

Sistemas de equações de diferenças

Enunciado

Um economista está interessado na variação do preço de um único produto. Observa-se que um preço elevado do produto no mercado atrai mais fornecedores. No entanto, o aumento da quantidade ofertada tende a reduzir o preço. Com o tempo, há uma interação entre preço e oferta. O economista propõe o seguinte modelo, onde P_n representa o preço no ano n , e Q_n representa a quantidade:

$$P_{n+1} = P_n - 0,1(Q_n - 500)$$

$$Q_{n+1} = Q_n + 0,2(P_n - 100)$$

- (a) O modelo faz sentido intuitivamente? Qual o significado das constantes 100 e 500? Explique o significado dos sinais $-0,1$ e $0,2$.
- (b) Teste as condições iniciais abaixo e descreva o comportamento de longo prazo:

Caso	P_0	Q_0
A	100	500
B	200	500
C	100	600
D	100	400

Resolução

(a) Interpretação do modelo

As equações do modelo são:

$$P_{n+1} = P_n - 0,1(Q_n - 500)$$

$$Q_{n+1} = Q_n + 0,2(P_n - 100)$$

O modelo faz sentido intuitivamente? Sim, o modelo reflete bem a lógica econômica básica de oferta e demanda:

- Quando o **preço sobe**, os produtores tendem a ofertar mais. Isso aparece na equação de Q_{n+1} , onde Q aumenta se $P_n > 100$.

A equação para o preço é:

$$P_{n+1} = P_n - 0,1(Q_n - 500)$$

- Se $Q_n > 500$, então $P_{n+1} < P_n$: excesso de oferta reduz o preço.
- Se $Q_n < 500$, então $P_{n+1} > P_n$: escassez aumenta o preço.
- Portanto, $Q = 500$ é a quantidade que mantém o preço estável.

- Quando a **oferta aumenta**, o excesso de produto no mercado tende a reduzir o preço. Isso aparece na equação de P_{n+1} , onde P diminui se $Q_n > 500$.

A equação para a quantidade é:

$$Q_{n+1} = Q_n + 0,2(P_n - 100)$$

- Se $P_n > 100$, então $Q_{n+1} > Q_n$: preço alto incentiva maior oferta.
- Se $P_n < 100$, então $Q_{n+1} < Q_n$: preço baixo desincentiva a oferta.
- Portanto, $P = 100$ é o preço que mantém a quantidade estável.

Significado das constantes 100 e 500

- 100: é o **preço de equilíbrio** — quando $P_n = 100$, a oferta não muda ($Q_{n+1} = Q_n$).
- 500: é a **quantidade de equilíbrio** — quando $Q_n = 500$, o preço não muda ($P_{n+1} = P_n$).

Significado dos sinais $-0,1$ e $+0,2$

- $-0,1$: indica que há uma **reação negativa do preço** ao excesso de oferta (preço cai se $Q_n > 500$).
- $+0,2$: indica que há uma **reação positiva da oferta** ao aumento de preço (quantidade aumenta se $P_n > 100$).

(b) Análise dos Casos

Ponto de equilíbrio (fixo): resolver o sistema

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n \Rightarrow Q_n = 500 \\ Q_{n+1} = Q_n \Rightarrow P_n = 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P^*, Q^*) = (100, 500)$$

Caso A: $P_0 = 100$, $Q_0 = 500$

$$P_1 = 100 - 0,1(500 - 500) = 100$$

$$Q_1 = 500 + 0,2(100 - 100) = 500$$

Esse par é um ponto fixo: o sistema permanece nele indefinidamente.

Conclusão: Equilíbrio estável.

Caso B: $P_0 = 200$, $Q_0 = 500$

$$P_1 = 200 - 0,1(500 - 500) = 200$$

$$Q_1 = 500 + 0,2(200 - 100) = 520$$

$$P_2 = 200 - 0,1(520 - 500) = 198$$

$$Q_2 = 520 + 0,2(200 - 100) = 540$$

$$P_3 = 198 - 0,1(540 - 500) = 194$$

$$Q_3 = 540 + 0,2(198 - 100) = 559,6$$

O preço começa alto e a quantidade cresce, mas o preço começa a cair, indicando tendência de retorno ao equilíbrio.

