

**Problema 4.1.** Se o peso das maçã em um bin é 375kg, qual a pressão exercida sobre a última camada de maçãs?

Sugestão:  $\text{pressão} = \text{peso}/\text{área}$ .

**Problema 4.2.** Numa região limitada estão plantadas 60 macieiras. Cada árvore produz, em média, 400 frutos. A cada árvore nova que se plante nesta região sua influência negativa é de 4 frutos sobre as demais. Quantas árvores devem existir neste terreno para que a produção seja máxima?

Sugestão: use conceitos elementares de matemática e cálculo diferencial!

Resp: 80 árvores.

**Problema 4.3.** Classificação de maçãs:

Na 1ª hora são classificadas 876 maçãs, condicionadas em caixas dos tipos  $X, Y$  e  $Z$ , conforme seus tamanhos, e se obtém 4 caixas de  $X$ , 2 caixas de  $Y$  e 2 caixas de  $Z$ . Na 2ª hora, 826 maçãs em 2 caixas de  $X$ , 4 caixas de  $Y$  e 2 caixas de  $Z$ . Na 3ª hora, 978 maçãs em 2 caixas de  $X$ , 2 caixas de  $Y$  e 6 caixas de  $Z$ . Se as caixas têm o mesmo volume, quantas maçãs de cada tipo cabem em uma caixa?

Resp: 125 do tipo  $X$ , 100 do tipo  $Y$  e 88 do tipo  $Z$ .

### 4.5.3 Tema: Vinho

#### Introdução

O *vinho* foi um dos temas escolhidos num curso de Especialização para 28 professores de Matemática, desenvolvido na Universidade de Ijuí (R.S.) – UNIJUI, no período de férias escolares em 1989 e 90. Os outros temas escolhidos na ocasião foram: madeira, ranicultura e missões jesuítas.

As justificativas para a escolha do vinho como tema e da Modelagem como estratégia de aprendizagem de Matemática, podem ser resumidas nos dizeres dos próprios alunos participantes do projeto: “*Em nosso trabalho a escolha da situação – problema está ligada à cultura do povo da região. O cultivo da videira foi trazido pelos colonizadores italianos no início do século e desde então a produção do vinho tornou-se essencial para a economia do município... Uma das tendências mais recentes em Educação Matemática, aponta para a necessidade de integrar o ensino desta ciência com o de outras áreas, em todos os níveis. Para que este processo aconteça e para que a Matemática seja valorizada como disciplina, e nos ajude a entender e até modificar o meio em que vivemos, utilizamos a Modelagem Matemática com o objetivo de associar sua teoria à prática...*”

O trabalho foi dividido em etapas, distribuídas nas férias (julho - 89 e janeiro - 90).

Inicialmente foram feitas visitas às granjas da região e entrevistas com produtores – Os dados colhidos foram completados com pesquisa bibliográfica. A pesquisa *etnológica* e o histórico do tema ocuparam a primeira etapa do processo. Em seguida foram levantados problemas que utilizaram conteúdos de *nível elementar* como a geometria e construção das pipas ou tonéis. No módulo de *Estatística* foram trabalhados os dados colhidos na pesquisa inicial; Ajustes de curvas e testes de hipóteses são bastante frequentes nesta etapa.



Esquema de fabricação de vinho.

A necessidade de melhores ajustes propiciaram a introdução dos *métodos numéricos e computacionais*. Inicialmente, vistos com certa desconfiança pelos professores do ensino fundamental, não acostumados ao seu uso em salas de aula, as calculadoras e os micro-computadores passaram a fazer parte integrante do processo de modelagem. O objetivo principal desta etapa foi mostrar a utilidade das máquinas como instrumento de ensino, inclusive em nível elementar.

Na etapa final, as questões levantadas foram mais complexas e abrangentes e suas interpretações e soluções foram obtidas com conteúdos da *Álgebra Linear*, *Cálculo Diferencial e Integral*, *Equações Diferenciais* etc. Estas disciplinas não foram trabalhadas como num curso regular onde o conteúdo é sequenciado, simplesmente utilizamos o básico necessário para resolver cada problema proposto.

Em relação ao vinho, os questionamentos principais foram: *fabricação de pipas*, *fermentação do mosto*, *comercialização*, *produção* e *teor alcoólico*. O processo de construção de pipas foi descrito no parágrafo 2.2.3 do Cap. 2 para exemplificar a formulação de modelos estáticos e a etno-matemática utilizada pelo “seu” Joaquim. A seguir mostraremos alguns problemas trabalhados pelos alunos usando a formulação dinâmica.

