08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

- 고유 벡터(eigenvector)
  - 선형 변환을 취했을 때 방향(direction)은 변하지 않고 크기(magnitude)만 변하는 벡터를 의미
  - 고유 벡터의 크기가 변한다고 했는데 바로 그 변한 크기가 고유 값(eigenvalue)을 의미
  - 고유 값이 2라면 기존 벡터 크기의 2배만큼 길어진 것이고, 고유 값이 $\frac{1}{3}$ 이라면 기존 벡터 크기의 $\frac{1}{3}$ 만큼 줄어든 것

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

- 고유 벡터(eigenvector)
  - 이를 수학적으로 정리하면 다음과 같음 정방행렬 A에 대해 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (λ 는 상수)가 성립하는 0 이 아닌 벡터 $\vec{x}$ 가 존재할 때 , λ 상수를 행렬 A의 고유 값이라고 하며, $\vec{x}$ 를 이에 대응하는 고유 벡터라고 함

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$ (λ 는 상수)

  - 이 수식을 행렬로 표현하면 다음과 같음

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

- 그림 1-77 고유 값과 고유 벡터

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

- 고유 벡터(eigenvector)
  - 이때 λ 상수를 행렬 A의 고유 값이라고 하며 $\vec{x}$ 를 이에 대응하는 고유 벡터라고 함
  - 좀 더 쉽게 이해할 수 있도록 고유 값과 고유 벡터가 가지는 의미를 예시로 알아보자

<u>예시 1</u>

정방행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, 고유 값 $\lambda = 7$, 고유 벡터 $\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 일 때 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 를

만족하는지 알아보자

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\times4)+(4\times5) \\ (5\times4)+(3\times5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 35 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\vec{x} = 7\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 를 만족함

▣ 고유 값, 고유 벡터

예시 2

정방행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, 고유 값 λ = −2, 고유 벡터 $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 일 때 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 를

만족하는지 알아보자

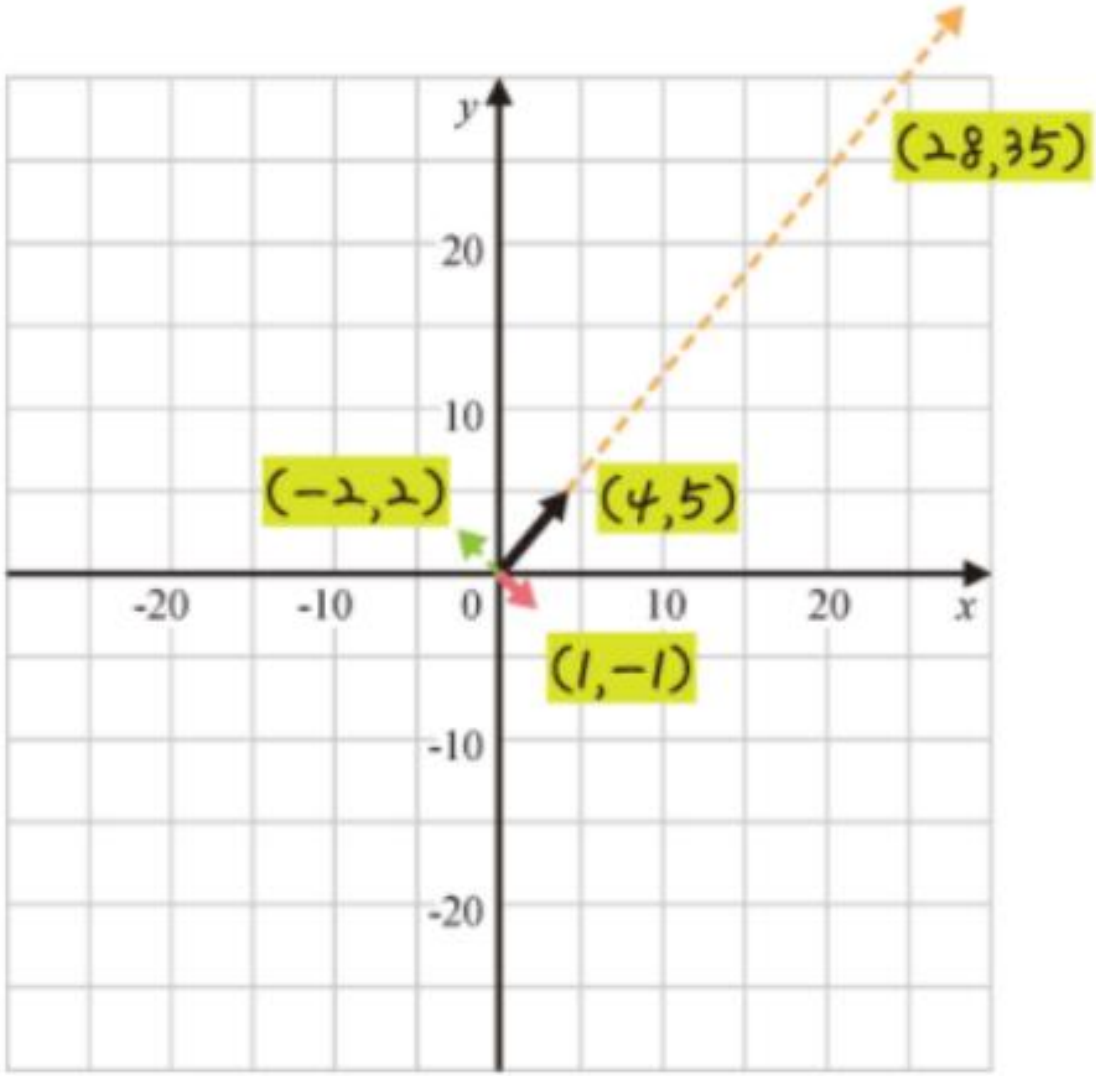
$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\times1)+(4\times(-1)) \\ (5\times1)+(3\times(-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\vec{x} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 를 만족함

