

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 12: GRAPHALGORITHMEN

Eric Kunze

`eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

TU Dresden, 23.01.2020

Floyd-Warshall-Algorithmus

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

- ▶ (gewichteter) Graph $G = (V, E, c)$ mit Weglängen c und ohne Schlingen
- ▶ **Ziel:** kürzeste Wege von beliebigem Startknoten zu beliebigem Zielknoten
- ▶ oBdA: $V = \{1, \dots, n\}$
- ▶ $P_{u,v}$ = Menge aller Wege von u nach v
- ▶
$$D_G(u, v) = \begin{cases} \min \{c_p : p \in P_{u,v}\} & \text{wenn } P_{u,v} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$
- ▶ $P_{u,v}^{(k)}$ = Menge aller Wege von u nach v , deren innere Knoten in $\{\ell : 1 \leq \ell \leq k\}$ liegen
- ▶
$$D_G^{(k)}(u, v) = \begin{cases} \min \{c_p : p \in P_{u,v}^{(k)}\} & \text{wenn } P_{u,v}^{(k)} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$
- ▶ Es gilt $P_{u,v}^{(n)} = P_{u,v}$ und somit $D_G^{(n)} = D_G$

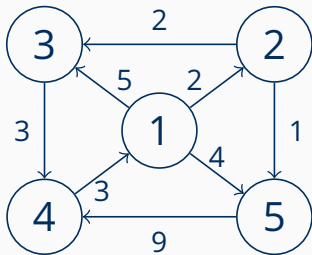
- ▶ modifizierte Adjazenzmatrix

$$mA_G = \min \{A_G, \mathbf{0}_n\} = \begin{cases} c(u, v) & \text{wenn } u \neq v, (u, v) \in E \\ 0 & \text{wenn } u = v \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ **Initialisierung:** $D_G^{(0)} = mA_G$
- ▶ **Rekursion:**

$$D_G^{(k+1)}(u, v) = \min \left\{ D_G^{(k)}(u, v), D_G^{(k)}(u, k+1) + D_G^{(k)}(k+1, v) \right\}$$

AUFGABE 1 — TEIL (A)



$$mA_G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 0 \end{pmatrix} = D_G^{(0)}$$

AUFGABE 1 — TEIL (B)

$$D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & \infty & 3 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

veränderte Matrixelemente

(4, 2, 5)

(4, 3, 8)

(4, 5, 7)

(1, 3, 4)

(1, 5, 3)

(4, 3, 7)

(4, 5, 6)

AUFGABE 1 — TEIL (C)

$$D_G^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ \infty & 0 & 2 & 5 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_G^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 8 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 0 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 6 \\ 12 & 14 & 16 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_G^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 8 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 0 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 6 \\ 12 & 14 & 16 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

veränderte Elemente:
(1, 4, 7), (1, 5, 3), (2, 4, 5),
(2, 1, 8), (3, 1, 6), (3, 2, 8),
(3, 5, 9), (5, 1, 12), (5, 2, 14),
(5, 3, 16)

Algebraisches Pfadproblem

ABSTRAKTION: ALGEBRAISCHES PFADPROBLEM

- ▶ **bisher:** kürzeste Wege
 - ▷ Summation + entlang der Pfade
 - ▷ Minimum min über alle Pfade
- ▶ **jetzt:** Verallgemeinerung
 - ▷ Pfadoperation \odot entlang der Pfade
 - ▷ Akkumulationsoperation \oplus
- ▶ **Ergebnis:** allgemeine algebraische Struktur — Semiring
($S, \oplus, \odot, 0, 1$)

	Werte S	\oplus	\odot	0	1
kürzeste Wegeproblem	$\mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$	min	+	∞	0
Kapazitätsproblem	\mathbb{N}_{∞}	max	min	0	∞
Erreichbarkeitsproblem	$\{\text{true}, \text{false}\}$	\vee	\wedge	false	true
Zuverlässigkeitsproblem	$[0, 1]$	max	\cdot	0	1
Prozessproblem	$\mathcal{P}(\Sigma^*)$	\cup	\circ	\emptyset	$\{\varepsilon\}$

- ▶ modifizierte Adjazenzmatrix

$$mA_G = \begin{cases} A_G(u, v) & \text{wenn } u \neq v \\ A_G(u, v) \oplus \mathbf{1} & \text{wenn } u = v \end{cases}$$

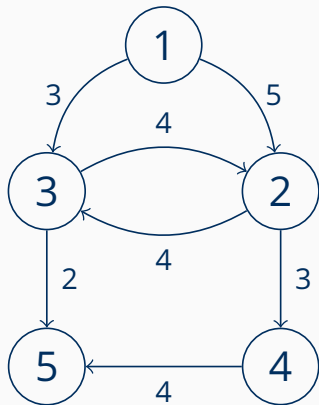
- ▶ **Initialisierung:** $D_G^{(0)} = mA_G$
- ▶ **Rekursion:**

$$\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u, v) \\ &= D_G^{(k)}(u, v) \oplus \left(D_G^{(k)}(u, k+1) \odot (D_G^{(k)}(k+1, k+1))^* \odot D_G^{(k)}(k+1, v) \right) \end{aligned}$$