### Processo de Fermentação do Vinho branco

O gráfico da figura 4.20 mostra a variação de temperatura e da densidade do *mosto* (uva esmagada que está sendo fermentada) durante a fabricação do vinho branco (22 dias).

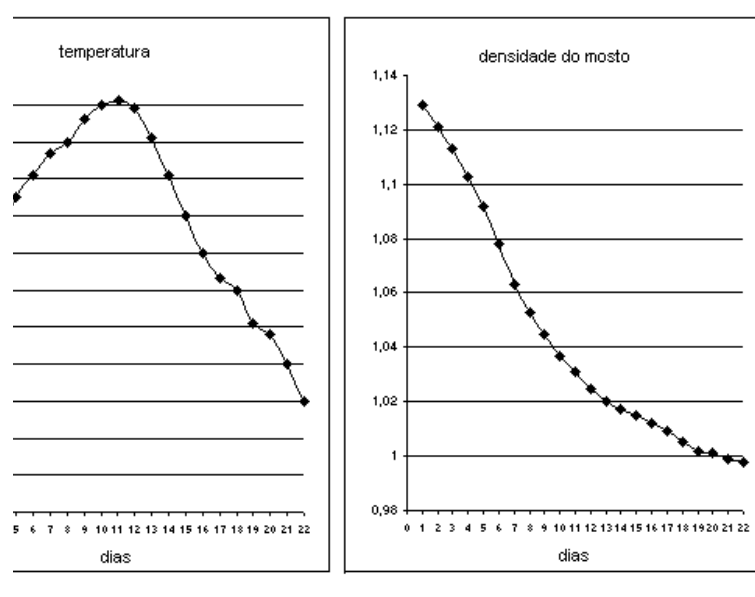


Figura 4.20: Densidade e temperatura no processo de vinificação (vinho branco). Fonte: Gobatto, D. C. (1943).

A massa do mosto se mantém quase constante durante o processo de fermentação. O volume aumenta o que acarreta a diminuição da densidade do mosto. O consumo de açúcar pelas leveduras cresce com o tempo produzindo o álcool enquanto que a temperatura do mosto varia conforme o gráfico 4.20. Com estas informações já podemos selecionar algumas variáveis essenciais que participam do processo de fabricação de vinho: *Volume*, *Densidade*, *Açúcar* e *Temperatura* do mosto, *Teor Alcoólico do vinho* e *População de Leveduras*. Todas estas variáveis são dependentes do *tempo*. Outras variáveis também podem ser detectadas no processo de fermentação (veja esquema mosto/vinho). Na verdade, todas estas variáveis interagem simultaneamente. Um modelo matemático único que contemple todas as interações pode ser tão complexo quanto inútil, uma vez que muitos parâmetros teriam suas medidas prejudicadas. Neste caso, como em muitos outros similares, é preferível fazer o estudo destas variáveis separadamente como se estivessem isoladas.

### Relação entre mosto e vinho produzido

mosto	fermentação	vinho resultante
12° Baumé	anidrido carbônico 99 vapores e aromas 12	12.6° álcool
$\rho = 1.091g/cm^3$ $V = 1000cm^3$	água	$\rho = 0.9928g/cm^3$ $V = 977cm^3$
água: 858 cm <sup>3</sup> açúcares: 212 gr sais orgânicos: 15 gr ácidos livres: 3 gr sais minerais: 2 gr		água: 854 cm <sup>3</sup> açúcar: 1.8 gr sais orgânicos: 3.7 gr ácidos fixos: 4.3 gr sais minerais: 1.1 gr glicerina: 6.2 gr
subst. nitrogenados: 1 gr		subst. nitrogenados: 1 gr ácidos voláteis: 0.5 gr aldeídos, éteres e aromas: 0.4 gr
	álcool	
	açúcar outros	
<b>Total:</b> 1091 gr		<b>Total:</b> 970 gr

Fonte: Enotecnia Industrial -Aquarone, Almeida e Borzane, 1983.

