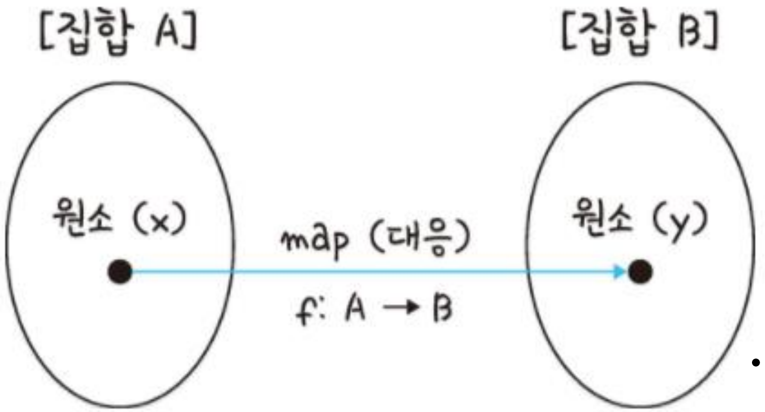
▣ 함수의 이해

- 함수란
  - 함수는 두 집합 사이의 대응 관계임
  - 즉, 다음과 같이 A의 성분을 B의 성분으로 변환하는 것을 함수라고 함
  - 함수의 수학적 표현은 다음과 같음

$$f: X \rightarrow Y \text{ 혹은 } f: X \mapsto Y$$

  - 참고로 f가 'x로부터 y로의 함수'라면 y를 x의 상(image)이라고 하며, x를 y의 원상(preimage)이라고 함



- 그림 1-51 함수

▣ 함수의 이해

- 정의역, 공역, 치역
  - 정의역, 공역, 치역은 다음과 같이 정의할 수 있음

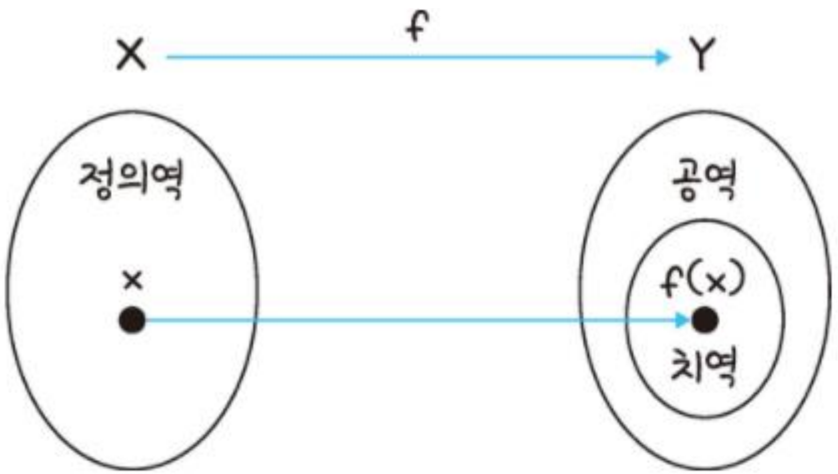
    \- 정의역(domain)은 함수 f로 관계 지은 집합 X와 Y에서 집합 X를 의미

    즉, f: X → Y에서 집합 X가 정의역에 속함

    \- 공역(co-domain)은 집합 X와 Y 중에 집합 Y를 의미

    즉, f: X → Y에서 집합 Y가 공역에 속함

    \- 치역(range)은 공역의 부분 집합으로 X값에 대응되는 Y 값 중에서 X와 연결된 값들을 의미

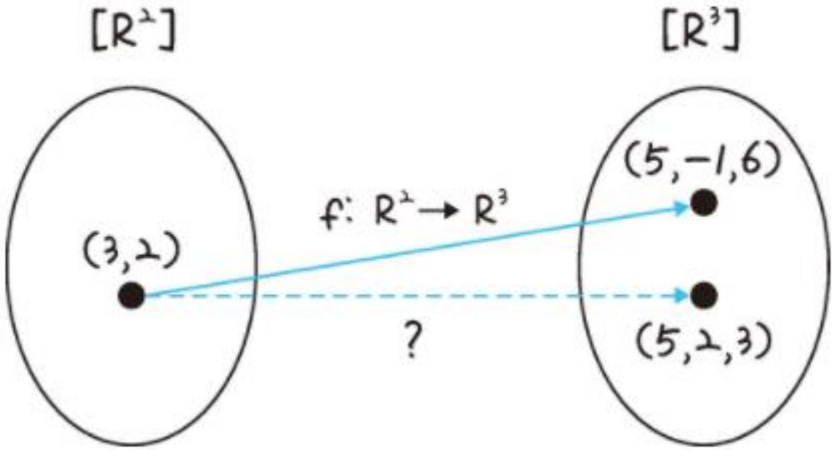


- 그림 1-52 정의역, 공역, 치역

05. 함수와 선형변환

▣ 함수의 이해

- 정의역, 공역, 치역
  - 예를 들어 f: $R^2 \rightarrow R$ 에서 f($x_{1,} x_2$) = 2라고 가정한다면 f: $x_{1,} x_2 \rightarrow$ 2와 같은 표현도 가능함 이때 정의역은 R^2 , 공역은 R, 치역은 2임
  - 또 다른 예로, f : R^2 -> R^3 에서 f($x_{1,} x_2$) = ($x_1 + x_2$, $x_1 - x_2$, $2x_1$)이라고 가정한다면
  - 정의역은 R^2, 공역은 R^3 이라는 결론을 얻게 됨



- 그림 1-53 F : (3,2) ->(5,-1,6)

▣ 함수의 이해

- 정의역, 공역, 치역
  - 집합 R^3 에서 (5, 2, 3)은 치역이 될 수 있을까?
  - 결론부터 말하면, (5, -1, 6)만 치역이 가능함
  - 치역은 X 값에 대응되는 Y 값 중에서 X와 연결된 값들이라고 정의함
  - 그림 1-53의 함수 f($x_{1,} x_2$) = ($x_1 + x_2$, $x_1 - x_2$, $2x_1$)에 대해 Y값의 결과는 다음과 같음

    f($x_{1,} x_2$) = ($x_1 + x_2$, $x_1 - x_2$, $2x_1$) -> f(3,2) = (3+2, 2-3, 2x3) = (5,-1,6)
  - Y값(5, -1, 6)에 대해서는 치역이 가능함
  - (5, 2, 3)이 지역이 될 수 없는 이유는 함수 f($x_{1,} x_2$) = ($x_1 + x_2$, $x_1 - x_2$, $2x_1$)의 결과로 (5, 2, 3)이 나올 수 없기 때문임
  - 즉, (5, 2, 3)은 공역은 될 수 있으나 치역은 될 수 없음

▣ 연습문제

$F: A \rightarrow B$에서 $x \rightarrow x^2$일 때 정의역, 공역, 치역, 2의 상, 1의 원상, 9의 원상을 구하세요.

▣ 연습문제 풀이

(1) 정의역: A

(2) 공역: B

(3) 치역: $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

(4) 2의 상: 4

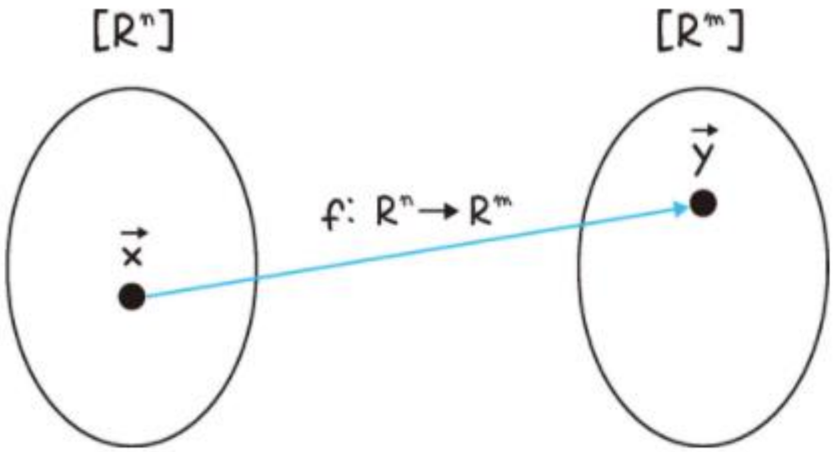
(5) 1의 원상: 1 -1

(6) 9의 원상: 3 -3

▣ 벡터의 변환

- 벡터의 변환
  - 함수는 한 집합의 원소에서 다른 집합의 원소 사이의 관계를 의미
  - 여기에서 집합의 원소를 벡터라고 함
  - 벡터는 다음과 같이 표현할 수 있음

$$\vec{x} \in R^n \ (R^n = \{x_1, x_2, \cdots, x_n \mid n-\text{튜플},\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in R^n\})$$



- 그림 1-54 두 집합 사이의 변환

▣ 벡터의 변환

- 벡터의 변환
  - 벡터의 변환은 3D 공간상에서 벡터에 여러가지 변환을 수행하는 것
  - $f: R^3 \mapsto R^2$ 으로 변환에서 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, 2x_3)$ 이라고 할 때

