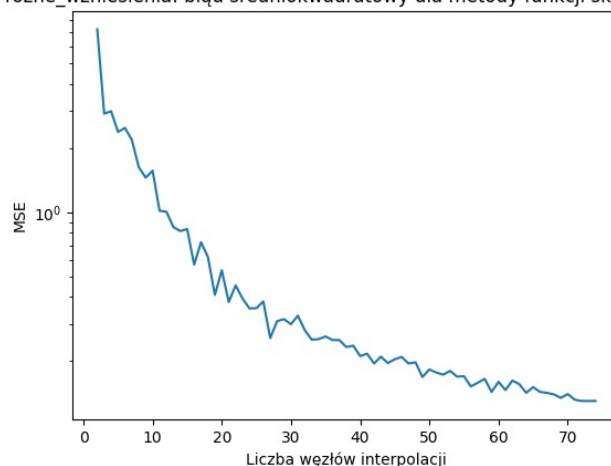
Następnie dla tej samej trasy i tych samych wartości K użyłem metody funkcji sklepanych rzędu trzeciego. Wyniki uzyskane przez tą metodę okazały się znacząco lepsze od rezultatów metody Lagrange'a.



Wykres 5: Metoda funkcji sklepanych wypada dużo lepiej

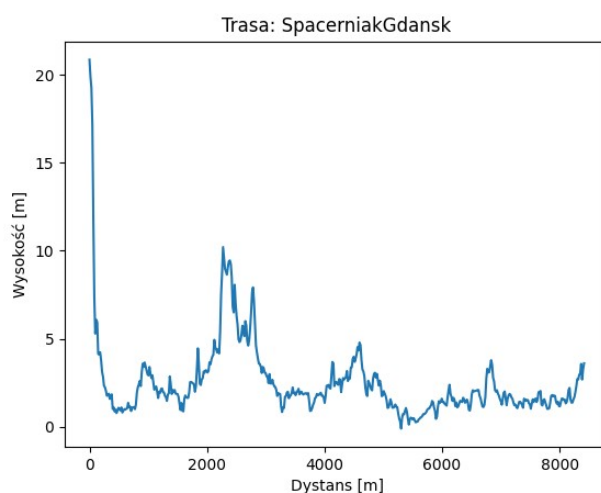
Dla 20 węzłów interpolacji środek funkcji jest interpolowany podobnie jak w metodzie Lagrange'a, z tą różnicą że efekt Rungego nie występuje. Dzięki temu można bez problemu zwiększyć ilość węzłów interpolacji, aby uzyskać dokładniejsze przybliżenie. Dla 40 punktów funkcja interpolująca niemal idealnie pokrywa wykres trasy. Potwierdza to również wykres MSE dla metody funkcji sklepanych, który maleje wraz ze wzrostem liczby punktów węzłowych.

rozne\_wzniesienia: błąd średniokwadratowy dla metody funkcji sklepanych



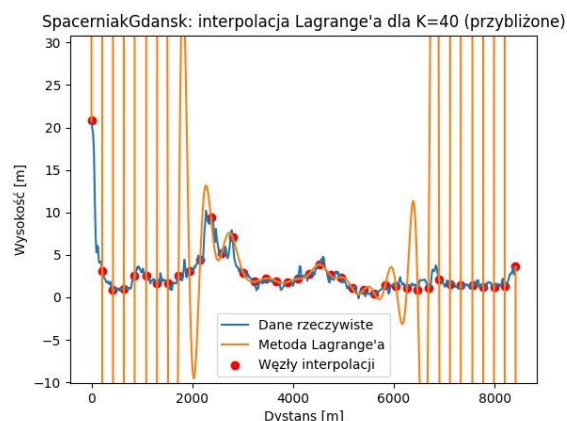
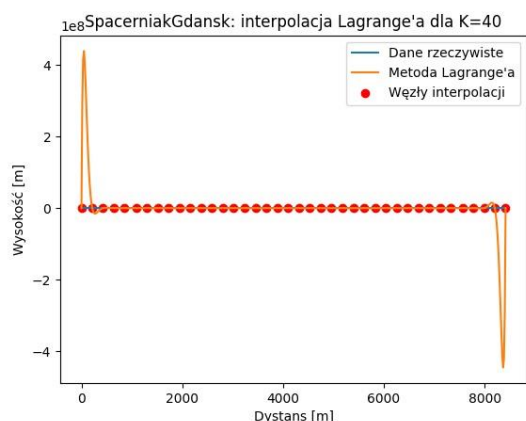
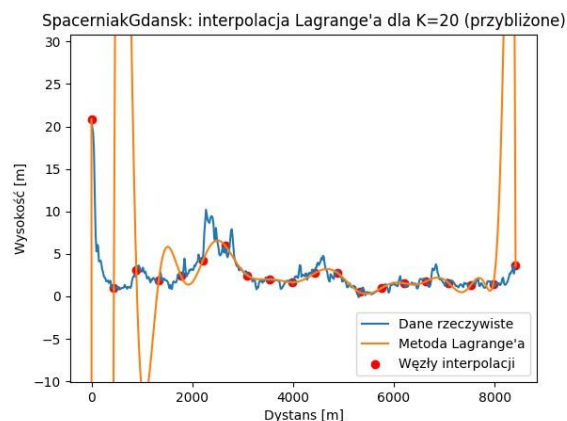
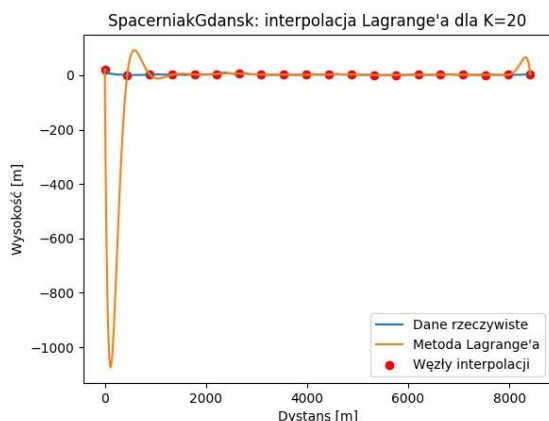
Wykres 6: MSE dla funkcji sklepanych

