TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 12: GRAPHALGORITHMEN

Eric Kunze

eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

TU Dresden, 23.01.2020

Floyd-Warshall-Algorithmus

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

- (gewichteter) Graph $G = (V, E, c)$ mit Weglängen c und ohne Schlingen
- **Ziel**: kürzeste Wege von beliebigem Startknoten zu beliebigem Zielknoten
- oBdA: $V = \{1, \dots, n\}$
- $P_{u,v}$ = Menge aller Wege von u nach v
- $D_G(u, v) = \begin{cases} \min\{c_p : p \in P_{u,v}\} & \text{wenn } P_{u,v} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- $P_{u,v}^{(k)}$ = Menge aller Wege von u nach v, deren innere Knoten in $\{\ell : 1 \leq \ell \leq k\}$ liegen
- $D_G^{(k)}(u, v) = \begin{cases} \min\left\{c_p : p \in P_{u,v}^{(k)}\right\} & \text{wenn } P_{u,v}^{(k)} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- Es gilt $P_{u,v}^{(n)} = P_{u,v}$ und somit $D_G^{(n)} = D_G$

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

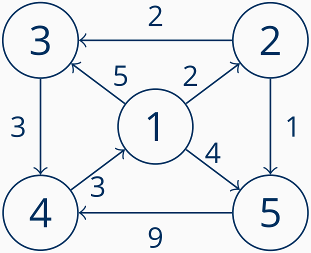
- modifizierte Adjazenzmatrix

$$mA_G = \min\left\{A_G, \mathbf{0}_n\right\} = \begin{cases} c(u,v) & \text{wenn } u \neq v, (u,v) \in E \\ 0 & \text{wenn } u = v \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Initialisierung**: $D_G^{(0)} = mA_G$
- **Rekursion**:

$$\boxed{D_G^{(k+1)}(u,v) = \min\left\{D_G^{(k)}(u,v), D_G^{(k)}(u,k+1) + D_G^{(k)}(k+1,v)\right\}}$$

AUFGABE 1 — TEIL (A)



$$mA_G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 0 \end{pmatrix} = D_G^{(0)}$$

AUFGABE 1 — TEIL (B)

$$D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & \infty & 3 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

veränderte Matrixelemente

$(4, 2, 5)$	$(1, 3, 4)$
$(4, 3, 8)$	$(1, 5, 3)$
$(4, 5, 7)$	$(4, 3, 7)$
	$(4, 5, 6)$

AUFGABE 1 — TEIL (C)

$$D_G^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 7 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & 5 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_G^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 7 & 4 \\ 8 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 0 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 6 \\ 12 & 14 & 16 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_G^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 7 & 4 \\ 8 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 0 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 6 \\ 12 & 14 & 16 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

veränderte Elemente: $(1,4,7)$, $(2,4,5)$, $(2,1,8)$, $(3,1,6)$, $(3,2,8)$, $(3,5,9)$, $(5,1,12)$, $(5,2,14)$, $(5,3,16)$

Algebraisches Pfadproblem

ABSTRAKTION: ALGEBRAISCHES PFADPROBLEM

- **bisher:** kürzeste Wege
  - Summation $+$ entlang der Pfade
  - Minimum $\min$ über alle Pfade
- **jetzt:** Verallgemeinerung
  - Pfadoperation $\odot$ entlang der Pfade
  - Akkumulationsoperation $\oplus$
- **Ergebnis:** allgemeine algebraische Struktur — Semiring $(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

	Werte S	$\oplus$	$\odot$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
kürzeste Wegeproblem	$\mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$	$\min$	$+$	∞	0
Kapazitätsproblem	$\mathbb{N}_{\infty}$	$\max$	$\min$	0	∞
Erreichbarkeitsproblem	$\{\text{true}, \text{false}\}$	$\vee$	$\wedge$	false	true
Zuverlässigkeitsproblem	$[0, 1]$	$\max$	$\cdot$	0	1
Prozessproblem	$\mathcal{P}(\Sigma^*)$	$\cup$	$\circ$	$\varnothing$	$\{\varepsilon\}$

- modifizierte Adjazenzmatrix

$$mA_G = \begin{cases} A_G(u,v) & \text{wenn } u \neq v \\ A_G(u,v) \oplus \mathbf{1} & \text{wenn } u = v \end{cases}$$

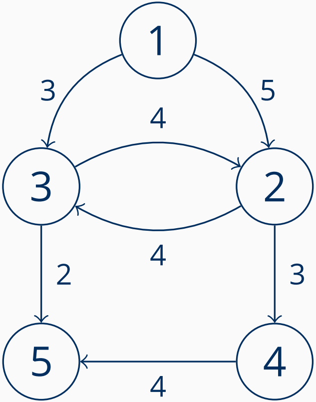
- **Initialisierung**: $D_G^{(0)} = mA_G$
- **Rekursion**:

$$\boxed{\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u,v) \\ = \; & D_G^{(k)}(u,v) \oplus \Big(D_G^{(k)}(u,k+1) \odot \big(D_G^{(k)}(k+1,k+1)\big)^* \odot D_G^{(k)}(k+1,v) \Big) \end{aligned}}$$