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$ 로 표현할 수 있음

(1) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ 이라고 가정한다면

- $$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (3 \times 1) \\ 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$ 가 됨

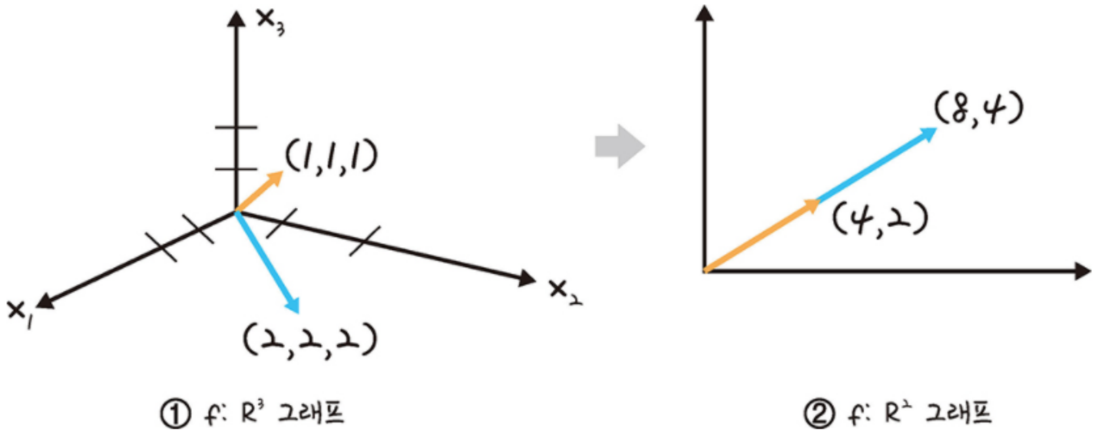
▣ 벡터의 변환

- **벡터의 변환**

  (2) $x_{1=}\, x_{2=}\, x_{3=}$ 2 **라고 가정한다면**

$$f\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}2+(3\times 2)\\2\times 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$$

가 됨. (1)과 (2)를 그래프로 나타내면 아래와 같음



- **그림 1-55 (1)과 (2)의 그래프**

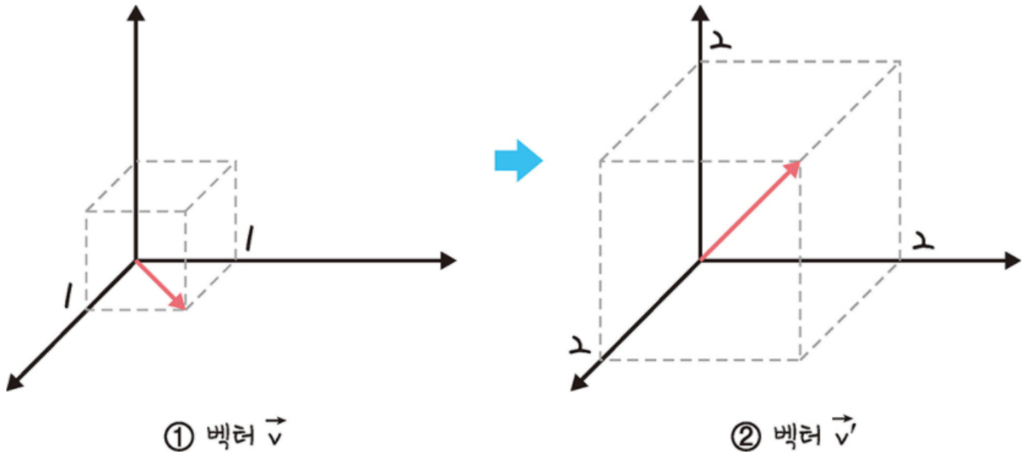
05. 함수와 선형변환

▣ 벡터의 변환

- 벡터의 변환
  - 이때 (1)에서 (2)로 변환을 '벡터의 변환(Transformation)'이라고 함
  - 즉, x_1, x_2, x_3 의 값에 따라 다양한 형태로 변할 수 있음
  - 다음과 같이 벡터 $\vec{v}$ 와 집합 M이 있을 때, M $\vec{v}$ 를 계산하여 그래프로 표현하면 다음과 같음

$$\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&1&3\\0&2&2\end{bmatrix}\text{일 때,}$$

$$M\vec{v}=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&1&3\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2\times1)+(0\times1)+(1\times0)\\(1\times1)+(1\times1)+(3\times0)\\(0\times1)+(2\times1)+(2\times0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}=\vec{v'},$$



- 그림 1-56 $\vec{v}$ 와 $\vec{v'}$

▣ 벡터의 변환

- 벡터의 변환
  - 벡터 $\vec{v}$ 가 벡터 $\vec{v'}$ (벡터 $\vec{v}$ 와 집합 M의 곱셈)로 변형된 것 역시 '벡터의 변환'이라고 함
  - 참고로 벡터의 변환은 다음과 같이 대문자 T로 표기함
  - $T: R^n \rightarrow R^m$
  - 벡터의 변환은 비디오 게임 등 3D 공간에서 포인트 혹은 벡터의 회전 및 이동 등을 수행하는 데 사용함

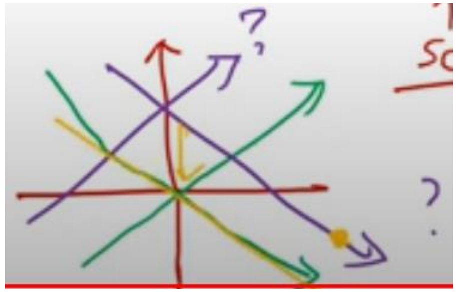
05. 함수와 선형변환

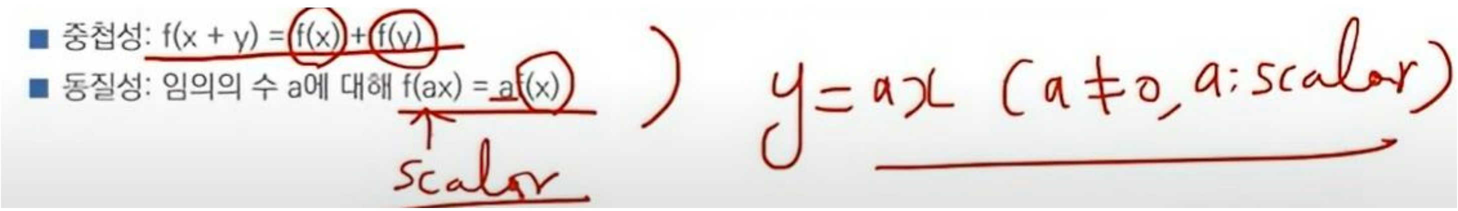
▣ 벡터의 변환

- 선형 변환
  - ‘선형적이다’ 는 영어로 'linear하다'고 표현함
  - linear란 line(선)의 형용사 형태로, '선형적이다'는 결국 어떤 성질이 변하는 데 그 변수가 1차원적이라는 의미로 유추할 수 있음
  - 즉, 선형성이란 직선과 같은 도형 또는 그와 성질이 비슷한 대상이라는 것으로, 함수에서는 그 모양이 ‘직선’ 이라는 의미로 사용함
  - 수학에서 선형성은 임의의 수 x, y와 함수 f에 대해 다음 두 조건을 동시에 만족해야 함

    – 중첩성: f(x+y) = f(x) + f(y)

    – 동질성: 임의의 수 a에 대해 f(ax) = af(x)





▣ 벡터의 변환

- 선형 변환
  - 선형 변환은 선형 결합을 보존하는 두 벡터 공간 사이의 함수
  - 즉, (1) 선형 결합을 보존하는 (2) 두 벡터 공간 사이의 함수에 대한 의미를 이해해야 함
  - 선형 결합이란 다음 두 조건을 만족해야 함을 의미
    - 합의 법칙: $T(\vec{a}+\vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b})$
    - 스칼라 곱의 법칙: $T(c\vec{a}) = cT(\vec{a})$

05. 함수와 선형변환

▣ 벡터의 변환

- 선형 변환
  - (1) 선형 결합을 보존한다는 것은 이러한 성질이 보존된다는 의미
    - 쉽게 말해 '덧셈과 곱셈에 닫혀 있다'고 보면 됨
    - '닫혀 있다'는 '덧셈과 곱셈을 사용할 수 있다'는 의미로 이해함
  - (2) 두 벡터 공간 사이의 함수는 무엇을 의미할까?
    - 선형 변환은 결국 '함수'라는 의미가 중요함
    - 함수란 첫 번째 집합의 임의의 한 원소를 두 번째 집합의 한 원소에만 대응시키는 이항
    - 관계라고 했음
    - 한 점을 한 벡터 공간에서 다른 벡터 공간으로 이동시키는데, 그 이동 규칙을 선형 변환이라고 할 수 있음
    - 이때 한 벡터 공간에서 다른 벡터 공간으로 이동하는 함수를 두 벡터 공간 사이의 함수라고 함