Następną trasą jaką sprawdziłem była trasa z pliku *SpacerniakGdansk.csv*. Różniła się od pierwszej tym, że miała więcej gwałtownych, ale małych, zmian wysokości – była bardziej „poszarpana”.



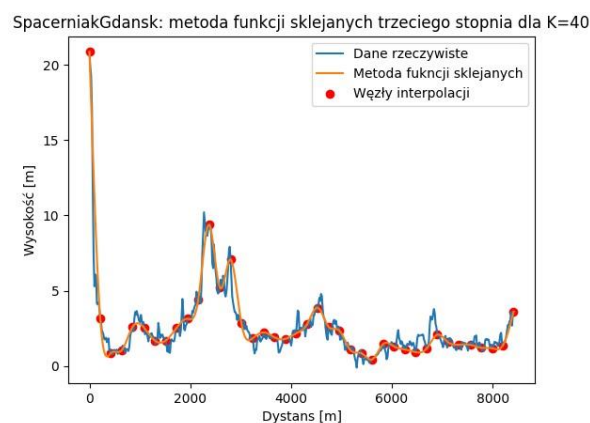
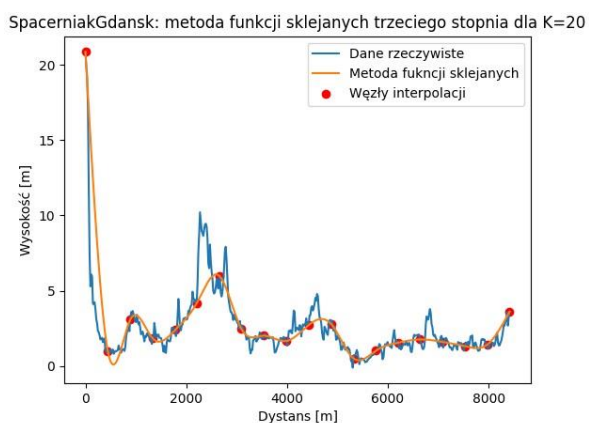
Wykres 7: Trasa 2

Dla takich danych metoda Lagrange’a wypada jeszcze gorzej niż dla poprzedniej trasy. Przy 20 węzłach interpolacji znów widoczny jest efekt Rungego, a jednocześnie jest to za mało węzłów, aby przybliżyć funkcję, która zmienia się tak gwałtownie. Zwiększenie liczby węzłów niestety powoduje jeszcze większy efekt Rungego, co sprawia że metoda ta nie nadaje się do interpolacji szybko zmieniających się funkcji.

