Equações de Diferença Lineares de Ordem 1 e 2

Notas de aula

Sumário

1 Equações de diferença lineares de primeira ordem

Considere uma equação de diferença linear de primeira ordem da forma:

$$x_{n+1} = ax_n + b, \tag{1}$$

onde a e b são constantes reais, e x_n representa a sequência de interesse.

A solução geral é

$$x(n) = \begin{cases} x_0 + bn & \text{se } a = 1 \\ x_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a} & \text{se } a \neq 1. \end{cases}$$

Caso $a = a(n)$ e $b = b(n)$ a solução geral é

$$x(n) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i s_i}$$

onde s_i é a solução da parte homogênea $x_{n+1} = ax_n$.

1.1 Ponto de equilíbrio

Um ponto de equilíbrio, ou ponto fixo, x^* é um valor constante tal que, se $x_n = x^*$ para algum n, então $x_{n+1} = x^*$. Ou seja, a sequência permanece constante ao longo do tempo. No caso homogêneo linear, frequentemente $x^* = 0$.

Para determinar x^*, resolvemos:

$$x^* = ax^* + b. \tag{2}$$

Reorganizando:

$$x^*(1-a) = b \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{b}{1-a}, \quad \text{desde que } a \neq 1. \tag{3}$$

1.1.1 Convergência

A convergência de uma solução $x(n)$ de uma equação de diferença de ordem 1 refere-se ao comportamento da sequência à medida que $n \to \infty$. Diz-se que a solução converge para um ponto x^* se

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = x^*.$$

Se a sequência gerada pela iteração converge, o limite é um ponto fixo da função.

1.1.2 Estabilidade

Dizemos que um ponto de equilíbrio é *estável* se soluções que começam próximas a ele permanecem próximas todo tempo. Se, além disso, elas convergem para o equilíbrio, ele é *assintoticamente estável*.

- **Estabilidade:** Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x(0) - x^*| < \delta$, então $|x(n) - x^*| < \varepsilon, \quad \forall n \geq 0$.
- **Estabilidade assintótica:** Além da estabilidade, tem-se $\lim_{n\to\infty} x(n) = x^*$.

Seja x^* ponto de equilíbrio. A estabilidade de x^* está relacionada ao comportamento da sequência x_n quando perturbada ligeiramente. Definimos a perturbação como $e_n = x_n - x^*$. Substituindo na equação original:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= ax_n + b = a(x^* + e_n) + b = ax^* + ae_n + b \\
&= x^* + ae_n \quad (\text{pois } x^* \text{ satisfaz } x^* = ax^* + b) \\
\Rightarrow e_{n+1} &= x_{n+1} - x^* = ae_n.
\end{aligned}$$

Portanto, a perturbação evolui segundo:

$$e_n = a^n e_0. \tag{4}$$

Uma equação de recorrência é estável se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|x_0 - y_0| < \delta \Rightarrow |n(n) - y(n)| < \varepsilon$, i.e., pequenas perturbações na condição inicial não causam crescimento assintoticamente indefinido na solução (perturbações iniciais pequenas geram diferenças pequenas em todas as iterações).

Critério de estabilidade:

- Se $|a| < 1$, então $e_n \to 0$ quando $n \to \infty$: o ponto de equilíbrio é **assintoticamente estável**.
- Se $|a| = 1$, então e_n não converge a zero: o ponto de equilíbrio é **neutro ou instável**, dependendo do valor de e_0, a estabilidade é marginal.
- Se $|a| > 1$, então $e_n \to \infty$ ($x(n)$ diverge); o ponto de equilíbrio é **instável**.

2 Equações de diferença lineares de segunda ordem

Consideramos equações de diferença lineares, homogêneas, com coeficientes constantes, de ordem 2:

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0, \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Nesse caso, não é difícil verificar que valem:

1. *Se $A, r \in \mathbb{R}$ então $x(n) = Ar^n$ é solução.*
2. *Se $f(n)$, $g(n)$ são soluções então $f(n) + g(n)$ é solução.*

2.1 Equação característica

Buscamos soluções da forma $x_n = r^n$. Isso leva à equação característica:

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{6}$$

As raízes dessa equação determinam a forma geral da solução.

Polinômio característico Queremos reescrever a equação (5) como um sistema de equações de primeira ordem. Definimos as variáveis auxiliares:

$$y_n = x_n, \quad z_n = x_{n+1}.$$

Com isso, obtemos:

$$y_{n+1} = z_n,$$

e, substituindo na equação original:

$$z_{n+1} = -az_n - by_n.$$

Assim, o sistema equivalente de primeira ordem é:

$$\begin{cases} y_{n+1} = z_n, \\ z_{n+1} = -az_n - by_n. \end{cases} \tag{7}$$

Forma Matricial Podemos expressar esse sistema em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Denotando

$$\boldsymbol{u}_n = \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix},$$

o sistema é compactamente escrito como:

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = A\boldsymbol{u}_n.$$

Iterando obtemos

$$\boldsymbol{u}_n = A^n \boldsymbol{u}_0.$$

A matriz A é chamada de **matriz Jacobiana** do sistema. O polinômio característico da matriz A é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + a\lambda + b. \tag{9}$$

ou seja, o polinômio da equação característica (6).

Estabilidade A estabilidade do sistema é determinada pelos autovalores da matriz A, que são as raízes do polinômio característico:

- Se todos os autovalores satisfazem $|\lambda| < 1$, o ponto de equilíbrio (a origem) é **assintoticamente estável**.
- Se algum autovalor satisfaz $|\lambda| > 1$, o sistema é **instável**.
- Se todos os autovalores satisfazem $|\lambda| \leq 1$ e os autovalores com $|\lambda| = 1$ são simples (não repetidos), o sistema é **estável** (mas não necessariamente assintoticamente estável).

Dependendo do sinal de $\Delta = a^2 - 4b$, as formas canônicas de Jordan (ou diagonalização) de A, que são úteis para calcular a potência A^n, são:

- $\Delta > 0$: dois autovalores reais distintos $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{\Delta})$. Nesse caso A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$:

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ de modo que } A^n = P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} P$$

  onde P é a matriz cujas colunas são os autovetores associados a λ_1 e λ_2 e $\sim$ é para semelhança de matriz.

- $\Delta = 0$: um autovalor real (com multiplicidade 2) $\lambda = -\frac{1}{2}a$.