### Relação entre volume e densidade

A uva esmagada é depositada numa pipa para fermentar. Durante o processo de fermentação ocorre a elevação da temperatura e o desprendimento de gás carbônico. Elevando-se a temperatura, há uma variação na densidade do *mosto*, pois as moléculas do composto começam a vibrar com maior intensidade e, expandindo-se, irão ocupar um volume maior, diminuindo pois a sua densidade.

Resultados experimentais fornecem os seguintes dados (tabela 4.12) para uma massa  $m = 100g$  de mosto:

A questão proposta inicialmente foi a seguinte: Qual ajuste de curva é mais conveniente para os dados da tabela 4.12?

- Uma regressão linear fornece a reta que melhor se “ajusta” aos pontos.

A reta ajustada aos valores dados  $\rho = aV + b$  pode ser obtida pelo *método dos quadrados mínimos* (veja capítulo 2, parágrafo 3.1). Assim, se os pontos da tabela são

Período (dias)	$V_i$ : volume (cm <sup>3</sup> )	$\rho_i$ :densidade (g/cm <sup>3</sup> )
1	87	1.149
2	92	1.087
3	97	1.031
4	102	0.980
5	107	0.936

Tabela 4.12: Volume  $\times$  densidade do mosto.

$(V_i, \rho_i), 1 \leq i \leq n$  (número de pontos), então os coeficientes da reta ajustada devem satisfazer o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n V_i \\ \sum_{i=1}^n V_i & \sum_{i=1}^n V_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \rho_i \\ \sum_{i=1}^n V_i \rho_i \end{bmatrix}$$

No caso do problema específico tem-se que

$$\rho = \rho(V) = 2.07062 - 0.01066V$$

com erro da ordem de 0.0021.

- b. A regressão quadrática significa um ajuste dos pontos (tipo “mínimos quadrados”) por uma parábola  $y = a + bx + cx^2$ , o que é equivalente a resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} n & \sum V_i & \sum V_i^2 \\ \sum V_i & \sum V_i^2 & \sum V_i^3 \\ \sum V_i^2 & \sum V_i^3 & \sum V_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \rho_i \\ \sum V_i \rho_i \\ \sum V_i^2 \rho_i \end{bmatrix}.$$

Com os dados da tabela 4.12, temos

$$\rho(V) = 2.9057 - 0.0276392V + 8.57705 \times 10^{-5}V^2$$

com erro da ordem de 0.0019.

- c. O ajuste por uma curva exponencial do tipo

$$\rho = ae^{bV},$$

fornece a equação

$$\rho = 2.894 \exp(-0.106V)$$

dados reais		valores ajustados		
$V_i$	$\rho_i$	Reta	Parábola	Exponencial
87	1.15	1.146	1.503	1.149
92	1.09	1.091	1.089	1.089
97	1.03	1.036	1.032	1.033
102	0.98	0.981	0.979	0.979
107	0.93	0.926	0.930	0.929
Erro		$8.36 \times 10^{-3}$	$2.39 \times 10^{-3}$	$3.51 \times 10^{-3}$

Tabela 4.13: Ajustes.

Como podemos ver, da tabela 4.13, todos os ajustes são aparentemente “razoáveis” para as curvas adotadas, o que não significa que possam ser usados para *previsões* de densidades  $\rho$  quando  $V$  não estiver no intervalo [87, 107].

Fazer ajustes de curvas é um primeiro passo para a construção de modelos, eles fornecem a forma da curva no intervalo dos pontos dados. No entanto, o *modelo matemático* de um fenômeno estudado somente poderá ser considerado como tal quando suas previsões forem significativas. Por exemplo, sabemos que dada uma massa  $m$  constante, a densidade do mosto  $\rho$  tende a zero somente quando  $V$  “cresce muito” ( $V \rightarrow \infty$ ). Agora, se considerarmos a reta  $\rho = 2.103 - 0.011V$  como modelo, teremos que  $\rho = 0$  quando  $V = 191.18 \text{ cm}^3$ . Assim, a reta não é um bom modelo para se prever a densidade em função do volume.

A formulação de um modelo matemático deve considerar, além da parte experimental, fatores intrínsecos dos fenômenos avaliados.

Se considerarmos os valores  $\rho_i$  e  $V_i$  da tabela 4.12 e tomarmos o seu produto  $\rho_i V_i$  observamos que, para todo  $i$ , tal produto é aproximadamente igual a 100 (sabemos que a massa do mosto é  $m = 100\text{g}$ ). Então, podemos inferir que um modelo razoável, relacionando densidade e volume é dado por:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (4.59)$$

isto é, a *densidade absoluta do mosto é a relação entre sua massa e o volume ocupado por ela*. Portanto, a densidade indica a massa contida na unidade de volume do corpo. O modelo que obtivemos, neste caso, é um resultado bastante conhecido.

