Capítulo 31: Embaralhando Cartas

Tradução de "Proofs from THE BOOK" por M. Aigner, G. M. Ziegler

IMAGEM: Carta de Ás de Espadas com silhueta

Figure 1: Cartão de visita de Persi Diaconis como mágico. Numa entrevista posterior ele disse: "Se você diz que é professor em Stanford as pessoas te tratam com respeito. Se você diz que inventa truques de mágica, eles não querem te apresentar à filha deles."

Introdução

Com que frequência se deve embaralhar um baralho de cartas até que ele esteja aleatório? [4] A análise de processos aleatórios é uma tarefa familiar na vida ("Quanto tempo leva para chegar ao aeroporto durante o horário de pico?") assim como na matemática. [5] É claro que, para obter respostas significativas a tais problemas, depende-se muito da formulação de perguntas significativas. [6] Para o problema de embaralhar cartas, isso significa que temos [7] que especificar o tamanho do baralho ($n = 52$ cartas, digamos), [8] dizer como embaralhamos (analisaremos primeiro os embaralhamentos do tipo "top-in-at-random" e depois os mais realistas e eficazes "riffle shuffles"), e finalmente [9] explicar o que queremos dizer com "está aleatório" ou "está próximo do aleatório." [10]

Portanto, nosso objetivo neste capítulo é uma análise do "riffle shuffle", devida a Edgar N. Gilbert e Claude Shannon (1955, não publicado) e Jim Reeds (1981, não publicado), seguindo o estatístico David Aldous e o ex-mágico que se tornou matemático Persi Diaconis, de acordo com [1]. [11] Não alcançaremos o resultado preciso final de que 7 "riffle shuffles" são suficientes para deixar um baralho de $n = 52$ cartas muito próximo do aleatório, enquanto 6 "riffle shuffles" não são suficientes — mas obteremos um limite superior de 12, e veremos algumas ideias extremamente belas no caminho: os conceitos de regras de parada e de "tempo uniforme forte", o lema de que o tempo uniforme forte limita a distância de variação, o lema de inversão de Reeds e, assim, a interpretação do embaralhamento como "ordenação reversa". [12] No final, tudo será reduzido a dois problemas combinatórios muito clássicos, a saber, o do colecionador de cupons e o do paradoxo do aniversário. [13] Então vamos começar com estes! [14]

1 O paradoxo do aniversário

Pegue n pessoas aleatórias — os participantes de uma aula ou seminário, digamos. [16] Qual é a probabilidade de que todas tenham aniversários diferentes? [17] Com as suposições simplificadoras usuais (365 dias por ano, sem efeitos sazonais, sem gêmeos presentes) a probabilidade é [18]

$$p(n) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right),$$

[19] que é menor que $\frac{1}{2}$ para $n = 23$ (este é o "paradoxo do aniversário"!), menos de 9 por cento para $n = 42$, e exatamente 0 para $n > 365$ (o "princípio da casa dos pombos", veja o Capítulo 28). [33] A fórmula é fácil de ver se pegarmos as pessoas em alguma ordem fixa: Se as primeiras i pessoas têm aniversários distintos, então a probabilidade de que a $(i+1)$-ésima pessoa não estrague a série é $1 - \frac{i}{365}$, uma vez que restam $365 - i$ aniversários. [34] De forma semelhante, se n bolas são colocadas de forma independente e aleatória em K caixas, então a probabilidade de que nenhuma caixa receba mais de uma bola é [35]

$$p(n, K) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{K}\right).$$

[36]

2 O colecionador de cupons

Crianças compram fotos de estrelas pop (ou de futebol) para seus álbuns, mas as compram em pequenos envelopes não transparentes, então não sabem qual foto receberão. [38] Se houver n fotos diferentes, qual é o número esperado de fotos que uma criança precisa comprar até obter cada motivo pelo menos uma vez? [39] Equivalentemente, se você retira aleatoriamente bolas de uma urna que contém n bolas distinguíveis, e se você coloca a bola de volta a cada vez e mistura bem novamente, quantas vezes, em média, você precisa retirar até ter retirado cada bola pelo menos uma vez? [40]

