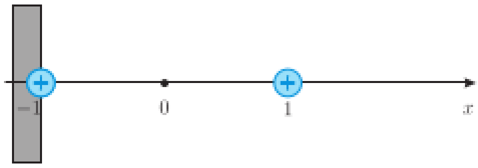
## Exemplo

Neste exemplo vamos estudar o problema de duas partículas carregdas, com carga unitária e positiva, fixadas num eixo perpendicular a uma parede, como na figura abaixo.




O potencial elétrico gerado por essas duas partículas num ponto $x$ ao longo desse eixo é dado, em unidades convenientes, pela seguinte função

$$P(x) = \frac{1}{|x+1|} + \frac{1}{|x-1|}, \quad x > -1, x \neq 1.$$

Usando a definição da função módulo podemos reescrever o potencial como

$$P(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^2-1}, & -1 < x < 1, \\ \frac{2x}{x^2-1}, & x > 1. \end{cases}$$

No que se segue vamos fazer um estudo do sinal das derivadas de primeira e segunda ordem da função $P$. Vamos inicialmente observar que a derivada de $P$ não está definida em $x = 1$ mas existe no conjunto $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Para determiná-la basta derivar cada expressão algébrica

$$\begin{aligned} (-2(x^2-1)^{-1})' &= \ 4x(x^2-1)^{-2}, \\ (2x(x^2-1)^{-1})' &= \ 2(x^2-1)^{-1} - 4x^2(x^2-1)^{-2}, \\ &= \ -2(x^2+1)(x^2-1)^{-2}. \end{aligned}$$

Desta forma

$$P'(x) = \begin{cases} \frac{4x}{(x^2-1)^2}, & -1 < x < 1, \\ -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Os eventuais pontos críticos da função $P$ são aqueles nos quais a derivada se anula. Note que, no intervalo $(-1, 1)$, a derivada se anula somente no ponto $x = 0$. No outro intervalo ela é sempre negativa. Portanto, o único ponto crítico da função $P$ é o ponto $x = 0$.

Para estudar o sinal de $P'$ observamos que, além do ponto crítico, temos ainda que considerar os extremos dos subintervalos do domínio. Deste modo, temos três intervalos a serem considerados: $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$. Uma observação que facilita a análise do sinal da derivada é notar que o denominador das duas expressões é sempre positivo e numerador de uma expressão é sempre nagative. Assim, o sinal de uma expressão é sempre negative e o sinal de outro vai ser determinado pelo numerador. Temos então a seguinte configuração:

| | ***Sinal de*** $4x$ | $-2(x^2+1)$ | $(x^2-1)^2$ | $P'$ | **Função** $P$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \in (-1, 0)$ | $-$ | indiferente | $+$ | $-$ | decrescente |
| $x \in (0, 1)$ | $+$ | indiferente | $+$ | $+$ | crescente |
| $x \in (1, +\infty)$ | indiferente | $-$ | $+$ | $-$ | decrescente |

O quadro nos permite concluir que o ponto crítico $x=0$ é um ponto de mínimo local. Observe que, ainda que antes do ponto $x=1$ a derivada seja positiva e depois negativa, não podemos afirmar que este ponto é um ponto de máximo local. De fato, esta análise não se aplica neste ponto porque ele nem pertence ao domínio da função. Passemos agora a estudar a segunda derivada, lembrando que o seu sinal nos fornece informações sobre a concavidade do gráfico. A concavidade é voltada para cima onde $P''$ é positiva e para baixo onde $P''$ é negativa. O cálculo da segunda derivada pode ser feito como antes

$$\begin{aligned}(4x(x^2-1)^{-2})' = & \quad 4(x^2-1)^{-2} - 16x^2(x^2-1)^{-3}, \\ = & \quad -4(3x^2+1)(x^2-1)^{-3}, \\ (-2(x^2+1)(x^2-1)^{-2})' = & \quad -4x(x^2-1)^{-2} + 8(x^2+1)x(x^2-1)^{-3} \\ = & \quad 4x(x^2+3)(x^2-1)^{-3}.\end{aligned}$$

De modo que

$$P''(x) = \begin{cases} \frac{-4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}, & -1 < x < 1, \\ \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}, & x > 1. \end{cases}$$

