

Projekt 2 z przedmiotu Metody Numeryczne

Sprawozdanie

Wstęp

Rozwiązywanie układów równań na komputerze można przeprowadzić wieloma metodami. Istnieją metody bezpośrednie, które pozwalają na uzyskanie dokładnego wyniku w określonej liczbie operacji. Należy do nich np. Faktoryzacja LU. Jednak metoda ta ma złożoność obliczeniową $O(n^3)$, co dla dużej liczby niewiadomych, oznacza długi czas potrzebny na obliczenie rozwiązania. Dlatego istnieją również metody iteracyjne które mogą osiągać złożoność $O(n^2)$. Należą do nich: metoda Jacobiego i metoda Gaussa-Seidla. Oba te sposoby polegają na wyliczaniu przybliżonego wektora rozwiązań, który wraz z iteracjami zbiega się do rozwiązania dokładnego.

Faktoryzacja LU

Metoda ta polega na znalezieniu macierzy L (trójkątnej dolnej) i U (trójkątnej górnej), takich że $A = LU$. Wtedy możemy rozwiązać układ równań za pomocą jednego podstawienia w przód i jednego podstawienia w tył, których złożoność obliczeniowa jest $O(n^2)$:

$$LUx = b$$

$$\text{wektor pomocniczy } y = Ux$$

$$Ly = b - \text{podstawienie w przód}$$

$$Ux = y - \text{podstawienie w tył}$$

Konstrukcję macierzy L i U wykonuje się następująco:

- Znajdujemy macierz trójkątną dolną L_1 z jedynkami na diagonalu, która po wymnożeniu z A wyzeruje pierwszą kolumnę w dolnym trójkącie A .
- Podobnie znajdujemy macierze $L_2 \dots L_n$ które zerują kolejne kolumny dolnego trójkąta w A .
- Wtedy $U = L_n \dots L_1 A$, a $L = L_1^{-1} \dots L_n^{-1}$ (odwrócenie macierzy L_i to tylko odwrócenie znaku elementów poza diagonalą).

Metoda faktoryzacji LU może przydać się przy obliczaniu wielu układów równań, w których występuje taka sama macierz A , a różne są tylko wektory b . Wtedy macierze trójkątne L i U można skonstruować tylko raz, a dla kolejnych układów wystarczy wykonać jedno podstawienie w przód i jedno w tył.

Metoda Jacobiego

W tej metodzie iteracyjnej obliczamy wektor niewiadomych x na podstawie wektora x z poprzedniej iteracji, przy czym startowy wektor x zawiera same jedynki. Wtedy: $x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k)/a_{ii}$. Aby ułatwić obliczenia na macierzach, macierz A można rozbić na macierze U (trójkątna górna), L (trójkątna dolna) i D (diagonalna), tak że $A = U + L + D$. Wtedy równanie:

$$(U + L + D)x = b$$

przekształca się do:

$$x_{k+1} = -D^{-1}(L + U)x_k + D^{-1}b$$

Aby sprawdzić dokładność przybliżonego rozwiązania należy obliczyć wektor residuum, który wynosi:

$$residuum = Ax - b$$

Aby łatwo interpretować residuum, można policzyć jego normę. Otrzymamy w ten sposób liczbę, która jednoznacznie pokaże jak dokładne rozwiązanie wyznaczyliśmy. Jedną z najprostszych norm jest norma 2, którą wyznacza się z wektora w następujący sposób:

$$||e||_2 = \sqrt{x^T x}$$

Metoda Gaussa-Seidla

Metoda Gaussa-Seidla jest przekształceniem metody Jacobiego. W tej metodzie przybliżając niewiadome w k -tej iteracji, oprócz wartości z poprzedniej iteracji, korzystamy również z niewiadomych wyliczonych wcześniej w tej samej iteracji: $x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k)/a_{ii}$. Macierze U L i D wyglądają w ten sam sposób, natomiast równanie macierzowe przekształca się do:

$$x_{k+1} = -(D + L)^{-1}(Ux_k) + (D + L)^{-1}b$$

Przy czym istotne jest aby nie odwracać macierzy $(D + L)$, tylko zamiast tego zastosować podstawienie w przód.

Analiza algorytmów

W przypadku mojego nr. Indeksu macierz A ma wymiary 979x979, a jej przekątne wynoszą: $a_{11}=11$, $a_{22}=a_{33}=-1$. Wartości wektora b wynoszą $\sin(n \cdot 9)$.