  Se A for diagonalizável, ou seja, o sistema linear $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem conjunto solução de dimensão 2, então $A = \lambda I$ e, imediatamente, $A^n = (\lambda I)^n = \lambda^n I$. Senão, *se A não for diagonalizável* temos (forma de Jordan)

$$A \sim J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

  onde $J = \lambda I + N$ e $N^k = 0$ para todo $k \geq 2$. Então

$$J^n = (\lambda I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k = \lambda^n I + n\,\lambda^{n-1} N.$$

  Como $N = J - \lambda I$, concluímos

$$J^n = \lambda^n I + n\,\lambda^{n-1}(J - \lambda I).$$

  Voltando à matriz A, usando $A = PJP^{-1}$, obtemos, usando que $J^n = \lambda^n \begin{bmatrix} 1 & n/\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A^n &= P\,J^n\,P^{-1} = P\left(\lambda^n I + n\,\lambda^{n-1}(J - \lambda I)\right)P^{-1} \\ &= \lambda^n (PIP^{-1}) + n\lambda^{n-1}(PNP^{-1}) \\ &= \lambda^n I + n\,\lambda^{n-1}(A - \lambda I). \end{aligned}$$

  Em outras palavras,

$$\boxed{A^n = \lambda^n I \; + \; n\,\lambda^{n-1}\big(A - \lambda I\big),}$$

- $\Delta < 0$: autovalores complexos conjugados $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\quad \alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. Não é possível diagonalização em $\mathbb{R}$, mas há forma de Jordan (bloco de rotação–dilatação); A é semelhante a um bloco de rotação–dilatação $A = PJP^{-1}$:

$$A \sim J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

  Define-se $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{b}$ e $\theta = \arctan\!\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ com $\theta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

θ é tal que $\alpha = r\cos\theta$ e $\beta = r\sin\theta$ assim, podemos reescrever

$$J = r\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = rR(\theta)$$

onde $R(\theta)$ é a matriz de rotação de ângulo θ.

Queremos calcular $A^n = P^{-1}J^nP$. Usando as propriedades de potências de matrizes, temos:

$$J^n = (rR(\theta))^n = r^n(R(\theta))^n = r^nR(n\theta)$$

pois $R(\theta)$ é uma matriz de rotação, disso temos $(R(\theta))^n = R(n\theta)$, pois a composição de n rotações de θ é uma rotação de $n\theta$.

Finalmente,

$$A^n = (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1} = P\begin{bmatrix}r^n\cos(n\theta) & -r^n\sin(n\theta) \\ r^n\sin(n\theta) & r^n\cos(n\theta)\end{bmatrix}P^{-1}.$$

2.2 Tipos de soluções e estabilidade

De modo mais pragmático, podemos resumir caso a caso a descrição anterior do seguinte modo de acordo coma as raízes da equação característica

$$r^2 + ar + b = 0.$$

2.2.1 Raízes reais e distintas: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

A solução geral é

$$x(n) = A_1r_1^n + A_2r_2^n$$

com A_1 e A_2 determinados pelas condições iniciais x_0 e x_1

$$\begin{cases} A_1 + A_2 & = x_0 \\ A_1r_1 + A_2r_2 & = x_1 \end{cases} \tag{10}$$

- Se $|r_1| < 1$ e $|r_2| < 1$: solução converge para o ponto de equilíbrio, o sistema é **assintoticamente estável**.
- Se algum $|r_i| > 1$: solução diverge, cresce exponencialmente, o sistema é **instável**.
- Se algum $|r_i| = 1$, o sistema é **liminarmente estável**, e a solução pode ser limitada mas não converge.

2.2.2 Raízes reais e iguais: $r_1 = r_2 = r$

$$x(n) = (A_1 + A_2n)r^n$$

com A_1 e A_2 determinados pelas condições inicias x_0 e x_1

$$\begin{cases} A_1 & = x_0 \\ A_1 + A_2r & = x_1 \end{cases} \tag{11}$$

- Se $|r| < 1$: decaimento para ponto de equilíbrio, temos **estabilidade assintótica**.
- Se $|r| = 1$: crescimento linear, a solução diverge $\Rightarrow$ **instável**.
- Se $|r| = 1$, o termo $n\lambda^n$ cresce em módulo: **instável**.

2.2.3 Raízes complexas conjugadas: $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$

Se o discriminante do polinômio característico $r^2+ar+b=0$ é negativo, as raízes são complexos conjugados

$$\alpha \pm \mathrm{i}\beta = r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta} = r(\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta)$$

com $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{b}$, $\alpha = r\cos\theta$, $\beta = r\sin\theta$ e $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. A solução ainda é $x(n) = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$ e pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
x(n) &= A_1(\alpha+\mathrm{i}\beta)^n + A_2(\alpha-\mathrm{i}\beta)^n \\
&= r^n \left(A_1(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n + A_2(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)^n\right) \\
&= b^{n/2} \left(A_1(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)) + A_2(\cos(n\theta) - \mathrm{i}\sin(n\theta))\right) \\
&= b^{n/2} \left((A_1+A_2)\cos(n\theta) + (A_1-A_2)\mathrm{i}\sin(n\theta)\right) \\
&= b^{n/2} \left((A_1+A_2)\cos(n\theta) + (A_1-A_2)\mathrm{i}\sin(n\theta)\right)
\end{aligned}$$

com A_1 e A_2 determinados pelas condições inicias $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, portanto $x_n \in \mathbb{R}$ para todo n. Para que a solução x_n seja real para todo n, impomos que A_2 é o conjugado de A_1.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 & = x_0 \\ A_1 r_1 + A_2 r_2 & = x_1 \end{cases}$$

de modo que do caso $n=0$ temos $A_1 + A_2 \in \mathbb{R}$. Além disso, $A_1 r + A_2 \bar{r} \in \mathbb{R}$ implica em $A_2 = \bar{A}_1$ (deixamos uma demonstração no final deste manuscrito. Assim

$$x(n) = b^{n/2} \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)$$

com $A, B \in \mathbb{R}$ constantes.

A solução é um termo oscilatório (cosseno e seno) multiplicado por r^n.

$$x(n) = r^n \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)$$

- Se $r < 1$: oscilações decrescentes (**assintoticamente estável**).
- Se $r = 1$: oscilações tem amplitude constante: o sistema é **estável** mas não assintoticamente estável (**estável marginalmente**).
- Se $r > 1$: oscilações crescentes (**instável**).

