Matemática 3

PRACTICA 1

Probabilidad → estudia los experimentos aleatorios (puedo repetir bajo las mismas condiciones y no hay resultado exacto)

1) Se puede repetir bajo las mismas condiciones tantas veces como se quiera.
2) No se puede predecir exactamente el resultado pero puedo decir todos los posibles resultados.

Espacio muestral (S) → conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Por extensión (enumero todos) → S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Por comprensión → S = { n e N, 1 <= n <= 6}

#S → cardinal, coincide con todos los elementos del conjunto (si es finito)

S = {1, 2, 3, …} => N infinito

Hay distintos infinitos

- ➔ Enumerable (infinito numerable, puedo enumerar)
- ➔ No enumerables (infinito no numerable, los reales)

Evento o Suceso → Todo subconjunto del espacio muestral S. También se nombra con palabras

X: "Sale u número impar"

Mutuamente excluyentes → si ocurre uno, el otro no ocurre.

Observaciones:

1) S contenido S → el espacio muestral está incluido en sí mismo, por lo tanto S es un evento de S que SIEMPRE ocurre.
2) El conjunto vacío está contenido en S pero nunca ocurre.
3) A es un evento elemental si tiene un solo elemento (conjunto unitario)

Operaciones entre conjuntos

<u>Unión</u>

A u B = { x ; x e A v x e B}

<u>Intersección</u>

A n B = { x; x e A ^ x e B}

Si B n D = conjunto vacío entonces B y D son mutuamente excluyentes (no pueden ocurrir simultáneamente)

<u>Complemento</u>

A^C = { x; x e S ^ x ~~e~~ A}

Diferencia

A – B = { x, x e A ^ x e A}

- **u y n son asociativas.**
- **En alguno → UNION**
- **En todos → INTERSECCION**

Definición axiomática de probabilidad

Sea S un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Para todo evento A de S se define probabilidad de A y se anota P(A), al número de A que cumple con las siguientes propiedades básicas o axiomas.

1) 0 <= P (A) <= 1
2) P(S) = 1
3) Si A y B son mutuamente excluyentes entonces P (A u B) = P(A) + P(B)
4) Si A1, A2, A3, …, An, An+1, … es una secuencia de eventos tales que

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{si } i \neq j, \text{ entonces } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

OBSERVACION: supongamos que se tira una moneda 1 vez.

S = {c,s} anotamos A1={c}, A2={s} entonces S= A1 u A2 y A1 n A2 = conjunto vacío

1 = (axioma 2) P(S) = P(A1 U A2) = (axioma 3) P(A1) + P(A2)

Propiedades de la probabilidad

1) P (conjunto vacío) = 0
2) P (A^C) = 1 – P(A)
3) Si A c B entonces P(A) <= P(B)
4) Si A c B entonces P(B - A) = P(B) – P(A)
   Observación: Si A y B son eventos cualesquiera entonces P(B - A) = P(B) – P(A n B)
5) Si A y B son eventos cualesquiera entonces P(A u B) = P (A) + P(B) – P(A n B)
6) Si A, B y C son eventos cualesquiera
   P (A u B u C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(A n B) – P(A n C) - P (B n C) + P (A n B n C)
   observación: Si A, B y C son mutuamente excluyentes de a 2 entonces P (A u B u C) = P(A) + P(B) + P(C)
7) Si son mutuamente excluyentes de a dos, la unión básicamente es la suma.

Cálculo de probabilidades en espacios muestrales FINITOS

En general en un espacio muestral FINITO la suma de las probabilidades de los eventos elementales es 1)

En general si S es finito y equiprobable, entonces las probabilidades de cada evento son igual a 1/#S

En general #A/#S solo si S es espacio muestral finito y equiprobable y A c S

TECNICAS DE CONTEO

Ejemplo: Se tiene una urna con 15 bolillas distinguibles de las cuales 10 son blancas y 5 son rojas. Se extraen al azar 2 bolillas

A: “ambas bolillas que extraje son blancas”

P (A) = ?

Distintos casos de extracción:

1) No importa el orden → #S = número combinatorio 15 tomados de a 2
2) Importa el orden →
    a. Sin reemplazo → #S = 15 * 14
    b. Con reemplazo → #S = 15^2

1) P (A) = 10 tomados de a 2 / 15 tomados de a 2
2)
    a. P (A) = 10x9 / 15x14
    b. P(A) = 10^2 / 15^2

No suele tomar que no sea equiprobable pero sería algo así

Ej.) Un dado octaedro (de ocho caras) tiene el número 1 pintado en dos de sus caras, el 2 en tres de sus caras, el 3 en dos de sus caras y el 4 en una cara. Se lanza el dado. Su- ponga que cada cara tiene la misma probabilidad de salir. a) Determine el espacio muestral de este experimento. 2 b) Calcular la probabilidad de que salga número par.

B) NO ES EQUIPROBABLE a) $S = \{1, 2, 3, 4\}$

no calculo probabilidad de eventos elementales

1 en 2 caras
2 en 3 caras
3 en 2 caras
4 en 1 caras

p la probabilidad de salir de cada cara

$P(\{1\}) = P(\{3\}) = 2p$

$P(\{2\}) = 3p$

$P(\{4\}) = 1p$

$P(S) = 1 = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{2\}) + P(\{4\}) =$

$1 = 2p + 2p + 3p + 1p =$

$1 = 8p$

$\boxed{\frac{1}{8} = p}$

$P(\{1\}) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = P(\{3\})$

$P(\{2\}) = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$

$P(\{4\}) = 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

b) B: "sale un nro par"

$P(B) = P(\{2\}) + P(\{4\}) = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Cálculo de probabilidades en espacios muestrales INFINITOS NO NUMERABLES

Solo consideramos espacios muestrales donde S es un intervalo real de longitud finita o S es una región del plano de área finita y además asumimos que un punto de S se elige al azar.

Se puede probar que si B c S entonces P(B) = medida B / medida S

EN EL PARCIAL TENGO QUE:

1) Definir cardinal de S
2) Definir espacio muestral
3) Decir que tipo de S es

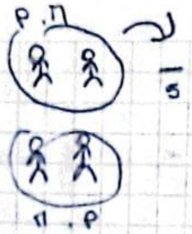
ERRORES COMUNES QUE EVITAR:

S = 6^5 NO , debería ser #S = 6^5

P (A) n/u P (B) NO, debería ser P (A u/n B)

P(A) = negativo → DEBE ESTAR ENTRE 0 Y 1.

otra forma



$\underline{\ }\ 5 \quad \underline{\ }\ 4 \quad \underline{\ }\ 3 \quad \underline{\ }\ 2 \quad \underline{\ }\ 1 \quad \to 5!\,2.$

Ejercicio 9) $\#(S) = 6^5 = 7776$

A: " salir **exactamente** 4 nº iguales"

$P(A) = \dfrac{\#A}{\#S}$

↓

S es finito y equiprobable

$\underbrace{1,1,1,1,1}_{\text{elegir el que está 4 veces}}, 1$ elegir el distinto $\frac{\text{m}}{3}$

$\#A = \underbrace{6 \cdot 5}_{\text{elegir quien}} \cdot$ 5 pos elegir el distinto

6 op

5 puedo cambiar elegir el distinto

$P(A) = \dfrac{150}{7776} = 0{,}0192$

va entre 0 y 1

b) Ejercicio extra
propiedad del complemento

$P(A^c) \overset{?}{=} 1 - P(A) = \dfrac{26}{36}$

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$ ⇝ si no es vacío

$P(A \cap C^c) = P(A) - P(A \cap C)$

$P(C \cap A^c) = P(C) - P(A \cap C)$

$P(A^c \cup C^c) = P[(A \cap C)^c] = 1 - P(A \cap C)$

$P(A^c \cap C^c) = P[(A \cup C)^c] =$ probabilidad del complemento

$= P(A \cup C)$

NOTA

NOTA

9) 11112 uno se repite con 3, 4, 5 y 6 en vez de 2 por lo
11121 que llevamos $5 \times 5 = 25$. O su vez esto sucede
11211 con los otros 5 números que no son 1, por lo
12111 que será
21111 $25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 = 150$ #A

(principio de suma) $\boxed{5 \times 5 \times 6}$

si tenemos en cuenta también el caso de que se repite 5 veces el mismo nro sería #A = 180 (ya que en este caso anteriormente se repite 4 veces, pero no se n tomando en cuenta)

$\# S = 6^5$

entonces

$\# A / \# S = \frac{150}{6^5} = \frac{25}{1296}$ ⇒ exactamente 4

$\# A / \# S = \frac{180}{6^5} = \frac{5}{216}$ ⇒ al menos 4

resuelto en clase

11) $S = \{$ todas las posibles ordenaciones de 6 personas en 6 sillas $\}$
$\{ (x_1 - x_6) \; \forall i$ es una persona de los 6$\}$

$\overline{6} \; \overline{5} \; \overline{4} \; \overline{3} \; \overline{2} \; \overline{1}$ $\# S = 6!$

a) A: maria y pablo se sientan a la izquierda

_ _ _ _ _ _ = # $2 . 4!$

2 1 4 3 2 1

simétrico y equiprobable

$P(A) = \frac{\# A}{\# S} = \frac{2 . 4!}{6!}$

b) _ _ _ _ _ _

otros pablo maria, maria pablo ordenar otros 4

$5 . 2 . 4! = \# B$

B: Pablo y maria se sientan juntos

$P(B) = \frac{10 \times 4!}{6!}$

simétrico y equiprobable

puedo pensar como 5 personas en 5 asientos

Lo importante de esta práctica es saber axiomas y propiedades de probabilidad

PRACTICA 2

Probabilidad condicional

En general si A y B son eventos en un espacio muestral S, la probabilidad condicional de B dado A se define como P(B | A) = P(A n B) / P(A) si P(A) distinto a 0

También se puede resolver como P(B | A) = #(A n B) / # A

(no tienen por qué ser equiprobable)

Hay que reducir el espacio muestral.

P (B^C | A) = 1 – P(B | A) → el que esta segundo debe permanecer igual.

Ej se tiene una urna con 7 bolillas blancas, 3 rojas distinguibles
se extraen al azar 2 bolillas importando el orden y
sin reemplazo

$S = \{ (1,2), (r,3), (2,10), \dots \}$ $\#S = 10 \times 9$ S es equiprobable

A: " la primer bolilla elegida es blanca "

B: " la segunda bolilla elegida es blanca "

$P(A) = \frac{\# A}{\# S} = \frac{7 \times 9}{10 \times 9} = \frac{7}{10}$ → la 2da puede ser cualquiera (blanca)

$P(B/A) = \boxed{\frac{6}{9}}$

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7 \times 6}{10 \times 9}}{\frac{7 \times 9}{10 \times 9}}$

6B 3R → 1B → $P(B/A) = \boxed{\frac{6}{9}}$

reducir espacio muestral

A: " la persona elegida tiene ojos castaños"

B: " la persona elegida tiene cabellos castaños "

$P(A) = 0{,}25$ $P(A \cap B) = 0{,}15$

$P(B) = 0{,}4$

a) $P(A / B) = ?$ → $= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \boxed{\frac{0{,}15}{0{,}4}}$

si ya ocurrió cuado

condicional

b) si tiene ojos castaños cual ...