▣ 벡터의 변환

- 선형 변환
  - 예시로 선형 변환의 의미를 살펴보자
  - 행렬 A와 B가 있다고 가정함

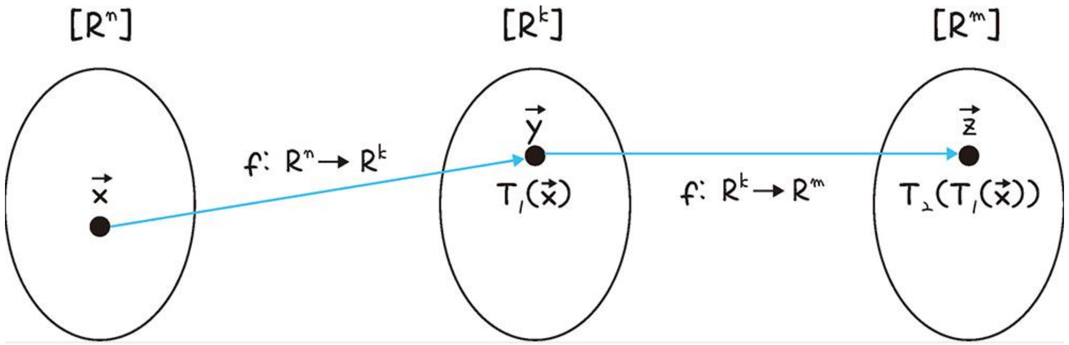
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1\times5)+(2\times6)+(3\times7) \\ (3\times5)+(4\times6)+(5\times7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+12+21 \\ 15+24+35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 74 \end{bmatrix}$$

  - 행렬 A에 임의의 행렬 B를 곱하는 AB는 벡터 B를 3차원에서 2차원으로 변환시키는 것을 의미
  - 즉, 선형 변환은 3차원에서 2차원으로 변환처럼 한 벡터 공간에서 다른 벡터 공간으로 이동하는 규칙 정도로 이해함

▣ 벡터의 변환

- 선형 변환
  - 선형 변환도 일종의 함수이기 때문에 선형 변환 역시 합성 개념으로 이해할 수 있음
  - 다음과 같은 선형 변환을 가정해 보자(T_1 의 공역은 T_1 의 정의역과 같음)
  - $T_1: R^n \rightarrow R^k,\ T_2: R^k \rightarrow R^m$
  - 여기에서 R^n 상의 벡터 $\vec{x}$ 에 대해 $T_1(\vec{x})$를 계산함
  - 그 후 R^k 상의 벡터 $T_1(\vec{x})$를 가지고 R^m 상의 최종적인 벡터 $T_2(T_1(\vec{x}))$ 를 계산해 보자
  - 즉, 다음과 같은 선형 변환의 합성이 가능함



- 그림 1-57 선형 변환의 합성

05. 함수와 선형변환

▣ 벡터의 변환

- **선형 변환**
  - 계산 과정은 R^n 상의 벡터 $\vec{x}$ 에 T_1 을 적용한 후, T_2 를 적용하는 과정으로 결국 전체 과정은 R^n -> R^m 인 변환으로 볼 수 있음
  - 이러한 R^n -> R^m 으로 변환을 T_2 와 T_1 의 합성이라고 하며, 다음과 같이 표기함 (T_2 서클(circle) T_1 이라고 읽음)

$$T_2 \circ T_1$$

  - 앞의 함수를 사용할 경우 다음 결론을 도출할 수 있음

$$T_2 \circ T_1 : R^n \to R^m$$

  - 이때 T2 와 T의 순서가 매우 중요함
  - 순서가 바뀔 경우 다른 변환이 될 수 있기 때문임
  - 즉, $T_2 \circ T_1$ 은 다음 식을 만족함

$$(T_2 \circ T_1)(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$$

▣ 연습문제

$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $X + Y = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$일 때,

$f(x, y, z) = (3x + 3y,\ 3z,\ 8y + 2x,\ 4z)$가 선형 변환임을 증명하세요.

▣ 연습문제 풀이

선형 변환을 만족하려면 다음 조건을 충족해야 합니다.

(1) 합의 법칙: $T(\vec{a}+\vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b})$

(2) 스칼라 곱의 법칙: $T(c\vec{a}) = cT(\vec{a})$

(1) $T(X) = f(2, 3, 5) = (15, 15, 28, 20)$

$T(Y) = f(4, 1, 2) = (15, 6, 16, 8)$

$T(X+Y) = f(6, 4, 7) = (30, 21, 44, 28)$

즉, 다음 합의 법칙을 만족합니다.

$R^3 \rightarrow R^4$

$f(ax+by) = af(x) + bf(y)$

▣ 연습문제 풀이

$$T(X+Y) = T(X)+T(Y)$$

$$(30,\ 21,\ 44,\ 28) = (15,\ 15,\ 28,\ 20)+(15,\ 6,\ 16,\ 8)$$

(2) 또 X에 임의의 실수 값 2를 곱하면 다음과 같습니다.

$$2X = 2\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\\10\end{bmatrix}$$

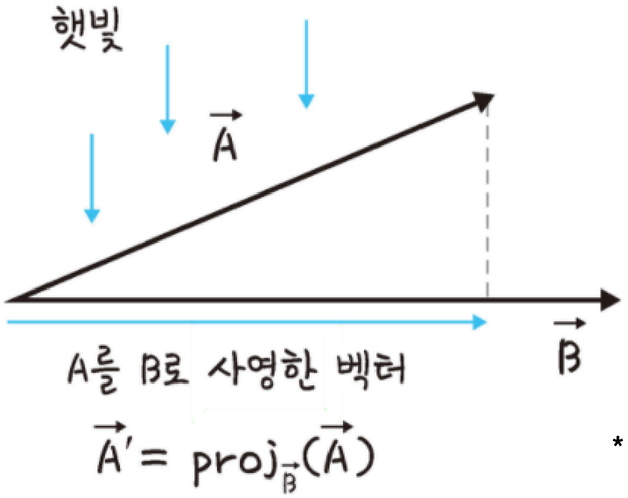
$$= f(4,\ 6,\ 10) = 2\times f(2,\ 3,\ 5)$$

$f(2x) = f(4, 6, 10)$
$= 2\cdot f(2, 3, 5)$
$= 2\cdot(15, 15, 28, 20)$

따라서 스칼라 곱의 법칙 $T(2X) = 2T(X)$를 만족하기 때문에 주어진 함수는 선형변환입니다.

▣ 벡터의 변환

- 정사영
  - 정사영(orthogonal projection)은 특정 도형(또는 선분)에 빛을 비추었을 때, 그 빛과 수직인 평면에 생기는 그림자를 의미
  - 그림 1-58에서 $\vec{A'}$ 를 $\vec{A}$ 의 정사영이라고 함



* Proj은 projection의 약자로 '사영'을 뜻하며, 프로젝션 벡터라고 읽음

- 그림 1-58 정사영

05. 함수와 선형변환

▣ 벡터의 변환

- 정사영
  - 정사영의 수학적 표현은 다음과 같음
  - 두 벡터 $\vec{A}, \vec{B}$ 에 대해 $\vec{A}$를 $\vec{B}$로 정사영($proj_{\vec{B}}(\vec{A})$) 하면 다음 수식으로 표현 할 수 있음

$$proj_{\vec{B}}(\vec{A}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|}\vec{A}$$

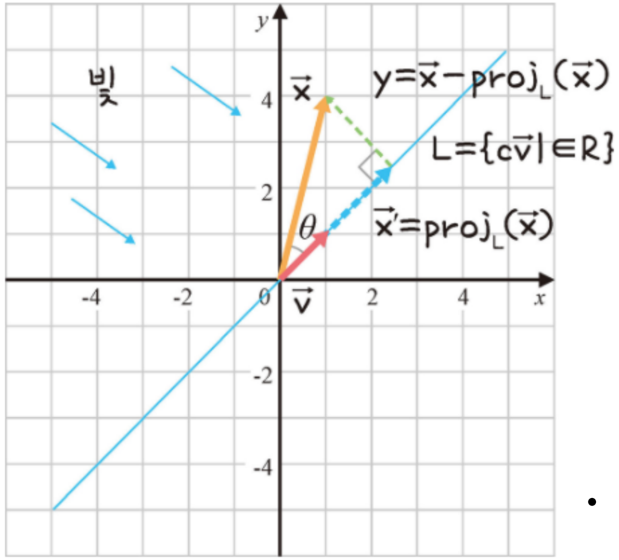
  - 정사영 역시 벡터이기 때문에 벡터의 크기와 방향을 이용하여 앞의 수식을 도출 할 수 있음

