Sistemas de equações de diferenças

Enunciado

Um economista está interessado na variação do preço de um único produto. Observa-se que um preço elevado do produto no mercado atrai mais fornecedores. No entanto, o aumento da quantidade ofertada tende a reduzir o preço. Com o tempo, há uma interação entre preço e oferta. O economista propõe o seguinte modelo, onde P_n representa o preço no ano n, e Q_n representa a quantidade:

$$P_{n+1} = P_n - 0{,}1(Q_n - 500)$$
$$Q_{n+1} = Q_n + 0{,}2(P_n - 100)$$

(a) O modelo faz sentido intuitivamente? Qual o significado das constantes 100 e 500? Explique o significado dos sinais $-0{,}1$ e $0{,}2$.

(b) Teste as condições iniciais abaixo e descreva o comportamento de longo prazo:

Caso	P_0	Q_0
A	100	500
B	200	500
C	100	600
D	100	400

Resolução

(a) Interpretação do modelo

As equações do modelo são:

$$P_{n+1} = P_n - 0{,}1(Q_n - 500)$$
$$Q_{n+1} = Q_n + 0{,}2(P_n - 100)$$

O modelo faz sentido intuitivamente? Sim, o modelo reflete bem a lógica econômica básica de oferta e demanda:

- Quando o **preço sobe**, os produtores tendem a ofertar mais. Isso aparece na equação de Q_{n+1}, onde Q aumenta se $P_n > 100$.

  A equação para o preço é:
  $$P_{n+1} = P_n - 0{,}1(Q_n - 500)$$

  - Se $Q_n > 500$, então $P_{n+1} < P_n$: excesso de oferta reduz o preço.
  - Se $Q_n < 500$, então $P_{n+1} > P_n$: escassez aumenta o preço.
  - Portanto, $Q = 500$ é a quantidade que mantém o preço estável.

- Quando a **oferta aumenta**, o excesso de produto no mercado tende a reduzir o preço. Isso aparece na equação de P_{n+1}, onde P diminui se $Q_n > 500$.

  A equação para a quantidade é:
  $$Q_{n+1} = Q_n + 0{,}2(P_n - 100)$$

- Se $P_n > 100$, então $Q_{n+1} > Q_n$: preço alto incentiva maior oferta.
- Se $P_n < 100$, então $Q_{n+1} < Q_n$: preço baixo desincentiva a oferta.
- Portanto, $P = 100$ é o preço que mantém a quantidade estável.

Significado das constantes 100 e 500

- 100: é o **preço de equilíbrio** — quando $P_n = 100$, a oferta não muda ($Q_{n+1} = Q_n$).
- 500: é a **quantidade de equilíbrio** — quando $Q_n = 500$, o preço não muda ($P_{n+1} = P_n$).

Significado dos sinais $-0{,}1$ e $+0{,}2$

- $-0{,}1$: indica que há uma **reação negativa do preço** ao excesso de oferta (preço cai se $Q_n > 500$).
- $+0{,}2$: indica que há uma **reação positiva da oferta** ao aumento de preço (quantidade aumenta se $P_n > 100$).

(b) Análise dos Casos

Ponto de equilíbrio (fixo): resolver o sistema

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n \Rightarrow Q_n = 500 \\ Q_{n+1} = Q_n \Rightarrow P_n = 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P^*, Q^*) = (100, 500)$$

Caso A: $P_0 = 100$, $Q_0 = 500$

$$P_1 = 100 - 0{,}1(500 - 500) = 100$$
$$Q_1 = 500 + 0{,}2(100 - 100) = 500$$

Esse par é um ponto fixo: o sistema permanece nele indefinidamente.
Conclusão: Equilíbrio estável.