Se você já retirou k bolas distintas, a probabilidade de não obter uma nova na próxima retirada é $\frac{k}{n}$. [41] Portanto, a probabilidade de precisar de exatamente s retiradas para a próxima bola nova é $\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)$. [42] E assim, o número esperado de retiradas para a próxima bola nova é

$$\sum_{s\geq 1}\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)s=\frac{1}{1-\frac{k}{n}},$$

[43] como obtemos da série na margem (onde $\sum_{s\geq 1} x^{s-1}(1-x)s=\frac{1}{1-x}$). [29, 44] Assim, o número esperado de retiradas até termos retirado cada uma das n bolas diferentes pelo menos uma vez é

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-\frac{k}{n}}=\frac{n}{n}+\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{2}+\frac{n}{1}=nH_n\approx n\log n,$$

[45] com os limites sobre o tamanho dos números harmônicos que obtivemos na página 13. [46] Portanto, a resposta para o problema do colecionador de cupons é que devemos esperar que aproximadamente $n\log n$ retiradas sejam necessárias. [46]

A estimativa que precisamos a seguir é para a probabilidade de que você precise de significativamente mais do que $n\log n$ tentativas. [47] Se V_n denota o número de retiradas necessárias (esta é a variável aleatória cujo valor esperado é $E[V_n]\approx n\log n$), então para $n\geq 1$ e $c\geq 0$, a probabilidade de que precisemos de mais de $m:=\lceil n\log n+cn\rceil$ retiradas é [48]

$$\text{Prob}[V_n>m]\leq e^{-c}.$$

[49] De fato, se A_i denota o evento de que a bola i não é retirada nas primeiras m retiradas, então [51]

$$\text{Prob}[V_n>m]=\text{Prob}\left[\bigcup_i A_i\right]\leq\sum_i \text{Prob}[A_i]=n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m<ne^{-m/n}\leq e^{-c}.$$

[52]

3 Embaralhamentos

Agora, vamos pegar um baralho de n cartas. Nós as numeramos de 1 a n na ordem em que vêm — então a carta numerada "1" está no topo do baralho, enquanto "n" está na base. [53] Vamos denotar a partir de agora por $\mathfrak{S}_n$ o conjunto de todas as permutações de $1, \ldots, n$. [54] Embaralhar o baralho equivale à aplicação de certas permutações aleatórias à ordem das cartas. [55] Idealmente, isso poderia significar que aplicamos uma permutação arbitrária $\pi \in \mathfrak{S}_n$ à nossa ordem inicial $(1, 2, \ldots, n)$, cada uma delas com a mesma probabilidade $\frac{1}{n!}$. [56] Assim, depois de fazer isso apenas uma vez, teríamos nosso baralho de cartas na ordem $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$, e esta seria uma ordem aleatória perfeita. [56] Mas não é isso que acontece na vida real. Em vez disso, ao embaralhar, apenas "certas" permutações ocorrem, talvez nem todas com a mesma probabilidade, e isso é repetido um "certo" número de vezes. [57] Depois disso, esperamos ou desejamos que o baralho esteja pelo menos "próximo do aleatório". [58]

3.1 Embaralhamentos "Top-in-at-random"

Estes são realizados da seguinte forma: você pega a carta do topo do baralho e a insere no baralho em um dos n lugares possíveis distintos, cada um deles com probabilidade $\frac{1}{n}$. [60] Assim, uma das permutações

$$\tau_i = (2, 3, \ldots, i, 1, i+1, \ldots, n)$$

[66] é aplicada, $1 \leq i \leq n$. [67] Após um embaralhamento desses, o baralho não parece aleatório, e, de fato, esperamos precisar de muitos desses embaralhamentos até atingirmos esse objetivo. [68]

IMAGEM: Diagrama de embaralhamentos "Top-in-at-random"

Figure 2: Uma sequência típica de embaralhamentos "top-in-at-random" pode ser como a seguinte (para $n = 5$). [69]

Como devemos medir o "estar próximo do aleatório"? Os probabilistas criaram a "distância de variação" como uma medida bastante implacável de aleatoriedade: [100] olhamos para a distribuição de probabilidade sobre as $n!$ diferentes ordenações de nosso baralho ou, equivalentemente, sobre as $n!$ diferentes permutações $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ que produzem as ordenações. [101]