05. 함수와 선형변환

▣ 벡터의 변환

- 정사영
  - 그림 1-59에서 벡터 $\vec{v}$ 에 임의의 스칼라(c)를 곱한 결과가 직선 L이라고 함
  - 이때 벡터 $\vec{x}$ 의 직선 L로의 정사영($proj_L(\vec{x})$)을 정의해 보자
  - 직선 L에 대해 수직으로 빛이 비춘다고 할 때 빛과 L이 직교하므로 L에 정사영 한 $\vec{x}$ 를 $\vec{x}$' 라고 할 수 있음
  - 즉, 벡터 $\vec{x}$'는 직선(L)에 대한 X의 정사영임
  - 벡터y가 직선에 수직이라는 것은 직선상에 있는 모든 벡터에 수직이라는 것을 의미
  - 다음과 같이 표현할 수 있음

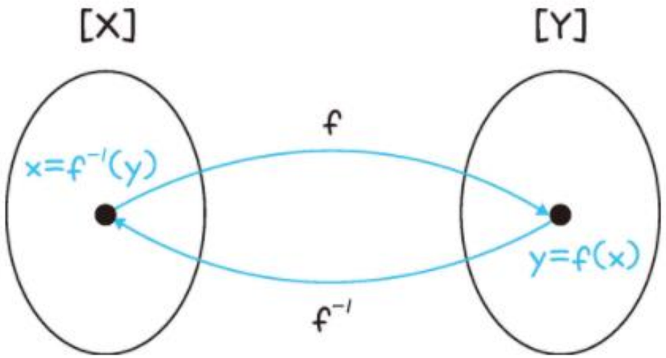
$$\vec{x} - proj_L(\vec{x}) = \frac{\text{직선에 수직}}{\text{직교}}$$



- 그림 1-59 좌표에서 정사영

▣ 함수의 역

- 역함수
  - 역함수는 변수와 함수 값을 서로 뒤바꾸어 얻는 함수
  - 역함수는 영어로 inverse function이라고 하며, $f^{-1}(x)$를 f 역함수 x 또는 f 인버스(inverse) x 라고 읽음



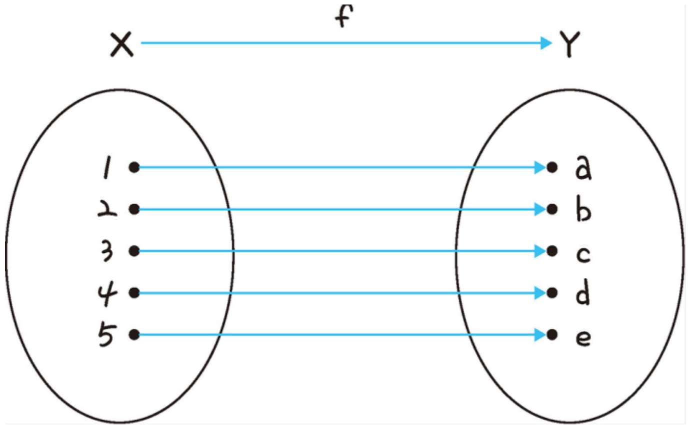
- 그림 1-60 역함수

▣ 함수의 역

- 역함수
  - 그림 1-61에서 f 와 f^{-1} 은 일대일 대응에서 정의역과 공역을 바꾼 함수이기 때문에 서로가 서로의 역함수가 됨
  - 즉, 다음과 같이 표현할 수 있음

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

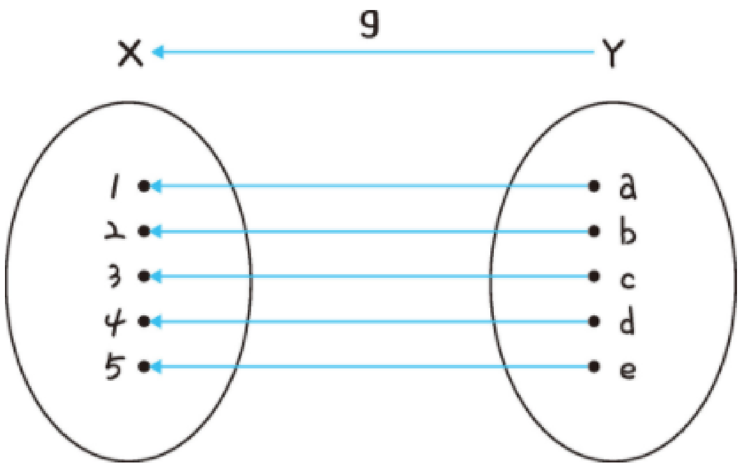
  - 예를 들어 두 집합 X = {1, 2, 3, 4, 5}, Y = {a, b, c, d, e}가 있고, 다음과 같이 X에 대한 Y의 함수 가 있을 때 f 는 일대일 대응임



- 그림 1-61 y=f(x)

▣ 함수의 역

- 역함수
  - 이때 다음과 같이 Y를 정의역으로 하고 X를 공역으로 하는 함수도 생각해 볼 수 있음
  - 이 함수를 g라고 가정할 때, 이 역시 일대일 대응이 됨



- 그림 1-62 x=g(y)

06. 역함수와 역변환

▣ 함수의 역

- 역함수
  - 함수 f: X → Y가 일대일 대응일 때, Y의 임의의 원소 y에 대해 y = f(x)인 X의 원소 x는 하나만 있음
  - 이때 y에 대해 x를 대응시키면 Y를 정의역, X를 공역으로 하는 새로운 함수를 만들 수 있는데, 이를 f의 역함수라고 하며 다음과 같이 표현함

$$f^{-1}: \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{X}$$

  - 다음 공식이 성립함

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

06. 역함수와 역변환

▣ 함수의 역

- 다음은 역함수의 추가적 성질임

$$(1)\ (f^{-1})^{-1} = f$$

$$(2)\ (f^{-1}\circ f)(\vec{x}) = \vec{x}\,(\vec{x}\in X)$$

$(f^{-1}\circ f)(\vec{x}) = f^{-1}(f(\vec{x})) = f^{-1}(\vec{y}) = \vec{x}$ 에서 $(f^{-1}\circ f)$ X에서의 항등함수를 의미

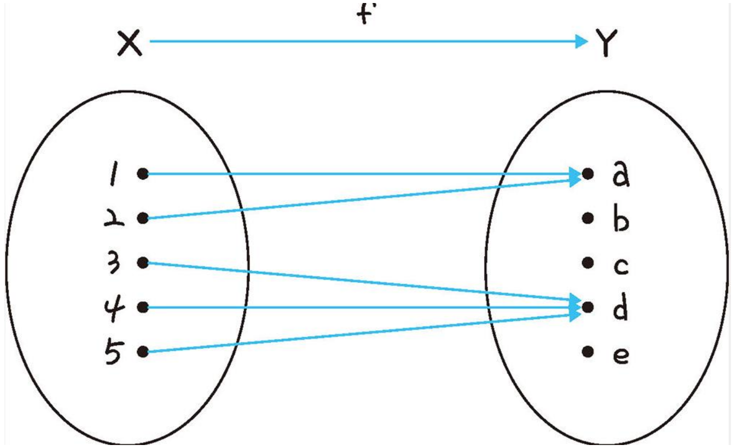
$$(3)\ (f\circ f^{-1})(\vec{y}) = \vec{y}\,(\vec{y}\in X)$$

$(f\circ f^{-1})(\vec{y}) = f(f^{-1}(\vec{y})) = f(\vec{x}) = \vec{y}$ 에서 $(f\circ f^{-1})$ 은 Y에서의 항등함수를 의미

- 정의역 X와 공역 Y가 실수 전체의 집합일 때 (2), (3)을 구분하는 것은 의미가 없음
- $f o\, f^{-1} = f^{-1} o f = \mathrm{I}$ 됨(I는 항등함수의 표현임)
- 참고로 모든 함수가 역함수를 갖는 것은 아님
- 앞의 성질을 만족할 때 역함수를 가지며, 이때 함수를 가역함수라고 함

▣ 함수의 역

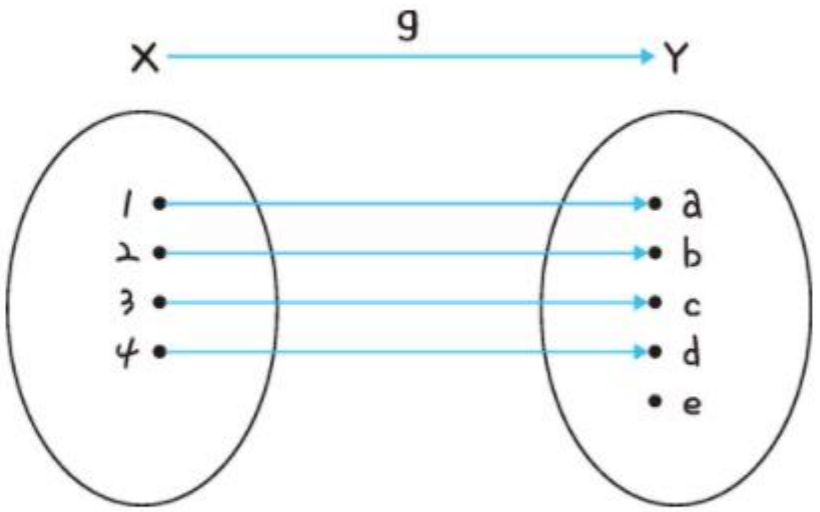
- 일대일 함수와 일대일 대응
  - 일대일 함수: 집합 X의 임의의 원소 x_1 , x_2 에 대해 $x_1 \neq x_2$ 일 때 f(x_1) $\neq$ f(x_2)인 함수
  - 일대일 대응: 일대일 함수+ (공역= 치역)
    - 집합 X의 원소 X 에 대해 f(x) ∈Y이면 함수
    - '이때 X1 X12일 때 f(x) f(X2)이면 일대일 함수고, 공역= 치역이면 일대일 대응임
    - 그림 1-63은 집합 X의 원소 다섯 개에 Y의 원소 두 개가 대응하므로 함수(f(1)= f(2)이므로 그냥 함수가 됨)