2.2.4 Critério de estabilidade

O ponto de equilíbrio x^* satisfaz $x^* + ax^* + bx^* = 0$ logo se $1 + a + b \neq 0$ então $x^* = 0$ é ponto de equilíbrio **estável assintoticamente** se as raízes da equação característica satisfazem:

$$|r_1| < 1 \quad \text{e} \quad |r_2| < 1 \text{ ou } |r| < 1.$$

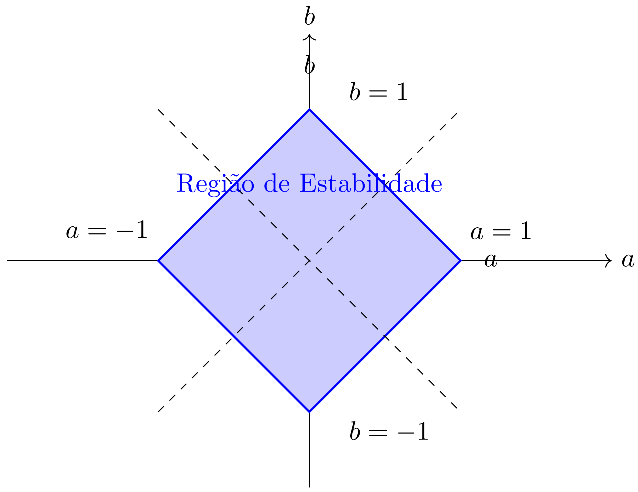
A região de estabilidade no plano (a, b) é caracterizada pelas seguintes condições simultâneas:

$$\begin{cases} |b| < 1, \\ |a| < 1 + b, \quad \text{se} \quad b \geq 0, \\ |a| < 1 - b, \quad \text{se} \quad b \leq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Geometricamente, a região é um losango (ou diamante) limitado pelas retas:

$$a = 1 + b, \quad a = -1 - b, \quad a = 1 - b, \quad a = -1 + b,$$

com $-1 < b < 1$.



3 Equações não homogênea de coeficientes constantes

Considere uma equação de diferença linear de segunda ordem na forma escalar:

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = b,$$

onde a_0, a_1 e b são constantes reais. Esse tipo de equação pode ser reescrito como um sistema de primeira ordem, o que facilita a análise. A forma matricial equivalente é

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}, \quad \text{com} \quad \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

Um ponto de equilíbrio $\boldsymbol{x}^*$ satisfaz:

$$\boldsymbol{x}^* = A\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad (I - A)\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}.$$

Se a matriz $(I - A)$ é invertível, então o ponto de equilíbrio é:

$$\boldsymbol{x}^* = (I - A)^{-1}\boldsymbol{b}.$$

No caso homogêneo ($b = 0$), como vimos, temos $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$.

A estabilidade é determinada pelos autovalores da matriz A, que são as raízes do polinômio característico da equação:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Denotando as raízes por λ_1 e λ_2, temos os seguintes casos:

- **Estável:** se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$, todas as soluções convergem para o ponto de equilíbrio.
- **Instável:** se pelo menos um dos autovalores tem módulo maior que 1.
- **Liminarmente estável:** se $|\lambda_i| \leq 1$ para ambos, mas algum tem módulo exatamente 1. Neste caso, a estabilidade depende da natureza do autovalor (simples ou múltiplo) e da solução.
- **Oscilações:** ocorrem quando os autovalores são complexos, ou seja, a equação tem solução com termos oscilatórios (como seno e cosseno).

4 Sistemas de equações de ordem 1

Vimos que a equação de diferença linear homogênea com coeficientes constantes $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ é equivalente a ao sistema

$$\begin{cases} y_{n+1} = z_n, \\ z_{n+1} = -az_n - by_n. \end{cases} \tag{13}$$

Por outro lado, dado sistema de equações lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} y_{n+1} = a_{11}y_n + a_{12}z_n, \\ z_{n+1} = a_{21}y_n + a_{22}z_n, \end{cases} \tag{14}$$

tomamos $z_n = \frac{1}{a_{12}}(y_{n+1} - a_{11}y_n)$, assumindo $a_{12} \neq 0$, avançamos um passo na 1ª equação

$$y_{n+2} = a_{11}y_{n+1} + a_{12}z_{n+1}$$

e substituímos z_{n+1} usando a segunda equação de (14), $z_{n+1} = a_{21}y_n + a_{22}z_n$ onde o z_n é substituído pela expressão já obtida acima

$$z_{n+1} = a_{21}y_n + a_{22} \cdot \frac{1}{a_{12}}(y_{n+1} - a_{11}y_n).$$

Com isso temos:

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= a_{11}y_{n+1} + a_{12}z_{n+1} \\ &= a_{11}y_{n+1} + a_{12}\left[a_{21}y_n + \frac{a_{22}}{a_{12}}(y_{n+1} - a_{11}y_n)\right] \\ &= a_{11}y_{n+1} + a_{12}a_{21}y_n + a_{22}(y_{n+1} - a_{11}y_n) \\ &= (a_{11} + a_{22})y_{n+1} + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})y_n. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a equação de segunda ordem:

$$y_{n+2} - (a_{11} + a_{22})y_{n+1} - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})y_n = 0. \tag{15}$$

Novamente, o polinômio característico da matriz do sistema

$$p(r) = \det(rI - A) = r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$

coincide com o polinômio característico da equação de segunda ordem (15).

O sistema linear na forma matricial é escrito como

$$\mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n, \quad \text{onde } \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Um vetor $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^2$ é **ponto de equilíbrio** do sistema se $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n = \mathbf{u}^*$. Substituindo na equação do sistema:

$$\mathbf{u}^* = A\mathbf{u}^* \quad \Rightarrow \quad (I - A)\mathbf{u}^* = \mathbf{0}.$$

No caso homogêneo (sem termo constante), o único ponto de equilíbrio é:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{0}, \quad \text{se } \det(I - A) = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Para sistemas lineares do tipo $\mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n$, a estabilidade da origem é determinada pelos autovalores λ_1, λ_2 da matriz A:

- A origem é **assintoticamente estável** se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$.
- A origem é **instável** se ao menos um autovalor tem módulo > 1.
- A origem é **estável (não assintótica)** se todos os autovalores têm módulo ≤ 1 e os de módulo 1 são simples (não-defeituosos).

Assim, a análise de convergência (ou seja, $\mathbf{u}_n \to 0$) se reduz ao estudo espectral da matriz A.