Dois exemplos são a nossa distribuição inicial E, que é dada por

$$E(\mathrm{id}) = 1, \quad E(\pi) = 0 \text{ caso contrário,}$$

[105, 106] e a distribuição uniforme U, dada por

$$U(\pi) = \frac{1}{n!} \text{ para todo } \pi \in \mathfrak{S}_n.$$

[111] A distância de variação entre duas distribuições de probabilidade Q_1 e Q_2 é agora definida como

$$||Q_1 - Q_2|| := \frac{1}{2} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} |Q_1(\pi) - Q_2(\pi)|.$$

[113] Definindo $S := \{\pi \in \mathfrak{S}_n : Q_1(\pi) > Q_2(\pi)\}$ e usando $\sum_\pi Q_1(\pi) = \sum_\pi Q_2(\pi) = 1$, podemos reescrever isso como

$$||Q_1 - Q_2|| = \max_{S \subseteq \mathfrak{S}_n} |Q_1(S) - Q_2(S)|,$$

[115] com $Q_i(S) := \sum_{\pi \in S} Q_i(\pi)$. [116] Claramente, temos $0 \leq ||Q_1 - Q_2|| \leq 1$. [116] No que se segue, "estar próximo do aleatório" será interpretado como "ter pequena distância de variação da distribuição uniforme". [116] Aqui a distância entre a distribuição inicial e a distribuição uniforme é muito próxima de 1: [117]

$$||E - U|| = 1 - \frac{1}{n!}.$$

[118] Após um embaralhamento "top-in-at-random", isso não será muito melhor: [119]

$$||\mathrm{Top} - U|| = 1 - \frac{1}{(n-1)!}.$$

[120]

A distribuição de probabilidade em $\mathfrak{S}_n$ que obtemos ao aplicar o embaralhamento "top-in-at-random" k vezes será denotada por Top^{*k}. [121] Como $||\mathrm{Top}^{*k} - U||$ se comporta se k se torna maior, ou seja, se repetirmos o embaralhamento? [122] A teoria geral implica que para k grande a distância de variação $d(k) := ||\mathrm{Top}^{*k} - U||$ vai a zero exponencialmente rápido, mas não produz o fenômeno de "cut-off" que se observa na prática: Após um certo número k_0 de embaralhamentos, "de repente" $d(k)$ vai para zero muito rápido. [125]

3.2 Regras de parada uniformes fortes

A incrível ideia de regras de parada uniformes fortes de Aldous e Diaconis captura as características essenciais. [128] Imagine que o gerente do cassino observa atentamente o processo de embaralhamento, analisa as permutações específicas que são aplicadas ao baralho em cada passo e, após um número de passos que depende das permutações que ele viu, grita "PARE!". [129] Então ele tem uma regra de parada que encerra o processo de embaralhamento. [130] Ela depende apenas dos embaralhamentos (aleatórios) que já foram aplicados. [131] A regra de parada é **uniforme forte** se a seguinte condição for válida para todo $k \geq 0$: [132]

> Se o processo for parado após exatamente k passos, então as permutações resultantes do baralho têm distribuição uniforme (exatamente!). [133]

Seja T o número de passos realizados até que a regra de parada diga ao gerente para gritar "PARE!"; então esta é uma variável aleatória. [135] Da mesma forma, a ordenação do baralho após k embaralhamentos é dada por uma variável aleatória X_k (com valores em $\mathfrak{S}_n$). [136] Com isso, a regra de parada é uniforme forte se, para todos os valores viáveis de k, [137]

$$\mathrm{Prob}[X_k = \pi | T = k] = \frac{1}{n!} \quad \text{para todo } \pi \in \mathfrak{S}_n.$$

[138]

Três aspectos tornam isso interessante, útil e notável:

1. Regras de parada uniformes fortes existem: Para muitos exemplos, elas são bastante simples. [140]
2. Além disso, elas podem ser analisadas: Tentar determinar $\mathrm{Prob}[T > k]$ leva frequentemente a problemas combinatórios simples. [141]
3. Isso produz limites superiores eficazes para as distâncias de variação, como $d(k) = ||\mathrm{Top}^{*k} - U||$. [142]

Por exemplo, para os embaralhamentos "top-in-at-random", uma regra de parada uniforme forte é

> "PARE depois que a carta original da base (rotulada como n) for inserida pela primeira vez de volta no baralho." [144]

