Jan Barczewski 188679

Projekt 2 z przedmiotu Metody Numeryczne

Sprawozdanie

**Wstęp**

Rozwiązywanie układów równań na komputerze można przeprowadzić wieloma metodami. Istnieją metody bezpośrednie, które pozwalają na uzyskanie dokładnego wyniku w określonej liczbie operacji. Należy do nich np. Faktoryzacja LU. Jednak metoda ta ma złożoność obliczeniową O(n3), co dla dużej liczby niewiadomych, oznacza długi czas potrzebny na obliczenie rozwiązania. Dlatego istnieją również metody iteracyjne które mogą osiągać złożoność O(n2). Należą do nich: metoda Jacobiego i metoda Gaussa-Seidla. Oba te sposoby polegają na wyliczaniu przybliżonego wektora rozwiązań, który wraz z iteracjami zbiega się do rozwiązania dokładnego.

**Faktoryzacja LU**

Metoda ta polega na znalezieniu macierzy L(trójkątnej dolnej) i U(trójkątnej górnej), takich że . Wtedy możemy rozwiązać układ równań za pomocą jednego podstawienia w przód i jednego podstawienia w tył, których złożoność obliczeniowa jest O(n2):

Konstrukcję macierzy L i U wykonuje się następująco:

* Znajdujemy macierz trójkątną dolną L1 z jedynkami na diagonali, która po wymnożeniu z A wyzeruje pierwszą kolumnę w dolnym trójkącie A.
* Podobnie znajdujemy macierze L2…Ln które zerują kolejne kolumny dolnego trójkąta w A.
* Wtedy , a (odwrócenie macierzy Li to tylko odwrócenie znaku elementów poza diagonalą).

Metoda faktoryzacji LU może przydać się przy obliczaniu wielu układów równań, w których występuje taka sama macierz A, a różne są tylko wektory b. Wtedy macierze trójkątne L i U można skonstruować tylko raz, a dla kolejnych układów wystarczy wykonać jedno podstawienie w przód i jedno w tył.

**Metoda Jacobiego**

W tej metodzie iteracyjnej obliczamy wektor niewiadomych x na podstawie wektora x z poprzedniej iteracji, przy czym startowy wektor x zawiera same jedynki. Wtedy: . Aby ułatwić obliczenia na macierzach, macierz A można rozbić na macierze U(trójkątna górna), L(trójkątna dolna) i D(diagonalna), tak że . Wtedy równanie:

przekształca się do:

Aby sprawdzić dokładność przybliżonego rozwiązania należy obliczyć wektor residuum, który wynosi:

Aby łatwo interpretować residuum, można policzyć jego normę. Otrzymamy w ten sposób liczbę, która jednoznacznie pokaże jak dokładne rozwiązanie wyznaczyliśmy. Jedną z najprostszych norm jest norma 2, którą wyznacza się z wektora w następujący sposób:

**Metoda Gaussa-Seidla**

Metoda Gaussa-Seidla jest przekształceniem metody Jacobiego. W tej metodzie przybliżając niewiadome w k-tej iteracji, oprócz wartości z poprzedniej iteracji, korzystamy również z niewiadomych wyliczonych wcześniej w tej samej iteracji: . Macierze U L i D wyglądają w ten sam sposób, natomiast równanie macierzowe przekształca się do:

Przy czym istotne jest aby nie odwracać macierzy , tylko zamiast tego zastosować podstawienie w przód.

**Analiza algorytmów**

W przypadku mojego nr. Indeksu macierz A ma wymiary 979x979, a jej przekątne wynoszą: a1=11, a2=a3=-1. Wartości wektora b wynoszą sin(n\*9).

