TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 11: AVL-BÄUME & GRAPHALGORITHMEN

Eric Kunze

eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

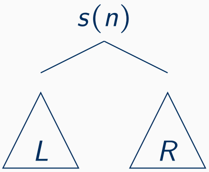
TU Dresden, 16.01.2020

AVL-Bäume

AVL-BÄUME

Wir betrachten einen Baum t und bezeichnen die *Schlüssel* an den Knoten n mit $s(n)$.

Suchbaum:



mit $L < s(n) < R$

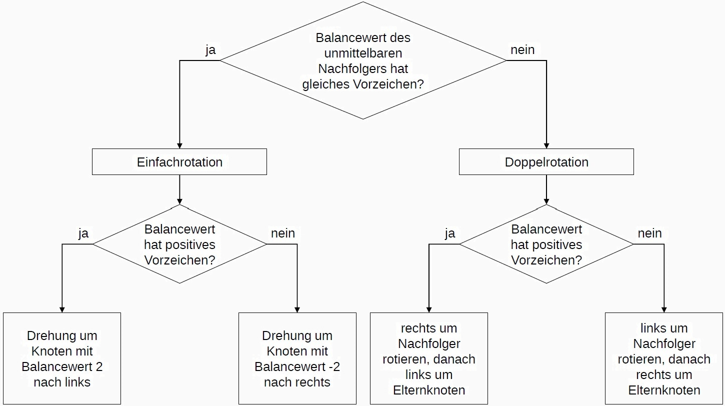
Die *Höhe* des Baumes bezeichnen wir mit $h(t)$. Wir ordnen jedem Knoten n einen *Balancefaktor* $b(n)$ zu:

$$b(n) := h(R) - h(L)$$

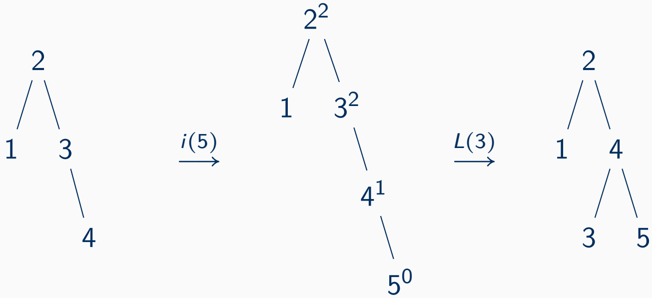
AVL-Baum: Suchbaum mit $b(n) \in \{-1, 0, 1\}$

BALANCIEREN

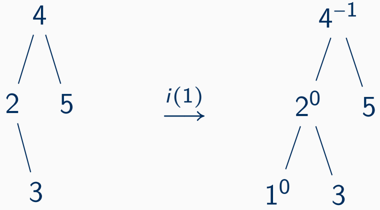
- Einfügen eines neuen Schlüssels s
- Berechne Balancefaktoren auf dem Pfad von s zur Wurzel bis zum ersten Auftreten von ± 2
- **Balancierungsalgorithmus**:



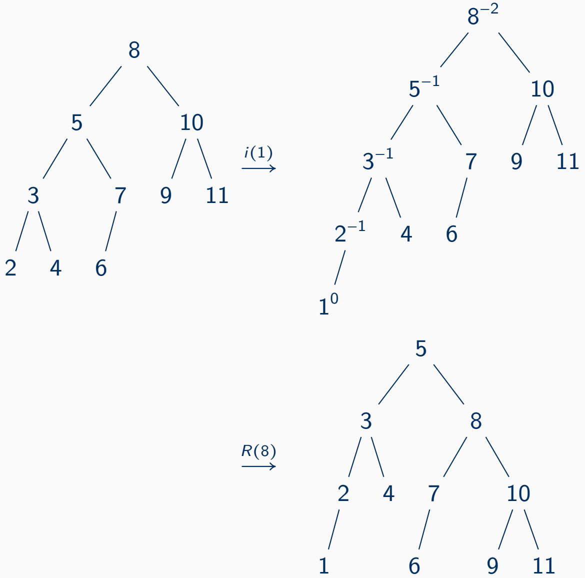
AUFGABE 10.3



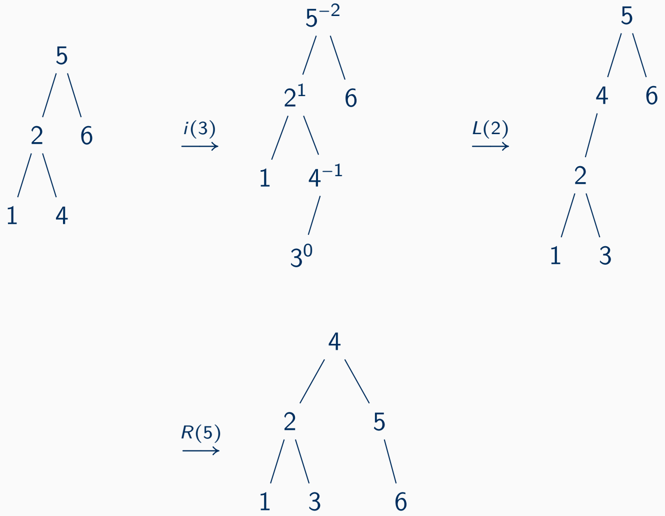
AUFGABE 10.3



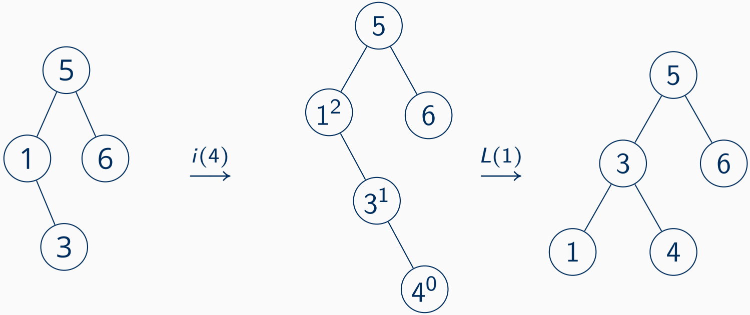
AUFGABE 10.3



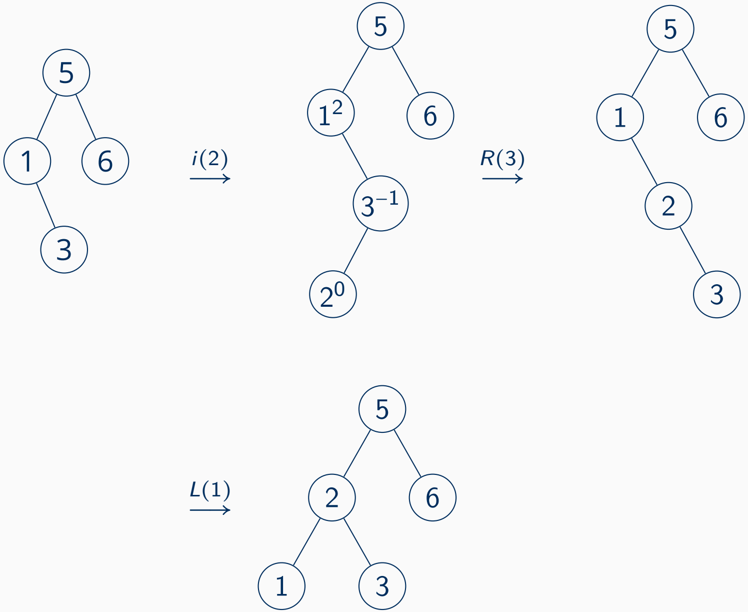
AUFGABE 10.3



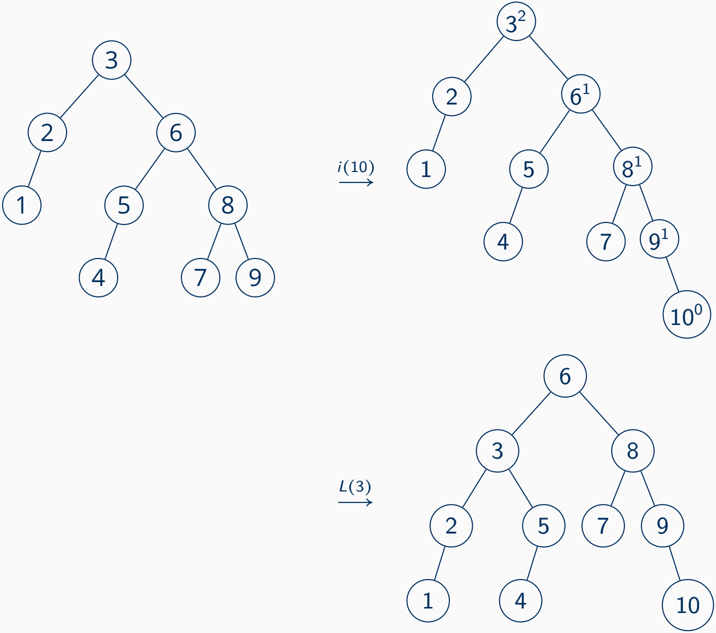
AUFGABE 1



AUFGABE 1

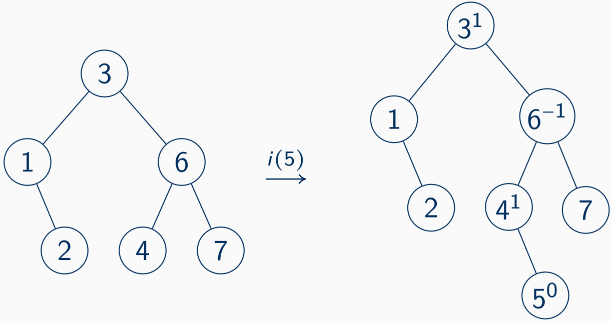


AUFGABE 1