De fato, se rastrearmos a carta n durante esses embaralhamentos, [145] vemos que durante todo o processo a ordenação das cartas abaixo desta carta é completamente uniforme. [184] Então, depois que a carta n sobe para o topo e é então inserida aleatoriamente, o baralho é uniformemente distribuído; [185] nós apenas não sabemos quando precisamente isso acontece (mas o gerente sabe). [186]

Agora, seja T_i a variável aleatória que conta o número de embaralhamentos realizados até que, pela primeira vez, i cartas fiquem abaixo da carta n. [187] Temos que determinar a distribuição de [188]

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_{n-1} - T_{n-2}) + (T - T_{n-1}).$$

[189] Mas cada parcela nesta soma corresponde a um problema do colecionador de cupons: $T_i - T_{i-1}$ é o tempo até que a carta do topo seja inserida em um dos i lugares possíveis abaixo da carta n. [190] Portanto, é também o tempo que o colecionador de cupons leva do $(n-i)$-ésimo cupom para o $(n-i+1)$-ésimo cupom. [191] Seja V_i o número de fotos compradas até que ele tenha i fotos diferentes. [192] Então $V_n = V_1 + (V_2 - V_1) + \cdots + (V_n - V_{n-1})$, [193] e vimos que $\mathrm{Prob}[T_i - T_{i-1} = j] = \mathrm{Prob}[V_{n-i+1} - V_{n-i} = j]$ para todos os i e j. [196] Portanto, o colecionador de cupons e o embaralhador "top-in-at-random" realizam sequências equivalentes de processos aleatórios independentes, apenas na ordem oposta. [197]

Assim, sabemos que a regra de parada uniforme forte para os embaralhamentos "top-in-at-random" leva mais de $k = \lceil n \log n + cn \rceil$ passos com baixa probabilidade: [198]

$$\text{Prob}[T > k] \leq e^{-c}.$$

[199] E isso, por sua vez, significa que após $k = \lceil n \log n + cn \rceil$ embaralhamentos "top-in-at-random", nosso baralho está "próximo do aleatório", com [200]

$$d(k) = ||\text{Top}^{*k} - U|| \leq e^{-c},$$

[201] devido ao seguinte lema simples, mas crucial. [202]

Lema. Seja $Q : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}$ uma distribuição de probabilidade qualquer que defina um processo de embaralhamento Q^{*k} com uma regra de parada uniforme forte cujo tempo de parada é T. Então, para todo $k \geq 0$, [203]

$$||Q^{*k} - U|| \leq \text{Prob}[T > k].$$

[204]

Prova. Se X é uma variável aleatória com valores em $\mathfrak{S}_n$ com distribuição de probabilidade Q, então escrevemos $Q(S)$ para a probabilidade de que X assuma um valor em $S \subseteq \mathfrak{S}_n$. [205] Assim, $Q(S) = \text{Prob}[X \in S]$, e no caso da distribuição uniforme $Q = U$, obtemos $U(S) = \frac{|S|}{n!}$. [206, 207] Para cada subconjunto $S \subseteq \mathfrak{S}_n$, obtemos a probabilidade de que, após k passos, nosso baralho esteja ordenado de acordo com uma permutação em S como [208]

$$\begin{aligned}
Q^{*k}(S) &= \text{Prob}[X_k \in S] \\
[209] &= \sum_{j \leq k} \text{Prob}[X_k \in S \wedge T = j] + \text{Prob}[X_k \in S \wedge T > k] \\
[210] &= \sum_{j \leq k} U(S)\text{Prob}[T = j] + \text{Prob}[X_k \in S | T > k] \cdot \text{Prob}[T > k] \\
[211] &= U(S)(1 - \text{Prob}[T > k]) + \text{Prob}[X_k \in S | T > k] \cdot \text{Prob}[T > k] \\
[211] &= U(S) + (\text{Prob}[X_k \in S | T > k] - U(S)) \cdot \text{Prob}[T > k].[211]
\end{aligned}$$

Isso resulta em [212]

$$|Q^{*k}(S) - U(S)| \leq \text{Prob}[T > k],$$

[214] uma vez que $|\text{Prob}[X_k \in S | T > k] - U(S)|$ é uma diferença de duas probabilidades, então seu valor absoluto é no máximo 1. [215, 216] □

Este é o ponto em que concluímos nossa análise do embaralhamento "top-in-at-random": provamos o seguinte limite superior para o número de embaralhamentos necessários para ficar "próximo do aleatório".