- 그림 1-63 f함수

▣ 함수의 역

- 일대일 함수와 일대일 대응
  - 그림 1-64는 집합 X의 원소에 대응하는 집합 Y의 원소가 다 다름
  - 공역은 {a,b,c,d,e}이고 치역은 {a,b,c,d}로 공역 ≠ 치역이므로 일대일 함수임

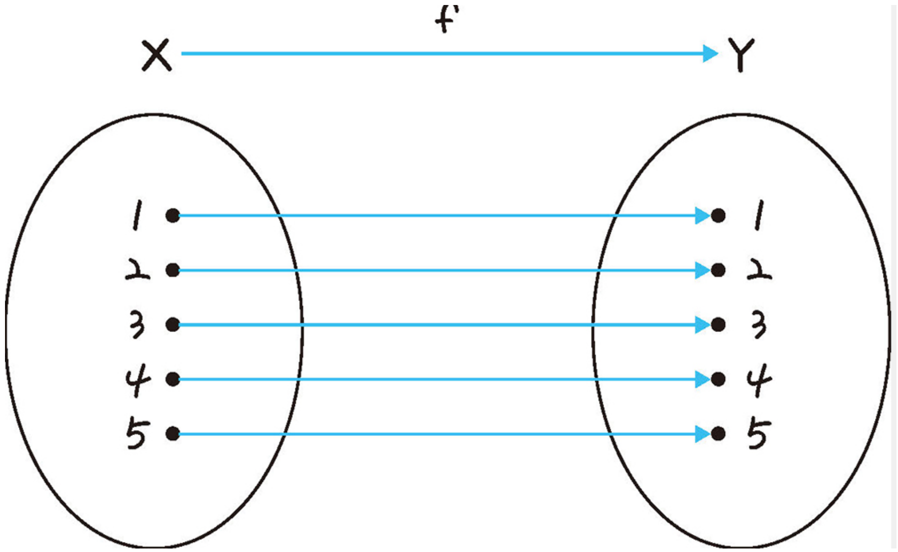


- 그림 1-64 g함수

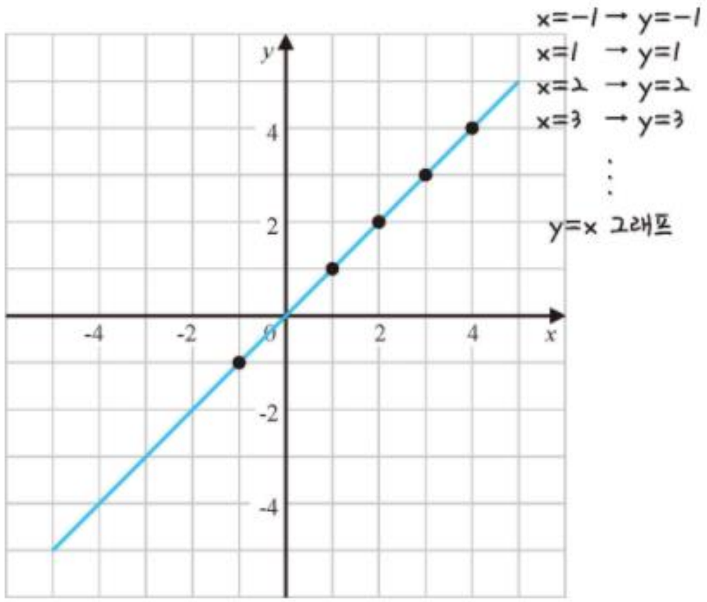
06. 역함수와 역변환

▣ 함수의 역

- 항등함수와 상수함수
  - 항등함수는 집합 X의 임의의 원소 X에 대해 f(x)=X인 함수로, 집합 X의 원소와 이에 대응하는 집합 Y의 원소가 항상 같음
  - 즉, 집합 X의 원소 1에는 집합 Y의 원소 1이 대응하고, 2에는 2가 대응함
  - 항상 자기 자신과 같은 값을 대응함



- 그림 1-65 항등함수



- 그림 1-66 항등함수그래프

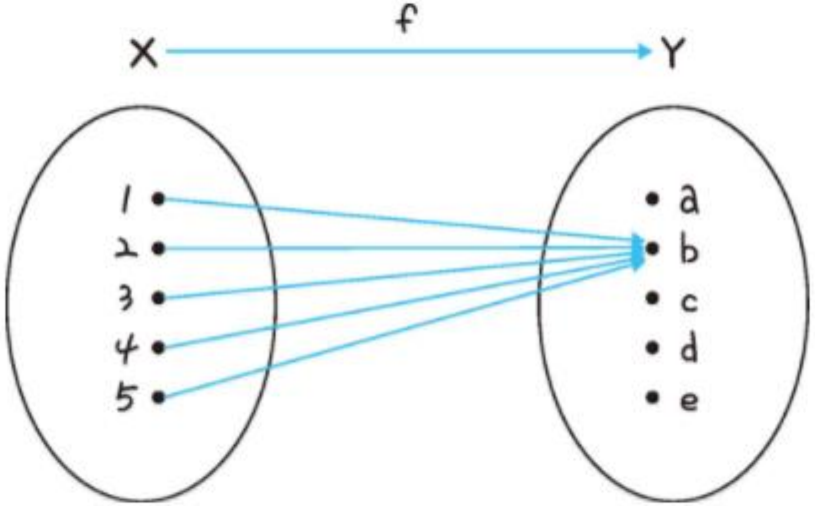
▣ 함수의 역

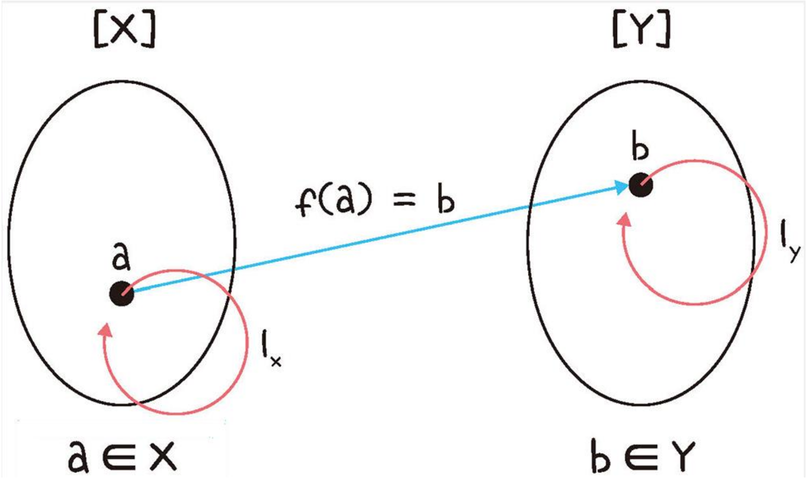
- 항등함수와 상수함수
  - 항등함수는 수학적 기호로 다음과 같이 표현함

$$I_x = f(x) = x$$

Identity Function y=x

  - 자기 자신의 값과 같으므로 다음과 같이 표현할 수도 있음

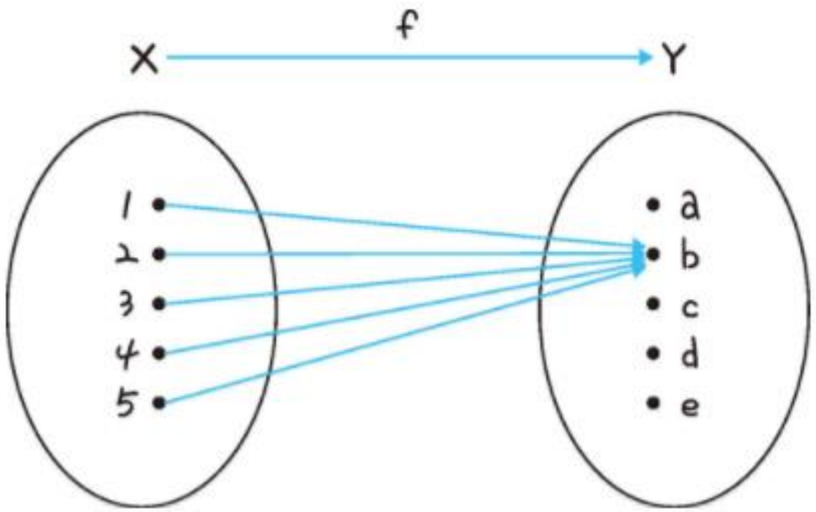




- 그림 1-67 항등함수

▣ 함수의 역

- 항등함수와 상수함수
  - 상수함수는 집합 X의 임의의 원소 x에 대해 f(x) = c인 함수로, X의 모든 원소가 Y의 한 원소에만 대응함



- 그림 1-68 상수함수

06. 역함수와 역변환

▣ 함수의 역

- 역함수를 구하는 방법
  - 역함수를 구하는 방법은 정의역과 치역만 바꾸면 됨
  - 이때 중요한 조건이 있는데, 원래 함수는 꼭 일대일 대응이어야 한다는 것
  - Y가 정의역이 되었을 때 Y의 모든 원소가 X의 원소에 대응하려면 공역= 치역이어야 함
  - Y의 임의의 원소 y에 대응하는 x가 하나만 있어야 하므로 일대일 함수이어야 함
  - 이 두 가지를 만족하는 경우는 일대일 대응밖에 없음
  - 일대일 대응이 아닌 함수는 역함수를 구할 수 없음
  - 이를 정리하면 다음과 같음