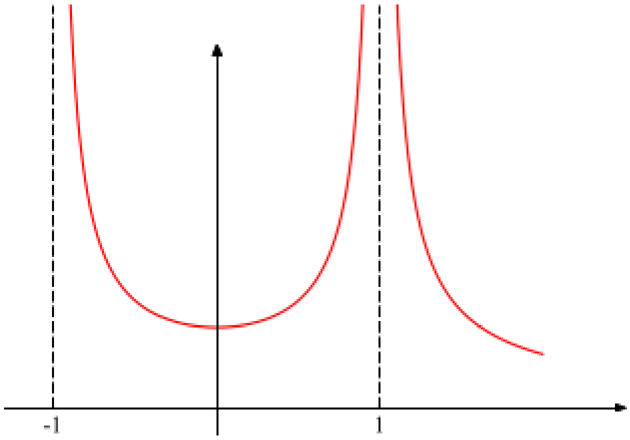
Note que a segunda derivada nunca se anula no intervalo $(-1,1)$, porque o numerador $-4(3x^2+1)$ é sempre negativo. Também no intervalo $(1,+\infty)$ ela não se anula. De fato, o numerador $4x(x^2+3)$ se anularia somente se $x=0$, mas este ponto não pertence ao intervalo $(1,+\infty)$. Assim, a derivada segunda tem sinal constante em cada um dos seus intervalos de definição. No primeiro intervalo este sinal é o mesmo de, por exemplo, $P''(0) = -4/(-1) = 4 > 0$ e no segundo o mesmo de $P''(2) = (8\cdot 7)/3^3 > 0$, e portanto o gráfico é sempre côncavo para cima. Esta conclusão poderia também ser obtida a partir do quadro abaixo:

| | **Sinal de** $-4(3x^2+1)$ | $4x(x^2+3)$ | $(x^2-1)^3$ | $P''$ | **Função** $P$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \in (-1,0)$ | $-$ | indiferente | $-$ | $+$ | concavidade p/ cima |
| $x \in (0,1)$ | $-$ | indiferente | $-$ | $+$ | concavidade p/ cima |
| $x \in (1,+\infty)$ | indiferente | $+$ | $+$ | $+$ | concavidade p/ cima |

O próximo passo para o esboço do gráfico é estudar o comportamento da função $P$ nas vizinhanças de $x=-1$, $x=1$ e quando $x \to +\infty$. Vejamos:

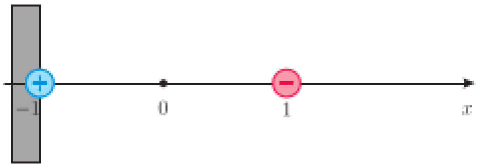
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+} P(x) = & \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{-2}{x^2-1} & = & \quad +\infty, \\ \lim_{x\to 1^-} P(x) = & \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{x^2-1} & = & \quad +\infty, \\ \lim_{x\to 1^+} P(x) = & \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} & = & \quad +\infty, \\ \lim_{x\to +\infty} P(x) = & \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x^2-1} & = & \quad 0.\end{aligned}$$

Deste modo, as retas $x=-1$ e $x=1$ são assíntotas verticais e a reta $P=0$ é uma assíntota horizontal. Utilizando essas informações podemos esboçar o gráfico de $P$ como ilustrado abaixo.




### Exercício

Considere duas cargas elétricas, a primeira com carga unitária positiva e a segunda com carga unitária negativa, fixadas num eixo perpendicular a uma parede, como na figura abaixo.




O potencial elétrico gerado por essas duas partículas num ponto $x$ ao longo desse eixo é dado, em unidades convenientes, pela seguinte função

$$P(x) = \frac{1}{|x+1|} - \frac{1}{|x-1|}, \quad x > -1, x \neq 1.$$

O objetivo desta tarefa e fazer um esboço da gráfico da função acima.

1. Lembrando que $|y| = y$ se $y \geq 0$ e $|y| = -y$ se $y < 0$, verifique que a função $P$ pode ser reescrita na forma

$$P(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2-1}, & -1 < x < 1, \\ \frac{-2}{x^2-1}, & x > 1 \end{cases}$$

2. Calcule a derivada de $P(x)$ e determine seus (possíveis) extremos locais e seus intervalos de crescimento e decrescimento.
3. Calcule a derivada segunda $P''(x)$ e determine intervalos de concavidade para cima e para baixo.
4. Determine as assíntotas verticais e horizontais de $P(x)$.
5. Utilizando as informações acima esboce o gráfico de $P(x)$.

## Problemas de Otimização

Na semana 3 aprendemos sobre valores extremos locais e globais de funções. Agora utilizaremos as técnicas que aprendemos para atacar problemas que envolvam encontrar uma solução ótima, isto é, uma solução máxima ou mínima para uma dada quantidade descrita por uma função. Essa é uma importante classe de problemas resolvidos com as técnicas que vimos até então. Os tópicos da "estratégia de solução de problemas" , das Notas da semana 3, também serão úteis aqui. Vejamos alguns exemplos.