Experiment 1

(1) 전제

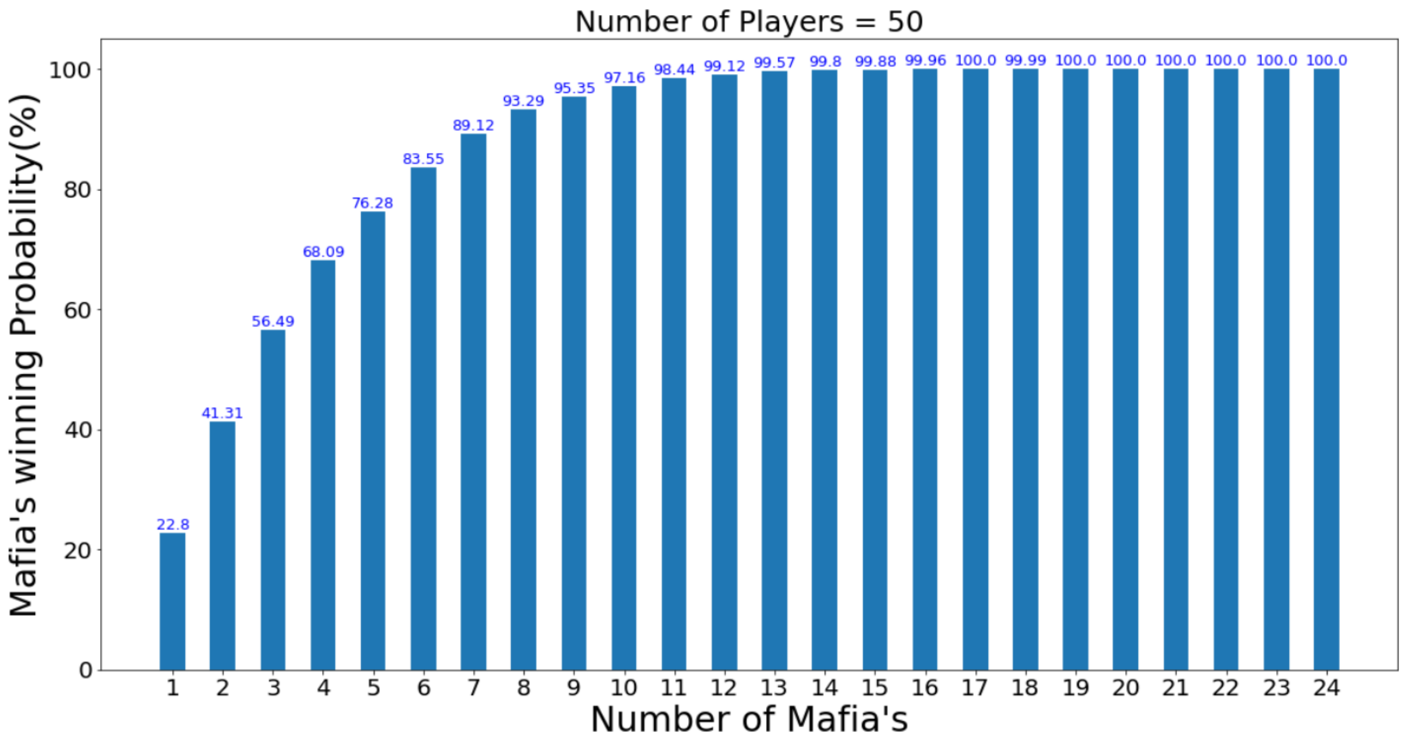
i. 총 Player 수 50명으로 고정

ii. Mafia 수를 1명 ~ 24명까지 (Mafia수가 25명이상이면 게임이 바로 끝나므로) 늘리면서 각각의 경우에 Mafia가 이길 평균확률을 구한다.

(2) 목표

이때 Mafia가 이길 평균확률의 변화 추이를 시각화 및 분석해본다.