### Densidade do mosto no processo de vinificação

A produção de vinho envolve uma etapa de fermentação na qual as leveduras atuam sobre o mosto transformando o açúcar da uva em álcool. Inicialmente este processo é um pouco lento devido à baixa concentração de bactérias, acelerando com sua reprodução. A densidade do mosto diminui proporcionalmente ao aumento da população de leveduras, ocorrendo uma elevação da temperatura. A partir de certo instante, a diminuição da densidade é desacelerada tornando-a, praticamente, estável. A temperatura, depois de atingir um valor

máximo, diminui, tendendo à temperatura ambiente. O processo atinge um estágio de equilíbrio quando a concentração de glicose é muito baixa e portanto, cessa a atividade das leveduras.

Como a densidade do mosto está relacionada com a atividade das leveduras que, por sua vez, está relacionada com sua população, concluímos que podemos modelar a densidade utilizando algum modelo de dinâmica populacional. Vamos usar o modelo logístico invertido para a densidade que diminui e tende a se estabilizar.

Uma análise superficial de variação da densidade  $\rho$  através da sua configuração (figura 4.21) nos permite dizer que:

- No início do processo de vinificação a densidade  $\rho_0 = 1.132g/cm^3$ , decrescendo até seu valor mínimo  $0.993g/cm^3$ , depois de 22 dias quando o vinho está pronto;
- A variação máxima de  $\rho$  ocorre entre o 5º e o 7º dias, onde a curva muda de concavidade;
- A forma de curva  $\rho = \rho(t)$  se assemelha a de uma “logística invertida”; uma explicação para este fato é que a densidade (ou o volume) está intimamente relacionada com a população de leveduras que atuam sobre o açúcar, e inibida pelas limitações inerentes ao processo de vinificação;
- O valor mínimo medido de  $\rho$  é  $992.8\text{ gr}/cm^3$ , quando termina a fabricação, mas não a fermentação pois, ainda existe uma pequena quantidade (1.8g) de açúcar no vinho.

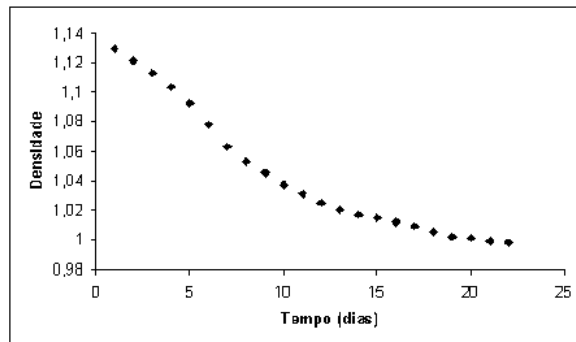


Figura 4.21: Curva de tendência da densidade do mosto.

Observe que o conjunto de dados da densidade, conforme sua configuração (figura 4.20), não pode ser modelado pelo modelo logístico tradicional pois a densidade decresce com o tempo. Precisamos fazer uma alteração no conjunto de pontos para que a sequência de densidades decrescente se torne crescente. Isto pode ser feito facilmente subtraindo todos

os valores  $\delta_i$  do valor inicial  $\delta_0$ . Chamaremos de  $D_i$  a sequência modificada  $D_i = \delta_0 - \delta_i$ . Estes novos valores podem ser encontrados na coluna “Dados Invertidos” da tabela 4.14. O gráfico da figura 4.22 mostra a tendência dos novos valores.

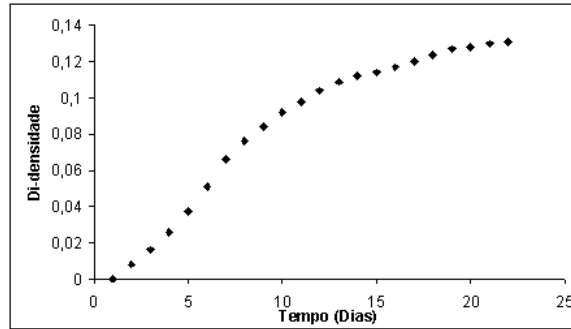


Figura 4.22: Tendência dos valores invertidos da densidade.