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터



08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

- 벡터 $\vec{x}$ 에 대해 n차 정방행렬 A를 곱하는 결과와 λ 를 곱하는 결과가 같음
- 즉 , 행렬 곱의 결과가 원래 벡터와 ‘방향’ 은 같고 , ‘배율’ 만 λ 상수만큼 비례해서 변했다는 것을 의미
- 고유 값을 구하는 공식은 다음과 같음

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

- 이때 값이 변하지 않고 행렬이 그대로 나오게 하고자 단위행렬(I)을 곱함
- λ 를 단위행렬과 곱함

▣ 고유 값, 고유 벡터

- 앞의 2차 정방행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ 고유 값을 구해 보자

2차 정방행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$에 대해 $A\vec{x}$ 는 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 고, 이것을 풀면 다음과 같음

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

▣ 고유 값, 고유 벡터

- $(A\text{-}\lambda I)\vec{x} = 0$ 이므로 다음과 같이 고유 값을 구할 수 있음

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)(3-\lambda)-4\times 5 = 0 \leftarrow$ 행렬식 적용

$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$

$(\lambda-7)(\lambda+2) = 0$

$\therefore\ \lambda = 7, -2$

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

- 다음 식에 특성방정식을 적용하여 고유 값을 구해 보자

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대해 $(A\text{-}\lambda I)\vec{x} = 0$ 을 만족하는 고유 값을 구함

$$
\begin{aligned}
D(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)(3-\lambda) - 4 \times 5 \\
&= (\lambda-2)(\lambda-3) - 4 \times 5 \\
&= \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 20 \\
&= \lambda^2 - 5\lambda - 14 \\
&= (\lambda-7)(\lambda+2) = 0 \\
\therefore \lambda &= 7, -2
\end{aligned}
$$

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

- 고유 값과 고유 벡터를 구하는 순서는 먼저 고유 값을 구한 후 고유 값에 대응하는 고유 벡터를 구함
- 가우스 소거법 : 연립 일차방정식을 풀이하는 알고리즘으로 , 풀이하는 과정에서 일부 미지수가 차츰 소거되어 결국 남은 미지수에 대해 선형 결합으로 표현하면서 풀이를 완성함
  - 가우스 소거법은 보통 행렬을 사용함

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

- 앞서 행렬 A의 고유 값을 구한 결과 λ=7, λ=-2 였음
- λ =7, λ=-2 의 고유 값에 대응하는 고유 벡터를 풀어 보자

(1) λ= 7에 대응하는 고유 벡터 $\vec{x}$를 구함

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-7 & 4 \\ 5 & 3-7 \end{vmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이 식을 방정식으로 풀이하면 다음과 같음

$$-5x_1 + 4x_2 = 0$$

$$5x_1 - 4x_2 = 0$$

x_1 = 4, x_2 = 5 가 됨

고유 벡터는 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 임

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

(2) λ= -2에 대응하는 고유 벡터 $\vec{x}$ 를 구함

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-(-2) & 4 \\ 5 & 3-(-2) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 5x_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[x_1 + x_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