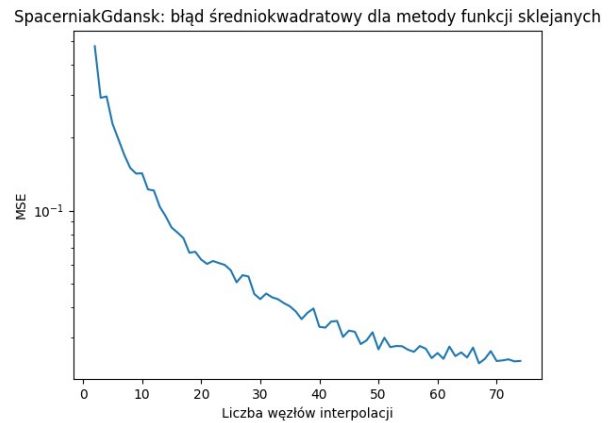
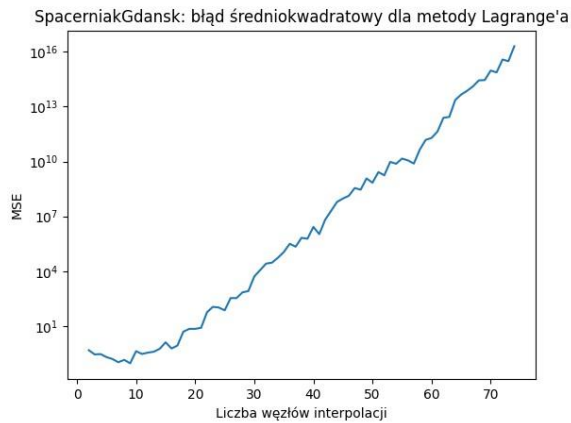


Wykres 8: Metoda Lagrange'a dla 2 trasy

Metoda funkcji sklepanych znów wypada znacząco lepiej, dla małej liczby węzłów podobnie przybliża środek funkcji, ale bez problemu można zwiększyć ich liczbę, tak aby interpolacja lepiej dopasowała się do szybko zmieniającej się funkcji oryginalnej.