    (1) 함수 y = f(x)가 일대일 대응인지 확인함

    (2) y = f(x)를 X에 대해 품 ←x= f^{-1}(y)

    (3) x와 y를 바꿈 ←y= f^{-1}(x)

    (4) 함수의 정의역과 치역을 서로 바꿈

▣ 연습문제

다음 함수의 역함수를 구하세요.

(1) $y = x + 1$

(2) $y = x^2 + 1$

▣ 연습문제 풀이

(1) $y = x + 1$

일대일 대응이 맞기 때문에 역함수를 구할 수 있습니다.

$y = x + 1$

$x = y - 1$ ($\leftarrow y = f(x)$를 x에 대해 풉니다.)

$y = x - 1$ ($\leftarrow x$와 y를 바꿉니다.)

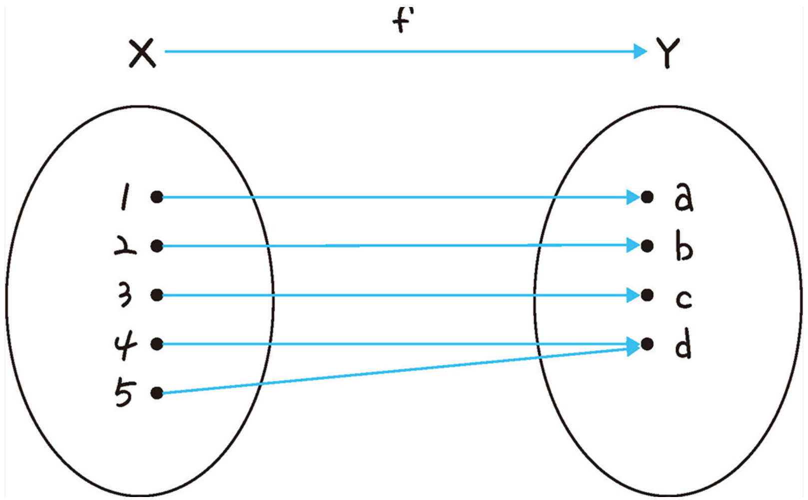
(2) $y = x^2 + 1$

일대일 대응이 아니라서 역함수를 구할 수 없습니다.

$x = 1$일 때 $y = 2$, $x = -1$일 때 $y = 2$이므로 역함수를 구할 수 없습니다.

▣ 전사함수, 단사함수, 전단사함수

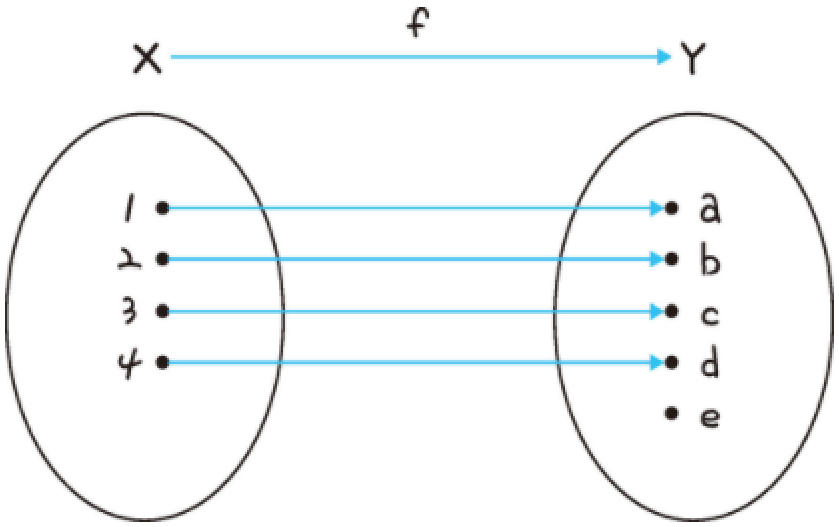
- 전사함수
  - 전사함수는 공역이 있는 모든 원소에 대해 한 공역의 원소를 y라고 한다면 집합 X에 적어도 x가 하나 존재하는 함수를 의미
  - 집합 Y의 모든 원소를 집합 X의 원소에 모두 대응해야 함
  - 화살에 비유하자면, 집합 Y의 원소에 화살이 두 개 이상 꽂히는 것은 상관없으나, 빈 과녁은 없어야 하며, 다음과 같이 |X|(정의역 개수)≥ |Y|(공역 개수)가 됨



- 그림 1-69 전사함수

▣ 전사함수, 단사함수, 전단사함수

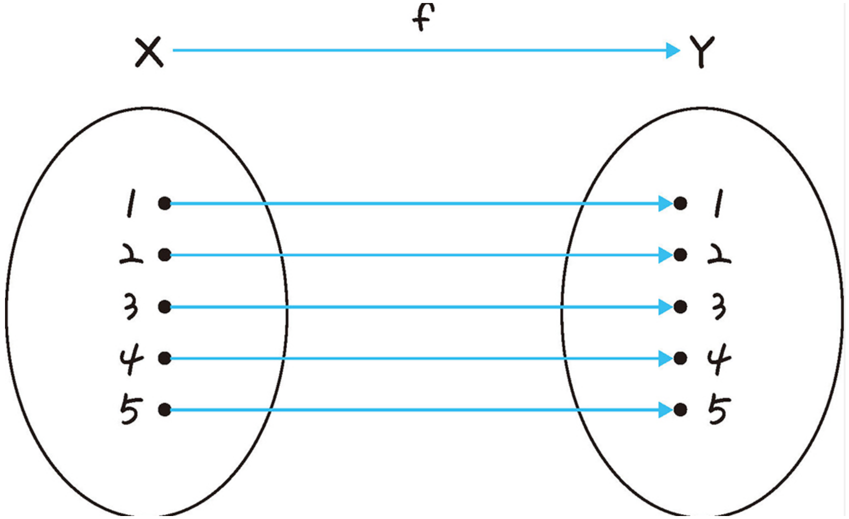
- 전사함수
  - 단사함수는 집합 X의 모든 원소를 집합 Y의 원소에 모두 대응해야 함
  - 화살에 비유하자면, 집합 Y의 원소에 빈 과녁이 있어도 되나 화살이 두 개 이상 꽂히는 것은 없어야 함
  - 즉, 다음과 같이 |X| (정의역 개수) ≤ |Y|(공역 개수)가 됨



- 그림 1-70 단사함수

▣ 전사함수, 단사함수, 전단사함수

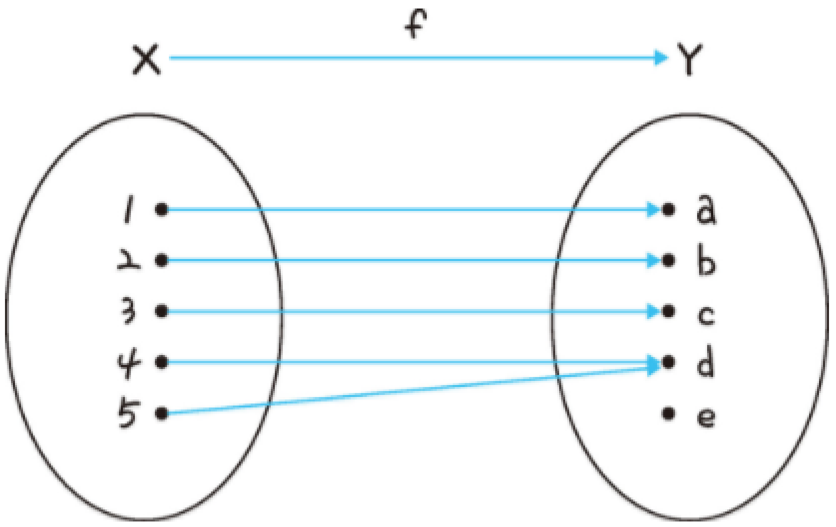
- 전사함수
  - 전단사함수를 화살에 비유하자면, 집합 Y의 원소에 한 개씩만 화살이 꽂혀야 하고 빈 과녁도 없어야 함
  - 즉, 다음과 같이 |X|(정의역 개수)= |Y|(공역 개수)가 됨



- 그림 1-71 전단사함수

▣ 연습문제

다음은 전사함수인가요? 단사함수인가요?



