LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Physik
R: Rechenmethoden für Physiker, WiSe 2024/25
Dozent: Jan von Delft
Übungen: Markus Frankenbach

https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 01 Optionale Aufgaben

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 9, 10, 4, 3.
Videos existieren für Beispielaufgaben 9 (C2.3.1), 10 (C2.3.3).

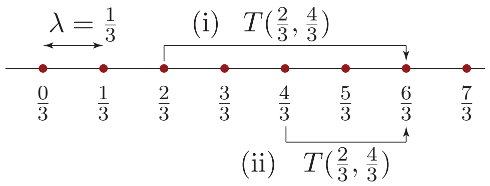
Optionale Aufgabe 1: Gruppe der diskreten Translationen in einer Dimension [4]
Punkte: (a)[2](E); (b)[2](M)

In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass diskrete Translationen auf einem unenlichen, ein-dimensionalen Gitter eine Gruppe bilden. Die Gitterkonstante, d.h. der konstante Abstand zwichen benachbarten Gittterpunkten, bezeichnen wir mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (eine positive, reelle Zahl). Das Gitter $\mathbb{G}$ ist dann die Menge aller ganzzahligen Vielfachen von λ, $\mathbb{G} \equiv \lambda\mathbb{Z} \equiv \{x \in \mathbb{R} | \exists n \in \mathbb{Z} : x = \lambda \cdot n\}$, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist. Beachten Sie, dass n zu gegebenem $x \in \mathbb{G}$ eindeutig festgelegt ist. Auf diesem Gitter definieren wir 'Translation' durch die Gruppenregel

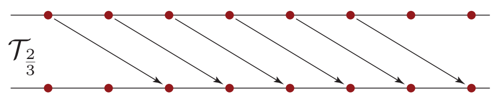
$$T: \quad \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}, \quad (x, y) \mapsto T(x, y) \equiv x + y,$$

wobei $+$ die übliche Addition auf den reellen Zahlen ist. Da die Gruppenregel symmetrisch definiert ist, läßt sie sich auf zwei äquivalente Weisen visualisieren: $T(x, y)$ beschreibt (i) eine 'Verschiebung' oder 'Translation' des Gitterpunkts x um den Abstand y, oder (ii) eine Translation des Gitterpunkts y um den Abstand x. [Skizze (a), wo $\lambda = \frac{1}{3}$, zeigt beide Visualisierungen der Translation $T(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.]

(a)



(b)



(a) Zeigen Sie zunächst, dass $(\mathbb{G}, T)$ eine abelsche Gruppe ist.

(b) Für ein gegebenes $y \in \mathbb{G}$ definieren wir nun, entsprechend der Visualisierung (i), eine 'Translation' des Gitters um y, d.h. jeder Gitterpunkt x wird um y 'verschoben':

$$\mathcal{T}_y: \quad \mathbb{G} \to \mathbb{G}, \quad x \mapsto \mathcal{T}_y(x) \equiv T(x, y).$$

[Skizze (b), wo $\lambda = \frac{1}{3}$, zeigt die Translation $\mathcal{T}_{\frac{2}{3}}$.] Nun betrachten wir die Menge aller solcher Translationen, $\mathbb{T} \equiv \{\mathcal{T}_y, y \in \mathbb{G}\}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{T}, \boldsymbol{+})$ eine abelsche Gruppe ist, wobei $\boldsymbol{+}$ definiert ist durch

$$\boldsymbol{+}: \quad \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \quad (\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y) \mapsto \mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_y \equiv \mathcal{T}_{T(x,y)}.$$