4.1 Exemplo: Distribuição de carros entre São Paulo e Rio de Janeiro

Uma locadora de veículos possui filiais em São Paulo e no Rio de Janeiro, e atende agências de turismo cujos clientes frequentemente retiram o carro em uma cidade e o devolvem na outra. Os itinerários podem começar em qualquer uma das cidades, e a empresa deseja determinar quanto cobrar pela conveniência da devolução em local diferente da retirada.

Para isso, é necessário saber se o fluxo natural de devoluções garante um número suficiente de veículos em cada cidade para atender à demanda, ou se será necessário transportar carros entre cidades — o que implica custos adicionais.

Segundo registros históricos, 60% dos carros alugados em São Paulo são devolvidos na mesma cidade, e 40% no Rio. Já dos carros alugados no Rio de Janeiro, 70% retornam ao Rio, e 30% vão para São Paulo.

Essas informações são representadas graficamente na Figura 1.

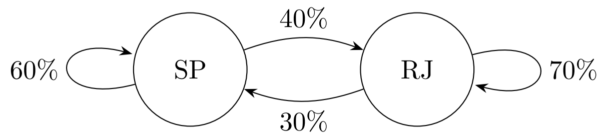


Figura 1: Transições de devolução de veículos entre São Paulo e Rio de Janeiro

Vamos desenvolver um modelo para o sistema. Seja n o número de dias úteis. Definimos:

$$\begin{aligned} S_n &= \text{número de carros em São Paulo no final do dia } n, \\ R_n &= \text{número de carros no Rio de Janeiro no final do dia } n. \end{aligned}$$

Assim, os registros históricos revelam o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 0{,}6S_n + 0{,}3R_n, \\ R_{n+1} &= 0{,}4S_n + 0{,}7R_n. \end{aligned}$$

4.1.1 Valores de Equilíbrio

Os valores de equilíbrio para o sistema são aqueles valores de S_n e R_n para os quais não ocorre mudança no sistema. Vamos chamar os valores de equilíbrio, se existirem, de S e R, respectivamente. Então, temos $S = S_{n+1} = S_n$ e $R = R_{n+1} = R_n$ simultaneamente.

Substituindo no modelo, obtemos:

$$\begin{aligned} S &= 0{,}6S + 0{,}3R, \\ R &= 0{,}4S + 0{,}7R. \end{aligned}$$

Ou, em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe que $\det(I - A) = (0{,}4)(0{,}3) - (-0{,}3)(-0{,}4) = 0{,}12 - 0{,}12 = 0$, o que implica que o sistema possui infinitos pontos de equilíbrio diferentes de zero.

Este sistema é satisfeito sempre que $S = \frac{3}{4}R$, ou seja, o conjunto dos pontos de equilíbrio é $R(\frac{3}{4}, 1)$ para $R \in \mathbb{R}$. Por exemplo, se a empresa possuir 7000 carros e começar com 3000 em São Paulo e 4000 no Rio de Janeiro, então o modelo prevê:

$$\begin{aligned} S_1 &= 0{,}6 \cdot 3000 + 0{,}3 \cdot 4000 = 3000, \\ R_1 &= 0{,}4 \cdot 3000 + 0{,}7 \cdot 4000 = 4000. \end{aligned}$$

Assim, o sistema permanece em $(S, R) = (3000, 4000)$ se iniciarmos com esses valores.

4.1.2 Iterações com Condições Iniciais Diferentes

Vamos agora explorar o que acontece se começarmos com valores diferentes dos de equilíbrio. Iteramos o sistema para os seguintes quatro conjuntos de condições iniciais:

Caso	**São Paulo**	**Rio de Janeiro**
1	7000	0
2	5000	2000
3	2000	5000
4	0	7000

Uma solução numérica, ou tabela de valores, para cada conjunto de valores iniciais é mostrada na Figura correspondente (Figura 1.23 no original).

4.1.3 Sensibilidade às Condições Iniciais e Comportamento em Longo Prazo

Em cada um dos quatro casos, dentro de uma semana o sistema está muito próximo do valor de equilíbrio (3000, 4000), mesmo na ausência de qualquer carro em um dos dois locais. Nossos resultados sugerem que o valor de equilíbrio é estável e insensível aos valores iniciais.

Com base nessas explorações, somos levados a prever que o sistema se aproxima do equilíbrio em que $\frac{3}{7}$ da frota acaba em São Paulo e os $\frac{4}{7}$ restantes no Rio de Janeiro. Essa informação é útil para a empresa: conhecendo os padrões de demanda em cada cidade, a empresa pode estimar quantos carros precisa transportar.

Na lista de exercícios, pedimos que você explore o sistema para determinar se ele é sensível aos coeficientes nas equações para S_{n+1} e R_{n+1}.

Tabela 1: Evolução da Frota - Caso 1

n	S_n	R_n
0	7000	0
1	4200	2800
2	3360	3640
3	3108	3892
4	3032.4	3967.6
5	3009.72	3990.28
6	3002.916	3997.084
7	3000.875	3999.125

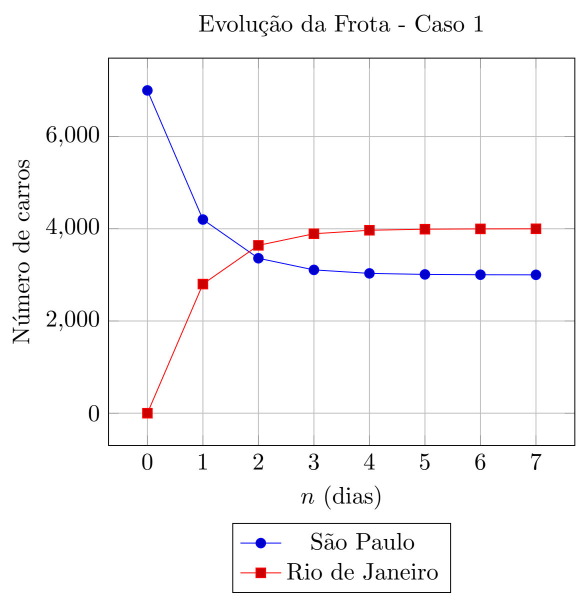


Tabela 2: Evolução da Frota - Caso 2

n	S_n	R_n
0	5000	2000
1	3600	3400
2	3180	3820
3	3054	3946
4	3016.2	3983.8
5	3004.86	3995.14
6	3001.458	3998.542
7	3000.437	3999.563

