Capítulo 2 - Modelagem em Teoria dos Grafos

1 Exemplo Introdutório

Serviços como o Google Maps oferecem a possibilidade de encontrar a "rota mais curta" entre dois pontos geográficos A e B. Essa noção de "mais curta" pode se referir à menor distância, menor tempo ou outras métricas (evitar pedágios, rodovias, etc). A modelagem desse problema naturalmente nos leva à teoria dos grafos.

2 Teoria dos Grafos

Um **grafo** é uma coleção de vértices (ou nós) conectados por arestas (ou arcos). As definições a seguir formalizam diferentes tipos de grafos.

Definição 2.1: Grafo Simples Não-Direcionado e Grafo Simples Direcionado

Seja V um conjunto. O par $G = (V, E)$ é um **grafo simples não-direcionado** se e somente se:

$$E \subseteq \mathcal{P}(V) \quad \text{e} \quad \forall a \in E,\ |a| = 2.$$

O par $G = (V, E)$ é um **grafo simples direcionado** se e somente se:

$$E \subseteq V^2 \quad \text{e} \quad \forall a = (a_1, a_2) \in E,\ a_1 \neq a_2.$$

Definição 2.3: Vizinhança

O vértice v é vizinho de u se $uv \in E(G)$. A vizinhança de u é:

$$N_G(u) := \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}.$$

Definição 2.5: Caminhada, Trilha, Caminho

Uma sequência finita alternada de vértices e arestas é uma:

- **Caminhada** de comprimento n: pode repetir vértices e arestas.
- **Trilha**: uma caminhada sem repetição de arestas.
- **Caminho**: uma trilha sem repetição de vértices.

Definição 2.7: Grafo Ponderado

Um grafo ponderado é um triplo $G = (V, E, c)$ tal que (V, E) é um grafo e $c : E \to \mathbb{R}$ é a função de custo associada às arestas.

Definição 2.8: Distância

A distância entre dois vértices a e b em G é:

$$\mathrm{dist}_G(a, b) := \min \left\{ \sum_{e \in E(w)} c(e) \mid w \text{ é uma caminhada de } a \text{ até } b \right\}.$$

3 Modelagem do Problema da Conexão Mais Curta

Seja o grafo $G = (V, E, c)$, onde:

- V representa interseções (cruzamentos) de ruas.
- E representa os trechos de rua (com direção, se necessário).
- $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ representa o custo de percorrer cada trecho.

O problema de menor caminho entre dois pontos $A, B \in V$ é então:

Problema 2.9: Menor Caminho

Dado: Grafo $G = (V, E, c)$ e dois vértices $A, B \in V$.
Determinar: Um caminho p de A até B tal que $c(p) = \mathrm{dist}_G(A, B)$.

4 Algoritmo de Dijkstra

Objetivo: Calcular $\mathrm{dist}_G(A, v)$ para todos $v \in V \setminus \{A\}$ e reconstruir o menor caminho até v.

Pseudocódigo do Algoritmo

1. Inicialize: $C \leftarrow \emptyset$, $O \leftarrow V$, $l(A) \leftarrow 0$, $l(v) \leftarrow \infty$ para $v \neq A$.
2. Enquanto $O \neq \emptyset$:
   (a) Escolha $v \in O$ com menor $l(v)$.
   (b) Mova v para C, atualize $\mathrm{dist}_G(A, v) = l(v)$.
   (c) Para cada vizinho $w \in N_G(v)$:

$$\text{se } l(w) > l(v)+c(v,w) \text{ então } l(w) \leftarrow l(v)+c(v,w), \quad \mathrm{pre}_G(w) \leftarrow v.$$

Ao final, $\mathrm{dist}_G(A, v)$ contém a menor distância de A a v, e $\mathrm{pre}_G(v)$ permite reconstruir o caminho.