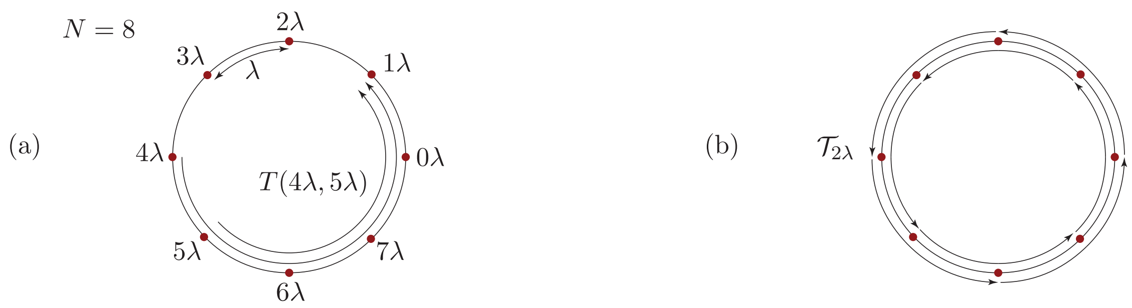
Anmerkung: die dieser Gruppe zugrundeliende Menge $\mathbb{T}$ besteht aus Abbildungen (nämlich Translationen), ein Bespiel dafür, dass die zugrundeliegende Menge nicht immer 'einfach' ist.

Optionale Aufgabe 2: Gruppe der diskreten Translationen auf einem Ring [4]
Punkte: (a)[2](M); (b)[2](M)

In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass diskrete Translationen auf einem endlichen, ein-dimensionalem Gitter mit periodischen Randbedingungen eine Gruppe bilden. Wir betrachten ein Gitter auf einem Ring mit Radius $0 < R \in \mathbb{R}$ und Gitterkonstante $\lambda = 2\pi R/N$ mit $N \in \mathbb{N}$, also $\mathbb{G} \equiv \lambda(\mathbb{Z} \bmod N) \equiv \{x \in \mathbb{R} | \exists n \in \{0, 1, \ldots, N-1\} : x = \lambda \cdot n\}$, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist. Beachten Sie, dass n zu gegebenem $x \in \mathbb{G}$ eindeutig festgelegt ist. Der Ring bildet eine 'periodische' Struktur: werden die Gitterplätze abgezählt, beschreiben 0λ und $N\lambda$ denselben Gitterplatz, dasselbe gilt für 1λ und $(1+N)\lambda$, sowie 2λ und $(2+N)\lambda$, usw. Auf diesem Gitter definieren wir eine Gruppenregel 'Translation' mittels Addition modulo N:

$$T: \quad \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}, \quad (x, y) = (\lambda \cdot n_x, \lambda \cdot n_y) \mapsto T(x, y) \equiv \lambda \cdot ((n_x + n_y) \bmod N).$$

Dabei ist $+$ die übliche Addition auf den ganzen Zahlen, und $n \bmod N$ (sprich 'n mod N') ist definiert als der ganzahlige Rest nach Division von n durch N (z.B. $9 \bmod 8 = 1$). [Für $N = 8$ zeigt Skizze (a) zwei Visualisierungen der Translation $T(4\lambda, 5\lambda)$: als Verschiebung des Gitterpunkts 4λ um den Abstand 5λ entlang des Rings, oder des Gitterpunkts 5λ um den Abstand 4λ.]



(a) Zeigen Sie zunächst, dass $(\mathbb{G}, T)$ eine abelsche Gruppe ist.

(b) Für ein gegebenes $y \in \mathbb{G}$ definieren wir eine 'Translation' des Gitters um y durch

$$\mathcal{T}_y: \quad \mathbb{G} \to \mathbb{G}, \quad x \mapsto \mathcal{T}_y(x) \equiv T(x, y)$$

d.h. jeder Gitterpunkt x wird um y entlang des Rings 'verschoben'. [Für $N = 8$ zeigt Skizze (b) die Translation $\mathcal{T}_{2\lambda}$]. Nun betrachten wir die Menge aller solcher Translationen, $\mathbb{T} \equiv \{\mathcal{T}_y, y \in \mathbb{G}\}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{T}, \boldsymbol{+})$ eine abelsche Gruppe ist, wobei die Gruppenregel $\boldsymbol{+}$ definiert ist durch

$$\boldsymbol{+}: \quad \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \quad (\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y) \mapsto \mathcal{T}_x \boldsymbol{+} \mathcal{T}_y \equiv \mathcal{T}_{T(x,y)}.$$