- 그림 1-72 y=f(x)함수

▣ 연습문제 풀이

빈 과녁이 없어야 하므로 전사함수는 아닙니다. 또 화살이 두 개 이상 꽂힐 수 없으므로 단사함수도 아닙니다. 따라서 그림 11-22는 전사함수, 단사함수 모두 아닙니다.

06. 역함수와 역변환

▣ 가역성과 전단사함수

- 가역성과 전단사함수의 관계
  - 앞서 역함수를 갖는 함수를 가역함수(invertible function)라고 했음
  - 즉, 다음 식이 있을 때 이를 f의 역함수라고 하며, 역이 존재하는 함수를 가역함수라고 함

    $$f^{-1} : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$$

  - 어떤 함수가 가역함수일 필요충분조건은 전단사함수임
  - 전단사함수가 아닌 함수는 역함수를 만들 수 없으므로 비가역함수(not invertible f unction)라고 함

05. 함수와 선형변환

▣ 연습문제

(1) $X = \{1, 2, 3\}$에서 $Y = \{x, y, z\}$로의 함수 f가 $f(1) = z$, $f(2) = x$, $f(3) = y$일 때 이 함수는 가역함수인가요? 가역함수라면 그 역함수를 구하세요.

(2) 다음과 같이 g 함수가 주어졌을 때, 이 함수는 가역함수인가요?

$$g: R \rightarrow R$$

$$x \rightarrow x^2$$

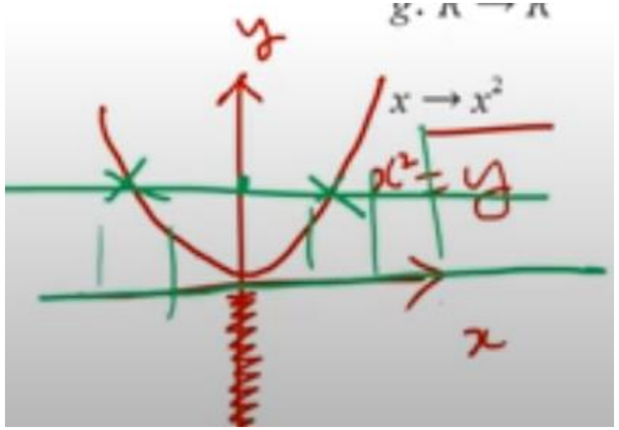
05. 함수와 선형변환

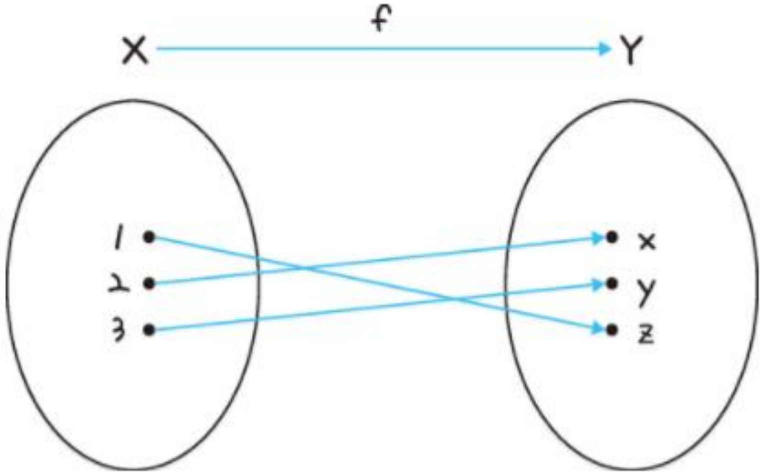
▣ 연습문제 풀이

(1) 함수 f는 다음과 같이 전단사함수이므로 가역함수입니다.

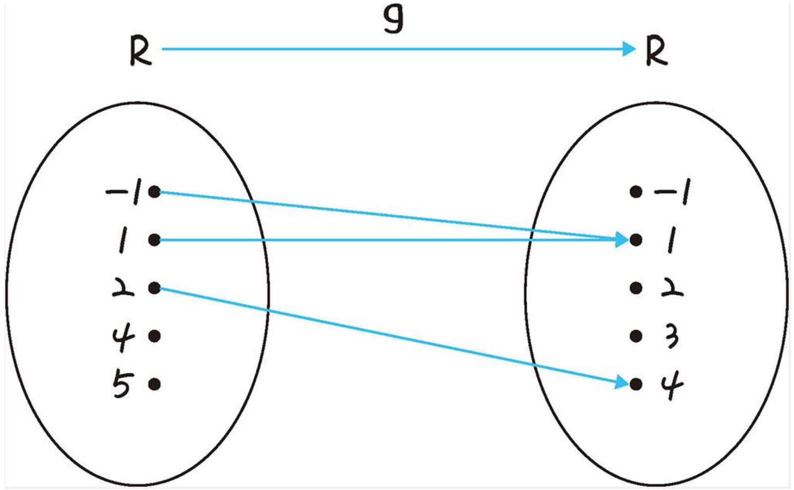
역함수는 $f^{-1}(z)=1$, $f^{-1}(x)=2$, $f^{-1}(y)=3$입니다.

(2) 함수 f는 다음과 같이 전단사함수가 아니므로 가역함수가 아닙니다.





• 그림 1-73 연습문제 f함수



• 그림 1-74 연습문제 g함수

(33강) 11장. 행렬변환 (3-2) 21:33

▣ 역행렬

- 역행렬
  - 수에 역수가 있다면 행렬에는 역행렬이 있음
  - 어떤 행렬 A와 곱했을 때 곱셈에 대한 항등원인 단위행렬 E가 나오게 하는 행렬을 행렬 A의
  - 역행렬이라고 함
  - AB=BA=E
  - 앞의 식처럼 A와 곱해서 E가 나오게 하는 행렬 B를 A의 역행렬이라고 하며, A^{-1} 로
  - 표기함(A 인버스(inverse)라고 읽음)
  - $B = A^{-1}$

06. 역함수와 역변환

▣ 역행렬

- 다음 예시로 역행렬을 알아보자

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

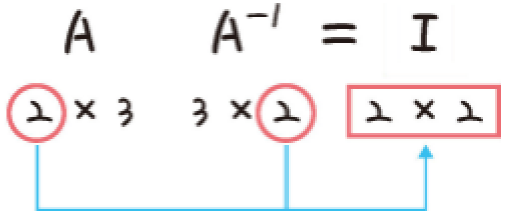
$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4 \times (-2)) + (3 \times 3) & (4 \times 3) + (3 \times (-4)) \\ (3 \times (-2)) + (2 \times 3) & (3 \times 3) + (2 \times (-4)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((-2) \times 4) + (3 \times 3) & ((-2) \times 3) + (3 \times 2) \\ (3 \times 4) + ((-4) \times 3) & (3 \times 3) + ((-4) \times 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- AB = E 라는 단위행렬을 도출했고, BA = E 역시 단위행렬이 도출함 두 행렬을 곱했을 때 단위행렬을 도출했기 때문에 B는 A의 역행렬임

▣ 역행렬

- **역행렬**
  - 참고로 숫자에서는 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 이 성립하지만, 행렬에서는 $A^{-1} = \frac{1}{A}$ 이 성립하지 않음
  - 일반적으로 행렬의 곱셈에 대한 성질에서는 AB ≠ BA임
  - 행렬과 그 역행렬에서는 $AA^{-1} = A^{-1}A$ 가 성립함(동일하게 단위행렬을 도출하므로 $AA^{-1} = A^{-1}A$ 가 성립함)
  - 행렬 A가 2×3이고, A^{-1} 이 3×2라면 AA^{-1} = E가 되는데, 이때 E는 2차 정사각행렬이 됨
  - 반대로 $A^{-1}A$ = E에서 E는 3차원 정사각행렬이 됨
  - AA^{-1} 과 $A^{-1}A$ 모두 단위 행렬 E를 갖지만 서로 다른 행렬임
  - 곱셈 결과가 똑같은 n차 단위행렬이 되려면 A 와 A^{-1} 도 n차 정사각행렬이어야 함



- 그림 1-75 역행렬

▣ 역행렬

- 역행렬의 공식
  - 2차 정사각행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 에 대해

- ad − bc ≠ 0 이면 $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 임

- ad − bc = 0 이면 행렬 A의 역행렬이 없음

. 예를 들어 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ 의 역행렬이 존재할까?