- ▶ vgl. dazu Floyd-Warshall:

$$\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u, v) \\ &= \min \left\{ D_G^{(k)}(u, v), D_G^{(k)}(u, k+1) + D_G^{(k)}(k+1, v) \right\} \end{aligned}$$

AUFGABE 2



Teil (a) :

$$(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathbb{N}_\infty, \max, \min, 0, \infty)$$

Teil (b) :

$$mA_G = D_G^{(0)} = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

AUFGABE 2

Teil (c) : Laut Vorlesung gilt $s^* = \sum_{n \in \mathbb{N}}^{\oplus} s^n$ mit $s^0 = \mathbf{1}$ und $s^{n+1} = s \odot s^n$.
Im Semiring $(\mathbb{N}_{\infty}, \max, \min, 0, \infty)$ gilt:

- ▶ $s^0 = \mathbf{1} = \infty$
- ▶ $s^1 = s \odot s^0 = \min \{s, \infty\} = s$
- ▶ $s^2 = s \odot s^1 = \min \{s, s\} = s$
- ▶ ...

Schließlich ist

$$s^* = \sum_{n \in \mathbb{N}}^{\max} s^n = \sup \{s^n : n \in \mathbb{N}\} = \sup \{\infty, s, s, \dots\} = \infty = \mathbf{1}.$$

Somit gilt dann in der Updateformel

$$\begin{aligned} D_G^{(k+1)}(u, v) &= \max \left\{ D_G^{(k)}(u, v), \min \left\{ D_G^{(k)}(u, k+1), \infty, D_G^{(k)}(k+1, v) \right\} \right\} \\ &= \max \left\{ D_G^{(k)}(u, v), \min \left\{ D_G^{(k)}(u, k+1), D_G^{(k)}(k+1, v) \right\} \right\} \\ &= D_G^{(k)}(u, v) \oplus \left(D_G^{(k)}(u, k+1) \odot D_G^{(k)}(k+1, v) \right) \end{aligned}$$

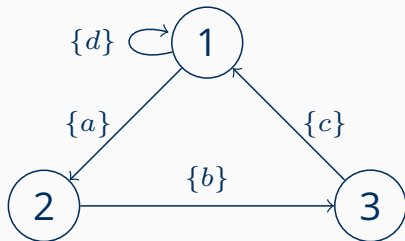
Teil (d) :

- ▶ $D_G^{(1)}$: keine Änderung (Quelle)
- ▶ $D_G^{(2)}$: (1, 3, 4), (3, 4, 3), (1, 4, 3)
- ▶ $D_G^{(3)}$: (1, 5, 2), (2, 5, 2)
- ▶ $D_G^{(4)}$: (1, 5, 3), (2, 5, 3), (3, 5, 3)
- ▶ $D_G^{(5)}$: keine Änderung (Senke)

Teil (e) :

$D_{G'}(1, 5) = 2$ über den Pfad (1, 2, 3, 5)

AUFGABE 3



Teil (a) :

$$(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \circ, \emptyset, \{\varepsilon\})$$

Update-Formel: $D_G^{(k+1)}(u, v)$

$$\begin{aligned} &= D_G^{(k)}(u, v) \oplus \left(D_G^{(k)}(u, k+1) \odot (D_G^{(k)}(k+1, k+1))^* \odot D_G^{(k)}(k+1, v) \right) \\ &= D_G^{(k)}(u, v) \cup \left(D_G^{(k)}(u, k+1) \circ (D_G^{(k)}(k+1, k+1))^* \circ D_G^{(k)}(k+1, v) \right) \\ &= \text{alt} \quad \cup \left(\text{Zeile} \quad \circ \quad (\text{Diagonale})^* \quad \circ \quad \text{Spalte} \right) \end{aligned}$$

AUFGABE 3

Teil (b) : $mA_G = D_G^{(0)} = \begin{pmatrix} \{\varepsilon, d\} & \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\} & \emptyset & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$

Teil (c) : $D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} \{d\}^* & \{d\}^* \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\} \{d\}^* & \{c\} \{d\}^* \{a\} & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$

Teil (d) :

$$\begin{aligned}D_G^{(2)}(3,3) &= D_G^{(1)}(3,3) \cup \left(D_G^{(1)}(3,2) \circ (D_G^{(1)}(2,2))^* \circ D_G^{(1)}(2,3) \right) \\&= \{\varepsilon\} \cup \left(\{c\} \{d\}^* \{a\} \circ \{\varepsilon\}^* \circ \{b\} \right) \\&= \{\varepsilon\} \cup \left(\{c\} \{d\}^* \{ab\} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_G^{(3)}(3,3) &= D_G^{(2)}(3,3) \cup \left(D_G^{(2)}(3,3) \circ (D_G^{(2)}(3,3))^* \circ D_G^{(2)}(3,3) \right) \\&= D_G^{(2)}(3,3) \cup \left(D_G^{(2)}(3,3) \right)^* \\&= \left(D_G^{(2)}(3,3) \right)^* \\&= \left(\{\varepsilon\} \cup \{c\} \{d\}^* \{ab\} \right)^* \\&= \left(\{c\} \{d\}^* \{ab\} \right)^*\end{aligned}$$