Caso B: $P_0 = 200$, $Q_0 = 500$

$$\begin{aligned} P_1 &= 200 - 0{,}1(500 - 500) = 200 \\ Q_1 &= 500 + 0{,}2(200 - 100) = 520 \\ P_2 &= 200 - 0{,}1(520 - 500) = 198 \\ Q_2 &= 520 + 0{,}2(200 - 100) = 540 \\ P_3 &= 198 - 0{,}1(540 - 500) = 194 \\ Q_3 &= 540 + 0{,}2(198 - 100) = 559{,}6 \end{aligned}$$

O preço começa alto e a quantidade cresce, mas o preço começa a cair, indicando tendência de retorno ao equilíbrio.
Conclusão: Sistema oscila, mas parece tender ao ponto fixo $(100, 500)$.

Caso C: $P_0 = 100$, $Q_0 = 600$

$$\begin{aligned} P_1 &= 100 - 0{,}1(600 - 500) = 90 \\ Q_1 &= 600 + 0{,}2(100 - 100) = 600 \\ P_2 &= 90 - 0{,}1(600 - 500) = 80 \\ Q_2 &= 600 + 0{,}2(90 - 100) = 598 \\ P_3 &= 80 - 0{,}1(598 - 500) = 70{,}2 \\ Q_3 &= 598 + 0{,}2(80 - 100) = 594 \end{aligned}$$

Preço vai caindo, quantidade também começa a cair.
Conclusão: Sistema retorna lentamente ao equilíbrio.

Caso D: $P_0 = 100$, $Q_0 = 400$

$$\begin{aligned}
P_1 &= 100 - 0{,}1(400 - 500) = 110 \\
Q_1 &= 400 + 0{,}2(100 - 100) = 400 \\
P_2 &= 110 - 0{,}1(400 - 500) = 120 \\
Q_2 &= 400 + 0{,}2(110 - 100) = 402 \\
P_3 &= 120 - 0{,}1(402 - 500) = 129{,}8 \\
Q_3 &= 402 + 0{,}2(120 - 100) = 406
\end{aligned}$$

Preço e quantidade estão subindo juntos, afastando-se do equilíbrio.
Conclusão: Pode levar a oscilações crescentes ou retorno lento, dependendo da dinâmica.

Forma Matricial

O sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n \\ Q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Análise de Estabilidade

A matriz do sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico é:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 + 0{,}02 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i\sqrt{0{,}02}$$

Os autovalores são complexos com módulo:

$$|\lambda| = \sqrt{1^2 + 0{,}02} = \sqrt{1{,}02} \approx 1{,}01 > 1$$

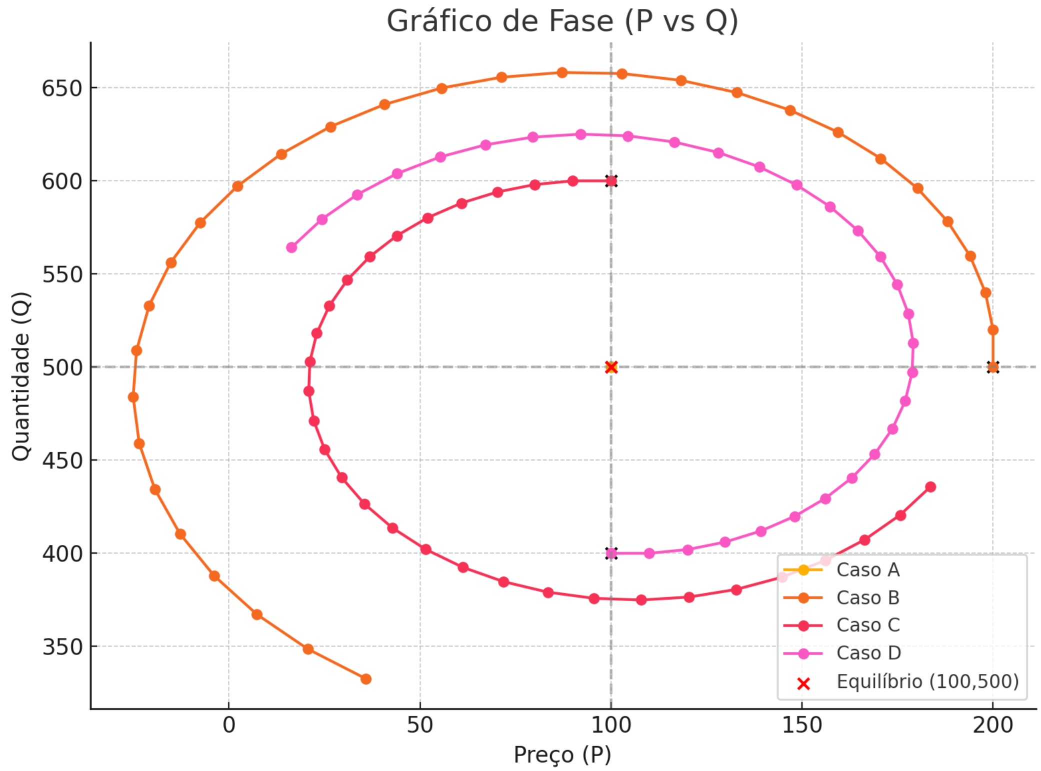
Portanto, o ponto de equilíbrio é **instável**, com comportamento oscilatório e divergente (espiral).

