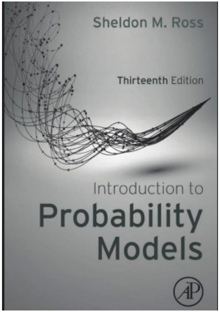
MCBM022-23 Introdução aos Processos Estocásticos

professor.ufabc.edu.br/~jair.donadelli/estocastico/

2025-3

Programa

- Cadeias de Markov
- Processos de Poisson.
- Martingais.
- Movimento browniano.

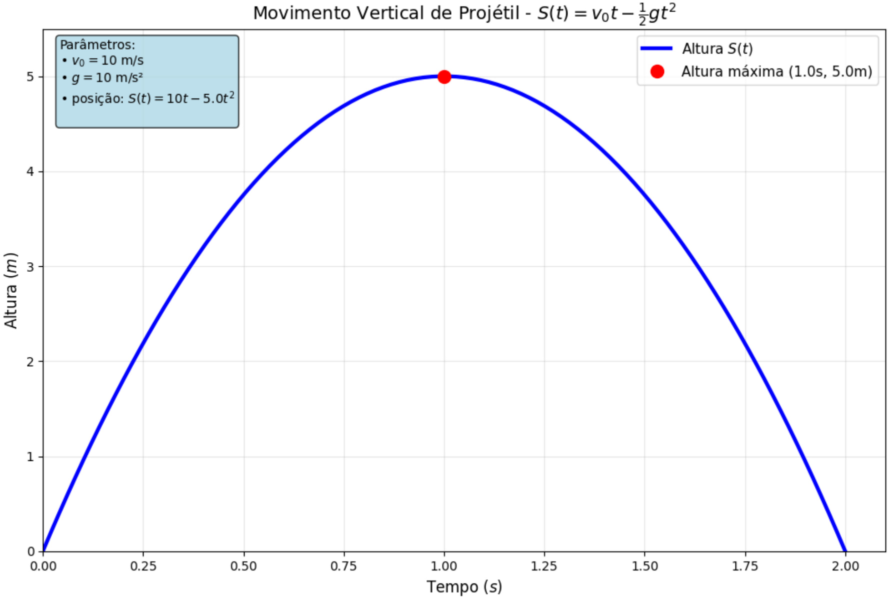


2 provas + substitutiva + exame

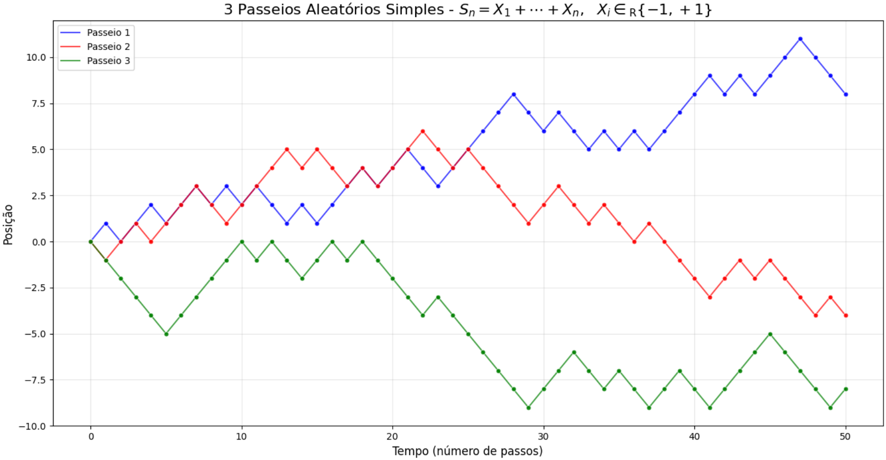
Não reprovo por falta com conceito **C** ou maior