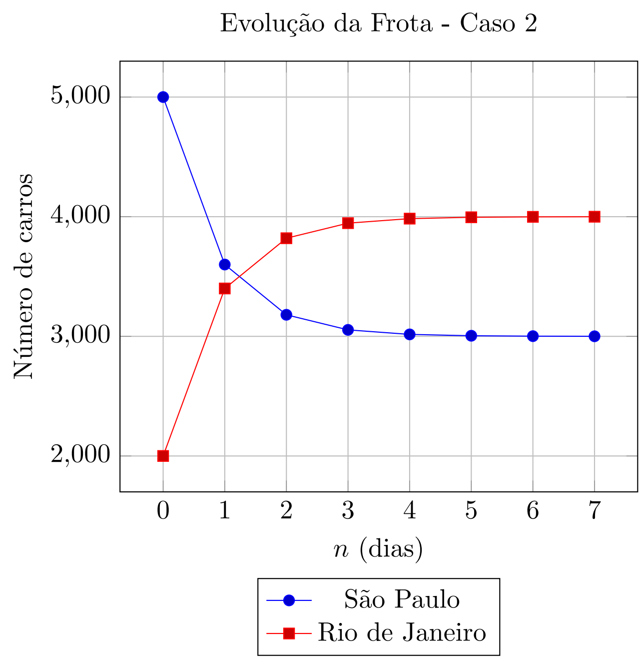


Tabela 3: Evolução da Frota - Caso 3

n	S_n	R_n
0	2000	5000
1	2700	4300
2	2910	4090
3	2973	4027
4	2991.9	4008.1
5	2997.57	4002.43
6	2999.271	4000.729
7	2999.781	4000.219

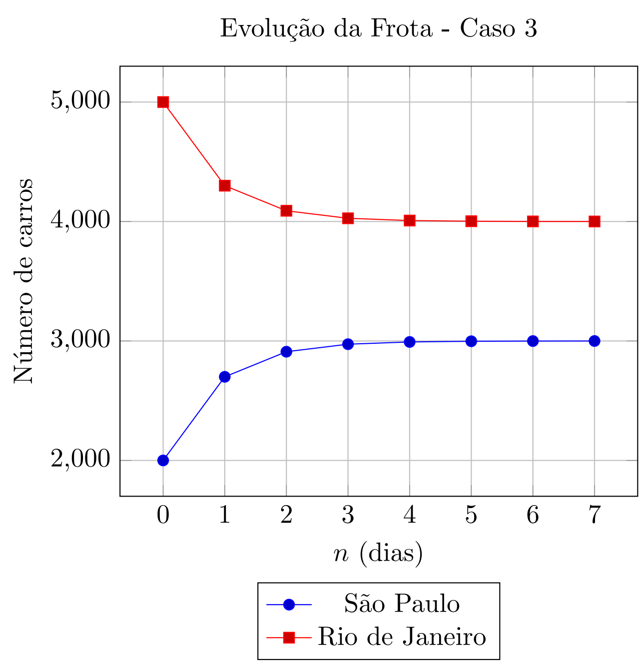
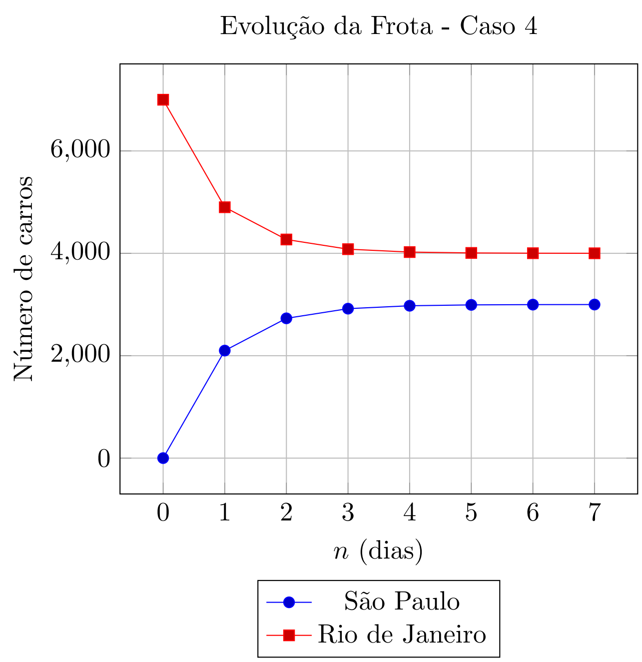


Tabela 4: Evolução da Frota - Caso 4

n	S_n	R_n
0	0	7000
1	2100	4900
2	2730	4270
3	2919	4081
4	2975.7	4024.3
5	2992.71	4007.29
6	2997.813	4002.187
7	2999.344	4000.656



4.2 Exemplo: Modelo Discreto de Epidemias

Considere uma doença que está se espalhando, como uma nova gripe. O governo está interessado em estudar e experimentar um modelo para essa nova doença antes que ela se torne de fato uma epidemia. Vamos considerar a população dividida em três categorias: suscetíveis (S), infectados (I) e removidos (R). O modelo considerado é conhecido como SIR[1]. Fazemos as seguintes suposições para nosso modelo:

- Ninguém entra ou sai da comunidade e não há contato com o exterior.
- Cada pessoa está em um dos três estados: suscetível S (pode pegar a gripe), infectado I (tem a gripe e pode transmiti-la), ou removido R (já teve a gripe e não pode pegá-la novamente, incluindo os casos de óbito).
- Inicialmente, cada pessoa está em S ou I.
- Uma vez que alguém pega a gripe neste ano, não pode pegá-la novamente.
- A duração média da doença é de 5/3 semanas ($1\frac{2}{3}$ semana), durante a qual a pessoa é considerada infectada e pode transmitir a doença.
- O período de tempo do modelo é semanal.

Além disso, a duração da doença é 5/3 semanas.

Definimos as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} S_n &= \text{número de suscetíveis após o período } n \\ I_n &= \text{número de infectados após o período } n \\ R_n &= \text{número de removidos após o período } n \end{aligned}$$

e começamos modelando R_n. A *taxa de remoção* γ é a proporção de infetados removidos em um período, $\Delta R = \gamma I_n$, ou seja, é a proporção que indica qual fração das pessoas infectadas sai da categoria "infectado" em um período de tempo,

$$R_{n+1} = R_n + \gamma \cdot I_n$$

e se D é a duração média da infecção então $D\gamma = 1$. No nosso exemplo $\gamma = 3/5 = 0{,}6$, ou seja, 60% dos infectados deixam de ser infectados a cada semana.