(3) 시각화 결과



(4) 분석 (Mafia(n) = Mafia 수가 n명일 때, Mafia가 이길 확률(%)이라 하자.)

i. Mafia수가 증가함에 따라 Mafia가 이길 확률이 증가한다. (직관적으로 자명하다.)

ii. "Mafia(n + 1) - Mafia(n)의 차이" 즉, Mafia의 수를 한 명 증가할 때마다 Mafia가 이길 확률의 증가폭은 n 이 작을수록 대체로 크다.

iii. 총 Player 수가 50명일 때 Mafia수가 2명(Mafia(2) = 41.13%) 혹은 3명(Mafia(3)= 55.97%)일 때, 게임의 균형이 가장 잘 맞다.

iv. Mafia 수가 16명이상일 때부터는 사실상 Citizen이 이길 확률이 0%에 수렴한다.

Experiment 2

(1) 전제

i. 총 Mafia 수 1명으로 고정

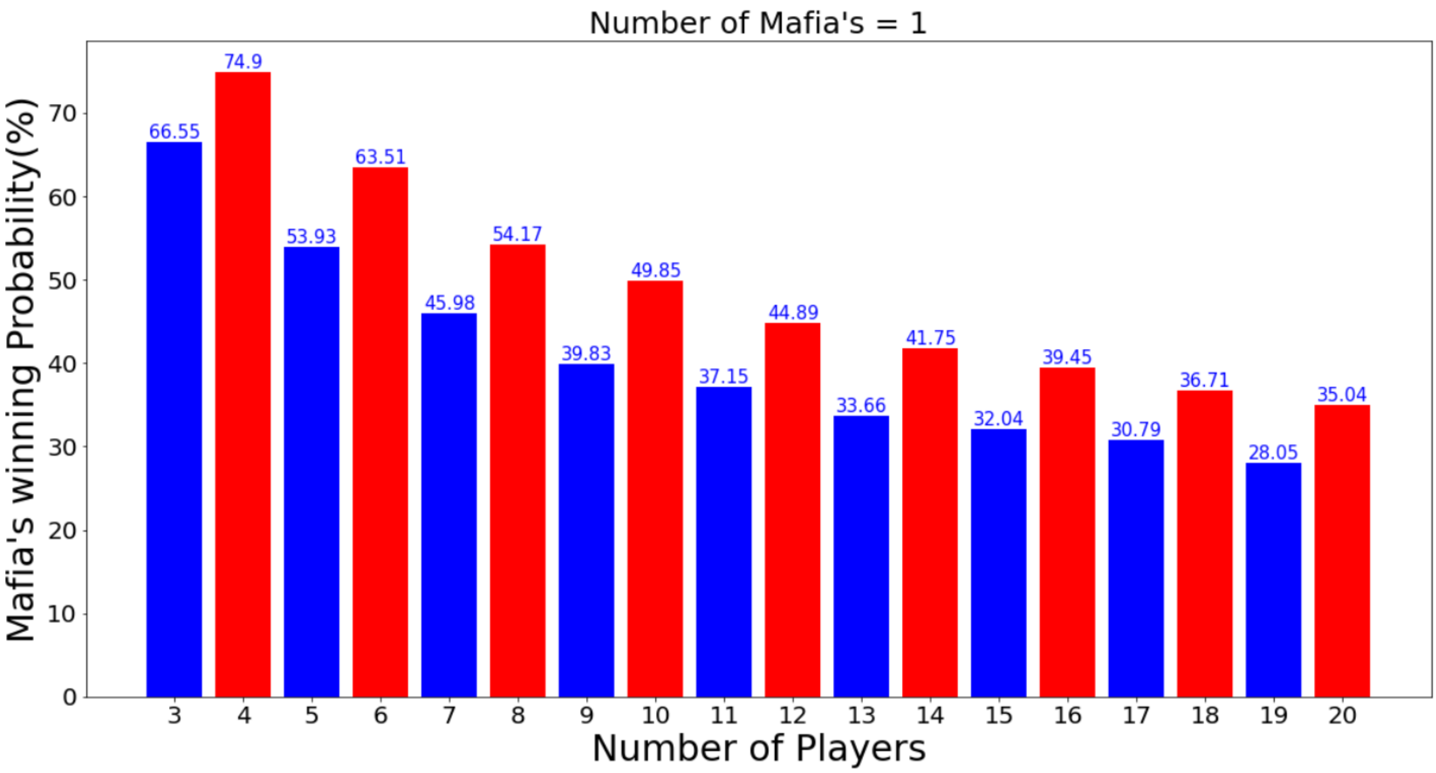
ii. 총 Player 수를 3명 ~ 20명까지 늘리면서 각각의 경우에 Mafia가 이길 평균확률을 구한다.