RECOMENDAÇÃO: Álgebra Linear; Cálculo de Probabilidade

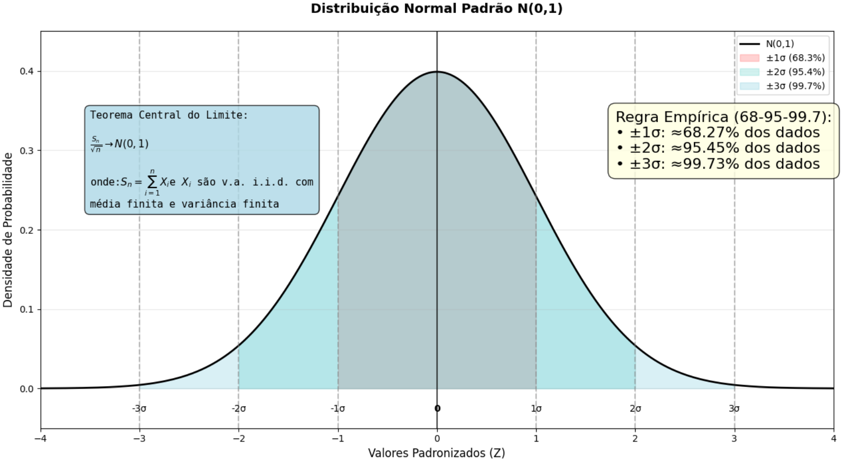
Processo Determinístico



Processo Estocástico ou Processo Aleatório

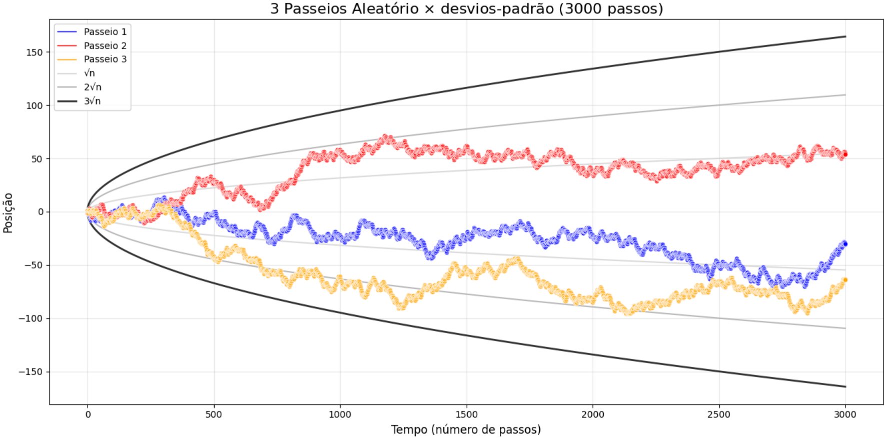


TCL

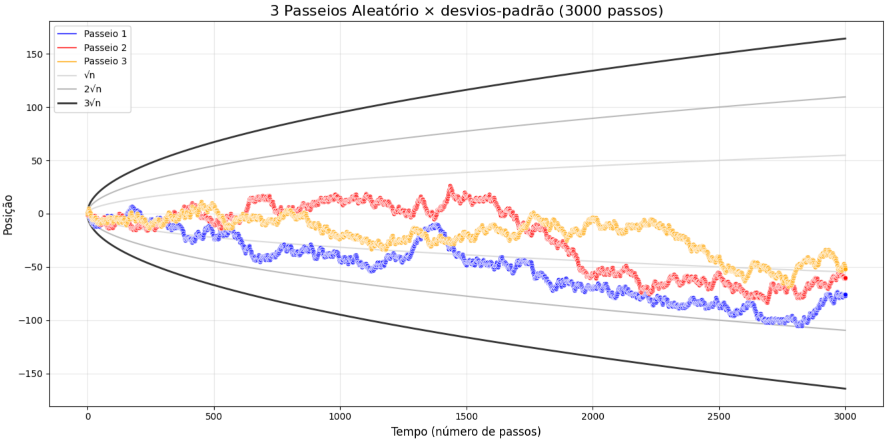


Distribuição Normal Padrão N(0,1)
Teorema Central do Limite:
$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \to N(0,1)$
onde: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e X_i são v.a. i.i.d. com média finita e variância finita
N(0,1)
±1σ (68.3%)
±2σ (95.4%)
±3σ (99.7%)
Regra Empírica (68-95-99.7):
• ±1σ: ≈68.27% dos dados
• ±2σ: ≈95.45% dos dados
• ±3σ: ≈99.73% dos dados
Densidade de Probabilidade
Valores Padronizados (Z)
-3σ
-2σ
-1σ
0
1σ
2σ
3σ