■ 고유 값, 고유 벡터

이때 x_1 이 1일 때, x_2 는 -1이 되므로 고유 벡터는 다음과 같음

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2차 정방행렬 A에 대한 특성방정식을 이용하여 고유 값 λ 는 {7, -2}이며, 각각의 고유 벡터는 [4 5]와 [1 -1]임

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

- 파이썬에서는 다음과 같이 고유 벡터와 고유 값을 구할 수 있음

In [61]:

```
# NumPy 라이브러리를 호출합니다
import numpy as np

# 2차원 행렬 A
# np.linalg.eig(a)는 고유 값과 고유 벡터 도출을 위한 함수입니다
a = np.array([[5, -1], [-2, 1]])
w, v = np.linalg.eig(a)
```

참고로 고유 벡터의 수학적 계산과 파이썬의 고유 벡터 결과가 다른 이유는 고유 벡터를 표시할 때는 보통 길이가 1 인 단위 벡터가 되도록 정규화 (normalization)하기 때문임

```
# 고유 값 구하기
print(w)
print(v)
```

```
[5.44948974 0.55051026]   --- 고유 값에 대한 결괏값
[[ 0.91209559 0.21927526] --- 고유 벡터에 대한 결괏값
 [-0.40997761 0.97566304]]
```

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

- 가우스 소거법에 의한 계산 방법
  - 가우스 소거법은 다음과 같이 네 단계를 거쳐 계산함

    (1) 주어진 방정식을 첨가행렬로 변환

    (2) 행 변환 방법을 적용하여 첨가행렬을 RRF(RowReduced Form) 로 변환

    (3) 첨가행렬의 결과를 방정식으로 표현함

    (4) 방정식에 대입법을 적용하여 해를 구함

  - 다음 방정식으로 가우스 소거법을 적용해 보자

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = -6 \\ 3x - 2y - 4z = -2 \end{cases}$$

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

(1) 주어진 방정식을 첨가행렬로 변환

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

(2) 행 변환 방법을 적용하여 첨가행렬을 RRF(RowReduced Form)로 변환

$$\xrightarrow{R_2:-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3:-3R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -12 \\ 0 & -8 & -7 & -11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2:R_2\times(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & -8 & -7 & -11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3:8R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3:R_3\times 1/17} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 고유 값, 고유 벡터

$$\xrightarrow[R_2:R_2\times(-1)]{}\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -8 & -7\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}3\\ 12\\ -11\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3:8R_2+R_3]{}\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 17\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}3\\ 12\\ 85\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3:R_3\times 1/17]{}\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}3\\ 12\\ 5\end{array}\right]$$

▣ 고유 값, 고유 벡터

(3) 첨가행렬의 결과를 방정식으로 표현함

$$\begin{cases} x + 2y + \ \ z = 3 \\ \qquad\ \ y + 3z = 12 \\ \qquad\qquad\ \ z = 5 \end{cases}$$

(4) 방정식에 대입법을 적용하여 해를 구함

세 번째 방정식으로 z = 5가 됨

두 번째 방정식에 z = 5를 대입하면 y + 15 = 12가 됨

y = −3임

첫 번째 방정식에 y = −3, z = 5를 대입하면 x − 6 + 5 = 3이 됨

x = 4임

∴ x = 4, y = −3, z = 5

▣ 연습문제

행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$에 대해 행렬 A의 고유 값과 고유 벡터를 구하세요.

▣ 연습문제 풀이

(1) 고유 값 구하기

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 3\times 4$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 12$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 10$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0$$

$$\therefore \lambda = 5, -2$$

08. 고유 값, 고유벡터, 고유 공간

▣ 연습문제 풀이

① $\lambda = 5$일 때는 다음과 같습니다.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-5 & 3 \\ 4 & 2-5 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-4x_1 + 3x_2 = 0$$

$$4x_1 - 3x_2 = 0$$

따라서 $x_1 = 3$, $x_2 = 4$가 됩니다.

$\therefore$ 고유 벡터는 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$입니다.