Simulações Numéricas

Foram simulados quatro casos com as seguintes condições iniciais:

Caso	P_0	Q_0
A	100	500
B	200	500
C	100	600
D	100	400

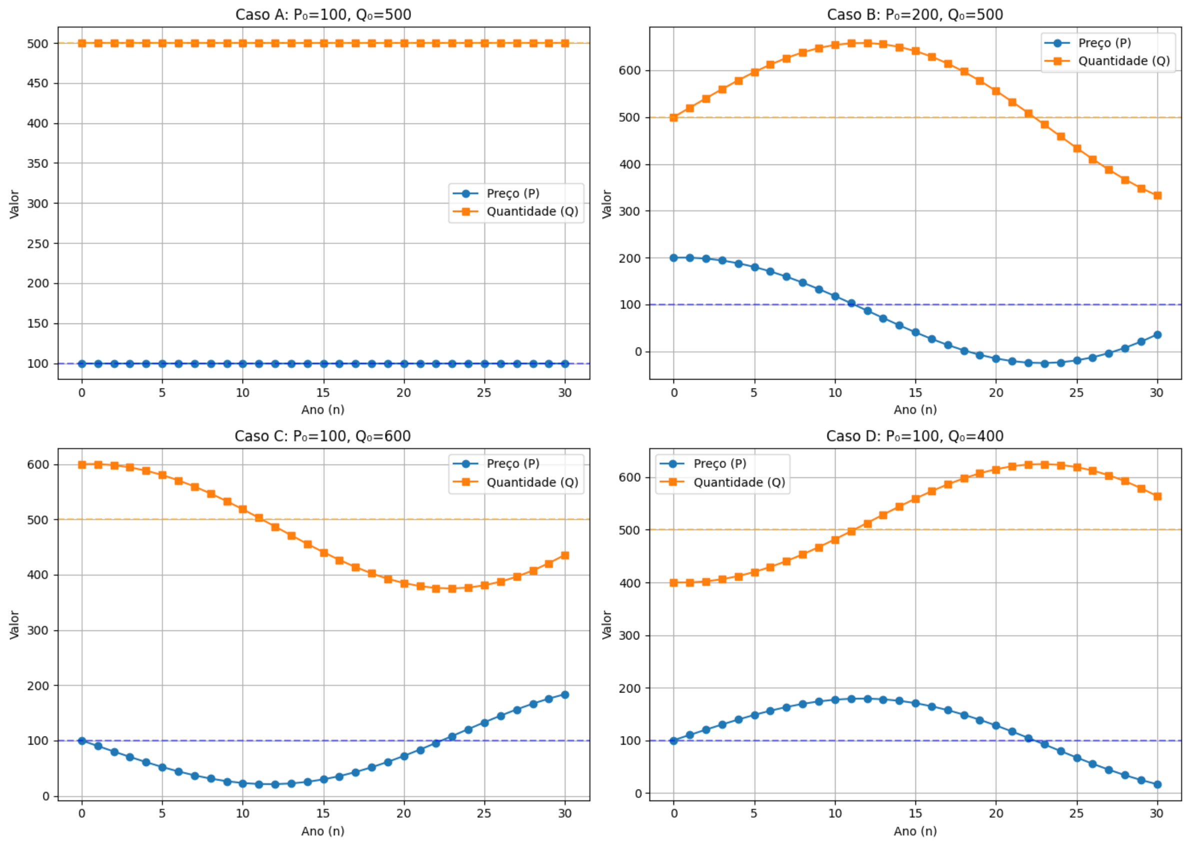
O caso A permanece constante, pois inicia no ponto de equilíbrio. Os demais casos apresentam oscilações crescentes, confirmando a instabilidade.