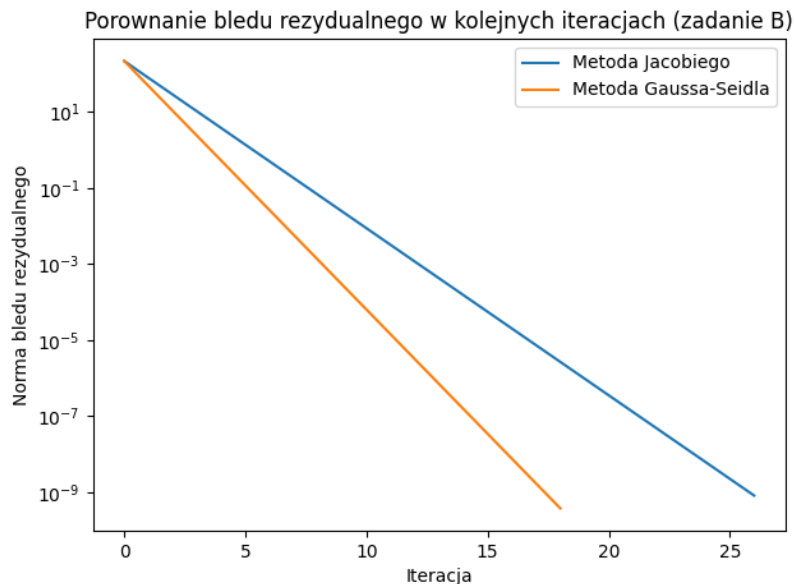
$$A = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 11 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 11 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 11 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

Dla takiego układu równań i założenia, że norma wektora residuum ma wynieść najwyżej 10^{-9} , metody iteracyjne poradziły sobie bardzo dobrze. Metoda

```
Zadanie B:  
N=979  
-Metoda Jacobiego-  
Liczba iteracji: 26  
Czas wykonania: 128ms  
Norma błędu rezydualnego: 8.20627e-10  
-Metoda Gaussa-Seidla-  
Liczba iteracji: 18  
Czas wykonania: 72ms  
Norma błędu rezydualnego: 3.77905e-10
```

Jacobiego potrzebowała tylko 26 iteracji, które zajęły jej 128ms. Metoda Gaussa-Seidla wypadła jeszcze lepiej, potrzebując o 8 iteracji mniej i zaledwie 72ms. Obie metody osiągnęły założoną dokładność.

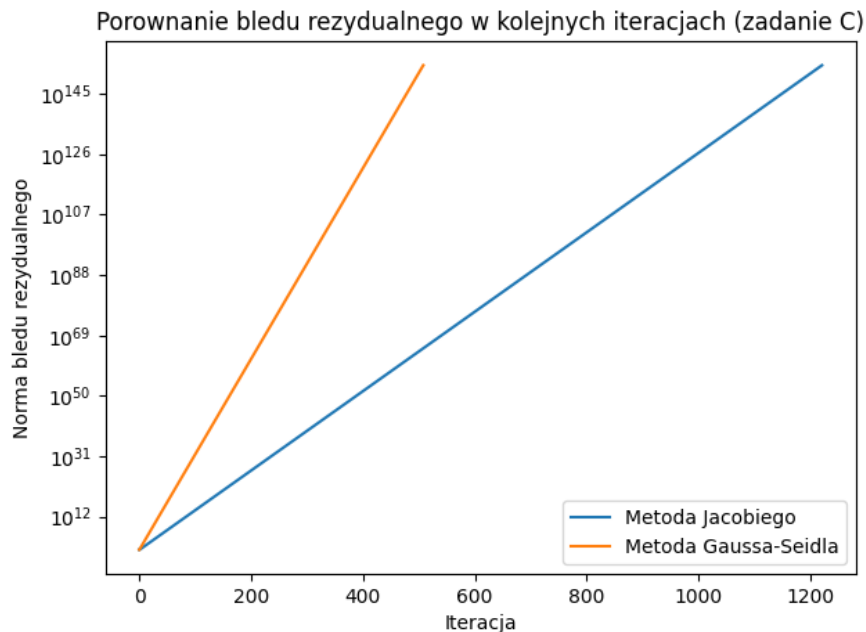
Rysunek 1: Screenshot z programu



Wykres 1: Metody iteracyjne zbiegają się

W zadaniu C macierz A została przekształcona do postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$