Observaciones:

a) Si $A \subset B$ entonces $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

b) Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(\varnothing)}{P(A)} = 0$

c) Es fácil comprobar que $P(B(/A)$ para A fijo, satisface los axiomas de la probabilidad, esto es:

1- $0 \leq P(B/A) \leq 1$

2- $P(S/A) = 1$

3-Si B_1 y B_2 son eventos mutuamente excluyentes entonces

$$P((B_1 \cup B_2)/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A)$$

4-Si $B_1, B_2, ..., B_n, B_{n+1}, ...$ es una secuencia de eventos tales que $B_i \cap B_j = \varnothing$ si $i \neq j$ entonces

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)/A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i/A)$$

Teorema de la multiplicación

Si P (B | A) = P (A n B) / P(A) con P(A) distinto a 0

por lo tanto P (A n B) = P (B | A) x P (A)

Análogamente si P (A | B) = P (A n B) / P(B) con P(B) distinto a 0

por lo tanto P (A n B) = P (A | B) x P(B)

Ejemplo) Si tenemos una urna con 10 bolillas distinguibles de las cuales 7 son blancas y 3 son rojas y se extraen al azar 2 bolillas con orden y sin reemplazo

A: "la 1er bolilla blanca"

B: "la 2da bolilla blanca"

P(A n B) = P (B | A) x P (A) = 6/9 x 7/10 = 42/90

En general si A1, A2, …, An son n eventos de un espacio muestral S

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)....P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ..., A_{n-1})$$

Ejemplo)

si se extraen 4 bolillas con prolij sin reemplazo

¿Cual es la prob. de que las 2 1ras rojas y 2 ult blancas?

A_i : "Saco bolilla blanca en la i-esima extraccion"

$i = 1, 2, 3, 4$

$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4) =$

$\underbrace{P(A_1^c)}_{\frac{3}{10}} \cdot P(A_2^c / A_1^c) \cdot P(A_3 / A_1^c \cap A_2^c) \cdot P(A_4 / A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$

$\frac{2}{9} \qquad \frac{4}{8} \qquad \frac{6}{7}$

$\boxed{\overset{6}{\cancel{4}}/8 \quad \cancel{3}\cancel{R}^{2}}$

$\cancel{1}69$

$= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{7}$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL SUPER SUPER IMPORTANTE

En general si B c S y A1, A2, …, An eventos de un espacio muestral S que cumplen:

1) S = A1 u A2 u…u An
2) A1, A2, …, An mutuamente excluyentes de a dos
3) P (Ai) > a 0 para todo i = 1, 2, 3, …, n

Entonces se dice que A1, A2, …, An forman una partición de S entonces para cualquier evento B de S:

$$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n)$$

Ej) se tienen 3 urnas:

$\underbrace{[3R \quad 5B]}_{1}$ $\underbrace{[2R \quad 1B]}_{2}$ $\underbrace{[2R \quad 3B]}_{3}$

se extrae al azar 1 urna y luego de la urna elegida se extrae una bolilla al azar

¿Cual es la prob. que la bolilla extraída sea roja?

B: "la bolilla extraída es roja" $P(B) = ?$

A_i = "se elige la urna i" $i = 1, 2, 3$ NOTA = $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

Por el teorema de la prob. total ← A_1, A_2, A_3 partición de S con mutuamente excluyentes de a 2

$$P(B) = \overset{3/8}{P(B/A_1)} \cdot \overset{1/3}{P(A_1)} + \overset{2/3}{P(B/A_2)} \cdot \overset{1/3}{P(A_2)} + \overset{2/5}{P(B/A_3)} \overset{1/3}{P(A_3)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$$

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$

Ej) Una firma de consultoría alquila automóviles de 3 agencias, 30% de la agencia A, 50% de la agencia B y 20% de la agencia C, si el 4% de los autos de A el 10% de los autos de B y el 2% de los autos de C tienen neumáticos en mal estado, cual es la probabilidad de que la firma alquile un vehiculo con neumáticos en mal estado

D: "la firma alquila un auto con neumáticos en mal estado"

$P(D) = ?$

A: "el automóvil alquilado es de la agencia A"

$P(A) = 0,30$ $P(D/A) = 0,04$

B: "El automóvil alquilado es de la agencia B"

$P(B) = 0,5$ $P(D/B) = 0,1$

C: "El automóvil alquilado es de la agencia C"

$P(C) = 0,2$ $P(D, C) = 0,02$

tomamos A, B y C como una partición de S

$$P(D) = \underbrace{P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C)}$$
$$= 0,04 \times 0,30 + 0,10 \times 0,5 + 0,02 \times 0,20$$

<u>TEOREMA DE BAYER SUPER DUPER IMPORTANTE</u>

Tengo B c S con P(B) distinto a 0, sean A1, A2, A3, …, An particiones de S entonces

$$P(A_k / B) = \frac{P(B/A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)} \qquad k = 1, \ldots, n$$

¿Cual es la probabilidad de que un automovil con neumaticos alquilado por la firma provenga de la agencia B?

$$P(B \mid D) \underset{\text{def condic}}{=} \frac{P(B \cap D)}{P(D)} \underset{\text{teorema mult}}{=} \frac{P(D/B) \cdot P(B)}{P(D)}$$

T. prob total

P (B | D) = [P (D | B) x P(B)] / [P (D | A) x P (A) + P (D | B) x P (B) + P (D | C) x P(C)]

Siguiendo Bayes

<u>Independencia de eventos</u>

Sean A y B eventos de un espacio muestral S

Si P (B | A) = P(B) eso indica que A y B son eventos INDEPENDIENTES (saber que A ocurrió no modifica la probabilidad de B)

Observación: Sean A y B eventos independientes

1) P (A n B) = P (B | A) * P(A) = P (B) * P (A)
2) Si A y B son eventos que cumplen P (A n B) = P (A) x P (B) entonces P (B | A) = P(B)

Por lo tanto si se cumple 1) y 2) A y B son independientes si y solo si P(A n B) = P (A) x P(B)

IMPORTANTE → Que sean independientes no es lo mismo que mutuamente excluyentes

Observaciones:

- Si se tira un dado 2 veces y A es el evento que indica que ocurre en el tiro 1 y B es el evento que indica que ocurre en el tiro 2 entonces A y B son independientes. Análogamente si se tira una moneda 2 veces.
- Si tenemos 2 urnas con bolillas y se extrae al azar una bolilla de cada urna siendo A el evento que indica que bolilla se extrajo de la urna 1 y B es el evento que indica que bolilla se extrajo de la urna 2 entonces A y B son independientes.
- Extracción con reemplazo → INDEPENDIENTES
- Extracción sin reemplazo → DEPENDIENTES

Teorema: Si A y B son eventos independiente entonces A^C y B son independientes, B^C y A son independientes, A^C y B^C son independientes.

Ej) se tienen 2 cajas de caramelos

|2C 3 Ch| |2C 2 Ch 1 DDL|

se extrae 1 caramelo de cada caja

a) cual es la prob de que ambos sean de coco?

b) cual es la prob de que ambos no sean de coco?

A_i: "se elige caramelo de coco de la caja i" $i = 1,2$

a) $P(A_1 \cap A_2) \underset{\text{indep}}{=} P(A_1)\, P(A_2) = \boxed{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}}$

b) $P(A_1^c \cap A_2^c) \underset{\text{por ind}}{=} P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) = \boxed{\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}}$

usar o describir → extension $\boxed{1 \times 1}$

3 dados $\frac{\_}{6} \cdot \frac{\_}{6} \cdot \frac{\_}{6}$

Independencia de más de dos eventos.

Sean A1, A2, …, An eventos de un espacio muestral S, decimos que A1, A2, …, An son independientes si y solo si

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}) \qquad k = 2,\ldots,n$$

Por ejemplo A1, A2, A3 son eventos independientes entonces:

- P (A1 n A2) = P(A1) x P(A2)
- P (A1 n A3) = P(A1) x P (A3)
- P (A2 n A3) = P(A2) x P (A3)
- P (A1 n A2 n A3) = P (A1) x P (A2) x P(A3)

Si se cumplen las 4 igualdades son independientes.

ejercicio 10 $\boxed{P2}$

8) se tira un dado 5 veces

a) cual es la probabilidad de que siempre salga el 1

b) cual es la probabilidad de que nunca salga el 1

c) cual es la probabilidad de que alguna vez salga el 1 → unión

A_i: "en el tiro i-ésimo sale el nro 1" $i = 1,2,3,4,5$

Notar que A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 son independientes. $P(A_i) = \frac{1}{6}$

a) $P(\underset{y}{A_1} \cap \underset{y}{A_2} \cap \underset{y}{A_3} \cap \underset{y}{A_4} \cap A_5) \underset{\text{indep}}{=} P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5) = \left(\frac{1}{6}\right)^5$

b) $P(\underset{y}{A_1^c} \cap \underset{y}{A_2^c} \cap \underset{y}{A_3^c} \cap \underset{y}{A_4^c} \cap A_5^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c) \cdot P(A_4^c) \cdot P(A_5^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$

c) $P(A_1 \overset{o}{\cup} A_2 \overset{o}{\cup} A_3 \overset{o}{\cup} A_4 \overset{o}{\cup} A_5) = 1 - P\left(\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5\right)^c\right) \underset{\text{Morgan}}{=}$

$= 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) =$

$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$

ejercicio 11 a) $P(A|B) = 0{,}4$ $P(A) = 0{,}6$ $\boxed{P(A|B) = P(A)}$ → si se da esto son independ.

↳ idea es aplicar definición

b) $P(A|B) = 0{,}3$ $P(A) = 0{,}3$

si A y B son indep A^c y B lo son

es de concepto nada más

En el parcial debo realizar los ejercicios como los siguientes ejemplos:

1) Indicar la propiedad que utilizo
2) Si o dado que → Condicional
   Y → Intersección
   O → Unión
   Al menos → Unión
   Todos → Intersección

Si estoy haciendo un ejercicio de probabilidad total debo:

1) Definir eventos (A1, A2, A3) y asignar sus probabilidades
2) Indicar que los A1, A2, A3 son particiones de S
3) Hipótesis que debe ir si o si:
    1. A1 u A2 u A3 = S
    2. A1, A2, A3 son mutuamente excluyentes de a dos
    3. P (A1) > 0 , P (A2) > 0, P (A3) > 0

4) Si también uso bayes debo indicar los 3 anteriores y P(B) > 0

Ejemplos vistos en clase:

marte 3 pr

- prob. condicional $\Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- regla mult $\Rightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B) = P(B|A)\cdot P(A)$
- 3 eventos $\Rightarrow P(A\cap B\cap C) = P(C|A\cap B)\cdot P(B|A)\cdot P(A)$
- eventos indep $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \\ P(A|B) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \end{array}\right\}$$

P2 Ej 7 y 8, 10, 11

$\neq$ mutuamente excluyentes

$A\cap B=\emptyset \Rightarrow P(A\cap B)=0$

probabilidad total }
bayes

6)a 9) si o si parcial

12) 13) 14)

PR 2 → 8

2 coco
3 ch

3 coco
2 ch
1 DDL

Ej

a) 'Dos de chocolate'

la independencia ya esta dada

Ch_1 = El caramelo extraido de la caja 1 es de chocolate
Ch_2

Ch_1 y Ch_2 son indep. (lo que extraigo de una no influye en la otra

$$(Ch_1 \underset{y}{\cap} Ch_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = 0,2$$

b) <u>exactamente 1 de chocolate</u>

porque $Ch_1 \cap Ch_2^c$ y $Ch_1^c \cap Ch_2$ son mutuamente excluyentes

$$P(Ch_1 \cap Ch_2^c) \cup (Ch_1^c \cap Ch_2) = P(Ch_1 \cap Ch^c) + P(Ch_1^c \cap Ch_2) =$$

$$= P(Ch_1) \cdot P(Ch_2^c) + P(Ch_1^c) \cdot P(Ch_2) =$$

propiedad complemento

por teorema los complementos tambien son ind

$\boxed{\text{justificar si o si}}$

si A y B son ind $\Rightarrow$ A y B^c tambien

aquel teorema de teoria

d) al menos uno de choc

$$P(Ch_1 \cup Ch_2) = 1 - P((Ch_1 \cup Ch_2)^c)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

es el complemento

c) ninguno de chocolate

$$P(Ch_1^c \cap Ch_2^c)$$

al menos es complemento del ninguno

11) a) $P(A|B) = 0{,}4$

$P(A) = 0{,}6$

$P(A|B) \neq P(A)$

conclusion no son indep. porque no cumplen definición

3) A = la suma de las 2 nros. es par

I = los dos nros son impares

S es finito y equiprobable

$P(A) = \frac{\#(A)}{\# S} = \frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} =$

se sacan los 2 números juntos

$P(I | A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{5}{2} / \binom{9}{2}}{\left[\binom{4}{2} + \binom{5}{2}\right] / \binom{9}{2}} =$

si ↓ x definición

$P(I \cap A) = \frac{\#(I \cap A)}{\# S} =$

de los impares tomo 2 $= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}}$

$= \frac{\binom{5}{2}}{\underbrace{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}}_{\text{forma intuitiva}}}$