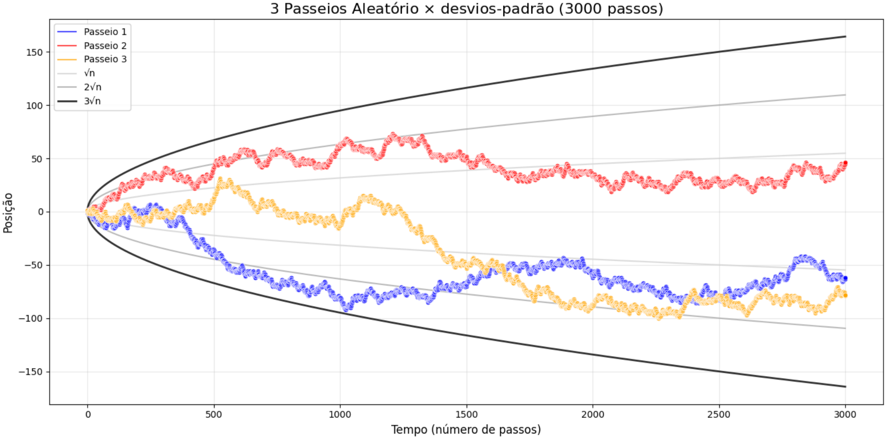
Estocástico



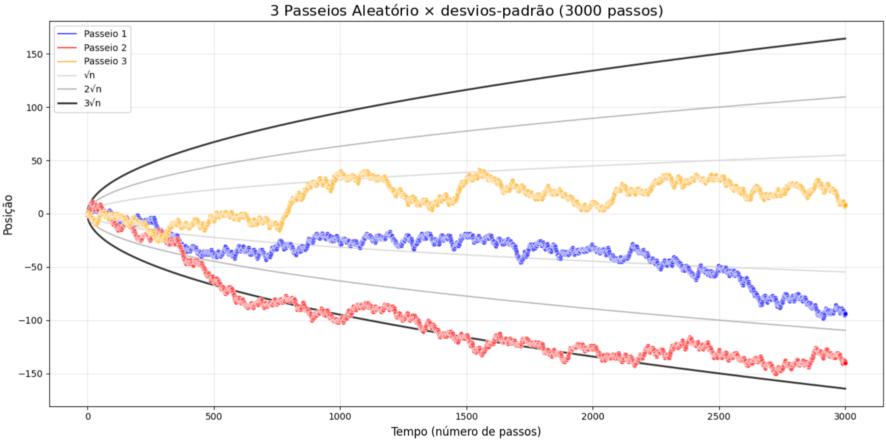
Estocástico



Estocástico



Estocástico



Page rank

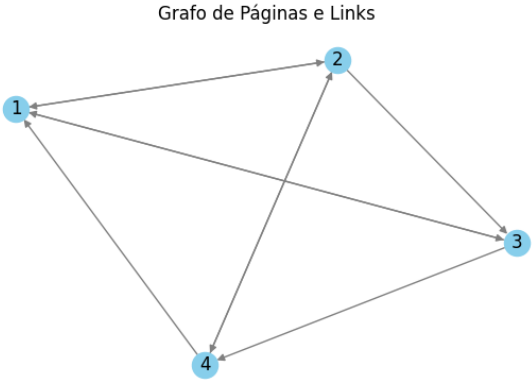
Como o Google decide qual página deve aparecer primeiro quando você faz uma busca?

Page rank

Como o Google decide qual página deve aparecer primeiro quando você faz uma busca?

- Podemos modelar a web como um grafo com páginas como vértices e links como arestas.
- Um "robô" navega aleatoriamente pelos links da internet.
- A frequência com que ele visita cada página define sua importância.

Um Exemplo de Web Simples



Grafo dirigido com 4 páginas: 1, 2, 3, 4

Matriz de Transição

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- linha representa uma página atual
- coluna representa uma página destino.

$$P_{ij} = \mathrm{Prob}\ i \to j$$

- A soma de cada linha é 1: matriz estocástica.