A *taxa de transmissão* β mede a velocidade com que a doença se espalha na população, ela representa a probabilidade de um contato entre um suscetível e um infectado resultar em infecção por unidade de tempo, assim o número esperado de novas infecções

$$\Delta S = -\beta S_n I_n.$$

O termo de novos infectados por semana é ΔI: $\beta S_n I_n$, em cada semana, cada par suscetível–infectado tem uma chance de aproximadamente β de resultar em nova infecção diminuída da remoção dos infectados γI_n

$$\Delta I = (\beta S_n - \gamma) I_n \tag{16}$$

se $\beta S_n > \gamma$ a doença tende a se espalhar e se se $\beta S_n < \gamma$ tende a desaparecer. Assumimos inicialmente que β é constante e pode ser estimada a partir das condições iniciais[2]

Observação $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} S_0$ define o *número básico de reprodução*, que mede o potencial de disseminação da doença: Se $R_0 > 1$, a doença tende a se espalhar; se $R_0 < 1$, a epidemia tende a desaparecer. No início $R_0 \approx (\beta/\gamma)N$. Nesse caso, **o isolamento social (quarentena) diminui o β que, por sua vez, faz diminuir o R_0.**

[1] os parâmetros do modelo SIR são de difícil obtenção. É necessário equipes interdisciplinares para fazer tratamento de dados.

[2] Por exemplo, se $I(0) = 5$ e $S(0) = 995$, e $I(1) = 9$, temos: $I(1) = I(0) - 0{,}6 \cdot I(0) + a \cdot I(0) \cdot S(0) \Rightarrow \beta = 0{,}001407$

Nosso modelo é então:

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n + 0{,}6I_n \\ I_{n+1} = I_n - 0{,}6I_n + 0{,}001407 I_n S_n \\ S_{n+1} = S_n - 0{,}001407 S_n I_n \end{cases}$$

com condições iniciais: $I(0) = 5, \quad S(0) = 995, \quad R(0) = 0.$

Esse sistema SIR pode ser resolvido iterativamente e analisado graficamente para compreender o comportamento da epidemia.

Semana (n)	S_n	I_n	R_n
0	995.000000	5.000000	0.000000
1	988.000175	8.999825	3.000000
2	975.489372	16.110733	8.399895
3	953.377173	28.556492	18.066335
4	915.071446	49.728324	35.200230
5	851.045954	83.916821	65.037225
6	750.562135	134.050548	115.387317
7	608.999271	195.183083	195.817646
8	441.754309	245.318195	312.927496
9	289.277198	250.604389	460.118413
10	187.277950	202.241004	610.481046
11	133.987430	134.186921	731.825649
12	108.690470	78.971729	812.337801
13	96.613521	43.665640	859.720839
14	90.677823	23.401955	885.920223
15	87.692115	12.346490	899.961396
16	86.168770	6.461940	907.369289
17	85.385328	3.368218	911.246454
18	84.980680	1.751936	913.267385
19	84.771205	0.910249	914.318546
20	84.662636	0.472668	914.864696
21	84.606332	0.245372	915.148296
22	84.577123	0.127358	915.295519
23	84.561967	0.066099	915.371934
24	84.554103	0.034304	915.411593
25	84.550022	0.017803	915.432176

Semana (n)	S_n	I_n	R_n
26	84.547904	0.009239	915.442857
27	84.546805	0.004795	915.448400
28	84.546235	0.002488	915.451277
29	84.545939	0.001291	915.452770
30	84.545785	0.000670	915.453545
31	84.545705	0.000348	915.453947
32	84.545664	0.000180	915.454156
33	84.545642	0.000094	915.454264
34	84.545631	0.000049	915.454320
35	84.545626	0.000025	915.454349
36	84.545623	0.000013	915.454364
37	84.545621	0.000007	915.454372
38	84.545620	0.000004	915.454376
39	84.545620	0.000002	915.454378
40	84.545620	0.000001	915.454379
41	84.545619	0.0000005	915.454380
42	84.545619	0.0000003	915.454380
43	84.545619	0.0000001	915.454381
44	84.545619	0.00000007	915.454381
45	84.545619	0.00000004	915.454381
46	84.545619	0.00000002	915.454381
47	84.545619	0.00000001	915.454381
48	84.545619	0.00000001	915.454381
49	84.545619	0.00000000	915.454381
50	84.545619	0.00000000	915.454381

Tabela 5: Evolução das variáveis do modelo SIR ao longo das semanas (tabela dividida).

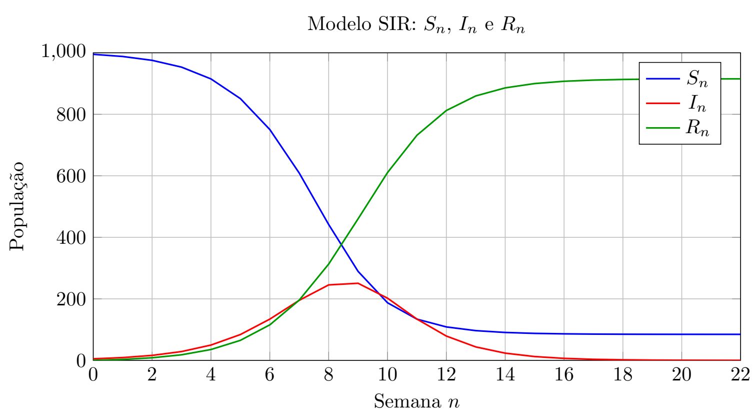


Figura 2: Evolução das populações Suscetível, Infectada e Removida ao longo do tempo.

4.2.1 Ponto de equilíbrio do modelo SIR discreto

O ponto de equilíbrio é um conjunto de valores (S^*, I^*, R^*) tal que, se o sistema atinge esses valores, ele permanece neles para sempre.

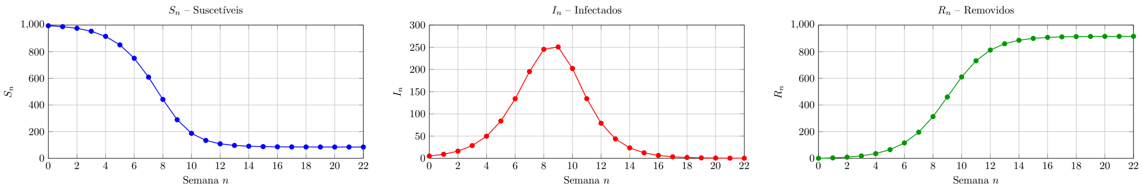


Figura 3: Evolução temporal de S_n, I_n e R_n com pontos marcados.