$P(\underbrace{I | A}_{\text{nuevo esp muestral}}) = \frac{\#(I \cap A)}{\#(A)} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{5}{2} + \binom{4}{2}}$

si sale **si** o **dado que** condicional

si sale **y** es intersección

si sale **o** es unión

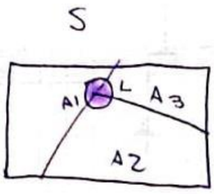
si sale **al menos** es unión

si sale **todos** es intersección

Ejercicio 12)

T. de prob total

• DEFINIR EVENTOS



A_1 = "El cliente cargo nafta normal" • $P(A_1) = 0,4$

A_2 = "Carga nafta extra" • $P(A_2) = 0,35$ } suma 1

A_3 = "premium" • $P(A_3) = 0,25$

"A_1, A_2 y A_3 forman una partición de S" | asignar prob |

L = "El cliente llena el tanque"

$P(L/A_1) = 0,3$ (de) $\qquad P(L/A_2) = 0,60 \qquad P(L/A_3) = 0,50$

a) $P(L \cap A_2) = P(L/A_2) \cdot P(A_2) = 0,6 \cdot 0,35 = \boxed{0,21}$ (y) — teorema mult

b) $P(L) = P(L/A_1) \cdot P(A_1) + P(L/A_2) \cdot P(A_2) + P(L/A_3) \cdot P(A_3) =$ regla mult

teorema de prob. total

c) $P(A_1 | L) = \dfrac{P(L \cap A_1)}{P(L)} = \dfrac{P(L|A_1)\, P(A_1)}{P(L)} =$ (si) — teorema prob. total

$=$

④ $P(L) > 0$ ← hipótesis bayes ①②③

si son Hipótesis:

① $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$

② $\cdot\ A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\cdot\ A_1 \cap A_3 = \emptyset$

$\cdot\ A_2 \cap A_3 = \emptyset$

[2 a 2 mutuamente excluyentes.

③ $\cdot\ P(A_1) > 0 \quad \cdot\ P(\ ) > 0 \quad \cdot\ P(A_3) > 0$

NO ES típico examen.

3R 7B

b) a) R_1 = "la bolilla extraída la 1ra es roja"

$P(R_1) = \frac{3}{10}$

$P(R_1^C) = \frac{7}{10}$

prop compl.

teorema prob total

pienso intuitivamente

$P(R_2) = P(R_2/R_1) \cdot \underbrace{P(R_1)} + P(R_2/R_1^C) \cdot \underbrace{P(R_1^C)}$

$\frac{2}{10} \quad \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \quad \frac{7}{10}$

2R
8B

4R
6B

① · R_1 y R_1^C forman partición de S

② · $R_1 \cup R_1^C = S$

· $R_1 \cap R_2 = \emptyset$

③ · $P(R_1) > 0$ $P(R_1^C) > 0$

R_2 = la segunda bolilla es roja

b) parece que la necesitaría NO ES BAYES

$P\left(R_1^C R_2^C \,/\, \underbrace{(R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2)^C}_{\text{uno sí}}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

A = blancas B = mismo color

regla mult.

$$\frac{P[R_1^C \cap R_2^C]}{P[(R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C)]} = \frac{P(R_2^C / R_1^C) \cdot P(R_1^C)}{P(R_1 \cap R_2) + P(R_1^C \cap R_2^C)} =$$

axioma 3

regla de mult.

$P(R_2^C / \underbrace{R_1^C}_{\text{Fijo}}) = 1 - P(R_2 / \underbrace{R_1^C}_{\text{Fijo}}) = \frac{6}{10}$

si → uso compl.

P2 10) A_i = "sale 1 en la tirada i-ésima" $i = 1, .., 5$ $n=5$

Las tiradas son independientes $P(A_i) = \frac{1}{6}$

a) Ninguno

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) =$$

$$\underset{\text{indep}}{=} P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot \ldots \cdot P(A_5^c) \underset{\text{prop comp.}}{=}$$

$$= (1 - P(A_1)) \ldots (1 - P(A_5)) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

A y B indep

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A|B) = P(A)$

$\neq$

$A \cap B = \emptyset$

A y B son exc.

c) al menos uno

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) \underset{\text{prop comp}}{=} 1 - P[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5)^c] \underset{\text{de morgan}}{=}$$

$$= 1 - P(A_1^c \cap \ldots \cap A_5^c) =$$

al menos 1 es complemento de NINGUNO

b) $P[(\underbrace{A_1}_{\text{1er lugar}} \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap \underbrace{A_2}_{\text{2do}} \cap A_3^c \cap \ldots \cap A_5^c) \cup \text{3ro} \cup \text{4to} \cup \text{5to}] =$

↳ mutuamente excluyentes

$$\underset{\text{3 axioma}}{=} P(A_1 \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_5^c) + \ldots + P(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_5) = \text{?}$$

unión es sobre +

$$\underset{\text{indep}}{=} P(A_1) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c) \ldots P(A_5^c) + \ldots + P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \ldots P(A_5) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = 5 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$$

PRACTICA 3

Variables aleatorias discretas

Supongamos que S es un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, una variable aleatoria es una función de S en R

Notación MAYUSCULA.

Ejemplos:

1- Se tira una moneda tres veces

Sea X la v.a. X: "número de caras obtenidas luego de los tres tiros"

Si tomamos como espacio muestral

$$S = \{(c,c,c);(c,c,s);(c,s,c);(s,c,c);(c,s,s);(s,s,c);(s,c,s);(s,s,s)\}$$

entonces

$$X((c,c,c)) = 3$$
$$X((c,c,s)) = X((s,c,c)) = X((c,s,c)) = 2$$
$$X((c,s,s)) = X((s,c,s)) = X((s,s,c)) = 1$$
$$X((s,s,s)) = 0$$

La imagen de esta función es el conjunto $\{0,1,2,3\}$

Dada una v.a. X a su imagen se la anota R_X y se la denomina ***rango o recorrido de X***

En general las variables aleatorias se clasifican según su rango en Rx

Si Rx es finito o infinito numerable entonces X es una variable aleatoria discreta. Es cuando cuento.

Si Rx es infinito real (no numerable) es variable continua. Es cuando mido.

Variables aleatorias discretas

Supongamos que X es una v.a discreta con rango Rx anotamos Rx = {x1, x2, …, xn} o Rx = {x1, x2, …}

A cada xi de Rx se le asigna un numero p(xi) = P (X = xi) al conjunto de todos los pares (xi, pxi) se lo llama función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria (f.d.p de x)

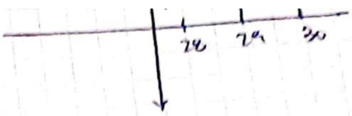
Debe cumplirse

1) p (xi) >= 0 para todo xi en Rx
2) La suma de todos los p (xi) debe dar 1

Se puede presentar la distribución de probabilidad de X en una tabla de la siguiente forma

x	0	1	2	3
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$p(x_i)$ | $\frac{[illegible]}{9}$ $\frac{[illegible]}{9}$ $\frac{[illegible]}{9}$ $\frac{[illegible]}{9}$ $\frac{[illegible]}{9}$



Ej)

Un embarque de 8 microcomputadoras similares para un negocio contiene 3 que están defectuosas, una escuela hace una compra al azar de 2 de estas computadoras.

X "no computadoras defectuosas compradas por la escuela"

Hallar la f.d.p de X

1) espacio rango

$S = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{3,5\} \dots\}$ $\boxed{3D \quad 5ND}$ 8 → 2

$\#S = \binom{8}{2}$

$R_X = \{0,1,2\}$

$P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$

$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$

$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$

→ puede ser - el rango

x	0	1	2
$p(x_i)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

Es con tabla dada.

un negocio de pc que atiende pedidos por correo tiene 6 líneas telefónicas sea

X: " el nro de líneas en uso en un momento especificado "

supongamos que f.d.p de x

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,20	0,06	0,04

calcular la probabilidad de los siguientes eventos (de R_x)

a) a lo sumo 3 líneas están en uso $\{X \leq 3\}$

$$P(x \leq 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$$
$$0,10 + 0,15 + 0,20 + 0,25$$

b) menos de 3 líneas están en uso $\{x < 3\} = \{x \leq 2\}$

$$P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$$
$$0,10 + 0,15 + 0,20$$

c) por lo menos 3 líneas están en uso $\{x \geq 3\}$

$$P(x \geq 3) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$$
$$0,25 + 0,20 + 0,06 + 0,04$$

otra forma

$$P(x \geq 3) = 1 - (P < 3)$$

d) entre 2 y 5 líneas inclusive están en uso $\{2 \leq x \leq 5\}$

$$P(2 \leq x \leq 5) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5)$$
$$0,20 + 0,25 + 0,20 + 0,06$$

Función de distribución acumulada de v.a discreta.

Sea x una v.a discreta con rango Rx y f.d.p p (xi) se define la función de distribución acumulada de x (f.d.a de x) como la siguiente función

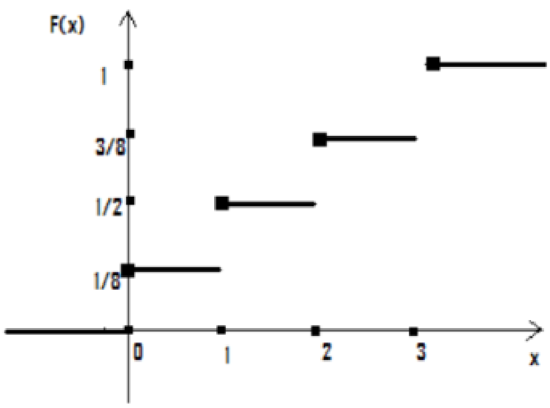
F (X) = P (X <= x)   - infinito <= x <= infinito y se calcula

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \qquad -\infty < x < \infty$$

f.d.a de la tabla (f.d.p) que se muestra más arriba

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La gráfica de la F.d.a. de X es



- En general la f.d.a de una v.a discreta es creciente, escalonada.
- Las discontinuidades se encuentran en los xi pertenecientes a Rx
- La magnitud de “salto” en xi es igual a P (X = xi)

Además si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los valores del rango de X ordenados de menor a mayor entonces

$$P(X = x_1) = F(x_1)$$
$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \qquad i = 2, \ldots, n$$

Es decir, se puede obtener la función de distribución de X a partir de su F.d.a.

Para números cualesquiera a y b

1- Si $a \le b$ entonces $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a)$

2- Si $a < b$ entonces $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$

3- Si $a < b$ entonces $F(a) \le F(b)$ (es decir $F(x)$ es una función creciente)

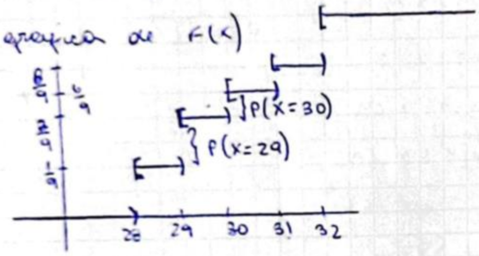
Sea X una v.a con f.d.p.

x_i	28	29	30	31	32
$p(x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

calculando la F.d.a de X

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 28 \\ \frac{1}{9} & \text{si } 28 \le x < 29 \\ \frac{3}{9} & \text{si } 29 \le x < 30 \\ \frac{6}{9} & \text{si } 30 \le x < 31 \\ \frac{8}{9} & \text{si } 31 \le x < 32 \\ 1 & \text{si } x \ge 32 \end{cases}$$

la gráfica de F(x)



- Su graf. la F.d.a de una v.a discreta es creciente, escalonada.
- Las discontinuidades se encuentran en los $x_i \in R_x$
- La magnitud del "salto" en x_i es igual a $P(X = x_i)$

$F(28) = P(X \le 28) = P(X = 28) \quad \therefore P(X=28) = F(28)$

$F(29) = P(X \le 29) = \underbrace{P(X \le 28)}_{F(28)} + P(X = 29)$

$\therefore P(X=29) = F(29) - F(28)$

$\{X \le 29\} = \underbrace{\{X \le 28\} \cup \{X = 29\}}_{\text{mutuamente excluyentes}}$

$F(30) = P(X \le 30) = \underbrace{P(X \le 29)}_{F(29)} + P(X = 30)$

$\therefore P(X=30) = F(30) - F(29)$

8) un negocio de comp. que atiende pedidos x correo etc.