(2) 목표

이때 Mafia가 이길 평균확률의 변화 추이를 시각화 및 분석해본다.

(3) 시각화 결과

BlueBar = 총 Player 수가 홀수, RedBar = 총 Player 수가 짝수



(4) 분석: (Players(n) = 총 Player수가 n명일 때, Mafia가 이길 확률(%)이라 하자.)

i. n이 짝수일 때, n의 값이 증가할수록 Players(n)은 감소한다.

ii. n이 홀수일 때, n의 값이 증가할수록 Players(n)은 감소한다.

iii. n이 홀수일 때, Players(n) < Players(n+1)이다.

(5) 분석(iii)이 흥미로우므로 아래 정의를 이용하여 이를 수식적으로 증명해보자.

Definition 3.1.4 부분곱(Partial Product)

수열 $\{a_n\}$이 주어져있다고 하자. 그러면 자연수 n에 대하여 $\prod_{k=1}^{n} a_k$ 를 수열 $\{a_n\}$의 첫항부터 n번째 항까지의 곱이라고 부르고 다음과 같이 정의한다.

° 위 정의와 수학적 귀납법을 통해 Players(n)의 함수는 다음과 같다.

n이 홀수 일 때, $Players(n) = \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{2i}{2i+1}\right)$ 이다.

n이 짝수 일 때, $Players(n) = \prod_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{2i+1}{2i+2}\right)$ 이다.

° 증명 1

n이 홀수 일 때, $Players(n+2) = Players(n) \times \frac{n+1}{n+2}$ 이다.

이때, $\frac{n+1}{n+2} < 1$ 이므로

모든 홀수 n에 대하여 $Players(n+2) < Players(n)$ 이다.

이는 n이 짝수일 때도 동일하게 성립된다.

° 증명 2

n이 홀수 일 때, $Players(n) = \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{2i}{2i+1}\right)$

$Players(n+1) = \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{2i+1}{2i+2}\right)$ 이다.

이때, Players(n)과 Players(n+1)의 부분곱의 항의 개수가 같고

모든 i에 대하여 $\frac{2i}{2i+1} < \frac{2i+1}{2i+2}$ 이므로,

모든 홀수 n에 대하여 $Players(n) < Players(n+1)$ 이다.

- 흥미로운 사실: 실제 현실 마피아 게임에서는 낮에 지목을 통해 사람을 죽이지 않고 PASS하는 경우가 있다. 만약 총 Player수가 홀수이고 본인이 게임에서 마피아라면 첫째 날 아침에 참가자들이 PASS 하도록 유도하면 게임에서 이길 확률이 증가한다.

Experiment 3

(1) 전제

1st 총 Mafia수가 총 Player수의 20%로 일정 하게하기 위해 총 Mafia 수는 n명(n은 정수), 총 Player수는 5n명으로 설정한다.