Conservação da população Como ninguém entra ou sai da comunidade (população fechada), temos: $S_n + I_n + R_n = N =$ constante.

Formalmente:

$$S_{n+1} = S_n = S^*, \quad I_{n+1} = I_n = I^*, \quad R_{n+1} = R_n = R^*$$

As equações do sistema SIR discreto são:

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - aS_nI_n \\ I_{n+1} = I_n - \gamma I_n + aS_nI_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n \end{cases}$$

No equilíbrio, temos:

$$\Delta S = -aS^*I^* = 0$$
$$\Delta I = -\gamma I^* + aS^*I^* = 0$$
$$\Delta R = \gamma I^* = 0$$

Portanto, a única solução é $I^* = 0$, ou seja, não há mais infectados. Assim, o ponto de equilíbrio é:

$$\boxed{(S^*, I^*, R^*) = (S^*,\ 0,\ N - S^*)}$$

com $0 \leq S^* \leq N$.

O sistema sempre converge para uma situação em que não há mais infectados e a população se divide entre os que nunca foram infectados (S^*) e os que foram infectados e se recuperaram ou morreram (R^*) O valor exato de S^* depende da dinâmica da epidemia, não necessariamente todos se infectam.

4.2.2 Estimativa de S^* (número de suscetíveis no final)

Queremos estimar S^*, o número final de pessoas que nunca foram infectadas. O número básico de reprodução é

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}N.$$

Com os valores do exemplo: $\beta = 0{,}001407$, $\gamma = 0{,}6$ e $N = 1000$

$$R_0 = \frac{0{,}001407 \cdot 1000}{0,6} = \frac{1{,}407}{0{,}6} \approx 2{,}345$$

Vamos relacionar diretamente S e R, eliminando I. Como a população total é constante $\Delta S_n + \Delta I_n + \Delta R_n = 0$ calculamos as variações:

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = -\beta S_n I_n$$
$$\Delta R_n = R_{n+1} - R_n = \gamma I_n$$

dividindo as duas expressões:

$$\frac{\Delta S_n}{\Delta R_n} = -\frac{\beta S_n I_n}{\gamma I_n} = -\frac{\beta}{\gamma}S_n$$

portanto

$$\frac{\Delta S_n}{S_n} = -\frac{\beta}{\gamma}R_n$$

somando ao longo do tempo (do estado inicial até o final T):

$$\sum_{n=0}^{T} \frac{\Delta S_n}{S_n} = -\frac{\beta}{\gamma} \sum_{n=0}^{T} \Delta R_n.$$

O lado direito aproximamos por uma integral $\int \frac{1}{S}\mathrm{d}S = \ln(S(T)) - \ln(S(0)) = \ln(S^*) - \ln(S_0)$, o lado direito é uma soma telescópica, o que leva a:

$$\ln S^* - \ln S_0 = -\frac{\beta}{\gamma}(R^* - R_0) = -\frac{\beta}{\gamma}(N - S^*)$$

pois $R_0 = 0$ e $R^* = N - S^*$. Concluindo

$$\boxed{\ln S^* = \ln(S_0) - \frac{\beta}{\gamma}(N - S^*)}$$

A equação acima relaciona o número final de suscetíveis S^* ao número inicial S_0, ela é uma equação *implícita* – não conseguimos isolar S^* de forma analítica –, por isso, para encontrar S^*, devemos recorrer a métodos *numéricos* ou *gráficos*. Contudo, uma boa aproximação prática quando $R_0 > 1$ é:

$$S^*/N \approx e^{-R_0 \cdot (1 - S^*/N)}$$

Com $R_0 \approx 2,345$, é esperado que aproximadamente 15% da população permaneça suscetível. No nosso exemplo, com $N = 1000$, temos:

$$\frac{S^*}{N} \approx \frac{84,5}{1000} \text{(8,45\% da população)}$$

permanece suscetível.

A Coeficientes conjugados

Sejam $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$ tais que

$$A_1 + A_2 = a, \quad a \in \mathbb{R},$$

e

$$zA_1 + \bar{z}A_2 = b, \quad b \in \mathbb{R},$$

onde $z \in \mathbb{C}$ e $\bar{z}$ é o conjugado de z. Então A_1 e A_2 são conjugados um do outro.

Como $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$\overline{A_1 + A_2} = A_1 + A_2.$$

Analogamente, como $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$\overline{zA_1 + \bar{z}A_2} = zA_1 + \bar{z}A_2.$$

Expandindo o lado esquerdo:

$$\begin{aligned}\overline{zA_1 + \bar{z}A_2} &= \overline{zA_1} + \overline{\bar{z}A_2} \\ &= \bar{z}\,\overline{A_1} + z\,\overline{A_2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$zA_1 + \bar{z}A_2 = \bar{z}\,\overline{A_1} + z\,\overline{A_2}.$$

Agrupando os termos:

$$\begin{aligned}(zA_1 + \bar{z}A_2) - (\bar{z}\,\overline{A_1} + z\,\overline{A_2}) &= 0, \\ z(A_1 - \overline{A_2}) + \bar{z}(A_2 - \overline{A_1}) &= 0.\end{aligned}$$

Agora, como z e $\bar{z}$ são, em geral, linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$, concluímos que:

$$\begin{cases} A_1 - \overline{A_2} = 0, \\ A_2 - \overline{A_1} = 0. \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} A_1 = \overline{A_2}, \\ A_2 = \overline{A_1}. \end{cases}$$

Assim, A_1 e A_2 são conjugados um do outro.

Agora, $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$ e $\bar{z} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ não são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$ quando $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. O caso $\beta = 0$ implica em raiz real ($\Delta = 0$).

O caso $\alpha = 0$ ocorre quando $x_{n+2} + bx_n = 0$. A equação característica é

$$r^2 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = -b$$

Caso 1: $b > 0$ As raízes são $r = \pm i\sqrt{b}$. A solução geral é: $x_n = A\cos(\sqrt{b}\,n) + B\sin(\sqrt{b}\,n)$ onde A e B são constantes determinadas pelas condições iniciais.

Caso 2: $b < 0$ As raízes são reais: $r = \pm\sqrt{-b}$. A solução geral é: $x_n = A(\sqrt{-b})^n + B(-\sqrt{-b})^n$ que pode ser reescrita como $x_n = (\sqrt{-b})^n(A + B(-1)^n)$.