X: "nº de líneas en uso en 1 momento dado"

x_i	0	1	2	3	4	5	6
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,20	0,06	0,04

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0{,}10 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0{,}25 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0{,}45 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0{,}70 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0{,}90 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0{,}96 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

En gral

$$P(x_i \leq X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_{i-1}) \quad i<j$$

$$P(x_i < X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i) \quad i<j$$

calcular usando f.d.a

a) $P(X \leq 3) = F(3) = 0{,}70$

b) $P(X < 3) = F(2) = P(X \leq 2) = 0{,}45$

c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0{,}45$

d) $P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X < 2) =$

$= P(X \leq 5) - P(X \leq 1) =$

$= F(5) - F(1) = 0{,}96 - 0{,}25$

Esperanza de una variable aleatoria discreta

Sea X una v.a. discreta con rango R_X. La ***esperanza , valor medio o valor esperado de X***, lo anotamos $E(X)$, y se define como

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

La sumatoria se hace sobre todos los posibles valores de X

Otra notación usual es μ_X o μ

E(X) = sumatoria (de todos los xi de rx) de xi * p(xi)

Esperanza de una función de una variable aleatoria discreta

En general si X es una variable aleatoria discreta y h(x) es una función cualquiera entonces si Y = h(x) es otra variable aleatoria se puede calcular E(Y) sin hallar previamente la f.d.p de Y utilizando el siguiente teorema:

Sea x una variable aleatoria discreta con f.d.p p (xi) y sea h(x) una función de R en R y sea Y = h(x) entonces

E(Y) = $E(h(X)) = \sum h(x)p(x)$

Propiedad de linealidad de la esperanza

En general si h(x) = aX + b, ósea Y = aX + b

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

La esperanza no puede ser más chica que el valor más pequeño de Rx ni más grande que el valor más grande de Rx

Varianza de una variable aleatoria

Sea X una v.a. discreta con rango R_X, función de distribución de probabilidad *p(x)* y esperanza $E(X)=\mu$,

Entonces la ***varianza de X***, que anotamos $V(X)$, σ^2 o σ_X^2 es

$$V(X)=E\left[(X-\mu)^2\right]=\sum_{x\in R_X}(x-\mu)^2\,p(x)$$

La ***desviación estándar de X*** es $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Propiedades

1) La varianza siempre es >= 0 V(x) >= 0
2) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
3) $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Variable aleatorias discretas importantes

¿Qué es un experimento binomial? Supongamos que tenemos un experimento aleatorio E cualquiera, se realizan n repeticiones independientes de E(n fijado de antemano). Sea A un evento asociado a E. En cada repetición de E se observa si ocurre A o no ocurre A.

P(A) = p → es la misma en cada repetición del experimento.

Entonces decimos que tenemos un experimento binomial.

Ejemplo) Se tira una moneda 10 veces. Supongamos que P(cara) es = ¾

A: "Sale cara" E: "tirar una moneda" n = 10

Los tiros de una moneda son independientes → P(A) = ¾ en cada tiro.

Observación:

- Si las extracciones se hacen con reemplazo, hay independencia, por lo tanto puede ser binomial
- Si las extracciones se hacen sin reemplazo, no hay independencia, por lo tanto no puede ser binomial.
- Si las extracciones se hacen sin reemplazo pero (n/N) > 0,05 siendo n la cantidad de cosas que extraigo y N la cantidad total que hay, puedo seguir pensando que hay independencia, por lo tanto, puede ser binomial

Distribución binomial

Notación: X ~ B (n,p)

En un experimento binomial si X: "nro. de veces que ocurre A" en las repeticiones del experimento

Rx = {0, 1, 2, …, n} la f.d.p se puede representar como:

P (X = k) (n tomados de a k) * p^k * $(1-p)^{n-k}$

En el ejemplo anterior de las monedas

¿cuál es la prob de que en 10 tiros de la moneda se obtengan 4 caras?

X: "nro de veces que sale cara en los 10 tiros de la moneda"

$X \sim B\left(10, \frac{3}{4}\right) \qquad P(X=4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(1-\frac{3}{4}\right)^{10-4}$

¿cuál es la probabilidad de que en 10 tiros de la moneda se obtenga a lo sumo 4 caras?

$P(X \leq 4) = ? = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = F(4)$

hay tablas en clase de f.d.a

si el p no está en la tabla no la uso.

F(4) = 0,020

$\boxed{\text{la tabla trunca}}$

TEOREMA

$$\boxed{\text{Sea} \quad X \sim B(n,p), \quad \text{entonces} \quad E(X) = np \quad \text{y} \quad V(X) = np(1-p)}$$

Distribución geométrica

Notación: X ~ G (p)

Supongamos que se tiene un experimento aleatorio. Sea A un evento asociado al experimento.

Se realizan repeticiones independientes del experimento hasta que ocurre el evento A por primera vez.

P(A) = p en cada repetición

Sea X: “nro. de repetición hasta que ocurre A por primera vez inclusive”

$P(X = k) = (1-p)^{k-1} * p$

$$F(x) = \begin{cases} 1-(1-p)^{[x]} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

TEOREMA

Sea $X \sim G(p)$ entonces $E(X) = \dfrac{1}{p}$ y $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

E) Un proceso que llena paquetes se detiene cada vez que se detecta uno cuyo peso no cumple la especificación. Suponga que cada paquete tiene p: 0,01 de no cumplir con la especificación y que los pesos de los paquetes son ind.

a) ¿Cuál es la p de que a lo sumo deban llenarse 80 paquetes para encontrar el primero que no cumple con la especificación?

b) determine el nro medio de paquetes llenados antes de que se detenga el proceso

TEOREMA: $X \sim G(p) \quad E(x) = \frac{1}{p} \quad V(x) = \frac{1-p}{p^2}$

a) X: "nro de paquetes que llena un proceso hasta encontrar el 1ero que no cumple con la especificación"

A: "el peso del paquete no cumple la especificación"

$P(A) = 0{,}01$

$X \sim G(0{,}01) \qquad P(x=k) = 0{,}01 \cdot (1-0.01)^{k-1}$

a) $P(X \leq 80) = F(80) = 1 - (1-0{,}01)^{80} = 1 - (0{,}99)^{80} = 0{,}\cancel{4479}\,5525$

b) $E(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}01} = 100$ → mientras mas chiquito p ↑ mas esperanza

CS Escaneado con CamScanner

Distribución binomial negativa:

Notación: X ~ BN (r,p)

Se tiene un experimento aleatorio y A es un evento asociado al experimento.

P(A) = p es la misma en cada repetición del experimento

Se realiza repeticiones del experimento hasta que ocurre A por r-esima vez.

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \qquad k = r, r+1, r+2, \ldots\ldots$$

TEOREMA

$$\text{Si } X \sim BN(r,p) \text{ entonces } E(X)=\frac{r}{p} \quad \text{y} \quad V(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

Distribución hipergeométrica

Notación: X ~ H (n, M, N)

En general se tiene una población de N objeto de los cuales M tienen una característica particular y los N – M no la tienen. Se extraen al azar n objetos sin importar el orden

Sea X: "nro. de objetos con a la característica particular entre los n objetos extraídos"

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \max(0,n-N+M)\le k\le \min(n,M)$$

TEOREMA

$$\text{Si } X \sim H(n,\ M,\ N) \text{ entonces } E(X)=\frac{nM}{N} \quad \text{y} \quad V(X)=n\frac{M}{N}\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Si N es muy grande comparado a n puedo asumir independencia en las extracciones por lo tanto puedo aplicar binomial ((n/N) < 0,05)

EJ)

un embarque de 120 alarmas contra robo contiene 5 que son defectuosas. Si 3 de dichas alarmas se seleccionan al azar sin orden y se embarcan a un cliente encuentre la p. de que el cliente obtendrá una unidad defectuosa

X = "nº de unidades defectuosas recibidas por el cliente"

$X \sim H(n=3, M=5, N=120)$

$P(X=k) = \dfrac{\binom{5}{k}\binom{115}{3-k}}{\binom{120}{3}}$ $\quad P(X=1) = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{115}{3-1}}{\binom{120}{3}} = 0{,}\underline{11}670$

$\dfrac{3}{120} < 0{,}05$ $\rightarrow$ en teoría sí tiene que parecer a binomial

dos teorica

Usando la aproximación binomial $X \approx B\left(n=4, p=\frac{5}{120}\right)$

$P(X=1) \approx \binom{3}{1}\left(\frac{5}{120}\right)^1\left(1-\frac{5}{120}\right)^{3-1} = 0{,}\underline{11}48$ 12 y 13 todavía NO

Distribución de Poisson

Notación: X ~ P (λ)

Una v.a. X con rango RX = {0, 1, 2, ...} se dice tener distribución de Poisson con parámetro λ , si para algún λ > 0

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad k = 0,1,2,.....$$

TEOREMA

$$\text{Si} \quad X \sim P(\lambda) \quad \text{entonces} \quad E(X)=\lambda \quad \text{y} \quad V(X)=\lambda$$

Aplicaciones de Poisson

1) Aproximación Poisson a la Binomial (n grande y p chico)
   Si X ~ B(n,p) se puede probar que cuando np < 7 entonces

$$P(X = k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

   Con λ = np

donde $\lambda = np$

Ej) X: "nro de articulos defectuosos" $X \sim B(10, 0{,}1)$

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}7361$

$P(X=k) = \binom{10}{k} 0{,}1^k (1-0{,}1)^{10-k}$

como $np = 10 \times 0{,}1 = 1 < 7$ podemos aplicar la aprox Poisson

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}7358$

$P(X=k) \approx e^{-1} \frac{1^k}{k!} =$

poisson

Ej) tarea

$X \sim B(10^5, 2\times 10^{-5})$ no $(5\times 10^3, 4\times 10^{-5})$ $P(2)$

apunte teorico

Ej) X: "nro lados que fallan tarjeta"

$X \sim B(200, 0{,}01)$

a) $P(X \geq 4) = P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{200}{k} 0{,}01^k (1-0{,}01)^{200-k} =$

$= 1 - 0{,}858034$

mas facil hacer a mano aproximacion Poisson, cuentas simplificadas

$X \approx P(\lambda)$ $\lambda = np = 200 \times 0{,}01 = 2$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-2} \frac{2^k}{k!} = 1 - F(3)$

$1 - 0{,}857$

si pide aproximada → aproximación Poisson.

2) Describir procesos de Poisson
   Me interesa observar eventos que ocurren aleatoriamente en un intervalo de tiempo fijado por ejemplo intervalo (0,t) supongamos que:
   1) La probabilidad que ocurra exactamente un evento en (0,t) es la misma para todo intervalo de longitud t y es igual a at si la longitud del intervalo es muy pequeña.

2) La probabilidad de que ocurran 2 o más eventos de un intervalo de longitud t es la misma para todos los intervalos de longitud t y es casi 0 si la longitud del intervalo es muy pequeña
3) El nro. de ocurrencias en el intervalo I, es independiente del número de ocurrencias en el intervalo I2 si I1 e I2 no se superponen

Si se cumple 1, 2 y 3 se dique que tenemos un proceso de Poisson

Definimos X: "nro. de eventos que ocurren en (0,t)

Se puede probar que X tiene distribución Poisson

X ~ P (λ) con λ= at

Observación: E(X) = λ = at → a =E(X)/t → tasa o rapidez del proceso.