Agora temos um conjunto de dados muito parecido com a equação logística. Primeiramente, para modelar os valores  $D_i$ , vamos estimar um valor para o limite desta sequência. Uma das maneiras de se fazer isto é usarmos o fato de que uma sequência atinge seu limite quando a sua taxa de crescimento relativa é igual a zero. Se considerarmos o modelo logístico para  $D_i$ , devemos ajustar a taxa de crescimento relativa  $r_i = \frac{D_{i+1} - D_i}{D_i}$  por uma reta

$$r = aD + b.$$

Assim, quando  $r = 0$ , temos  $D = -\frac{b}{a} = D_\infty$  e  $r = b$  quando  $D = 0$ .

A equação da reta ajustada é

$$r = -2.6439D + 0.3503$$

Podemos ver que a taxa de crescimento  $r$  é nula quando  $D = 0.13249$ , valor que pode ser usado como uma estimativa para  $D_\infty$ , limite da sequência  $D_i$ .

Agora basta trabalharmos com este resultado na equação logística para ajustá-la de forma a representar bem os dados. O modelo logístico, neste caso, é dado por:

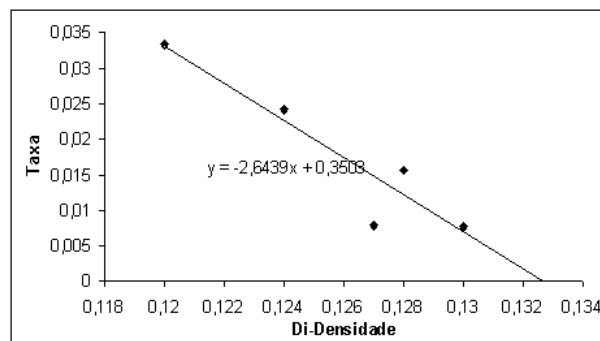
$$D(t) = \frac{D_0 D_\infty}{D_0 + (D_\infty - D_0)e^{-at}} \quad (4.60)$$

onde  $D(t)$  é o valor da densidade invertida, isto é,  $D(t) = \delta_0 - \delta(t)$ ;  $D_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} D_i$  é o valor limite;  $a = 0.3503$  é obtido do ajuste linear de  $r$  tomando  $D = 0$ .

Assim,

$$D(t) = \frac{0.13249 \times 0.008}{0.008 + (0.13249 - 0.008)e^{-0.3503t}} \quad (4.61)$$



Figura 4.23: Ajuste do crescimento relativo  $r$ .

**Observação 4.10.** Consideramos  $D_0 = 0.008$  (densidade invertida do 2º dia) como sendo a condição inicial do problema, porque se tomássemos  $D_0 = 0$  não poderíamos ter uma logística. Justifique!

Agora, como a densidade é dada por  $\delta(t) = \delta_0 - D(t)$ , então o modelo 1 que descreve a sua tendência temporal é:

$$\delta(t) = 1.129 - \frac{0.00106}{0.008 + 0.1245 \exp(-0.3503t)} \quad (4.62)$$

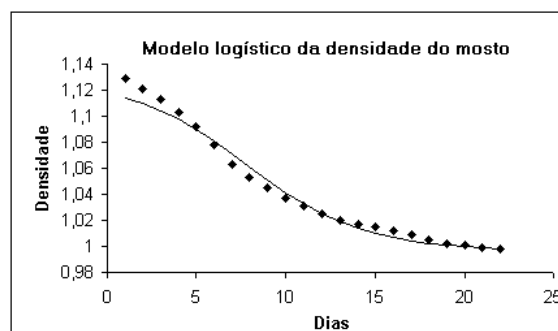


Figura 4.24: Modelo logístico e dados experimentais da densidade do mosto no processo de vinificação.

Outra forma de encontrar os valores dos parâmetros da equação logística é isolar  $a$  no modelo logístico (4.60):

$$a = -\frac{1}{t} \ln \left( \frac{D_0(D_\infty - D(t))}{D(t)(D_\infty - D_0)} \right) \quad \text{ou} \quad a_i = \frac{1}{i} \ln \left[ \frac{D_0(D_\infty - D_i)}{D_i(D_\infty - D_0)} \right]. \quad (4.63)$$

E então, dado  $D_0$  e  $D_\infty$  teremos vários valores  $a_i$ , um para cada  $D_i$ . Assim, podemos escolher o valor de  $a$  que melhor se ajusta ao conjunto de dados. Neste caso específico encontramos  $a = 0.344455$ .