Observação: a figura acima representa as trajetórias no plano (P_n, Q_n). *O ponto de equilíbrio* $(100, 500)$ *é marcado como referência.*

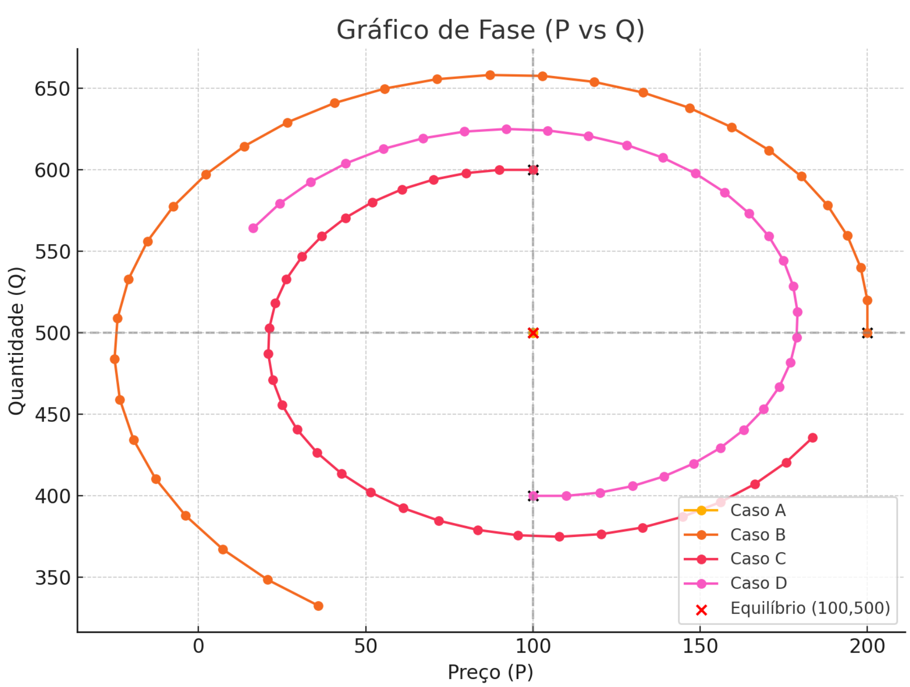
]

Simulações Numéricas (Gráficos)



As curvas mostram a convergência de P e Q para o equilíbrio $(100, 500)$ em todos os casos testados.

Gráfico de Fase (P vs Q)



O gráfico de fase acima mostra a evolução conjunta de preço (P) e quantidade (Q) para os diferentes casos iniciais. As trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio $(P^*, Q^*) = (100, 500)$, evidenciando a estabilidade do sistema dinâmico.

O ponto vermelho indica o equilíbrio, e os marcadores "x"são os pontos iniciais de cada trajetória.