Teorema 1. Sejam $c \geq 0$ e $k := \lceil n \log n + cn \rceil$. Então, após realizar k embaralhamentos "top-in-at-random" em um baralho de n cartas, a distância de variação da distribuição uniforme satisfaz [218]

$$d(k) := ||\text{Top}^{*k} - U|| \leq e^{-c}.$$

[219]

Pode-se também verificar que a distância de variação $d(k)$ permanece grande se fizermos significativamente menos do que $n \log n$ embaralhamentos "top-in-at-random". [220] A razão é que um número menor de embaralhamentos não será suficiente para destruir a ordenação relativa das poucas cartas da base do baralho. [221] Claro, os embaralhamentos "top-in-at-random" são extremamente ineficientes — com os limites do nosso teorema, precisamos de mais de $2 \log 52 \approx 205$ embaralhamentos "top-in-at-random" até que um baralho de $n = 52$ cartas esteja bem misturado. [222] Assim, agora voltamos nossa atenção para um modelo de embaralhamento muito mais interessante e realista. [223]

3.3 Riffle shuffles

Isso é o que os crupiês fazem no cassino: eles pegam o baralho, dividem-no em duas partes, e estas são então intercaladas, por exemplo, soltando cartas da base das duas metades do baralho em algum padrão irregular. [225] Novamente, um "riffle shuffle" realiza uma certa permutação nas cartas do baralho, que inicialmente assumimos estarem rotuladas de 1 a n, onde 1 é a carta do topo. [226] Os "riffle shuffles" correspondem exatamente às permutações $\pi \in \mathfrak{S}_n$ tais que a sequência $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ consiste em duas sequências crescentes intercaladas (apenas para a permutação identidade é uma sequência crescente). [227, 228, 229]

O seguinte modelo, desenvolvido primeiro por Edgar N. Gilbert e Claude Shannon em 1955, tem várias virtudes: [263]

- é elegante, simples e parece natural, [269]
- modela muito bem a maneira como um amador realizaria "riffle shuffles", [270]
- e temos a chance de analisá-lo. [271]

Aqui estão três descrições — todas elas descrevem a mesma distribuição de probabilidade Rif em $\mathfrak{S}_n$: [272, 273]

1. $\mathrm{Rif} : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\mathrm{Rif}(\pi) := \begin{cases} \frac{n+1}{2^n} & \text{se } \pi = \mathrm{id}, \\ [278]\frac{1}{2^n} & \text{se } \pi \text{ consiste em duas sequências crescentes}, \\ [284]0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   [280, 283]

2. Corte t cartas do baralho com probabilidade $\frac{1}{2^n}\binom{n}{t}$, leve-as para a sua mão direita e pegue o resto do baralho na sua mão esquerda. [285] Agora, quando você tem r cartas na mão direita e l na esquerda, "solte" a carta da base da sua mão direita com probabilidade $\frac{r}{r+l}$ e da sua mão esquerda com probabilidade $\frac{l}{r+l}$. Repita! [286]

3. Um embaralhamento inverso pegaria um subconjunto das cartas do baralho, as removeria do baralho e as colocaria no topo das cartas restantes do baralho, mantendo a ordem relativa em ambas as partes do baralho. [287] Tal movimento é determinado pelo subconjunto de cartas: pegue todos os subconjuntos com igual probabilidade. [288] Equivalentemente, atribua um rótulo "0" ou "1" a cada carta, aleatoriamente e independentemente com probabilidades $\frac{1}{2}$, e mova as cartas rotuladas com "0" para o topo. [289]

Então, como podemos analisá-lo? Quantos "riffle shuffles" são necessários para chegar perto do aleatório? [292] Não obteremos a resposta precisa e ótima, mas uma muito boa, combinando três componentes: [293]

1. Analisamos os "riffle shuffles" inversos em vez disso, [294]
2. descrevemos uma regra de parada uniforme forte para estes, [295]
3. e mostramos que a chave para sua análise é dada pelo paradoxo do aniversário! [296]

Teorema 2. Após realizar k "riffle shuffles" em um baralho de n cartas, a distância de variação de uma distribuição uniforme satisfaz [297]

$$||\mathrm{Rif}^{*k} - U|| \leq 1 - \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{2^k}\right).$$

[298]