Transições em 2 passos: P^2

$$P_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

Significado de P^2

Transições em 2 passos: P^2

$$P_{ij} = \mathbb{P}\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i\big)$$

Significado de P^2

$$(P^2)_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+2} = j \mid X_n = i)$$

- Cada entrada de P^2 representa a probabilidade de ir do estado i para o estado j em dois passos.

$$(P^2)_{ij} = \sum_k P_{ik} P_{kj}$$

Exemplo com a matriz P

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo com a matriz P

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Exemplo: Qual a probabilidade de ir do estado 1 para o estado 4 em dois passos?
- Caminhos possíveis:
  - $1 \to 2 \to 4$: $1/2 \cdot 1/3 = 1/6$
  - $1 \to 3 \to 4$: $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
- Probabilidade $1/6 + 1/4 = 5/12 \approx 0.416667$

Em 2 passos

$$P^{\,2} = \begin{bmatrix} 0.416667 & 0 & 0.166667 & 0.416667 \\ 0.333333 & 0.333333 & 0.166667 & 0.166667 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.166667 & 0.25 & 0.416667 & 0.166667 \end{bmatrix}$$

Em 5 passos

$$P^{5} = \begin{bmatrix} 0.326389 & 0.263889 & 0.204861 & 0.204861 \\ 0.300926 & 0.270833 & 0.238426 & 0.189815 \\ 0.284722 & 0.260417 & 0.263889 & 0.190972 \\ 0.302083 & 0.211806 & 0.253472 & 0.232639 \end{bmatrix}$$

Em 10 passos

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.306154 & 0.254340 & 0.235770 & 0.203736 \\ 0.304945 & 0.255056 & 0.237252 & 0.202747 \\ 0.304121 & 0.254835 & 0.238462 & 0.202582 \\ 0.304780 & 0.252363 & 0.238241 & 0.204616 \end{bmatrix}$$

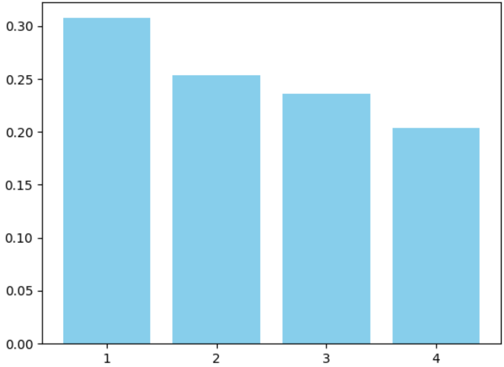
Em 20 passos

$$P^{20} = \begin{bmatrix} 0.305087 & 0.254236 & 0.237285 & 0.203392 \\ 0.305085 & 0.254239 & 0.237288 & 0.203388 \\ 0.305083 & 0.254240 & 0.237290 & 0.203387 \\ 0.305083 & 0.254234 & 0.237291 & 0.203392 \end{bmatrix}$$

Em 50 passos

$$P^{50} = \begin{bmatrix} 0.305085 & 0.254237 & 0.237288 & 0.203390 \\ 0.305085 & 0.254237 & 0.237288 & 0.203390 \\ 0.305085 & 0.254237 & 0.237288 & 0.203390 \\ 0.305085 & 0.254237 & 0.237288 & 0.203390 \end{bmatrix}$$

Distribuição Estacionária - Resultado



Frequência de visita a cada página após 10.000 passos.

Simulando o "robô" do Google

$$\boldsymbol{\pi}^{(0)} = \left(\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \pi_3^{(0)}, \pi_4^{(0)}\right), \quad \text{com } \pi_j^{(0)} \in [0,1], \quad \sum_j \pi_j^{(0)} = 1$$

- O robô começa na página i com probabilidade $\pi_i^{(0)}$.
- A cada passo, segue um link aleatório.
- Após muitos passos, a proporção de visitas a cada página se estabiliza $\boldsymbol{\pi}^{(0)}, \boldsymbol{\pi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \boldsymbol{\pi}$.

Distribuição estacionária

$$\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi} \quad \text{com} \quad \sum \pi_i = 1$$

Álgebra Linear

$\boldsymbol{\pi}$ tal que $\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$ é um problema de autovalor.