E1: Mechanik

Übungsblatt 2 (WS24/25)

Thomas Udem & Andrea Alberti

Ausgegeben am *23. Oktober 2024* — Wird besprochen am *30. Oktober - 31. Oktober*

Anmerkung: Studierende mit Nebenfach (6 ECTS) brauchen Aufgaben, die mit einem ($*$) gekennzeichnet sind, nicht zu bearbeiten.

2.1 Systematische und zufällige Fehler

Kennzeichnen Sie die systematischen (S) und zufälligen (Z) Fehler in den folgenden Beispielen:

(a) Beim Schulsportfest werden die Zeiten für den 100 m-Lauf gemessen. Die Zielrichter setzen ihre Stoppuhren in Gang, wenn sie den Startschuss hören. Dadurch entsteht ein Fehler.

(b) Die mittlere Geschwindigkeit der Autos auf der Leopoldstraße soll ermittelt werden, indem die Geschwindigkeit von 10 zufällig ausgewählten Autos gemessen wird.

(c) Bei einem Voltmeter ist der Nullpunkt falsch eingestellt. Folglich sind die angezeigten Werte mit einem Fehler behaftet.

(d) Der jährliche Energieertrag einer Photovoltaikanlage im Jahr 2020 soll zur Abschätzung des Jahresertrags im Jahr 2021 verwendet werden. Welche Unsicherheit würden Sie angeben, wenn Sie nur diese Daten oder zusätzlich die Daten der Jahre 2000-2020 zur Verfügung hätten?

2.2 Taylorentwicklung

Im Skriptum wird die Entfernung zu einem Stern $d = \mathrm{AE}/\tan(\alpha_p)$ durch die Astronomische Einheit ($1\,\mathrm{AE} = 149\,597\,870\,700\,\mathrm{m}$) und dem Parallaxenwinkel α_p gegeben. Der uns nächste Stern, Proxima Centauri, hat eine Entfernung von 1,33 Parsec. Bestimmen Sie die Entfernung in Meter mit der obigen Formel und approximativ mit dem ersten Term in der Taylorreihe des Tangens.

2.3 Mann und Hund ($*$)

Ein Mann und sein Hund begeben sich auf eine 10 km lange Wanderung. Der Hund läuft doppelt so schnell. Beide gehen gemeinsam los. Als der Hund am Ziel ankommt, läuft er mit derselben Geschwindigkeit zurück zu seinem Herrchen und gleich wieder zum Ende der Wanderung. Das geht so lange, bis sich beide am Ziel treffen. Welche Strecke hat der Hund zurückgelegt?

2.4 Restaurantbewertung

Zwei Restaurants stehen für das Dinner zu Zweit zur Auswahl. Google gibt für das Restaurant A und B die folgenden Bewertungen auf einer Skala von 1 bis 5 an:

$$\begin{aligned} A &= [4, 5, 3, 3, 2, 4, 3, 2, 3, 3, 4, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 4] \\ B &= [1, 3, 5, 4, 4, 4] \end{aligned}$$

(a) Statt die Mittelwerte, Standardabweichungen, die Standardabweichung der Mittelwerte und die Varianzen mit der Hand zu berechnen, verwenden Sie diesmal eine geeignete Software. Wir empfehlen Python, erhältlich bei https://www.python.org/:

```
import numpy as np

x=np.array([4, 5, 3, 3, 2, 4, 3, 2, 3, 3, 4, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 4])
N=x.size
Mittelwert=np.mean(x)
StandardabweichungDerProbe=np.std(x,ddof=1)
StandardabweichungVonMittelwert=StandardabweichungDerProbe/np.sqrt(N)

print(f"Mittelwert: {Mittelwert:1.3f}")
print(f"Standardabweichungen der Probe: {StandardabweichungDerProbe:1.3f}")
print(f"Standardabweichung von Mittelwert: {StandardabweichungVonMittelwert:1.3f}")
print(f"Varianz: {StandardabweichungDerProbe**2:1.3f}")
```

(b) Sie wollen innerhalb des Standardfehlers ausschließen, dass die Bewertung schlechter als 3 ist. Welches Restaurant bevorzugen Sie?