Optionale Aufgabe 3: L'Hôpitalsche Regel [4]
Punkte: (a)[0,5](E); (b)[0,5](E); (c)[1](M); (d)[1](M); (e)[1](M)

Betrachten Sie die folgende Fragestellung: Was ist der Grenzwert des Verhältnisses, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, wenn die Funktionen f und g beide am Punkt x_0 verschwinden? Die naive Antwort, $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} \stackrel{?}{=} \frac{0}{0}$, ist nicht wohldefiniert. Wenn jedoch beide Funktionen eine endliche Steigung bei x_0 haben, können wir für beide eine lineare Näherung verwenden, $f(x_0+\delta) \simeq 0+\delta f'(x_0)$ und $g(x_0+\delta) \simeq 0+\delta g'(x_0)$, und erhalten $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Dieses Ergebnis ist ein Spezialfall der L'Hôpitalschen Regel.

Die allgemeine Formulierung der L'Hôpitalschen Regel ist: Wenn entweder $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, und der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

Der Beweis dieser allgemeinen Aussage ist nicht-trivial, aber ein Standardthema in Lehrbüchern.

Verwenden Sie die L'Hôpitalsche Regel, um die folgenden Grenzwerte als Funktion der reellen Zahl a zu bestimmen: [Eckige Klammern geben Kontrollergebnisse an: $[a, b]$ bedeutet, dass der Grenzwert $L(a) = b$.]

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + (a-1)x - a}{x^2 + 2x - 3}$ $[3, 1]$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x + ax^2}$ $[2, 2]$

Wenn nicht nur f und g, sondern auch f' und g' alle bei x_0 verschwinden, kann der Grenzwert auf der rechten Seite der L'Hôpitalschen Regel ausgewertet werden, indem die Regel ein zweites Mal angewendet wird (oder $n+1$ mal, wenn die Ableitungen bis $f^{(n)}$ und $g^{(n)}$ alle bei x_0 verschwinden). Verwenden Sie dieses Vorgehen, um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen:

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(ax)}{\sin^2 x}$, $[4, 8]$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin(ax) - ax}$. $[2, -\frac{3}{4}]$

(e) Verwenden Sie die L'Hôpitalsche Regel um zu zeigen, dass $\lim_{x\to 0}(x \ln x) = 0$ (mit $x > 0$). Dieses Ergebnis impliziert, dass für $x \to 0$, 'x schneller verschwindet als $\ln(x)$ divergiert', d.h. 'linear schlägt log'.

Optionale Aufgabe 4: L'Hôpitalsche Regel [4]

Punkte: (a)[0,5](E); (b)[0,5](E); (c)[1](M); (d)[1](M); (e)[1](M)

Verwenden Sie die L'Hôpitalsche Regel (wenn nötig mehrfach), um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen (wobei a eine reelle, positive Zahl ist): [Eckige Klammern geben Kontrollergebnisse an: $[a, b]$ bedeutet, dass der Grenzwert $L(a) = b$.]

(a) $\lim_{x\to a} \frac{x^2 + (2-a)x - 2a}{x^2 - (a+1)x + a}$ $[2, 4]$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{\tanh(ax)}$ $[2, \frac{1}{2}]$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{(e^{ax} - 1)^2}$ $[2, \frac{1}{4}]$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(ax) + \cos(ax) - 2}{x^4}$ $[2, \frac{4}{3}]$

(e) Verwenden Sie die L'Hôpitalsche Regel um zu zeigen, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $0 < \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to 0}(x^\beta \ln^\alpha x) = 0 \quad \text{(mit } x > 0\text{)},$$

d.h. 'jede positive Potenz schlägt jede beliebige Potenz von log'.

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 16]