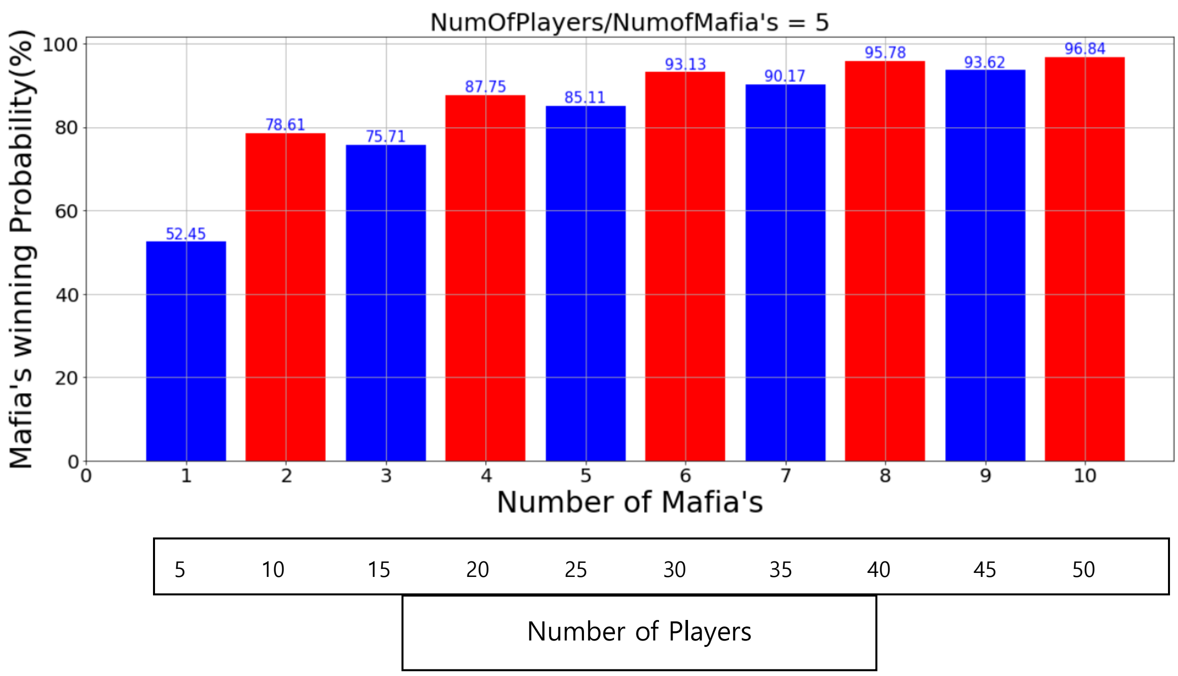
2nd 이때 위의 20%비율을 유지하면서 총 Mafia수(x축 variable)를 1명 ~ 10명까지 늘리면서 각각의 경우에 Mafia가 이길 확률을 구한다.

(2) 목표

이때 Mafia가 이길 평균확률의 변화 추이를 관측 및 분석해본다.

(3) 시각화 결과

BlueBar = 총 Gameplayer 수가 홀수, RedBar = 총 Gameplayer 수가 짝수



(4) 분석(Mafia(n) = 총 Mafia 수가 n 명일 때, 마피아가 이길 확률(%)이라 하자.)

- <Experiment2>의 분석(iii)을 고려하여 총 Player수(5n)가 홀수 일 때 와 짝수일 때를 나누어서 생각해보자. (n이 홀수일 때 5n도 홀수이므로 이하 n은 홀수 일 때라 한다.)

i. 총 Mafia수가 총 Player수의 20%로 일정할 때, 총 Mafia의 수가 많을수록(n 이 클수록)

Mafia가 이길 확률 Mafia(n)이 크다.

ii. 이유: 여러가지 요인이 있지만 **마피아의 패배조건 때문**이다. (마피아의 패배 조건은 모든 마피아가 지목을 통해서 사망 했을 때이다.) 한가지 예로 case 1: Mafia수 1 / 총 Player수 5 , case2: Mafia수 5 / 총 Player수 25 , 두 Case가 있을 때, 두 케이스 모두 첫날 낮에 Mafia가 사망할 확률은 1/5로 같지만 case1은 Mafia의 패배로 게임이 끝나고 case2는 Mafia가 아직 4명남아있기에 게임이 끝나지 않는다. 즉, 비율이 같을 때 Mafia수가 많을 수록 Mafia가 유리하다.