E) en un mostrador los clientes llegan a un promedio de 1,5 por minuto — tasa o rapidez del proceso

encuentre la prob de que

a) a lo sumo 4 llegaran en algun minuto dado

b) al menos 3 llegaran durante un intervalo de 2 minutos

suponga que la llegada de clientes es proceso de Poisson

a) X: "nro de clientes que llegan al mostrador en 1 minuto"

$X \sim P(\lambda) \quad \lambda = \alpha t = 1{,}5 \times 1 = 1{,}5$

$$P(X = k) = \frac{e^{-1{,}5}\, 1{,}5^k}{k!}$$

$$P(X \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} P(X = k) = \frac{e^{-1{,}5}\, 1{,}5^k}{k!} \overset{\text{app}}{=} 0{,}98142$$

b) Y: "nro de clientes que llegan en 2 minutos"

$X \sim P(\lambda) \quad \lambda = \alpha t = 1{,}5 \times 2 = 3$

$$P(Y \geq 3) = P(Y \geq 3) = 1 - P(Y <= 2) = 1 - F(2) \overset{\text{tabla}}{=} 1 - 0{,}423$$

$$\boxed{= 0{,}577}$$

Temporales

en vez de $\overline{\text{tiempo}}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{area o long.}}_{\text{espaciales}}$ ✓

Se describieron los procesos de Poisson temporales. Análogamente se pueden describir los procesos de poisson espaciales.

Ej) el nro de fallas en cable de fibra opt. sigue proceso Poisson con promedio de 0,6 en cada 100 pies

A) encuentre la prob de exact. 2 fallas en cable de 200

B) encuentre la prob exact 1 falla en los primeros 100 pies y exacta 1 falla en los 2do 100 pies

a) X: "nro de fallas en un cable de 200 pies"

$$X \sim P(\lambda) = \lambda = \alpha L = 0,6 \times 2 = \ldots 1,2$$

$$P(X=x) = \frac{e^{-1,2}\, 1,2^{x}}{x!} =$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-1,2}\, 1,2^{2}}{2!} = 0,216$$

b) X_1: "nro de fallas en los primeros 100 pies"

X_2: "nro de fallas en los segundos 100 pies"

$$X_1 \sim P(\lambda) \quad \lambda = \alpha t = 0,6 \times 1 = 0,6$$

$$X_2 \sim P(\lambda) \quad \lambda = \alpha t = 0,6 \times 1 = 0,6$$

$$P(\{X_1=1\} \cap \{X_2=1\}) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{indep.} \\ \text{prop 3}}}{=} P(X_1=1) \cdot P(X_2=1) = \left(\frac{e^{-0,6}\, 0,6^{1}}{1!}\right)^2 =$$

$$= (0,32928)^2 = 0,10842$$

<u>Cuestiones a tener en cuenta en el parcial</u>

MODELIZAR ASI SUPER DUPER IMPORTANTE

hipergeo 14, 15

10 bin neg geom

poisson 12 13

Realizar P3 ejer C 7 - 15

1) def v.a

2) dist v.a

3) parámetros v.a

4) planteo

y 5) rango

del 7 al 15

éxito – fracaso

Ejemplo ejercicio 11

- X = "nro de días hasta que el S.O se descomponga por 1ra vez"
- $R_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $X \sim G(p)$
- $p = 0{,}1$

pide $P(X = 12) = 0{,}03138$

app

- $E(X) = \frac{1}{p} = 10$
- $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

$\Omega = \{S, N, t, p\}$

Si pongo la E(X) y la V(X) debo de poner sus definiciones

P3

X v.a → discretas → R_X es finito o ∞ numerable (contar)
→ continuas → R_X es ∞ NO numerable (medir)

· Definir v.a (coloquialmente) → siempre aunque este
· rango

2) Sí o sí
· X = "nro de autos con manchas entre 6"
· $R_X = \{0,1,2,3,4\}$

10 autos → 4 / 6

f.d.p $f(x) = p(x) = P(X = x) \quad x \in R_X$

x	0	1	2	3	4
f(x)	O	O	O		

verificar
- $\sum_{x \in R_X} f(x) = 1$
- $f(x) \geq 0$

si es decimal → redondear

$f(0) = P(X=0) = \dfrac{\binom{4}{0}\binom{6}{6}}{\binom{10}{6}} = \dfrac{1}{210}$

$f(1) = P(X=1) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{6}{5}}{\binom{10}{6}} = \dfrac{24}{210}$

$P(X \leq 2)$ → sumo 0 1 2

definiciones

$\mu = E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot f(x)$

$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot f(x)$

$\boxed{V(X) \geq 0}$

$\mu = E(X)$ da un nro → dentro de R_X

1ro se escribe definicio
2do resuelr

1) $\sum_{x \in R_x} x \cdot f(x)$

2do) $-3 \cdot 0,7 + (-2) \cdot 0,3$

$\sigma = dT(x) = \sqrt{V(x)}$

$E(aX+b) = aE(x) + b$ linealidad de la $E(x)$

$V(aX+b) = a^2 V(x)$ prop varianza

6) a) X = "nro tambores pedidos por un cliente" $R_x = \{1, 2, \dots, 5\}$ datos f.d.p

- $E(x) = \sum_{x=1}^{5} x \cdot f(x) = 1 \cdot f(1) + \dots + 5 \cdot f(5) = 2,3$

definicion cuentas

- $E(x^2) = \sum_{x=1}^{5} x^2 \cdot f(x) = 1^2 \cdot f(1) + \dots + 5^2 f(5) = 7,1$
- $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = 7,1 - 2,3^2 = 1,81$
- $dT(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1,81}$

b) Y = "nro de galones por un cliente" 1 tambor — 10 galo

$\boxed{Y = 10X}$ $R_y = \{10, 20, 30, 40, 50\}$

b.) f.d.p

Y	10	20	30	40	50
F(y)	0,4				

$f_y(10) = P(Y=10) = P(10X=10)$
$= P(X=1) = f_X(1)$

b2) $E(Y) = E(10 \cdot X) = 10 \cdot E(X) = \boxed{23}$

linealidad

$V(Y) = V(10 \cdot X) = 10^2 \cdot V(X) = 181$

prop

PRACTICA 3

Variables aleatorias continuas

Si x es una variable aleatoria con Rx si Rx es un intervalo real entonces X es una v.a continua. Al ser Rx un intervalo real se puede dar la siguiente definición:

Sea X una v.a.. Decimos que es ***continua*** si existe una función no negativa f, definida sobre todos los reales $x \in (-\infty, \infty)$, tal que para cualquier conjunto B de números reales

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

f(x) es la función de densidad de probabilidad de x (f.d.p de x)

Observaciones:

1- Como X debe tomar algún valor real, entonces debe cumplirse que

$$1 = P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

2- Si B es el intervalo real $[a,b] = \{x \in R;\ a \le x \le b\}$ entonces

$$P(X \in B) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

Notar que en este caso la probabilidad de que X tome valores en el intervalo $[a,b]$ es ***el área bajo f entre a y b***

3- Si en la observación anterior $a = b$ entonces

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

Es decir la probabilidad que una v.a. continua tome algún valor fijado es cero. Por lo tanto, para una v.a. continua

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

La f.d.a de una v.a continua con f.d.p f(x) es

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad -\infty < x < \infty$$

Observaciones:

1)

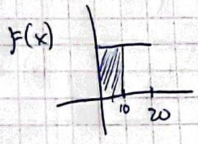
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2) Si derivo F(X) obtengo f(x) (si derivo f.d.a obtengo la f.d.p)

Ejemplo)

sea la v.a continua X: "corriente en miliamperes en un conductor delgado de cobre" con f.d.p

$$f(x) = \begin{cases} 0,05 & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$



cual es la p de que una medición de corriente sea menor que 10 miliamp

$$P(X<10) = \int_{-\infty}^{10} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{10} 0,05\,dx = \int_{0}^{10} 0,05\,dx =$$

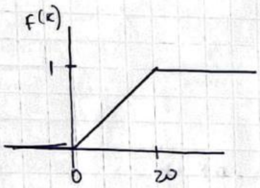
$$= 0,05\,x \Big|_0^{10} = 0.05(10-0) = 0,5$$

cual es la p de que una med de corr este entre 5 y 15 miliam

$$P(5 < X \leq 15) = \int_5^{15} 0,05\,dx = 0,05\,x \Big|_5^{15} = 0,05(15-5) = 0,5$$

halla f.d.a

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \int_0^x 0,05\,dt & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 1 \text{ si } x > 20 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 0,05x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 1 & \text{si } x>20 \end{cases}$$



En gral la f.d.a de una v.a continua es una función continua

↓ si tengo esta no uso (f.d.a) ⇒ derivo cada tramo pero cuidado en limites que pueden no ser derivable

Esperanza de v.a continua

sea X una v.a continua con f.d.p f(x)

Esperanza de una variable aleatoria continua

La esperanza de una v.a. continua X con *f.d.p.* $f(x)$ se define como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

A menudo se desea calcular la esperanza de una función de X, $Y = h(X)$, esto se puede hacer hallan do previamente la densidad de Y y luego calcular $E(Y)$ aplicando la definición anterior.
Otra forma de calcular $E(Y)$ sin hallar la densidad de Y está dada por el siguiente

Teorema: Si X es una v.a. continua con *f.d.p.* $f(x)$ y $h(X)$ es cualquier función de X, entonces

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$$

Notar que de la misma forma que en el caso discreto, si $h(x) = ax + b$, es decir si h es una función lineal, aplicando las propiedades de linealidad de la integral tenemos

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Varianza de una variable aleatoria continua

Sea X una v.a. continua con *f.d.p.* $f(x)$ y sea $E(X) = \mu$, entonces la varianza de X es

$$V(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - \mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Propiedades

1) La varianza siempre es >= 0 V(x) >= 0
2) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
3) $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Distribución uniforme

Notación: X ~ U [a,b]

Una v.a. continua X se dice que tiene distribución uniforme en el intervalo [a,b], con a < b, si tiene función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a\leq x\leq b\\ 0 & \text{caso contrario}\end{cases}$$

Y f.d.a

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a\leq x\leq b\\ 1 & \text{si} \quad x>b\end{cases}$$

TEOREMA:

Sea una X variable aleatoria continua distribuida uniformemente en el intervalo $[a,b]$, es decir $X \sim U[a,b]$. Entonces, $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ y $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Distribución normal

Notación: X ~ N (μ, σ^2)

Sea X una variable aleatoria continua, sea μ perteneciente a R y σ > 0

X tiene distribución normal con parámetro μ, σ si su f.d.p es:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty<x<\infty$$

TEOREMA:

Si X ~ N (μ, σ^2)

E(X) = μ

V(X) = σ^2

Distribución normal estandarizada

Si μ = 0 y σ = 1 entonces X ~ N (0, 1) entonces f.d.p se anota:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Y la f.d.a

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt$$

$$\Phi(-x) = P(X \leq -x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$$

Estandarizar

Teorema: si X ~ N (μ, σ^2) y Y = aX + b se puede probar que Y ~ N (a μ + b, a2 σ2)

Además:

$$\text{si} \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{entonces} \quad Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Y es X estandarizada.