Caso 3: $b = 0$ A equação se reduz a $x_{n+2} = 0$, portanto, $x_2 = x_3 = x_4 = \cdots = 0$ e a solução é

$$x_n = \begin{cases} x_0, & \text{se } n = 0 \\ x_1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

B Exemplo: estabilidade de um sistema linear

Considere o sistema:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Neste caso, o vetor constante $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, então o ponto de equilíbrio é $\mathbf{0}$.

Para analisar a estabilidade, determinamos os autovalores de A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.5 - \lambda & 0.2 \\ 0 & 0.8 - \lambda \end{vmatrix} = (0.5 - \lambda)(0.8 - \lambda).$$

As raízes da equação característica são:

$$\lambda_1 = 0.5, \quad \lambda_2 = 0.8.$$

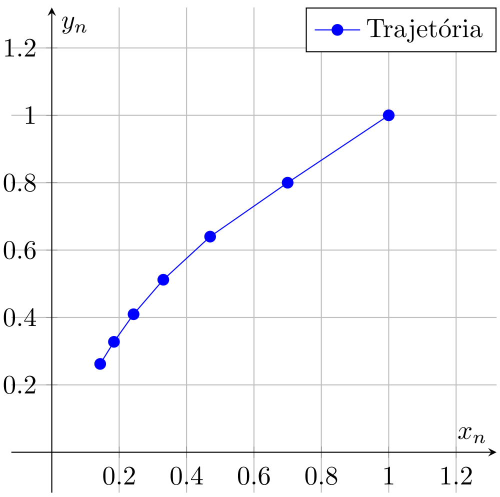
Como ambos os autovalores satisfazem $|\lambda| < 1$, o ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é **assintoticamente estável**.

Simulação de trajetória

Considere a condição inicial $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calculamos algumas iterações:

$$\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.5(0.7) + 0.2(0.8) \\ 0.8(0.8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.64 \end{bmatrix},$$

e assim por diante.



A trajetória converge para a origem, confirmando a **estabilidade assintótica** do sistema.

C Exemplo: sistema com autovalores complexos

Considere o sistema linear:

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n, \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Calculamos os autovalores resolvendo $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} 0.8-\lambda & -0.6 \\ 0.6 & 0.8-\lambda \end{bmatrix} = (0.8-\lambda)^2 + 0.36 = 0.$$

$$(0.8-\lambda)^2 = -0.36 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.8 \pm 0.6i.$$

Os autovalores são complexos conjugados com módulo:

$$|\lambda| = \sqrt{0.8^2 + 0.6^2} = \sqrt{0.64 + 0.36} = \sqrt{1} = 1.$$

Discussão da estabilidade Como $|\lambda| = 1$, o sistema tem soluções com comportamento oscilatório (devido à parte imaginária) e **não converge ao ponto de equilíbrio**. Como não há crescimento, o sistema é *estável no sentido de Lyapunov*, mas **não é assintoticamente estável**.

Se o módulo fosse um pouco menor que 1 (por exemplo, $\lambda = 0.9 \pm 0.4i$), o sistema seria assintoticamente estável com oscilação decrescente.

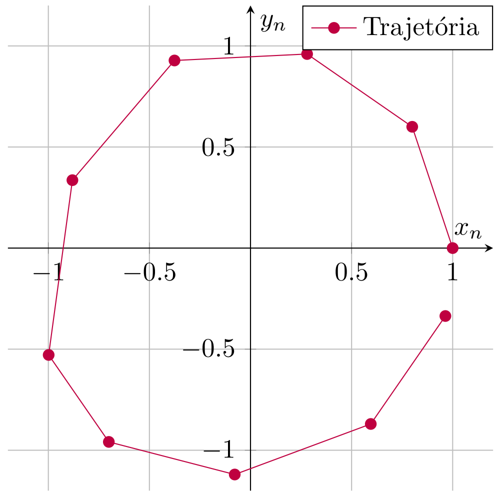
Simulação da trajetória

Seja a condição inicial:

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos iterar o sistema:

$$\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.8(0.8) - 0.6(0.6) \\ 0.6(0.8) + 0.8(0.6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.28 \\ 0.96 \end{bmatrix}, \text{etc.}$$



A trajetória gira em torno da origem com raio constante, formando uma órbita elíptica — típico de sistemas com autovalores complexos com $|\lambda| = 1$.

D Sistema com autovalores complexos e b $\neq$ 0

Considere o sistema de equações de diferença:

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}, \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Ponto de equilíbrio O ponto de equilíbrio $\boldsymbol{x}^*$ satisfaz:

$$\boldsymbol{x}^* = A\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad (I - A)\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}.$$

Calculamos $I - A$:

$$I - A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ -0.6 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \det(I - A) = 0.2^2 + 0.6^2 = 0.04 + 0.36 = 0.4.$$

A inversa é:

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0.4} \begin{bmatrix} 0.2 & -0.6 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1.5 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

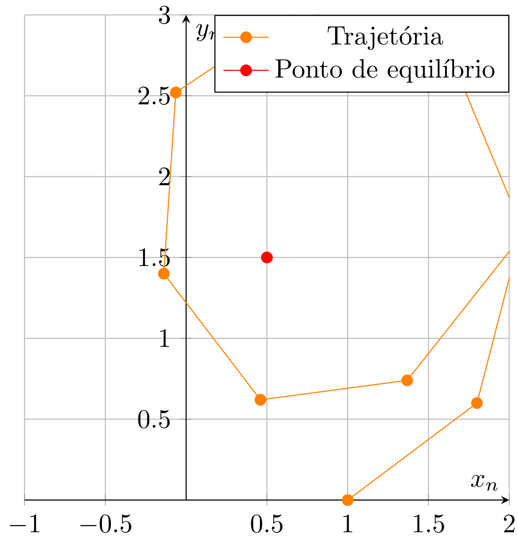
Logo:

$$\boldsymbol{x}^* = (I - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}.$$

Dinâmica da perturbação Se definirmos $\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}^*$, então a equação para a perturbação é:

$$\boldsymbol{e}_{n+1} = A\boldsymbol{e}_n,$$

isto é, a mesma equação homogênea do exemplo anterior. Portanto, a trajetória de $\boldsymbol{x}_n$ será uma espiral em torno do ponto de equilíbrio $\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$, com raio constante (já que $|\lambda| = 1$).



O sistema é **estável**, mas **não assintoticamente estável**.