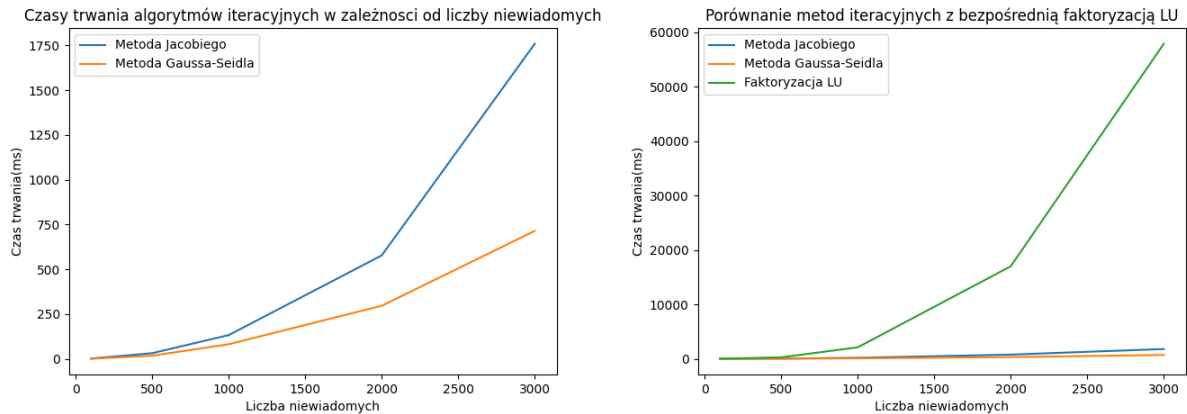
Wykres 2: Metody iteracyjne nie zbiegają się

Takiego układu równań metody iteracyjne nie były w stanie rozwiązać. Jest to spowodowane tym, że macierz A nie jest diagonalnie dominująca, czyli wartości bezwzględne liczb na przekątnej nie są większe od sumy wartości bezwzględnych pozostałych elementów wiersza. W takim przypadku metody iteracyjne nie zbiegają się i aby uzyskać rozwiązanie należy skorzystać z metody bezpośredniej np. z faktoryzacji LU. Ta metoda potrzebowała aż 2 sekundy, ale była w stanie wyznaczyć wektor rozwiązań x, dla którego norma z residuum wyniosła $1.86 \cdot 10^{-13}$.

```
Zadanie C:
N=979
-Metoda Jacobiego-
Liczba iteracji: 2464
Czas wykonania: 10802ms
Norma błędu rezydualnego: -nan
-Metoda Gaussa-Seidla-
Liczba iteracji: 1046
Czas wykonania: 3252ms
Norma błędu rezydualnego: -nan

Zadanie D:
N=979
-Metoda Faktoryzacji LU-
Czas wykonania: 2009ms
Norma błędu rezydualnego: 1.86331e-13
```

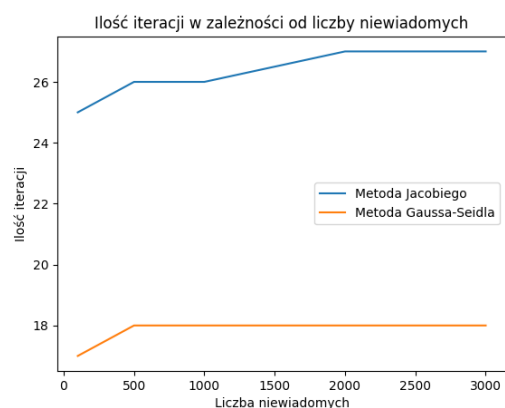
Aby porównać działanie poszczególnych metod, wykorzystałem pierwotny układ równań, dla którego metody iteracyjne zbiegały się. Następnie sprawdziłem wszystkie metody dla zmiennej liczby niewiadomych $N = \{100, 500, 1000, 2000, 3000\}$.



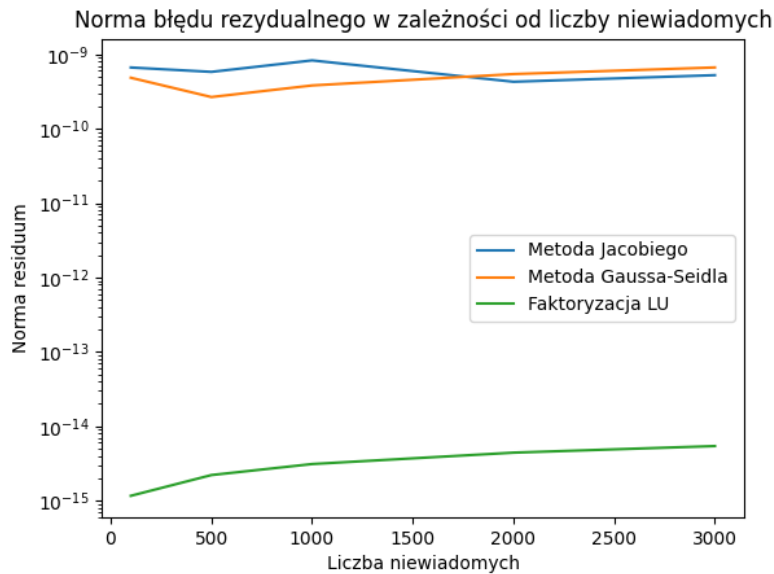
Wykres 3: Porównanie wydajności trzech metod