ad – bc = 24 -24 = 0이므로 역행렬이 존재하지 않음

▣ 역행렬

- **역행렬의 성질**

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k} A^{-1}$

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

06. 역함수와 역변환

▣ 역행렬

- 역행렬의 활용
  - 역행렬은 선형방정식을 풀 때 유용함
  - 다음과 같은 식이 있다고 함

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

  - 앞의 x에 대한 선형방정식을 행렬로 표현하면 다음도 같음(a,b는 상수임)

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

▣ 역행렬

- 역행렬의 활용
  - 이를 더 간단히 표현하면 다음과 같음 AX = B
  - A의 역행렬만 계산할 수 있다면 이 연립방정식의 해는 다음과 같이 손쉽게 계산 할 수 있음

$$X = A^{-1}B$$

▣ 역행렬

- 파이썬에서도 다음과 같이 역행렬을 계산하여 연립방정식을 구현할 수 있음

```
# NumPy 라이브러리를 호출합니다
import numpy as np

# A에 4x4 행렬을 배치합니다
A = np.matrix([[1, 0, 0, 0], [2, 1, 0, 0], [3, 0, 1, 0], [4, 0, 0, 1]])

# A 행렬을 역행렬로 변환하기 위해 numpy.linalg.inv()를 사용합니다
print(np.linalg.inv(A))
```

```
[[ 1, 0, 0, 0] [-2, 1, 0, 0] [-3, 0, 1, 0] [-4, -0, -0, 1]]
```

▣ 연습문제

다음 행렬의 역행렬을 구하세요.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

▣ 연습문제 풀이

(1) $ad - bc \neq 0$임을 확인하여 역행렬이 있는지 살펴봅니다.

$(1\times4)-(2\times3)=-2$로 0이 아니기 때문에 역행렬이 존재합니다.

따라서 $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$이 됩니다.

In [57]:

```
import numpy as np
A = np.matrix([[1,2],[3,4]])
print(np.linalg.inv(A))
```

```
[[-2.   1. ]
 [ 1.5 -0.5]]
```

▣ 연습문제 풀이

(2) $ad - bc \neq 0$임을 확인하여 역행렬이 있는지 살펴봅니다.

$(2 \times 6) - (3 \times 4) = 0$으로 결과가 0이기 때문에 역행렬이 존재하지 않습니다.

In [58]:

```
import numpy as np
A = np.matrix([[2,3],[4,6]])
print(np.linalg.inv(A))
```

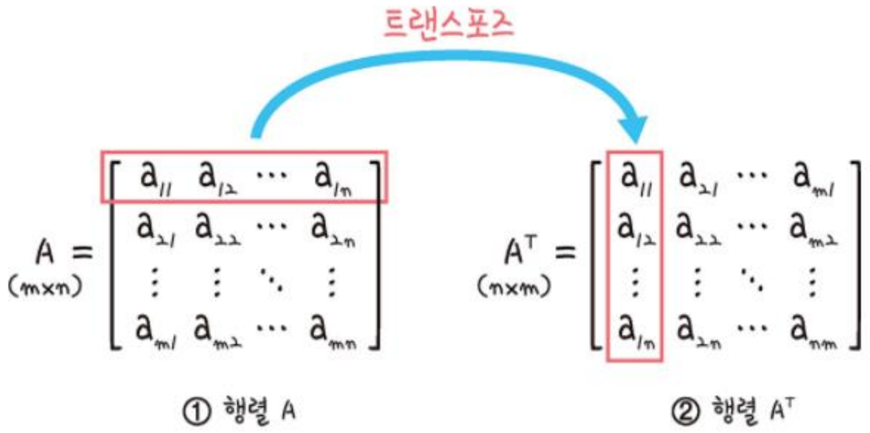
LinAlgError: Singular matrix --- 역행렬이 존재하지 않기 때문에 오류 발생

07. 전치행렬

▣ 전치행렬

- 전치행렬이란
  - 전치행렬(transposed matrix)은 열과 행을 바꾼 행렬임
  - 즉, mxn 행렬을 nxm 행렬로 바꾼 것
  - 그림 1-76과 같이 m×n의 행렬 A가 A^T에서는 nxm 행렬이 됨
  - 전치 행렬은 다음과 같이 표기하고 트랜스포즈(Transpose)라고 읽음

$$A_{m\times n} = {A^T}_{n\times m}$$



- 그림 1-76 행렬 A와 A^T

▣ 전치행렬

- 전치행렬이란
  - 다음은 전치행렬의 다양한 예시

$$(1)\ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$(2)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$(3)\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T$$

07. 전치행렬

▣ 전치행렬

- **전치행렬의 성질**

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(AB)^T = B^T A^T$

(4) $(kA)^T = kA^T$ (k는 임의의 실수)

- **전치행렬은 열 벡터와 행 벡터 변환, 이미지 프로세싱에서 사진 변환 등 다양한 곳에 활용함**

▣ 전치행렬

- 파이썬에서의 전치행렬 계산
  - a.T
  - np.transpose(a)
  - np.swapaxes(a, 0, 1): a 뒤의 인자 0과 1은 축을 의미

    . 0은 가장 높은 차수의 축인 2차원이고, 1은 그다음 높은 차수의 축인 1차원을 의미

    즉, 원소의 행과 열을 바꾸라는 의미((1,3)→ (3,1))

In [59]:

```
# NumPy 라이브러리를 호출합니다
import numpy as np
# 원소가 총 15개 들어 있는 배열 a를 3x5로 배치합니다
a = np.arange(15).reshape(3, 5)
print(a)
```

▣ 전치행렬

- **파이썬에서의 전치행렬 계산**

```
[[ 0 1 2 3 4],
 [ 5 6 7 8 9],
 [10 11 12 13 14]]
```

In [60]:

```
# a 행렬을 전치행렬로 변환합니다
np.transpose(a)
```

Out [60]:

```
array([[ 0, 5, 10],
       [ 1, 6, 11],
       [ 2, 7, 12],
       [ 3, 8, 13],
       [ 4, 9, 14]])
```

07. 전치행렬

▣ 전치행렬

- 전치행렬의 행렬식
  - 행렬식이란 행 개수와 열의 개수가 같은 행렬, 즉 정사각행렬에 수를 대응시키는 함수를 의미
  - 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 에 대한 행렬식은 A = ad – bc이고 det A라고 씀
  - 행렬식 A = ad – bc가 0이면 행렬의 역행렬은 존재하지 않음
  - mxn 행렬에서 행렬식은 다음과 같이 정리할 수 있음

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}\end{aligned}$$

▣ 전치행렬

- 전치행렬의 행렬식
  - 이 정리를 사용하면 크기가 1,2,3인 정방행렬의 행렬식은 다음과 같음

1×1 행렬의 행렬식: $\det[a] = a$

2×2 행렬의 행렬식: $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

3×3 행렬의 행렬식: $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

▣ 전치행렬

- 전치행렬의 행렬식
  - 수식이 어렵게 보일 수 있기 때문에 예시로 알아보자
  - 다음과 같이 행렬 A가 있다고 함
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ 일 때, det A는 다음과 같이 계산할 수 있음

$$\begin{aligned} \det A &= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \\ &= (1\times3\times0)+(2\times(-1)\times0)+(0\times2\times5)-(0\times3\times0)-(2\times2\times0)-(1\times(-1)\times5) \\ &= 0+0+0-0-0+5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

▣ 전치행렬

- 전치행렬의 행렬식
  - 전치행렬과 행렬식을 이용하면 다음과 같은 전치행렬 성질을 도출할 수 있음

$$\det(A^T) = \det(A)$$

  - 예를 들어 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ 이고 $A^{-T} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$ 이면,
  - det(A)=ad-bc = -6 - 35 = -41, det(A^{T})=ad-bc=-6-35 = -41임
  - det(A) = det(A^{T})이 성립함
  - 행렬식은 정사각행렬이 나타내는 선형 변환이 부피를 확대시키는 정도를 표현할때 주로 사용함

07. 전치행렬

▣ 연습문제

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$의 det A를 구하세요.

▣ 연습문제 풀이

$$
\begin{aligned}
\det A &= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \\
&= (1\times 3\times 8)+(2\times(-1)\times 6)+((-4)\times(-2)\times 5)-((-4)\times 3\times 6)-(2\times(-2)\times 8)-(1\times(-1)\times 5) \\
&= 24-12+40+72+32+5 \\
&= 161
\end{aligned}
$$

▣ 전치행렬

- 전치행렬의 역
  - 전치행렬과 역행렬의 관계에서 임의의 행렬이 가역성을 가진다면 전치행렬 역시 가역성을 갖음
  - 다음 성질이 성립함

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

▣ 전치행렬

- 전치행렬의 역
  - 이것에 대한 증명을 예시로 살펴보자

$$(A^{-1})^T = \frac{1}{43}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ 이 있을 때,

(1) $(A^T)^{-1}$ 값은 $= \dfrac{1}{15-(-28)}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{43}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{15-(-28)}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{43}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

07. 전치행렬

▣ 전치행렬

- 전치행렬의 역

(2) 값 $(A^{-1})^T$ 시 다음과 같이 과정을 두 번 거침

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{15-(-28)}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{43}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^T = \frac{1}{43}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ 이 성립함