Jan Barczewski 188679

Projekt 3 z przedmiotu Metody Numeryczne

Sprawozdanie

**Wstęp**

Interpolacja jest bardzo ważnym zagadnieniem informatyki i analizy danych. Często mamy do czynienia z sytuacją, gdzie dostajemy próbki danych zmierzone w konkretnych momentach w czasie, a potrzebujemy znać również wartości pośrednie. Interpolacja jest w stanie wyznaczyć te wartości z dużą dokładnością, wyznaczając funkcję przechodzącą przez punkty, które znamy. Mając taką funkcję możemy wyznaczyć wartości dowolnych innych punktów pomiędzy zmierzonymi. Do metod interpolacji należą między innymi interpolacja Lagrange’a oraz interpolacja funkcjami sklejanymi.

**Interpolacja Lagrange’a**

Powstała jako próba znalezienia lepszej metody niż metoda wielomianowa. Polega na znalezieniu n funkcji φ, po jednej dla każdego węzła interpolacji, które określone są wzorem:

Następnie aby wyznaczyć wartość funkcji interpolującej w x korzystamy ze wzoru:

gdzie jest wartością i-tego węzła interpolacji. Metoda Lagrange’a jest łatwa w implementacji, a także stabilna numerycznie.

**Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia**

Metoda ta polega na interpolacji lokalnej, czyli interpoluje się każdy przedział pomiędzy węzłami osobną funkcją – wielomianem trzeciego stopnia. Dla n+1 węzłów mamy n przedziałów, po 4 współczynniki dla każdego, co w sumie daje n\*4 niewiadomych do wyznaczenia. W węzłach wartości funkcji interpolującej są znane, co daje nam n równań dla początków przedziałów i n równań dla końców przedziałów. Dodatkowo zakładamy, że wartości pierwszych pochodnych na krańcach między przedziałami są równe, co generuje kolejne   
(n-1) równań. Tak samo możemy założyć, żeby drugie pochodne również były równe, co łącznie daje nam 4n-2 równań. Brakujące 2 równania można np. przeznaczyć na założenie, że druga pochodna na początku i końcu funkcji będzie wynosiła 0. Taki układ równań należy rozwiązać dowolną metodą. Wtedy wartość funkcji interpolującej w punkcie x wynosi:

gdzie jest numerem przedziału do którego należy , a jest początkiem tego przedziału.

**Porównanie metod**

Do analizy metod interpolacji wykorzystałem 3 profile wysokościowe tras, o różnych charakterystykach. Z n punktów składających się na profil wybierałem k węzłów interpolacji, a następnie interpolowałem pozostałe (n-k) punktów, aby móc bezpośrednio porównać dokładność interpolacji. Przy określaniu tej dokładności przydatny był błąd średniokwadratowy (MSE), który jednoznacznie wskazywał jak bardzo funkcja interpolująca odbiega od interpolowanej. Błąd MSE wyznaczałem ze wzoru:

gdzie M oznacza liczbę punktów interpolowanych.

Pierwszą trasą jaką wykorzystałem była trasa z pliku *rozne\_wzniesienia.txt*, która wyglądała następująco:

Obraz zawierający tekst, diagram, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 1: Trasa 1

Obraz zawierający tekst, linia, diagram, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznieSkłada się z 2 wyraźnych wzniesień, z ostrymi szczytami i dość stromymi wzniesieniami. Dla takiej trasy interpolacja Lagrange’a wypadła następująco:

Obraz zawierający tekst, linia, zrzut ekranu, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie Dla 20 węzłów interpolacji metoda Lagrange’a wypadła dość słabo. Na końcach funkcji wyraźnie widać efekt Rungego, co jest niestety dużą wadą tej metody. Jeśli spojrzymy na środek funkcji, wycinając 50 wartości na końcach, widać że interpolacja Lagrange’a radzi sobie lepiej i jest w stanie przybliżyć kształt rzeźby terenu. Jednak nie jest to dokładne przybliżenie, ze względu na zbyt małą ilość węzłów.

Wykres 3: Interpolacja Lagrange'a dla K=40

Wykres 2: Interpolacja Lagrange'a dla K=20

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznie Niestety zwiększenie ilości węzłów nie pomaga w uzyskaniu dokładnego przybliżenia, ponieważ wraz ze wzrostem liczby węzłów, efekt Rungego jest również większy. Nie tylko odchyłki jakie wywołuje mają większe wartości, ale też są szersze, sprawiając że coraz większa część funkcji jest nieprawidłowo interpolowana. Potwierdza to błąd średniokwadratowy, który wraz ze wzrostem liczby węzłów jest coraz większy.

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 4: MSE dla metody Lagrange'a

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznie Następnie dla tej samej trasy i tych samych wartości K użyłem metody funkcji sklejanych rzędu trzeciego. Wyniki uzyskane przez tą metodę okazały się znacząco lepsze od rezultatów metody Lagrange’a.