Si se quiere calcular $P(X \leq x)$

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$Y \sim N(0,1)$

Ejemplo

$X \sim N(3, 9) \quad \mu = 3 \quad \sigma^2 = 9$

estandarizo

a) $P(2 < X < 5) = P\left(\frac{2-3}{3} < \underbrace{\frac{X-3}{3}}_{Y \sim N(0,1)} < \frac{5-3}{3}\right) =$

Tabla

$$\Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi(0{,}66) - \Phi(-0{,}33)$$

ya tengo el 3 restando

c) $P(|X-3| > 6) = P(|X-3| > 6) = 1 - P(|X-3| \leq 6) =$

$= 1 - P(-6 \leq X-3 \leq 6) =$

$= 1 - P\left(-\frac{6}{3} \leq \underbrace{\frac{X-3}{3}}_{Y \sim N(0,1)} \leq \frac{6}{3}\right)$

$= 1 - [\Phi(2) - \underbrace{\Phi(-2)}_{1-\Phi(-2)}] = 1 - [\Phi(2) - (1 - \Phi(2))] =$

$= 1 - [2\Phi(2) - 1] =$

$= 2 - 2\Phi(2)$

El volumen de latas llenados por cierta maquina se distribuye normalmente con media 12,05 onzas y desviación estandar de 0,3 onzas

¿que proporcion de latas contiene menos de 12 onzas?

X: "volumen de llenado de una lata tomada al azar (en onzas)"

$X \sim N(12{,}05,\ 0{,}03^2)$

$$P(X \leq 12) = P\left(\overbrace{\frac{X-12{,}05}{0{,}03}}^{Y \sim N(0,1)} \leq \frac{12-12{,}05}{0{,}03}\right) = \Phi\left(\frac{12-12{,}05}{0{,}03}\right)$$

$= \Phi(-1{,}666) = 0{,}0485$

Distribución exponencial

Notación: X ~ Exp (λ)

Si X es una v.a continua sea λ > 0, X tiene distribución exponencial con parámetro λ si su densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad \text{donde} \quad \lambda > 0$$

La f.d.a es:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

TEOREMA:

$$\boxed{\text{Sea } X \sim Exp(\lambda) \text{ entonces } E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Propiedades

1) Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson.

   Si tenemos un proceso de Poisson temporal y X: "nro de ocurrencias en (0,t)"
   X ~ P(at)   siendo λ = at

   Sea Y: "tiempo entre las dos ocurrencias consecutivas"
   Se puede probar que Y ~ Exp (λ)

ej) Una masa radioactiva emite partículas de acuerdo con un proceso de poisson con una tasa de 15 part. x minuto, en algún punto inicia un reloj, ¿cual es la Prob de que ocurren 5 seg antes de la siguiente emisión?

X: "no de partículas emitidas en 1 ~~minuto~~ segundo" UNIFICAR

$X \sim P(\lambda)$ $\quad \lambda = 15 \cdot \frac{1}{60} = \ldots$

Y: "tiempo en segundos entre 2 emisiones sucesivas"

$Y \sim Exp\left(\frac{15}{60}\right)$ $\quad F(y) = 1 - e^{-\frac{15}{60} y}$

$P(Y > 5) = 1 - P(Y \leq 5) \quad 1 - F(5) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{15}{60} \cdot 5}\right) = e^{-\frac{15}{60} \cdot 5} =$

$= 0,2865$

2) Falta de memoria

si $X \sim Exp(\lambda)$ y t y s son números positivos, entonces $P(X > t + s / X > s) = P(X > t)$

Consideraciones para el parcial:

Repaso de derivadas e integrales

$f(x)$	$f'(x)$
x^m	$m \cdot x^{m-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$
1	0
Const	0

$f(x)$	Primitiva	
x^m	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$	$m \neq -1$
e^x	$e^x + c$	
1	$x + c$	
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + c$	aca entra -1

reglas de derivacion

- $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

integrales indefinidas

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$$

voy a la primitiva

$$\int \left(3x^5 + \frac{1}{x}\right) dx = \int 3x^5\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = 3\int x^5\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= 3\frac{x^6}{6} + \ln|x| + C$$

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \cancel{\int f(x)\,dx \int g(x)\,dx}$$

Regla de barrow → acumulada

$$\boxed{\int_a^b \underbrace{f(x)}_{f.d.p}\,dx = \underbrace{\left(F(x)\right)}_{f.d.a}\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$$

↓ integrales propias

f.d.a
$F(x) = P(X \le x)$

X va disc — Y va cont

R_X finito o inf num — R_X inf no num

$f(x) = P(X=x)$ — f(x) es la f. de densidad

f.d.p → $\sum_{x\in R_X} f(x) = 1$, $f(x) \ge 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$f(x) \ge 0$

$f(x) \ne P(X=x)$

$P(X=a) = 0$

$F(x) = P(X \le x)$
f.d.a

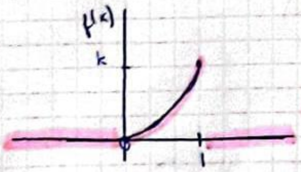
Sea X una v.a continua

$$f(x) = \begin{cases} k\cdot x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

a) Hallar k para ser f. de densidad

b) Hallar $E(x)$ y $V(x)$

c) Hallar f.d.a de X ↗ integrar



3 regiones

$x<0$

$0 \le x \le 1$

$x>1$

plantear esto

a) · $f(x) \ge 0 \quad \forall x \rightarrow k>0$

· $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} \cancel{0}\,dx}_{0} + \int_0^1 kx^2\,dx + \underbrace{\int_1^{\infty} \cancel{0}\,dx}_{0}$$

escribir todas porque

primitiva

$$k \int_0^1 x^2\,dx = k \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{k}{3} = 1$$

escribo definición

$k = 3$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x.0\,dx}_{0} + \int_0^1 x.3x^2\,dx + \underbrace{\int_1^{+\infty} x.0\,dx}_{0}$$

$$= \int_0^1 3x^3\,dx + \cancel{0} = 3\int_0^1 x^3\,dx = 3\cdot\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right) = \boxed{\frac{3}{4}}$$

verificar que da dentro de rango

debe dar entre 0 y 1

rango

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \int_{-\infty}^{0} + \int_0^1 + \int_1^{\infty} = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx$$

verificar que sea positivo

- $E(aX+b) = aE(X) + b$
- $V(aX+b) = a^2 V(X)$

otro estilo ejercicio

$\boxed{\text{la saco derivando}}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

dato F.d.a

$$\text{pide } f(x) = F'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

c) Hallar la F.a.a : $\boxed{\text{cuidado!}}$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)\, d\tau =$$

otra letra (v. auxiliar)

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

tiene 3 regiones porque la f(x) tiene 3 regiones

derivar para verificar

C. auxiliares

f(x) en x < 0

① si $x < 0 \rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, d\tau = 0$

paso x 2 reg

② si $0 \leq x \leq 1 \rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)\, d\tau =$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, d\tau + \int_{0}^{x} 3\tau^2\, d\tau = \left(\tau^3 \Big|_0^x\right) = \boxed{x^3}$$

paso x 3 reg

③ si $x > 1 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} 0\, d\tau + \int_{0}^{1} 3\tau^2\, d\tau + \int_{1}^{x} 0\, d\tau = 1$

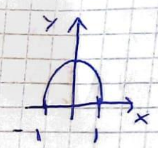
Veri: $F'(x) = f(x)$ x^3 no se rompe nunca

- sea continua — lo que termino en una línea arranca en la otra

... ej. del último tema si o si

PE 4) ejer 2

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}75\,(1 - x^2) & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$



Hallar acum de X

definición ya si o si

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)\, d\tau = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\, d\tau = 0 & \text{si } x < -1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0\, d\tau + \int_{-1}^{x} 0{,}75\,(1-\tau^2)\, d\tau & \text{si } -1 < x < 1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0\, d\tau + \underbrace{\int_{-1}^{1}}_{1} + \int_{1}^{x} 0\, d\tau & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

se puede obviar y poner 0 y 1

NO la hago porque sé que F.D.P de esa da 1

C. auxiliar $\nearrow$ obligatorio

$$\int_{-1}^{x} 0{,}75\,(1-t^2)\,dt = 0{,}75\int_{-1}^{x}(1-t^2)\,dt = 0{,}75\left(t-\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{x}\right) =$$

$$= 0{,}75\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\right)$$

si derivo f.d.a

me da f.d.p

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0{,}75\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\right) & \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$P(x \leq 0) = F(0) = 0{,}75 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}5$

- $P(-0{,}5 < x < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}5)$
- $P\left(x > \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(x \leq \frac{1}{3}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{3}\right)$

$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = 0$

$\searrow$ f. de densidad

dist. continuas $\to$ EXP, NORMAL, UNIFORME

si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

EXPONENCIAL $\to$ (11 al 14)

11) a) • X = "tiempo de rta (seg) de una pc"

• $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ la media es 3

• $\lambda = \frac{1}{3}$ $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 3$

así se resuelve parcial, se evalúa sacar la en el parámetro

a) $P(X > 5) \overset{\text{apr}}{=} 0{,}188$

desvío $\to \sqrt{V(X)}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{prop. falta de memoria } P(X > t+s \,/\, X > t) = P(X > s \\ X \sim \mathcal{E}(\lambda) \quad t, s \in \mathbb{R}^+\end{array}}$$

$\to s = t+s-t$

11) c) "invertido" — si se sabe que el t. de respuesta supera los 3 seg, cuál es la p de que exceda los 8

condicional

$$P(X > \overset{5+3}{8} \mid X > 3) = P(X > 5) = 0{,}188$$

por falta de memoria

d) si supero los 3 segundos, cual es la prob de que NO exceda los 8 seg?

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$$\underbrace{P(X \leq 8}_{A} \mid \underbrace{X > 3)}_{B} = 1 - P(X > 8 \mid X > 3) \qquad P(A^c \mid B) = 1 - P(A / B)$$

prop comp.

12b 13b

12) a) Relación poisson - exponencial → tiempo entre 2 poissons sucesivas

$X_t =$ "nro de visitas a un sitio web en t minutos"

$X_t \sim P(\lambda)$

$T =$ "tiempo transcurrido entre 2 visitas consecutivas al sitio web"

$\underbrace{c}_{\text{tasa}} = 3/\text{minuto}$

$T \sim Exp(3)$ → tasa de poisson

$\lambda = c \cdot t$

$P(T > 1) =$ app

UNIFORME → en la app ya no esta, aqui si

$X \sim U\,[a; b]$

$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & c.c \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{a+b}{2} \qquad V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

NORMAL →

$X \sim N(\underset{\substack{\text{media} \\ E(X)}}{\mu}, \underset{\substack{\text{sigma cuadrado} \\ V(X)}}{\sigma^2})$

nunca confundir: $V(x) = \sigma^2$ varianza ; $dt(x) = \sigma$ desvío

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}} \quad -\infty < x < \infty$

$\boxed{\text{NO TIENE PRIMITIVA}}$

Estandarizar $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ normal típica o normal estandar

$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2} \quad -\infty < z < \infty$

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$ → tabulado

10) a $P(X > 3,025) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{3,075-3}{0,05}\right)$

puedo hacer por app o estandarizar

$P(X > \underset{\text{celeste}}{x}) = \underbrace{0,025}_{\text{rosa}}$ → puedo usar app !!

$P(-z < Z < z) = \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

PRACTICA 5

Variables aleatorias bidimensionales DISCRETAS

Sean X e Y dos v.a . El par (X,Y) es una v.a bidimensional

Si ambas son discretas entonces (X,Y) es discreta. Si ambas son continuas entonces (X,Y) es continua.

Ahora anotamos el rango Rxy de (X,Y)

Es un conjunto de pares ordenados. Anotamos Rxy = { (xi,yj); xi e Rx ; yj e Ry}

Los eventos elementales o simple de Rxy son los eventos de forma { X = xi} n { Y = yj}. A cada par (xi, yj) se le asigna un numero:

P (xi, yj) = P (X = xi, Y = yj)

Se debe cumplir que:

$$\text{a)} \ p(x_i, y_j) \geq 0 \quad \forall (x_i, y_j) \in R_{XY}$$

$$\text{b)} \ \sum_{(x_i, y_j) \in R_{XY}} p(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$$

Al conjunto de todos los pares (xi, yj) , p(xi,yj) se la llama funcion de distribución de probabilidad conjunta de (X,Y) f.d.p conjunta de (X,Y) y se la anota:

Y/X	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

Calculemos la probabilidad de que la cantidad total de respuestas azules y rojas sea a lo sumo 1

$$P(X+Y \leq 1) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0)$$
$$\frac{3}{28} + \frac{6}{28} + \frac{9}{28} = \boxed{\frac{18}{28}}$$

Distribuciones marginales

Funciones de distribución marginales de una v.a. (X,Y) discreta

Si sumo el contenido de la columna 0, 1, 2, 3, 4, 5, encuentro la f.d.p de X

Análogamente lo mismo con las filas, encuentro la f.d.p de Y

Y/X	0	1	2	3	4	5	$q(y_j)$
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.25
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08	0.26
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	0.25
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05	0.24
$p(x_i)$	0.03	0.08	0.16	0.21	0.24	0.28	1

Se llama marginales porque se escriben en los márgenes.