▣ 연습문제 풀이

② $\lambda = -2$일 때는 다음과 같습니다.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-(-2) & 3 \\ 4 & 2-(-2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[x_1 + x_2]\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

이때 x_1이 1일 때 x_2는 -1이 되므로 고유 벡터는 다음과 같습니다.

$\therefore$ 고유 벡터는 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$입니다.

▣ 연습문제 풀이

In [62]:

```
import numpy as np
a = np.array([[1, 3], [4, 2]])
w, v = np.linalg.eig(a)
print(w)
print(v)
```

```
[-2. 5.]             --- 고유 값에 대한 결괏값
[[-0.70710678 -0.6 ] --- 고유 벡터에 대한 결괏값
 [ 0.70710678 -0.8 ]]
```

▣ 고유 공간

- 고유 공간
  - 고유 공간은 특정 고유 값에 대응되는 무수히 많은 고유 벡터가 이루는 공간
  - 고유 공간은 다음 성질이 있음
    - ‘고유 값 λ 에 대응하는 모든 고유 벡터에 ‘영 벡터’를 첨가하여 구성된 집합
    - 각각의 고유 값 λ에 대응하는 행렬 A의 고유 공간이 있음

▣ 고유 공간

- 예제로 고유 공간을 확인해 보자
- $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ 일 때, $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 를 적용하면 $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 와 같은 수식이 성립함

(x_1, x_2)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(−1, 0)	(0, −1)	(−1, 1)	(−1, −1)	(1, −1)
결과	(4, 1)	(1, 4)	(5, 5)	(−4, −1)	(−1, −4)	(−3, 3)	(−5, −5)	(3, −3)
λ 값			5			3	5	3

▣ 고유 공간

- 다음은 x_1 과 x_2 의 다양한 값에 대한 결과값임

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad\therefore\lambda=5$$

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-1\end{bmatrix}$$

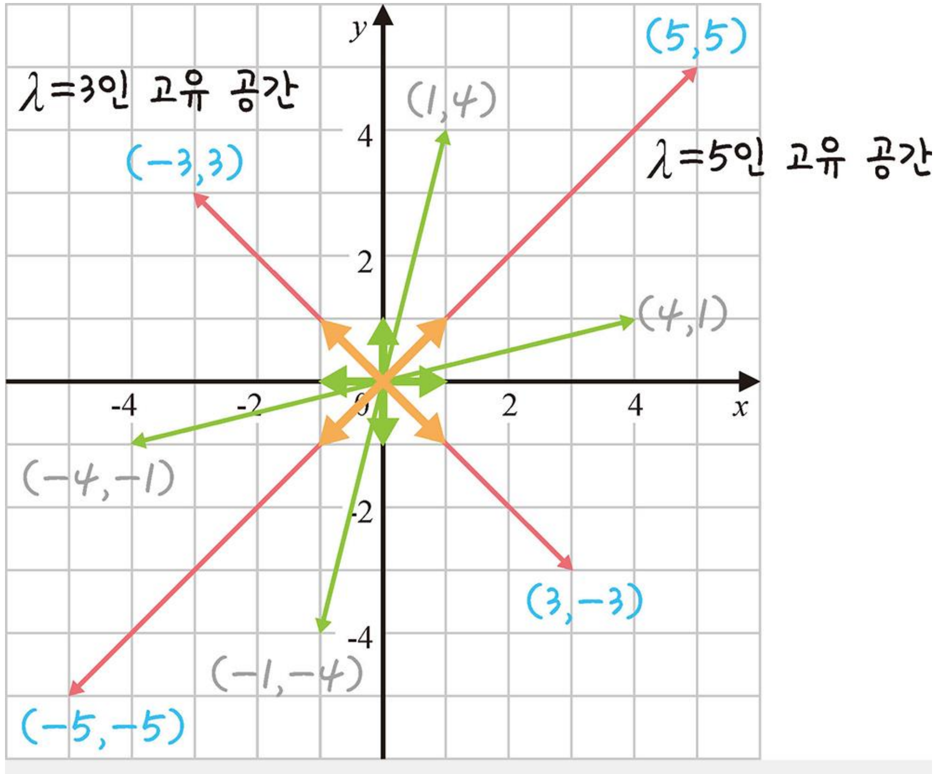
$$\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\quad\therefore\lambda=3$$

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-5\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\quad\therefore\lambda=5$$

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\quad\therefore\lambda=3$$

▣ 고유 공간



- **그림 1-78 고유 공간**