O *modelo 2* é equivalente ao *modelo 1* (4.62) considerando agora  $a = 0.344455$ :

$$\delta(t) = \delta_0 - \frac{D_0 D_\infty}{D_0 + (D_\infty - D_0) \exp(-at)}$$

A tabela 4.14, mostra os resultados dos dois modelos.

dia	densidade	temperatura	Dados invertidos	Taxa de crescimento	Modelo 1	Modelo 2
1	1.129	20	0		1.114329	1.11798376
2	1.121	21	0.008	1	1.109838	1.11396763
3	1.113	23.5	0.016	0.625	1.104262	1.10873165
4	1.103	25	0.026	0.42307692	1.097513	1.10208973
5	1.092	26.5	0.037	0.37837838	1.089596	1.09395102
6	1.078	27.1	0.051	0.29411765	1.080642	1.08439081
7	1.063	27.7	0.066	0.15151515	1.070923	1.0737027
8	1.053	28	0.076	0.10526316	1.060833	1.06239455
9	1.045	28.6	0.084	0.0952381	1.050831	1.05110726
10	1.037	29	0.092	0.06521739	1.041361	1.04047709
11	1.031	29.1	0.098	0.06122449	1.032776	1.031
12	1.025	28.9	0.104	0.04807692	1.025294	1.02295523
13	1.02	28.1	0.109	0.02752294	1.018995	1.01640572
14	1.017	27.1	0.112	0.01785714	1.013844	1.01125253
15	1.015	26	0.114	0.2631579	1.009731	1.00730583
16	1.012	25	0.117	0.02564103	1.006509	1.00434511
17	1.009	24.3	0.12	0.03333333	1.004022	1.00215838
18	1.005	24	0.124	0.02419355	1.002126	1.00056182
19	1.002	23.1	0.127	0.00787402	1.000691	0.99940594
20	1.001	22.8	0.128	0.015625	0.999614	0.9985742
21	0.999	22	0.13	0.00769231	0.99881	0.99797833
22	0.998	21	0.131		0.99821	0.99755279

Tabela 4.14: Comparação entre os modelos 1 e 2, e os dados experimentais.

## Temperatura

No processo de vinificação observa-se também que a temperatura é variável no tempo (veja figura 4.20). Deixaremos a cargo do leitor os procedimentos para formular um modelo que relacione a temperatura com a a ção das bactérias (fermentação). Chamamos a atenção para o fato de que a temperatura máxima é obtida quando a *variação da densidade* do mostro também está em torno de seu valor máximo (ponto de inflexão da curva).

Faremos aqui apenas *um ajuste* (e não um modelo!) da curva da temperatura em função do tempo. A temperatura é uma variável que depende da densidade e esta por sua vez varia com o tempo. Nosso objetivo é simplesmente, mostrar graficamente estas relações. Vamos considerar o tempo  $t$  como sendo um parâmetro, e as variáveis densidade  $\delta$  e temperatura  $T$ , como sendo dadas por funções paramétricas – Assim, a relação entre as variáveis é uma curva paramétrica em  $\mathbb{R}^3$ , dada por:

$$\begin{cases} \delta = f(t) & - \text{ obtida do modelo logístico 2} \\ T = g(t) & - \text{ obtida através de um ajuste polinomial} \\ t = t & - t \text{ é o parâmetro tempo.} \end{cases}$$

Um ajuste razoável para  $T = T(t)$ , no intervalo  $0 \leq t \leq 22$ , pode ser obtido usando-se o Excel e um polinômio de 3º grau:

$$T(t) = 0.0039t^3 - 0.2067t^2 + 2.8842t + 16.636 \quad (4.64)$$

O gráfico tridimensional da curva paramétrica e suas projeções nos 3 planos é facilmente obtido, usando-se o programa “*Mathematica*”, considerando:

```
f[x_] := 1.129-0.00105992/(0.008+(0.12449) Exp[-0.344455x])
g[x_] := 0.0039x^3-0.2067x^2+2.8842x+16.636
```

Apenas precisamos lembrar que os intervalos de valores das densidades e das temperaturas são muito diferentes, é portanto devemos colocá-los em escalas semelhantes para facilitar a visualização das curvas:

```
p[x_] = 20*(f[x]-1.13)/0.131
```

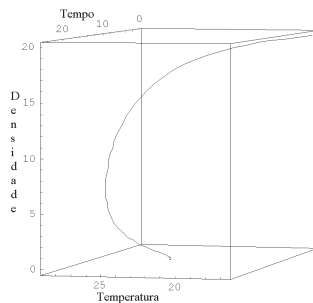


Figura 4.25: Curva paramétrica da densidade e temperatura em função do tempo.