Entonces si tenemos las f.d.p conjunta de una v.a (x,y) discreta entonces:

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{y_j} p(x_i y_j) \quad \forall x_i$$
$$p_Y(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_{x_i} p(x_i y_j) \quad \forall y_j$$

Podemos hallar así E(X), V(X), E(Y), V(Y)

Funciones de probabilidades condicionales

En general definimos la ***función de probabilidad puntual de X condicional a Y*** como sigue:
$p(x_i|y_j) = P(X = x_i|Y = y_j) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)}$, es decir como el cociente de la función de probabilidad conjunta de (X, Y) y la función de probabilidad puntual marginal de Y.

Análogamente, definimos la ***función de probabilidad puntual de Y condicional a X*** :

$q(y_j|x_i) = P(Y = y_j|X = x_i) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$, es decir como el cociente de la función de probabilidad puntual conjunta de (X, Y) y la función de probabilidad puntual marginal de X.

Variables aleatorias independientes

Sean X e Y dos variables aleatorias con f.d.p conjuntas P(xi, yj) y marginales px(xi) y fy(yj)

X e Y son independientes si y solo si:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in R_{XY}$$

Si no se cumple para un par, entonces no son independientes.

Ejemplo:

P(X=2, Y=2) = 0

P(X=2) = 3/28 P(Y=2) = 1/28

Por lo tanto P(X=2, Y=2) = 0 que es distinto de 3/28* 1/28 = P(X=2)*P(Y=2)

Observaciones

1) Notar que si X e Y son independientes tenemos las marginales de X e Y px(xi) y py(yj) respectivamente entonces podemos hallar la f.d.p conjunta de (X,Y)
2) Si X e Y son independientes se puede probar que
   P(X e A, Y e B) = P (X e A) * P (Y e B)

Es valida también para continuas

Función de una variable aleatoria bidimensional

Sea (X,Y) una v.a bidimensional discreta con f.d.p conjunta p(xi,yj) sea h (x,y) una función R^2 en R entonces Z = h(X,Y) es otra v.a

Interesa calcular la E (Z) sin hallar previamente la f.d.p de Z

TEOREMA: Si (X,Y,) es una v.a bidimensional discreta con f.d.p conjunta p(xi,yj) y h(X,Y) es una función de R^2 en R entonces Z = h(X,Y) tiene esperanza:

$E(Z) = \sum_{xi} \sum_{yj} h(xi,yj)\, p(xi,yj)$

<u>Esperanza de una suma de variables aleatorias</u>

E (X + Y) = E(X) + E(Y)

E (X – Y) = E(X) – E(Y) → Puedo pensar a X – Y como 1X + (-1)Y

Por inducción completa se puede probar que esto se cumple si tengo n variables discretas.

Además

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i).$$

E (aX + bY + c) = a E(X) + b E(Y) + c

<u>Esperanza de un producto de variables aleatorias</u>

Si X e Y son v.a independientes se puede probar que

E(X*Y) = E(X) * E(Y) → También valido para continuas

<u>Varianza de una suma de variables aleatorias</u>

V (X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov (X,Y)

V (X - Y) = V(X) + V(Y) - 2cov (X,Y)

<u>Covarianza de una suma de variables aleatorias</u>

En general si X e Y son dos v.a se define la covarianza entre X e Y como:

E [(X – E(X)) (Y – E(Y)] = cov(X,Y) = σ_{xy}

Propiedades:

1) cov(X,Y) = E(X*Y) – E(X)*E(Y)
2) Si X e Y son independientes la cov(X,Y) = 0
   Observación: puede pasar que la cov(X,Y) = 0 pero X e Y sean dependientes.
3) Si X e Y son independientes entonces:
   V(X+Y) = V(X) + V(Y)
   V(X-Y) = V(X) + V(Y)
4) V (aX + bY + c) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2 a*b*cov (X,Y)
   Observación: cov (aX,bY) = ab cov (X,Y) →
   La cov no tiene límite de valores.
5) cov (aX + b, cY + d) = ac cov (X,Y)
6) cov (X,X) = V(X)
7) cov(X + Y, Z) = cov(X , Z) + cov(Y, Z)

Suma de variables aleatorias

1- ***Suma de variables aleatorias independientes con distribución Poisson***

$$X \sim P(\lambda_1)\ ;\ Y \sim P(\lambda_2)\ ;\ X \text{ y } Y \text{ independientes} \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

2- ***Suma de variables aleatorias binomiales independientes***

$$X \sim B(n_1, p)\ ;\ Y \sim B(n_2, p)\ ;\ X \text{ y } Y \text{ independientes} \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$$

Suma de variables aleatorias normales independientes

Si X e Y son variables aleatorias independientes donde $X \sim N(\mu_1, \sigma_1{}^2)$ y $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2{}^2)$ entonces $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2)$

Por inducción completa se puede generalizar este resultado a n variables:

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$ entonces $\sum_{i=0}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=0}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$

De lo anterior y del hecho que $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$ tenemos:

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$ entonces $\sum_{i=0}^{n} a_i X_i \sim N(\sum_{i=0}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2)$ donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales

Ejemplo)

X: “Espesor en un milímetro de hoja 1)

Y: “Espesor en un milímetro de hoja 2”

X ~ N $(1,5,0,1^2)$ Y ~ N $(1,5,0,1^2)$

X e Y son independientes

a) Z: “Espesor total de la envoltura”

Z = X + Y

E(Z)= E (X + Y) = E(X) + E(Y) = 1,5 + 1,5 = 3

V(Z) = V (X + Y) =(por independencia) V(X) + Y(X) = $0,1^2 + 0,1^2$ = 0,02

σ = sqrt (0,02)

b) P (Z > 3,3) = ?

Z es suma de variables aleatorias normales independientes por lo tanto Z también es normal.

Z ~ N (3,0,02)

P (Z > 3,3) = 1 – P (Z <= 3,3) = 1 – φ (3,3 – 3 / sqrt(0,02)) = 2,12132

En general si X1, X2, …, Xn son variables aleatorias independientes con Xi ~ N (μ, σ^2) entonces Z = Sumatoria de 1 a n de Xi es tal que Z ~ N $(n\mu, n\sigma^2)$

Promedio muestral

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$ entonces la v.a. $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ tiene distribución normal con media μ y varianza $\dfrac{\sigma^2}{n}$

$\overline{X}$ = 1/n * (Sumatoria de 1 a n de Xi) es el promedio muestral

$E(\overline{X}) = \mu$ y la $V(\overline{X}) = \sigma^2 / n$

el peso de ladrillos ~~como~~ adobe utilizados en construcción
tiene dist normal con μ de 3 libras y σ. de 0,25 libras
suponga peso indep x ladrillos tomado 25, cual
es la prob. de que el peso promedio sea < que 2,95 lib

X_i = "peso del ladrillo en libras" $i = 1, 2, \dots, 25$

$X_1, X_2, \dots, X_{25}$ indep $\quad X \sim N(3, 0{,}25^2)$

$\bar{X} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} X_i$ es el peso promedio de los 25 ladrillos

$P(\bar{X} < 2{,}95) = ?$

$\bar{X} \sim N\left(3, \frac{0{,}25^2}{25}\right) \qquad P(\bar{X} < 2{,}95) = \Phi\left(\frac{2{,}95 - 3}{\sqrt{\frac{0{,}25^2}{25}}}\right) =$

$= \Phi(-1) = \boxed{0{,}15866}$

IMPORTANTE DISTINGUIR LA SUMATORIA DEL PROMEDIO, PORQUE NO ES LO MISMO.

Teorema central del límite

Sea X1, X2, …, Xn n variables aleatorias independientes con la misma distribución anotamos $\mu = E(X_i)$ y $\sigma^2 = V(X_i)$

Entonces P ($\bar{X}$ – μ / sqrt(σ^2 / n) <= X) tiende a φ ($\bar{x}$)

En la practica

- Si n >= 30 entonces se puede aplicar T.C.L
- Si sabemos que X1,X2, …, Xn tienen distribución simétrica entonces si n >= se puede aplicar T.C.L

Ejemplos)

Ej. 2) x_i = "consumo de calorías en el día i"

$\mu = E(x_i) = 3000$

$\sigma^2 = V(x_i) = 230^2$

$X_1, X_2, \dots, X_{365}$ son indep.

$\bar{X} = \frac{1}{365} \sum_{i=1}^{365} x_i$ consumo de calorías diarias en promedio en un año

$P(2959 \leq \bar{X} \leq 3050) = ?$

$\frac{\bar{X} - 3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}} \approx N(0,1)$ por T.C.L

$\boxed{\text{EN PARCIAL TENGO QUE ESTANDARIZAR}}$

$$P\left(\frac{2959-3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}} \leq \frac{\bar{X}-3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}} \leq \frac{3050-3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}}\right) \overset{T.C.L}{\approx} \Phi\left(\frac{3050-3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}}\right) -$$

$$\Phi\left(\frac{2959-3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}}\right) = \Phi(4,15) - \Phi(-3,40) = 1 - 0,003$$

Ej 1) x_i = "duración en horas del instrumento electrónico i"

$X_i \sim Exp(0,1) \quad i = 1, 2, \dots, 30$ $\quad \sigma^2 = V(x_i) = \frac{1}{0,1^2} = 100$

$X_1, X_2, \dots, X_{30}$ indep. $\quad \boxed{\mu = E(X_i) = \frac{1}{0,1} = 10}$

T = "tiempo total de duración de los 30 instrumentos"

$T = \sum_{i=1}^{30} x_i$

$P(T > 350) = ?$ $\quad E(T) = n\mu = 30 \times 10 = 300$

$V(T) = n\sigma^2 = 30 \times 100 = 3000$

$\frac{T - 300}{\sqrt{3000}} \underset{T.C.L}{\approx} N(0,1)$

T.C.L

$$P(T > 350) = 1 - P(T \leq 350) = 1 - P\left(\frac{T-300}{\sqrt{3000}} \leq \frac{350-300}{\sqrt{3000}}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{350-300}{\sqrt{3000}}\right) = 1 - \Phi(0{,}9128) = 1 - 0{,}8186 =$$

f) suponga que se lanza 500 veces un dado balanceado de 10 lados numerados del 0 al 9 y en cada tiro se observa el nro que ocurre. Calcule la p de que el promedio de los numeros obtenidos esté entre 4 y 5

X_i = "nro que sale en el tiro i" $i = 1, 2, \ldots, 500$

$X_1, X_2, \ldots X_{500}$ son indep.

notar que cada X_i tiene la siguiente distribución

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x_i)$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10

$$\mu = E(X_i) = \boxed{\frac{9}{2}} = 4{,}5$$

$$\sigma^2 = V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{52}{2} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{33}{4}}$$

$\overline{X} = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} X_i$ es el promedio de los nros obtenidos en los 500 tiros