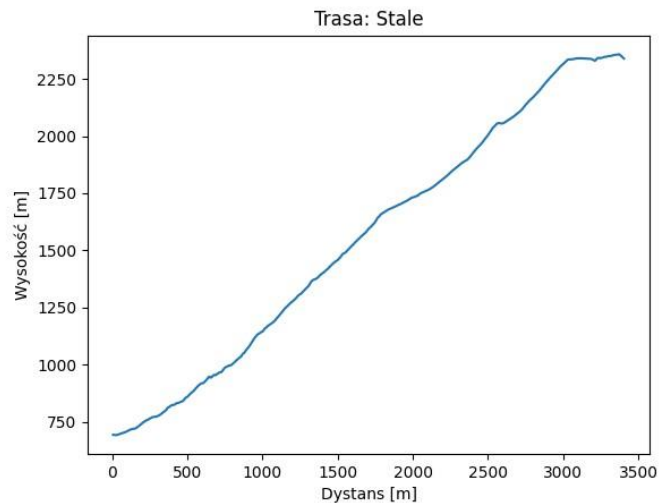


Wykres 9: Metoda funkcji sklepanych znów wypada znacznie lepiej



Wykres 10: Porównanie MSE dla obu metod

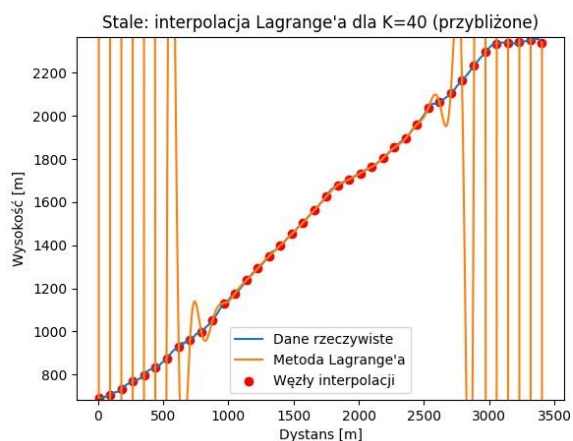
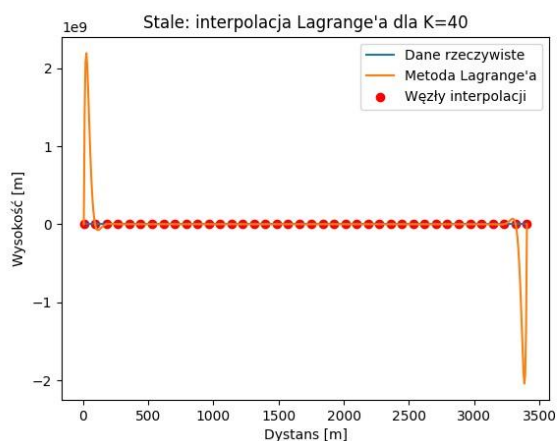
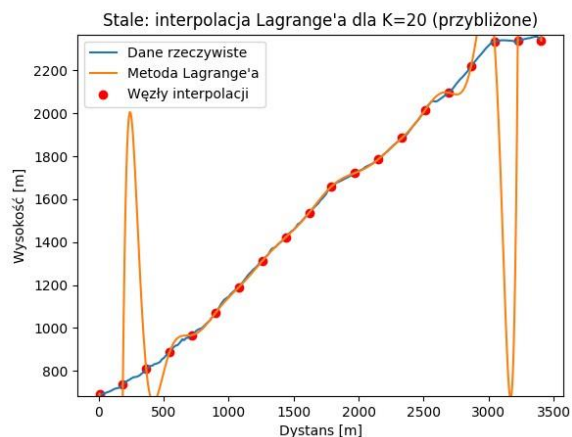
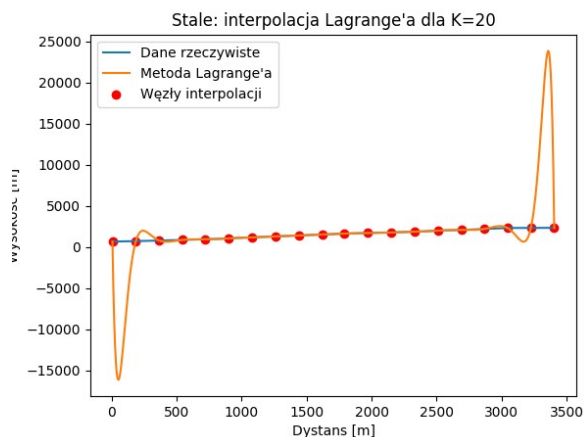
Ostatnią trasą jaką postanowiłem sprawdzić jest trasa z pliku *stale.txt*. Wyróżnia się od reszty tym, że jest gładka i rośnie w całej swojej dziedzinie.



Wykres 11: Trasa 3

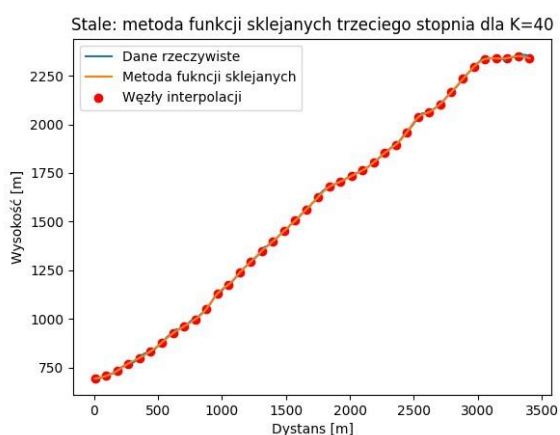
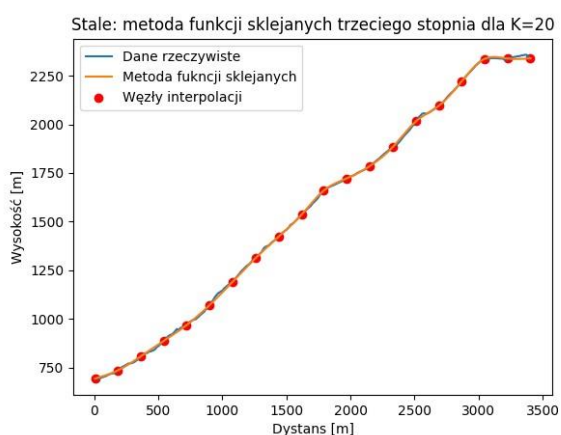
Dzięki temu, że trasa ta nie zmienia się gwałtownie, nie potrzeba wielu węzłów interpolacji, aby przybliżyć ją dość dokładnie. Metoda Lagrange'a jest wtedy w stanie całkiem dokładnie interpolować funkcję, oczywiście pomijając końce, gdzie cały czas widoczny jest efekt Rungego.