Wykres 5: Metoda funkcji sklejanych wypada dużo lepiej

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, diagram, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieDla 20 węzłów interpolacji środek funkcji jest interpolowany podobnie jak w metodzie Lagrange’a, z tą różnicą że efekt Rungego nie występuje. Dzięki temu można bez problemu zwiększyć ilość węzłów interpolacji, aby uzyskać dokładniejsze przybliżenie. Dla 40 punktów funkcja interpolująca niemal idealnie pokrywa wykres trasy. Potwierdza to również wykres MSE dla metody funkcji sklejanych, który maleje wraz ze wzrostem liczby punktów węzłowych.

Obraz zawierający tekst, linia, diagram, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 6: MSE dla funkcji sklejanych

Następną trasą jaką sprawdziłem była trasa z pliku *SpacerniakGdansk.csv*. Różniła się od pierwszej tym, że miała więcej gwałtownych, ale małych, zmian wysokości – była bardziej „poszarpana”.

Obraz zawierający tekst, diagram, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 7: Trasa 2

Dla takich danych metoda Lagrange’a wypada jeszcze gorzej niż dla poprzedniej trasy. Przy 20 węzłach interpolacji znów widoczny jest efekt Rungego, a jednocześnie jest to za mało węzłów, aby przybliżyć funkcję, która zmienia się tak gwałtownie. Zwiększenie liczby węzłów niestety powoduje jeszcze większy efekt Rungego, co sprawia że metoda ta nie nadaje się do interpolacji szybko zmieniających się funkcji.

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, diagram

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, diagram, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, diagram, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznie Metoda funkcji sklejanych znów wypada znacząco lepiej, dla małej liczby węzłów podobnie przybliża środek funkcji, ale bez problemu można zwiększyć ich liczbę, tak aby interpolacja lepiej dopasowała się do szybko zmieniającej się funkcji oryginalnej.

Wykres 9: Metoda funkcji sklejanych znów wypada znacznie lepiej

Wykres 8: Metoda Lagrange'a dla 2 trasy

Obraz zawierający tekst, diagram, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie Ostatnią trasą jaką postanowiłem sprawdzić jest trasa z pliku *stale.txt*. Wyróżnia się od reszty tym, że jest gładka i rośnie w całej swojej dziedzinie.

Wykres 0: Porównanie MSE dla obu metod

Obraz zawierający tekst, diagram, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 11: Trasa 3

Dzięki temu, że trasa ta nie zmienia się gwałtownie, nie potrzeba wielu węzłów interpolacji, aby przybliżyć ją dość dokładnie. Metoda Lagrange’a jest wtedy w stanie całkiem dokładnie interpolować funkcję, oczywiście pomijając końce, gdzie cały czas widoczny jest efekt Rungego.

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznie Naturalnie także metoda funkcji sklejanych dobrze przybliża tę trasę, a jednocześnie nie występuje w niej efekt Rungego i bez problemu można zwiększać ilość węzłów, aby jeszcze dokładniej interpolować.

Wykres 13: Metoda funkcji sklejanych dla trasy 3

Wykres 12: Metoda Lagrange'a dla trasy 3

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie Ostatnią rzeczą jaką postanowiłem sprawdzić, jest czas działania obu metod w zależności od liczby węzłów interpolacji. Uruchomiłem obie metody dla wszystkich tras dla , jednocześnie mierząc czas wykonania. Wszystkie trzy wykresy wyszły bardzo podobnie, więc charakter trasy nie ma wpływu na czas (dlatego też umieszczam tylko jeden z nich).

Wykres 14: Porównanie MSE dla obu metod dla trasy 3

Obraz zawierający tekst, linia, diagram, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 15: Porównanie czasu działania obu metod

Dla metody Lagrange’a czas rósł zauważalnie wraz ze wzrostem liczby węzłów, dochodząc do pojedynczych sekund dla K > 70. Jest to prawdopodobnie spowodowane dużą liczbą mnożeń, potrzebnych do wyznaczenia funkcji φ. Metoda funkcji sklejanych natomiast wypada lepiej również na tym polu, odnotowując czasy na poziomie setnych części sekundy, nieznacznie tylko rosnąc wraz ze wzrostem liczby węzłów. Można zauważyć pojedyncze wzrosty czasu spowodowane prawdopodobnie tym, że macierz miała rozmiary niesprzyjające szybkiemu rozwiązaniu układu równań.

**Wnioski**

Metoda funkcji sklejanych wypadła lepiej od metody Lagrange’a prawie w każdej dziedzinie. Jest szybsza, dokładniejsza i nie występuje w niej efekt Rungego. Jedynym plusem metody Lagrange’a jest łatwiejsza implementacja, co w mojej opinii nie jest wystarczające aby była ona użyteczna. Nie ma powodu, dla którego ktoś miałby wykorzystać ją zamiast metody funkcji sklejanych, która lepiej interpoluje dowolne wartości.