// es parecido continua

$$P(4 < \overline{X} < 5) = ?$$

$$\frac{\overline{X} - 4{,}5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}} \approx N(0,1) \text{ por T.C.L}$$

$$P(4 \leq \overline{X} \leq 5) = P\left(\frac{4-4{,}5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}} \leq \underbrace{\frac{\overline{X}-4{,}5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}}}_{\approx N(0,1)} \leq \frac{5-4{,}5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}}\right) \overset{\text{T.C.L}}{\approx} \Phi\left(\frac{5-4{,}5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}}\right) -$$

$$\Phi\left(\frac{4-4{,}5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}}\right) = \Phi(3{,}8924) - \Phi(-3{,}8924) =$$

$$= 2\Phi(3{,}8924) - 1 \approx 1$$

ap → 0,99995

Aplicaciones de T.C.L

Aproximación normal a la binomial

Supongamos que X tiene una distribución binomial con parámetros n y p

- Si np >= 10 y n(1-p) >= entonces X tendrá aproximadamente una distribución normal con parámetros np y np(1-p), es decir

$$Z_n = \frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{X - n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}} \approx N(0,1) \quad \text{si } n \text{ es lo suficientemente grande}$$

Corrección por continuidad

Acabamos de ver que si $X \sim B(n,p)$ entonces, para n suficientemente grande, podemos considerar que aproximadamente es $X \sim N[n.p, n.p(1-p)]$. El problema que surge de inmediato si deseo calcular, por ejemplo, la probabilidad de que $X = k$ (con k alguno de los valores posibles $0,1,2,\ldots,n$) es que la binomial es una distribución discreta y tiene sentido calcular probabilidades como $P(X = k)$ mientras que la normal es una distribución continua y, en consecuencia, $P(X = k) = 0$ puesto que para una variable aleatoria continua la probabilidad de que ésta tome un valor aislado es cero. Esto se resuelve si se considera $P(X = k) \approx P\left(k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2}\right)$

También se puede usar esta corrección para mejorar la aproximación en otros casos, específicamente en lugar de $P(X \leq k)$ calculamos

$$P(X \leq k) \approx P\left(X \leq k + \frac{1}{2}\right)$$

Y en lugar de $P(X \geq k) \approx P\left(X \geq k - \frac{1}{2}\right)$

En los gráficos siguientes se muestra para diferentes valores de n y p cómo aproxima la distribución $N(np,\ np(1-p))$ a la distribución $B(n,\ p)$

Ejemplo 2)

X: "nro de ejes fuera de especificación"

a) $P(X \leq 30) = ?$

$X \sim B(200, 0{,}1)$

$P(X = k) = \binom{200}{k} 0{,}1^k (1-0{,}1)^{200-k}$

$P(X \leq 30) = 0{,}990492$ → computadora

Usamos la aproximación normal a la binomial

$np = 200 \times 0{,}1 = 20 \geq 10$

$n(1-p) = 200 \times (1-0{,}1) = 180 \geq 10$

$$P(X \leq 30) \underset{\text{corrección y cont.}}{\approx} P(X \leq 30{,}5) = P\left(\frac{X-20}{\sqrt{18}} \leq \frac{30{,}5-20}{\sqrt{18}}\right) \overset{\text{T.C.L}}{\approx} \Phi\left(\frac{30{,}5-20}{\sqrt{18}}\right) =$$

$= \Phi(2{,}474) = 0{,}9932$ → tabla

$= 0{,}99332$ → app

aproximación normal a binomial

ej) X: "nro de ejes (entre los 200) fuera de especificación"

$X \sim B(200,\ 0{,}10)$

a) $P(X \leq 30) = P(X \leq 30{,}5) = P\left(\frac{X-20}{\sqrt{18}} \leq \frac{30{,}5-20}{\sqrt{18}}\right) \overset{T.C.L}{\approx}$

$\approx \Phi\left(\frac{30{,}5-20}{\sqrt{18}}\right) = \Phi(2{,}474) = 0{,}9932$

b) $P(X < 30) = P(X \leq 29) \approx P(X \leq 29{,}5) = P\left(\frac{X-20}{\sqrt{18}} \leq \frac{29{,}5-20}{\sqrt{18}}\right)$

$\overset{TCL}{\approx} \Phi\left(\frac{29{,}5-20}{\sqrt{18}}\right)$

es indistinto si es estricto — resto $\frac{1}{2}$ — T.C.L

c) $P(15 \leq X \leq 25) \approx P(14{,}5 \leq X \leq 25{,}5) \approx$

$\Phi\left(\frac{25{,}5-20}{\sqrt{18}}\right) - \Phi\left(\frac{14{,}5-20}{\sqrt{18}}\right)$ — lo trato como continua

Otra forma — el 14 porque la trato como discreta

$P(X \leq 25) - P(X \leq 14) =$ — agrego $\frac{1}{2}$

$\approx P(X \leq 25{,}5) - P(X \leq 14{,}5) \overset{T.C.L}{\approx}$

$\Phi\left(\frac{25{,}5-20}{\sqrt{18}}\right) - \Phi\left(\frac{14{,}5-20}{\sqrt{18}}\right) =$

Ej) Se arman bolsas de caramelos donde el nro de caramelos de ddl es una v.a X con la siguiente distribución

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	0,38	0,20	0,15	0,25

X: "nro de caramelos de ddl en una bolsa"

a) Se toman 100 bolsas de caramelo. Hallar la prob de que en promedio contengan menos de 2 caramelos de ddl

b) cual es la p aprox de que menos de 35 bolsas no contuvieran caramelos de d.d.l

a) X_i "cantidad de caramelos en la bolsa i" $i: 1, 2, \dots, 100$

$X_1, X_2, \dots, X_{100}$ son v.a indep.

Notar que cada X_i tiene la misma distribución que la v.a X

$\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$ promedio de caramelos de ddl en las 100 bolsas

$P(\bar{X} < 2) = ?$ $\quad \mu = E(X_i) = 0 \cdot 0,38 + 1 \cdot 0,20 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,27 = 1,31$

$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{100}}} \overset{T.C.L}{\approx} N(0,1)$ $\quad \sigma^2 = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 3,23 - (1,31)^2 = 1,5139$

$$P(\bar{X} < 2) = P\left(\frac{\bar{X} - 1,31}{\sqrt{\frac{1,5139}{100}}} < \frac{2 - 1,31}{\sqrt{\frac{1,5139}{100}}} \right) \underset{T.C.L}{\approx}$$

$$\underset{T.C.L}{\approx} \Phi\left(\frac{2 - 1,31}{\sqrt{\frac{1,5139}{100}}} \right) = \Phi(5,60790) = 1$$

b) Y = "nº de bolsas entre las 100 que no contienen caramelos de d.d.l"

$Y \sim B(100, 0,38)$ $\quad \boxed{np = 100 \cdot 0,38 = 38 \geq 10 \quad n(1-p) = 100(1 - 0,38) = 62 \geq 10}$

$P(Y < 35) = ?$

$$P(Y \leq 34) \approx P(Y \leq 34,5) = P\left(\frac{Y - 38}{\sqrt{\frac{589}{25}}} \leq \frac{34,5 - 38}{\sqrt{\frac{589}{25}}} \right) \overset{T.C.L}{\approx}$$

$$\approx \Phi(-0,72) = 0,2358$$

<u>Aproximación normal a Poisson</u>

Si $X \sim P(\lambda)$ entonces para λ suficientemente grande $\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ tiene aproximadamente distribución $N(0,1)$

Si λ >= 30 entonces:

$$\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx N(0,1)$$

La corrección se aplica si P (X = k) de igual manera que la aproximación binomial, pero en P(X <=k) se puede optar por aplicarla o no.

Ejemplo)

Ej) Las galletitas marca x están de oferta y algunos de sus paquetes vienen con premios, el nro de paquetes premiados que se venden al día es v.a $\sim P\left(\frac{1}{2}\right)$

Calcular la p de que en 100 días se vendan + de 40 paquetes con premio

Y = "nro de paquetes con premio vendidos en 100 días"

$Y \sim P(\lambda)$ $\qquad \lambda = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$

$P(Y > 40) = ?$

$$1 - P(Y \leq 40) \overset{\text{corrección}}{\approx} 1 - P(Y < 40{,}5) = 1 - P\left(\frac{Y-50}{\sqrt{50}} < \frac{40{,}5-50}{\sqrt{50}}\right) \overset{\text{T.C.L}}{\approx}$$

$$1 - \Phi(-1{,}34) = 1 - 0{,}$$

Cuestiones a tener en cuenta en el parcial:

- Suma no es lo mismo que promedio.
- Si las variables son independientes V (X+Y) = V(X-Y)
- Cuidado sobre como aplico la corrección por continuidad → prestar atención en agrandar el área.
- Siempre SIEMPRE justificar la aproximación con T.C.L → anotarlo

Pe 5 — v.a bidimensionales — app

discretas (1-5) → continuas (6)

EJERCICIO 5 — parciales

2 v.a discretas

X	3	4
p(x)	0,7	0,3

Y	0	1
f(y)	0,9	0,1

X e Y son independientes

$f(x,y) = P(\underbrace{X=x, Y=y}_{\text{conjunta}})$

$f(x,y) = p(x) \cdot q(y) \quad \forall (x,y)$

a) Hallar f.d.p conjunta

Y \ X	3	4	q(y)
0	0,63	0,27	0,90
1	0,07	0,03	0,10
p(x)	0,7	0,3	1

marginal Y

puedo hacer así parcial — marginal X

Hallar marginal X — sumar columnas

$f(3,0) = p(3) \cdot q(0) = 0,7 \cdot 0,9$

b) Hallar $E(X), E(Y), V(X), V(Y)$

- $E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p(x) = 3 \cdot 0,7 + 4 \cdot 0,3 = 3,3$
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \quad > 0$
- $E(X \cdot Y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (x \cdot y) \cdot f(x,y) = \cancel{3 \cdot 0 \cdot 0,63} + \cancel{4 \cdot 0 \cdot 0,27} + 3 \cdot 1 \cdot 0,07 + 4 \cdot 1 \cdot 0,03 = 0,21 + 0,12 = \boxed{0,33}$

tantos términos como celdas

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

- $cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

$E(aX + bY + c) = a\,E(X) + b\,E(Y) + c$

$V(aX + bY + c) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab \cdot cov(X,Y)$

Ej 4 $\quad V(100X + 200Y) = 100^2\, V(X) + 200^2 \cdot V(Y) + 2 \cdot 100 \cdot 200 \cdot cov(X,Y)$

Ej 7a $\quad V(X - Y) = V(1X + (-1) \cdot Y) = V(X) + V(Y) - 2 \cdot cov(X,Y)$

si X e Y son indep $\Rightarrow cov(X,Y) = 0$

$\quad\quad E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

$\quad\quad V(aX + bY + c) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$

cuidado $cor(x,y) = 0$ NO implica que x e y son indep.

$\sigma_{X+Y} = \sqrt{V(X+Y)}$ $\quad P(X+Y=4) = F(2,2) + F(1,3) + F(3,1)$

PS Ej 4-9

teor combinacion lineal de v.a normales indep. tiene dist normal

a) X = duración del foco A (hs) $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ (μ_X: 800, σ_X^2: 100^2)

Y = duración del foco B (hs) $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ (μ_Y: 900, σ_Y^2: 150^2)

$P(\underbrace{Y - X > 0}_{W \sim N(\mu_W,\ \sigma^2_W)}) = ?$ $\quad \mu_W$: 100, σ^2_W: $100^2 + 150^2 = 32500$

$\mu_W = E(W) = E(Y-X) = E(Y) - E(X) = 100$

$\sigma^2_W = V(W) = V(Y-X) = V(Y) + V(X) = 150^2 + 100^2 =$

$P(W > 0) = P\left(\frac{W - \mu_W}{\sigma_W} > \frac{0-100}{\sqrt{32500}}\right)$

$W \sim N(\mu_W, \sigma_W)$

$\mu_W = 100$

$\sigma^2_W = 100^2 + 150^2 = 32500$

$\underbrace{\text{TCL} \quad \text{bayes} \quad \text{prob total}}_{\text{teorema imp}}$

$\boxed{\text{mal}}$

$\frac{W-100}{100+150}$ → suma de los desvíos

$\frac{W-100}{32500}$ → varianza

$\frac{W-100}{\sqrt{100^2}+\sqrt{150^2}}$ → la raíz no se dist.