- vgl. dazu Floyd-Warshall:

$$\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u,v) \\ = \; & \min \left\{ D_G^{(k)}(u,v),\, D_G^{(k)}(u,k+1) + D_G^{(k)}(k+1,v) \right\} \end{aligned}$$

AUFGABE 2



Teil (a) :

$$(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathbb{N}_\infty, \max, \min, 0, \infty)$$

Teil (b) :

$$mA_G = D_G^{(0)} = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

AUFGABE 2

Teil (c) : Laut Vorlesung gilt $s^* = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\oplus} s^n$ mit $s^0 = \mathbf{1}$ und $s^{n+1} = s \odot s^n$. Im Semiring $(\mathbb{N}_\infty, \max, \min, 0, \infty)$ gilt:

- $s^0 = \mathbf{1} = \infty$
- $s^1 = s \odot s^0 = \min\{s, \infty\} = s$
- $s^2 = s \odot s^1 = \min\{s, s\} = s$
- ...

Schließlich ist
$s^* = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\max} s^n = \sup\{s^n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\infty, s, s, \dots\} = \infty = \mathbf{1}.$

Somit gilt dann in der Updateformel

$$
\begin{aligned}
D_G^{(k+1)}(u,v) &= \max\left\{D_G^{(k)}(u,v), \min\left\{D_G^{(k)}(u,k+1), \infty, D_G^{(k)}(k+1,v)\right\}\right\} \\
&= \max\left\{D_G^{(k)}(u,v), \min\left\{D_G^{(k)}(u,k+1), D_G^{(k)}(k+1,v)\right\}\right\} \\
&= D_G^{(k)}(u,v) \oplus \left(D_G^{(k)}(u,k+1) \odot D_G^{(k)}(k+1,v)\right)
\end{aligned}
$$

AUFGABE 2

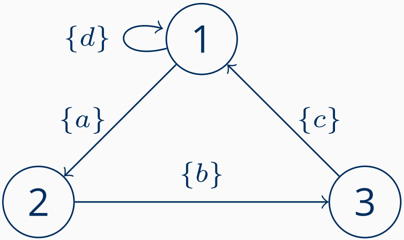
Teil (d) :

- $D_G^{(1)}$: keine Änderung (Quelle)
- $D_G^{(2)}$: $(1, 3, 4)$, $(3, 4, 3)$, $(1, 4, 3)$
- $D_G^{(3)}$: $(1, 5, 2)$, $(2, 5, 2)$
- $D_G^{(4)}$: $(1, 5, 3)$, $(2, 5, 3)$, $(3, 5, 3)$
- $D_G^{(5)}$: keine Änderung (Senke)

Teil (e) :

$D_{G'}(1, 5) = 2$ über den Pfad $(1, 2, 3, 5)$

AUFGABE 3



Teil (a) :

$$(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \circ, \varnothing, \{\varepsilon\})$$

Update-Formel: $D_G^{(k+1)}(u, v)$

$$= D_G^{(k)}(u,v) \oplus \Big(D_G^{(k)}(u, k+1) \odot (D_G^{(k)}(k+1, k+1))^* \odot D_G^{(k)}(k+1, v) \Big)$$

$$= D_G^{(k)}(u,v) \cup \Big(D_G^{(k)}(u, k+1) \circ (D_G^{(k)}(k+1, k+1))^* \circ D_G^{(k)}(k+1, v) \Big)$$

$$= \text{alt} \cup \Big(\text{Zeile} \circ (\text{Diagonale})^* \circ \text{Spalte} \Big)$$

AUFGABE 3

$$\textbf{Teil (b)} : mA_G = D_G^{(0)} = \begin{pmatrix} \{\varepsilon, d\} & \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\} & \emptyset & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Teil (c)} : D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} \{d\}^* & \{d\}^* \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\} \{d\}^* & \{c\} \{d\}^* \{a\} & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$$

AUFGABE 3

Teil (d) :

$$\begin{aligned}
D_G^{(2)}(3,3) &= D_G^{(1)}(3,3) \cup \left(D_G^{(1)}(3,2) \circ (D_G^{(1)}(2,2))^* \circ D_G^{(1)}(2,3)\right) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \left(\{c\}\{d\}^*\{a\} \circ \{\varepsilon\}^* \circ \{b\}\right) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \left(\{c\}\{d\}^*\{ab\}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_G^{(3)}(3,3) &= D_G^{(2)}(3,3) \cup \left(D_G^{(2)}(3,3) \circ (D_G^{(2)}(3,3))^* \circ D_G^{(2)}(3,3)\right) \\
&= D_G^{(2)}(3,3) \cup \left(D_G^{(2)}(3,3)\right)^* \\
&= \left(D_G^2(3,3)\right)^* \\
&= \left(\{\varepsilon\} \cup \{c\}\{d\}^*\{ab\}\right)^* \\
&= \left(\{c\}\{d\}^*\{ab\}\right)^*
\end{aligned}$$