Conclusão: Sistema oscila, mas parece tender ao ponto fixo (100, 500).

Caso C: $P_0 = 100$, $Q_0 = 600$

$$P_1 = 100 - 0,1(600 - 500) = 90$$

$$Q_1 = 600 + 0,2(100 - 100) = 600$$

$$P_2 = 90 - 0,1(600 - 500) = 80$$

$$Q_2 = 600 + 0,2(90 - 100) = 598$$

$$P_3 = 80 - 0,1(598 - 500) = 70,2$$

$$Q_3 = 598 + 0,2(80 - 100) = 594$$

Preço vai caindo, quantidade também começa a cair.

Conclusão: Sistema retorna lentamente ao equilíbrio.

Caso D: $P_0 = 100, Q_0 = 400$

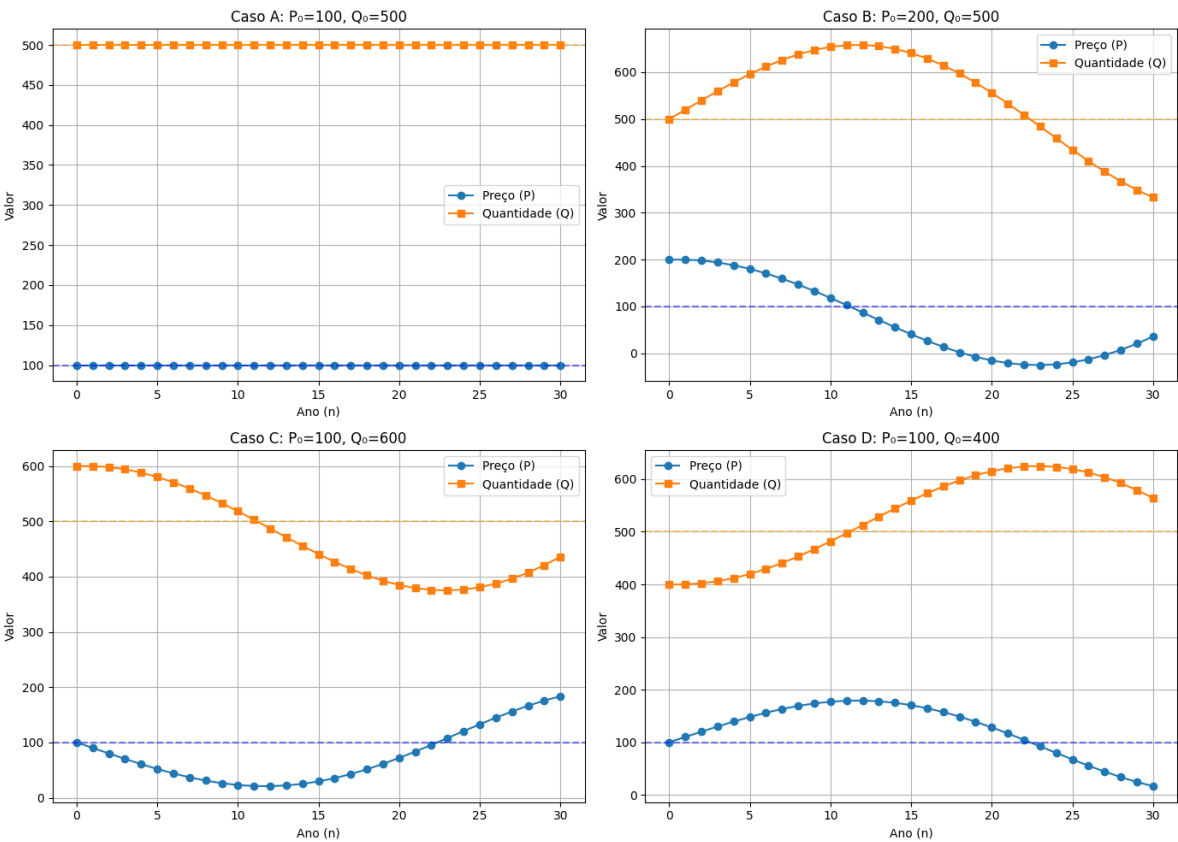
$$\begin{aligned}
 P_1 &= 100 - 0,1(400 - 500) = 110 \\
 Q_1 &= 400 + 0,2(100 - 100) = 400 \\
 P_2 &= 110 - 0,1(400 - 500) = 120 \\
 Q_2 &= 400 + 0,2(110 - 100) = 402 \\
 P_3 &= 120 - 0,1(402 - 500) = 129,8 \\
 Q_3 &= 402 + 0,2(120 - 100) = 406
 \end{aligned}$$