Obraz zawierający tekst

Opis wygenerowany automatycznie Dla takiego układu równań i założenia, że norma wektora residuum ma wynieść najwyżej 10-9 , metody iteracyjne poradziły sobie bardzo dobrze. Metoda Jacobiego potrzebowała tylko 26 iteracji, które zajęły jej 128ms. Metoda Gaussa-Seidla wypadła jeszcze lepiej, potrzebując o 8 iteracji mniej i zaledwie 72ms. Obie metody osiągnęły założoną dokładność.

Obraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek : Screenshot z programu

Wykres : Metody iteracyjne zbiegają się

Obraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznie W zadaniu C macierz A została przekształcona do postaci:

Wykres : Metody iteracyjne nie zbiegają się

Obraz zawierający tekst

Opis wygenerowany automatycznieTakiego układu równań metody iteracyjne nie były w stanie rozwiązać. Jest to spowodowane tym, że macierz A nie jest diagonalnie dominująca, czyli wartości bezwzględne liczb na przekątnej nie są wieksze od sumy wartości bezwzglednych pozostałych elementów wiersza. W takim przypadku metody iteracyjne nie zbiegają się i aby uzyskać rozwiązanie należy skorzystać z metody bezpośredniej np. z faktoryzacji LU. Ta metoda potrzebowała aż 2 sekundy, ale była w stanie wyznaczyć wektor rozwiązań x, dla którego norma z residuum wyniosła .

Obraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznie Aby porównać działanie poszczególnych metod, wykorzystałem pierwotny układ równań, dla którego metody iteracyjne zbiegały się. Następnie sprawdziłem wszystkie metody dla zmiennej liczby niewiadomych  
 .

Wykres : Porównanie wydajności trzech metod

Obraz zawierający tekst

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznieWszystkie metody dla większej liczby niewiadomych potrzebowały coraz więcej czasu. Najszybsza była metoda Gaussa-Seidla, która dla N=3000 trwała zaledwie 701ms, czyli ponad 2.5 raza mniej niż metoda Jacobiego(1860ms), i 84 razy mniej niż faktoryzacja LU(59s). Większa ilość czasu wynikała tylko z działań na dużych macierzach, ponieważ ilość iteracji zwiększyła się zaledwie o 1 dla Gaussa-Seidla i o 2 dla Jacobiego. Większa ilość niewiadomych nie wpłynęła na dokładność rozwiązania w przypadku metod iteracyjnych, ponieważ założona dokładność 10-9 została niezmieniona. Natomiast w przypadku faktoryzacji LU wraz ze wzrostem liczby niewiadomych norma residuum lekko się zwiększyła (pięciokrotnie), ale i tak była dużo mniejsza od residuum dla metod iteracyjnych, bo została w okolicach 10-15.

Wykres : Ilość iteracji zwiększyła się zaledwie o 1-2

Obraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres : Norma dla faktoryzacji LU wzrosła wraz ze wzrostem wielkości macierzy

**Wnioski**

Metody iteracyjne są znacząco szybsze od metod bezpośrednich, pozwalają na znalezienie rozwiązania w wielokrotnie krótszym czasie. Jednak mają tą wadę, że nie można ich zastosować do każdego przypadku. Jeśli macierz nie jest diagonalnie dominująca, metody iteracyjne nie zbiegną się do poprawnego rozwiązania i potrzebna będzie metoda bezpośrednia. Również w przypadku obliczania wielu układów równań, które różnią się tylko wektorem b warto rozważyć np. faktoryzację LU, dla której kosztowne czasowo obliczanie macierzy L i U wykona się tylko raz, aby potem móc obliczać niewiadome prostymi podstawieniami w przód i tył.

Źródła

* Slajdy dr. Hab. Inż. Grzegorza Fotygi
* <https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Gaussa-Seidla>
* <https://www.gaussianwaves.com/2013/05/solving-a-triangular-matrix-using-forward-backward-substitution/>
* <https://courses.grainger.illinois.edu/cs357/sp2020/notes/ref-9-linsys.html>
* [Biblioteka C++, której użyłem do rysowania wykresów](https://github.com/lava/matplotlib-cpp)