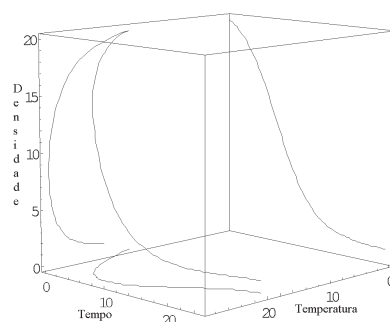


Figura 4.26: Projeção da curva paramétrica nos planos.

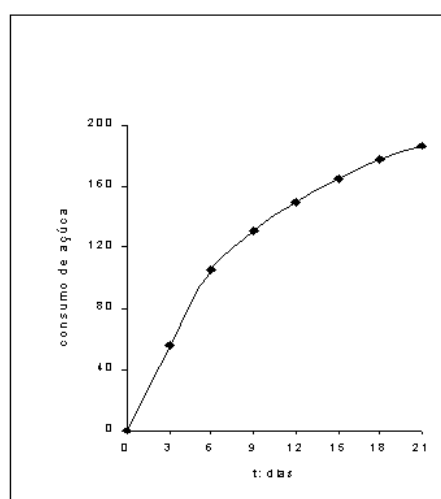


Figura 4.27: Consumo de açúcar pela levedura EMBRAPA-880, em função do tempo. Fonte: Revista do vinho, nº 1- Julho/Agosto 1987.

### Densidade do mosto e quantidade do açúcar consumida pelas leveduras

O consumo de açúcar que é transformado em álcool, pela ação das leveduras, tem a configuração da figura 4.27.

Do gráfico (figura 4.27) tiramos a tabela 4.15; seja  $\{a_i\}_{0 \leq i \leq 21}$  a sequência dos valores do açúcar consumido pela levedura no processo de vinificação. Inicialmente desejamos obter o valor limite desta sequência.

$t_i$ : tempo	$a_i$ : açúcar consumido	$a_{i+1}$	$A_i$ : açúcar restante	$a$ : modelo
0	0	55.68	205.22	0
3	55.68	105.27	149.54	58.389
6	105.27	130.51	99.95	100.165
9	130.51	149.64	74.71	130.055
12	149.64	165.31	55.58	151.441
15	165.31	177.48	39.91	166.742
18	177.48	186.18	27.74	177.690
21	186.18	191.61	19.04	185.523

Tabela 4.15: Açúcar consumido  $a_i \times$  tempo  $t_i$ .

Como  $a_i$  é uma sequência crescente e limitada, então é convergente e tende para o mesmo valor que a sequência  $a_{i+1}$  da qual eliminamos o primeiro elemento. O limite pode ser obtido pelo método de Ford-Walford (conf. Cap. 2), resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a_{i+1} = \alpha a_i + \beta \\ a_{i+1} = a_i \end{cases} \quad (4.65)$$

Um ajuste linear com os valores de  $a_{i+1}$  e  $a_i$  da tabela 4.15, fornece a equação da reta  $a_{i+1} = 0.7147a_i + 58.549$  e a resolução do sistema (4.65) nos dá  $a_\infty \simeq 205.22$ .

A curva do açúcar restante no mosto (figura 4.28) é obtida, considerando a regressão exponencial dos pontos  $A_i = a_\infty - a_i$ :

$$A(t) = 205.3e^{-0.1116t} \quad (4.66)$$

Portanto, a equação para o açúcar consumido até o instante  $t$ , é dado por

$$a(t) = a_\infty - A(t) = 205.3[1 - e^{-0.116t}] \quad (4.67)$$

Do ponto de vista do fenômeno biológico estudado na vinificação, pode ser constatado que quanto mais açúcar existir no mosto, maior será a atividade das leveduras. Isto nos leva a formular a hipótese:

“A variação da quantidade de açúcar consumido é proporcional à quantidade existente, em cada instante”.