Prova. (1) Podemos de fato analisar os "riffle shuffles" inversos. [300] Estes correspondem à distribuição de probabilidade dada por $\overline{\text{Rif}}(\pi) := \text{Rif}(\pi^{-1})$. [301] O fato de que toda permutação tem seu inverso único e que $U(\pi) = U(\pi^{-1})$ resulta em [302]

$$||\text{Rif}^{*k} - U|| = ||\overline{\text{Rif}}^{*k} - U||.$$

[303] (Este é o lema de inversão de Reeds!) [304]

(2) Em cada "riffle shuffle" inverso, cada carta recebe um dígito associado 0 ou 1. [305] Se nos lembrarmos desses dígitos — digamos que apenas os escrevemos nas cartas — então, após k "riffle shuffles" inversos, cada carta terá uma sequência ordenada de k dígitos. [331] Nossa regra de parada é: [332]

> "PARE assim que todas as cartas tiverem sequências distintas." [333]

Quando isso acontece, as cartas no baralho são ordenadas de acordo com os números binários $b_k b_{k-1} \dots b_1$, onde b_i é o bit que a carta pegou no i-ésimo "riffle shuffle" inverso. [334] Como esses bits são perfeitamente aleatórios e independentes, esta regra de parada é uniforme forte! [335]

(3) O tempo T levado por esta regra de parada é distribuído de acordo com o paradoxo do aniversário, para $K = 2^k$. [368] Colocamos duas cartas na mesma caixa se elas tiverem o mesmo rótulo $b_k b_{k-1} \dots b_1 \in \{0,1\}^k$. [368] Portanto, existem $K = 2^k$ caixas, e a probabilidade de que alguma caixa receba mais de uma carta é [369]

$$\text{Prob}[T > k] = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{2^k}\right),$$

[370] e como vimos, isso limita a distância de variação $||\text{Rif}^{*k} - U|| = ||\overline{\text{Rif}}^{*k} - U||$. [371] $\square$

Então, com que frequência temos que embaralhar? Para n grande, precisaremos de aproximadamente $k = 2\log_2(n)$ embaralhamentos. [389] Explicitamente, para $n = 52$ cartas, o limite superior do Teorema 2 indica $d(10) \leq 0.73$, $d(12) \leq 0.28$, $d(14) \leq 0.08$, então $k = 12$ deveria ser "aleatório o suficiente" para todos os propósitos práticos. [391] Mas não fazemos 12 embaralhamentos "na prática" — e eles não são realmente necessários, como uma análise mais detalhada mostra (com os resultados dados na margem). [392, 393] A análise de "riffle shuffles" é parte de uma discussão animada e contínua sobre a medida certa do que é "aleatório o suficiente". [394] Diaconis [4] é um guia para desenvolvimentos recentes. [395]

Table 1: A distância de variação após k "riffle shuffles", de acordo com [2]. [385]

k	d(k)
1	1.000 [375]
2	1.000 [376]
3	1.000 [377]
4	1.000 [378]
5	0.952 [379]
6	0.614 [380]
7	0.334 [381]
8	0.167 [382]
9	0.085 [383]
10	0.043 [384]

Isso importa? Sim, importa: mesmo após três bons "riffle shuffles", um baralho ordenado de 52 cartas parece bastante aleatório... mas não está. [396] Martin Gardner [5, Capítulo 7] descreve uma série de truques de cartas impressionantes que se baseiam na ordem oculta em tal baralho! [397]

References

[1] D. Aldous & P. Diaconis: Shuffling cards and stopping times, Amer. Math. Monthly 93 (1986), 333-348. [399]

[2] D. Bayer & P. Diaconis: Trailing the dovetail shuffle to its lair, Annals Applied Probability 2 (1992), 294-313. [400]

[3] E. Behrends: Introduction to Markov Chains, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2000. [401]

[4] P. Diaconis: Mathematical developments from the analysis of riffle shuffling, in: "Groups, Combinatorics and Geometry. Durham 2001" (A. A. Ivanov, M. W. Liebeck and J. Saxl, eds.), World Scientific, Singapore 2003, pp. 73-97. [402]

[5] M. Gardner: Mathematical Magic Show, Knopf, New York/Allen & Unwin, London 1977. [403]

[6] E. N. Gilbert: Theory of Shuffling, Technical Memorandum, Bell Laboratories, Murray Hill NJ, 1955. [404]