Wszystkie metody dla większej liczby niewiadomych potrzebowały coraz więcej czasu. Najszybsza była metoda Gaussa-Seidla, która dla $N=3000$ trwała zaledwie 701ms, czyli ponad 2.5 raza mniej niż metoda Jacobiego (1860ms), i 84 razy mniej niż faktoryzacja LU (59s). Większa ilość czasu wynikała tylko z działań na dużych macierzach, ponieważ ilość iteracji zwiększyła się zaledwie o 1 dla Gaussa-Seidla i o 2 dla Jacobiego. Większa ilość niewiadomych nie wpłynęła na dokładność rozwiązania w przypadku metod iteracyjnych, ponieważ założona dokładność 10^{-9} została niezmienną. Natomiast w przypadku faktoryzacji LU wraz ze wzrostem liczby niewiadomych norma residuum lekko się zwiększyła (pięciokrotnie), ale i tak była dużo mniejsza od residuum dla metod iteracyjnych, bo została w okolicach 10^{-15} .

Zadanie E:
 Metoda Jacobiego N: 100 czas: 1ms iteracje: 25 norma: 6.66074e-10
 Metoda Gaussa N: 100 czas: 0ms iteracje: 17 norma: 4.85022e-10
 Faktoryzacja LU N: 100 czas: 2ms norma: 1.16129e-15
 Metoda Jacobiego N: 500 czas: 31ms iteracje: 26 norma: 5.81624e-10
 Metoda Gaussa N: 500 czas: 17ms iteracje: 18 norma: 2.66869e-10
 Faktoryzacja LU N: 500 czas: 259ms norma: 2.2077e-15
 Metoda Jacobiego N: 1000 czas: 154ms iteracje: 26 norma: 8.29529e-10
 Metoda Gaussa N: 1000 czas: 73ms iteracje: 18 norma: 3.82031e-10
 Faktoryzacja LU N: 1000 czas: 2093ms norma: 3.105e-15
 Metoda Jacobiego N: 2000 czas: 762ms iteracje: 27 norma: 4.28341e-10
 Metoda Gaussa N: 2000 czas: 294ms iteracje: 18 norma: 5.43511e-10
 Faktoryzacja LU N: 2000 czas: 17130ms norma: 4.41738e-15
 Metoda Jacobiego N: 3000 czas: 1860ms iteracje: 27 norma: 5.25354e-10
 Metoda Gaussa N: 3000 czas: 701ms iteracje: 18 norma: 6.66998e-10
 Faktoryzacja LU N: 3000 czas: 59084ms norma: 5.4176e-15



Wykres 4: Ilość iteracji zwiększyła się zaledwie o 1-2



Wykres 5: Norma dla faktoryzacji LU wzrosła wraz ze wzrostem wielkości macierzy

Wnioski

Metody iteracyjne są znacząco szybsze od metod bezpośrednich, pozwalają na znalezienie rozwiązania w wielokrotnie krótszym czasie. Jednak mają tę wadę, że nie można ich zastosować do każdego przypadku. Jeśli macierz nie jest diagonalnie dominująca, metody iteracyjne nie zbiegną się do poprawnego rozwiązania i potrzebna będzie metoda bezpośrednia. Również w przypadku obliczania wielu układów równań, które różnią się tylko wektorem b warto rozważyć np. faktoryzację LU, dla której kosztowne czasowo obliczanie macierzy L i U wykona się tylko raz, aby potem móc obliczać niewiadome prostymi podstawieniami w przód i tył.

Źródła

- ✓ Slajdy dr. Hab. Inż. Grzegorza Fotygi
- ✓ https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Gaussa-Seidla
- ✓ <https://www.gaussianwaves.com/2013/05/solving-a-triangular-matrix-using-forward-backward-substitution/>
- ✓ <https://courses.grainger.illinois.edu/cs357/sp2020/notes/ref-9-linsys.html>
- ✓ [Biblioteka C++, której użyłem do rysowania wykresów](#)