A afirmação acima pode ser traduzida pelo modelo:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = k(a_\infty - a) \\ \text{com } a(0) = 0 \text{ e } a_\infty = \text{quantidade de açúcar no início da vinificação.} \end{cases} \quad (4.68)$$

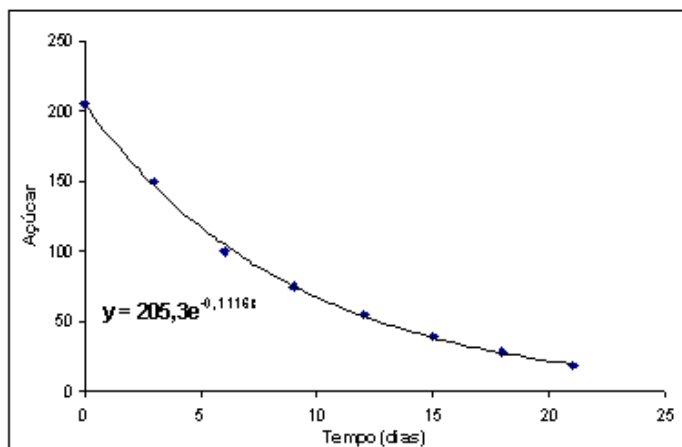


Figura 4.28: Açúcar restante no mosto.

Separando as variáveis e integrando (4.68), obtemos

$$a(t) = a_{\infty} - ce^{-kt}$$

Usando a condição inicial  $a(0) = 0$ , obtemos que  $c = a_{\infty}$ . Assim

$$a(t) = a_{\infty}(1 - e^{-kt}) \quad (4.69)$$

é o modelo de consumo de açúcar, em cada instante, no processo de vinificação.

A equação (4.67) e a solução (4.69) do modelo (4.68) têm a mesma estrutura matemática embora tenham sido obtidos por meios completamente distintos.

A equação (4.67) é simplesmente um ajuste de dados experimentais enquanto que (4.69) foi obtido da conjectura sobre a atividade das leveduras.

Podemos, neste caso, considerar (4.67) como um *modelo particular* da fabricação de um vinho específico, caracterizado por possuir, no início da fermentação, 205.22 g/l de açúcar.

Se considerarmos a equação (4.69), funcional para todo tipo de vinho, podemos utilizá-la para calcular o coeficiente de atividade das leveduras  $k$  no caso da fabricação do vinho branco dado no *esquema* anterior.

Neste caso, temos  $a_{\infty} = 212 \text{ g/l}$  e  $A(22) = 1.84 \text{ l}$ . Aplicando estes valores em (4.69), obtemos  $a(22) = 212 - 1.842 = 210.157 = 212(1 - e^{-22k})$  e portanto

$$k = -\frac{\ln(1 - \frac{210.157}{212})}{22} \simeq 0.2157$$

ou seja, a taxa de variação do açúcar consumido, relativamente ao existente, é de 0.2157/dia.

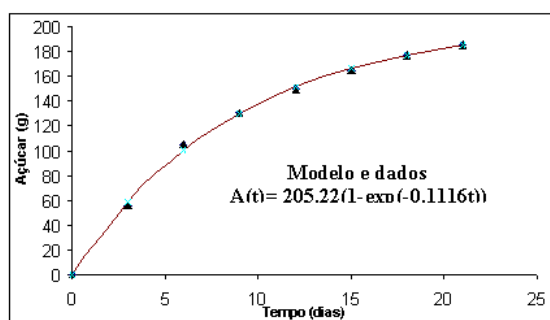


Figura 4.29: Ajuste do modelo de consumo de açúcar no processo de vinificação.

## Alcoolismo



Nos últimos três anos, o consumo nacional de vinho cresceu 35%, alcançando 2 litros per capita ao ano, irrisórios para os apreciadores de Luxemburgo, que bebem 70 litros, e até diante dos argentinos, cuja marca é de 40 litros.

O estudo sobre “Dosagem Alcoólica no Sangue” foi realizado por um grupo de cursistas em um programa de Especialização realizado na PUCCAMP em 1998. A princípio, o objetivo deste grupo era utilizar modelagem matemática como estratégia para entender o processo da “Fabricação de Cerveja”. A própria evolução do curso fez com que, deste