2.5 Dichtefunktion (∗)

(a) Eine kontinuierliche Zufallsvariable besitze die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{fuer } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{x}$ und die Varianz σ^2 dieser Verteilung.

(b) Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{x}$ und die Varianz σ^2 eines ungezinkten Würfels.

(c) Sollten wir bei der vorherigen Berechnung der Varianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Würfels die Formel mit oder ohne die Bessel-Korrektur verwenden? Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit und ohne die Korrektur.

2.6 Silvesterrakete

Sie möchten die Beschleunigung einer Silvesterrakete messen. Dazu verabreden Sie sich mit einigen Studienkollegen an einem „Wohnheim-Turm“ der Studentenstadt. Jeder Ihrer Kommilitonen - mit einer Stoppuhr ausgerüstet - geht an ein Fenster im Treppenhaus auf jeweils einer anderen der ersten 10 Etagen des Hochhauses. Mit dem Zünden der Rakete starten Ihre Kommilitonen die Stoppuhren. Sie halten die Uhren jeweils an, wenn die Rakete an ihrem Fenster vorbeigeflogen ist. Am Ende tragen Sie die einzelnen Zeitmessungen in eine Tabelle ein:

Etage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gestoppte Zeit t [s]	1.33	1.98	2.30	2.84	3.06	3.32	3.58	3.94	4.02	4.31

Die Höhe einer einzelnen Etage können Sie sehr genau bestimmen: Sie beträgt 2.80 m. Allerdings können Sie die Höhe der Rakete, bei der Ihre Kommilitonen die Zeit stoppten, nur mit $\Delta x = \pm 50\,\text{cm}$ Genauigkeit feststellen. Bedenken Sie auch die Unsicherheit aus der Reaktionszeit $\Delta t = 0.1\,\text{s}$ beim Starten.

(a) Tragen Sie in einem Diagramm die gemessene Zeit t gegen die angenommene Höhe aus der Etagennummer auf. Zeichnen Sie das Unsicherheitsintervall der Höhenmessung zu jedem Punkt in das Diagramm ein.

Hinweis ↦ Sie könnten ein 1-Sekunden-Intervall durch einen 2-cm-Abstand auf der horizontalen Achse und ein 2-Meter-Intervall durch einen 1-cm-Abstand auf der vertikalen Achse darstellen.

Die ehrgeizigsten Studierenden könnten Software-Pakete für wissenschaftliche Berechnungen wie das Python-Modul `matplotlib` verwenden, um die Diagramme zu erstellen. Es ist jedoch nicht das Ziel dieser Übung, Ihre Fähigkeiten im Erstellen von Diagrammen mit Computerprogrammen zu entwickeln.

(b) Wie lautet der Zusammenhang zwischen Ort x, Zeit t und Beschleunigung a? Um festzustellen, ob die Beschleunigung konstant ist, lösen Sie diese Formel nach a auf und tragen Sie den für jede der 10 Messungen berechneten Wert in einem zweiten Diagramm gegen die Etagennummer auf.

Hinweis ↦ Sie können die vertikale Achse mit einem Abstand von 2 cm pro $1\,\text{m/s}^2$ zeichnen.

(c) Nun möchten Sie noch die Messunsicherheit in ein zweites Diagramm eintragen. Dazu müssen Sie die Fehlerfortpflanzungsformel aus der Vorlesung anwenden. Berechnen Sie die Fehler für die 10 Messungen und tragen Sie diese als Fehlerintervall in das Diagramm ein.

(d) Zum Schluss möchten Sie noch den Mittelwert der Beschleunigung berechnen. Berechnen Sie auch die Standardabweichung und die Standardabweichung des Mittelwertes.

(e) Der obige arithmetische Mittelwert berücksichtigt die Messgenauigkeit der einzelnen Messung nicht! Berechnen Sie daher den gewichteten Mittelwert, bei dem jeder Wert mit seiner Messungenauigkeit gewichtet wird (die Summen laufen von 1 bis N):

$$\bar{a} = \frac{\sum a_i/(\Delta a_i)^2}{\sum 1/(\Delta a_i)^2} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum 1/(\Delta a_i)^2}}$$