Preço e quantidade estão subindo juntos, afastando-se do equilíbrio.
Conclusão: Pode levar a oscilações crescentes ou retorno lento, dependendo da dinâmica.

Resumo:

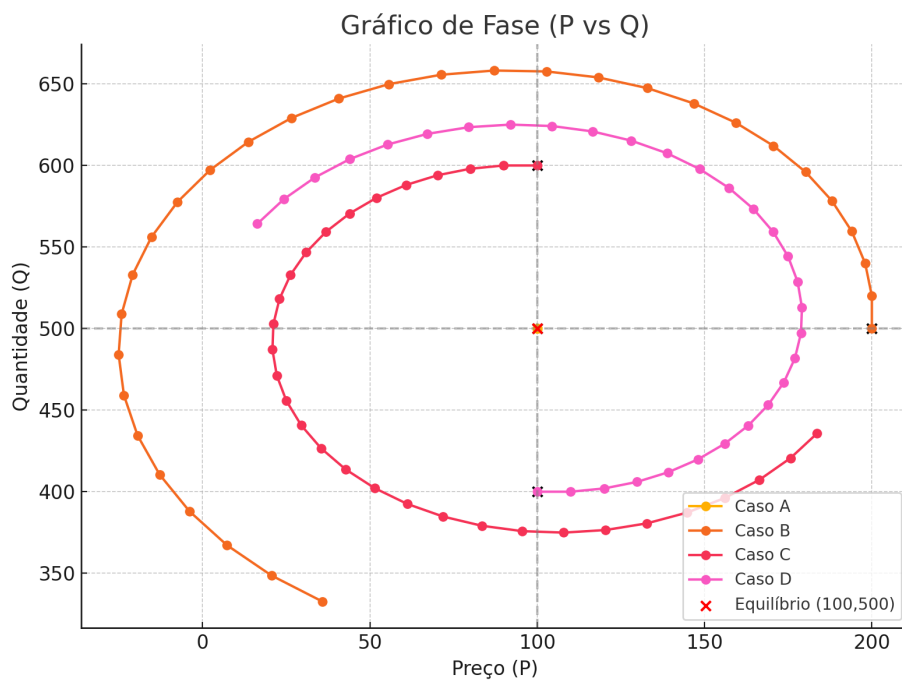
Caso	Comportamento	Convergência
A	Já está no equilíbrio	(100, 500)
B	P cai, Q sobe	Converge para (100, 500)
C	P cai, Q cai	Converge para (100, 500)
D	P sobe, Q sobe	Converge para (100, 500)

Simulações Numéricas (Gráficos)



As curvas mostram a convergência de P e Q para o equilíbrio (100, 500) em todos os casos testados.

Gráfico de Fase (P vs Q)



O gráfico de fase acima mostra a evolução conjunta de preço (P) e quantidade (Q) para os diferentes casos iniciais. As trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio $(P^*, Q^*) = (100, 500)$, evidenciando a estabilidade do sistema dinâmico.

O ponto vermelho indica o equilíbrio, e os marcadores "x" são os pontos iniciais de cada trajetória.