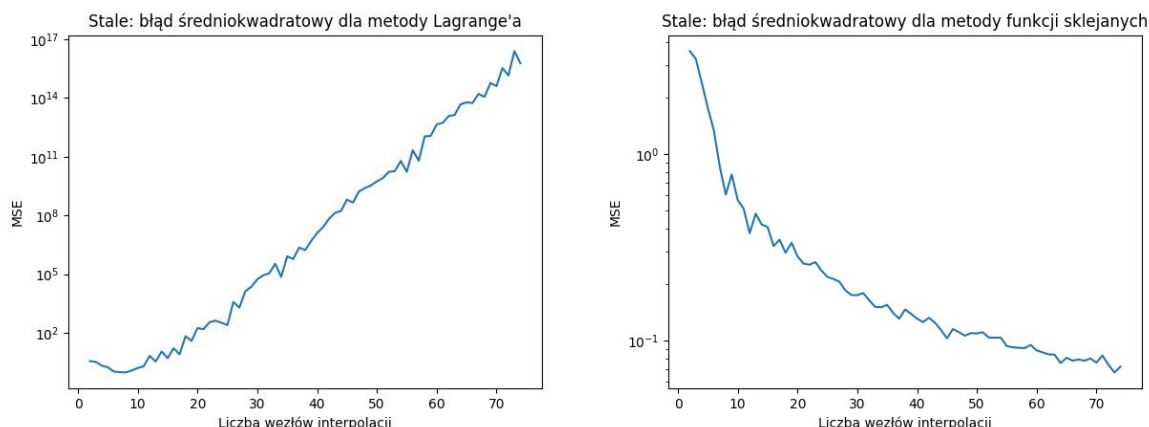


Wykres 12: Metoda Lagrange'a dla trasy 3

Naturalnie także metoda funkcji sklepanych dobrze przybliży tę trasę, a jednocześnie nie występuje w niej efekt Rungego i bez problemu można zwiększać ilość węzłów, aby jeszcze dokładniej interpolować.

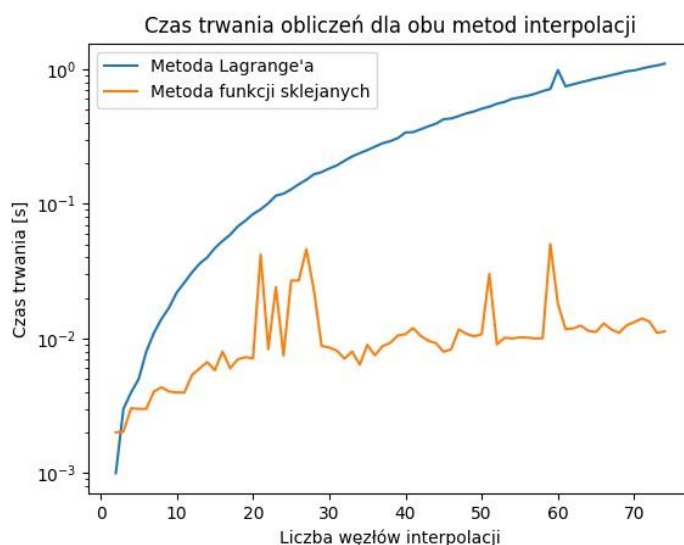


Wykres 13: Metoda funkcji sklepanych dla trasy 3



Wykres 14: Porównanie MSE dla obu metod dla trasy 3

Ostatnią rzeczą jaką postanowiłem sprawdzić, jest czas działania obu metod w zależności od liczby węzłów interpolacji. Uruchomiłem obie metody dla wszystkich tras dla  $K \in [2, 75]$ , jednocześnie mierząc czas wykonania. Wszystkie trzy wykresy wyszły bardzo podobnie, więc charakter trasy nie ma wpływu na czas (dlatego też umieszczam tylko jeden z nich).



Wykres 15: Porównanie czasu działania obu metod

Dla metody Lagrange'a czas rósł zauważalnie wraz ze wzrostem liczby węzłów, dochodząc do pojedynczych sekund dla  $K > 70$ . Jest to prawdopodobnie spowodowane dużą liczbą mnożeń, potrzebnych do wyznaczenia funkcji  $\phi$ . Metoda funkcji sklepanych natomiast wypada lepiej również na tym polu, odnotowując czasy na poziomie setnych części sekundy, nieznacznie tylko rosnąc wraz ze wzrostem liczby węzłów. Można zauważyć pojedyncze wzrosty czasu spowodowane prawdopodobnie tym, że macierz miała rozmiary niesprzyjające szybkiemu rozwiązaniu układu równań.

## Wnioski

Metoda funkcji sklejanych wypadła lepiej od metody Lagrange'a prawie w każdej dziedzinie. Jest szybsza, dokładniejsza i nie występuje w niej efekt Rungego. Jedynym plusem metody Lagrange'a jest łatwiejsza implementacja, co w mojej opinii nie jest wystarczające aby była ona użyteczna. Nie ma powodu, dla którego ktoś miałby wykorzystać ją zamiast metody funkcji sklejanych, która lepiej interpoluje dowolne wartości.