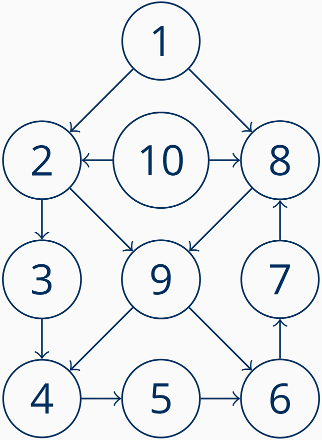
3
2
6
1
5
8
4
7
9
$\xrightarrow{i(10)}$
3^2
2
6^1
1
5
8^1
4
7
9^1
10^0
$\xrightarrow{L(3)}$
6
3
8
2
5
7
9
1
4
10

AUFGABE 1

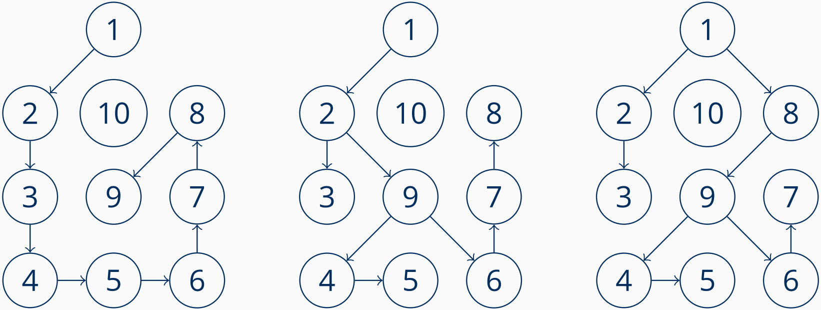


Breiten- und Tiefensuche

AUFGABE 2

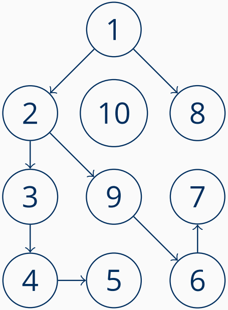


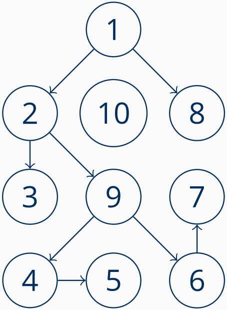
Es gibt 5 verschiedene depth-first-trees, z.B.:

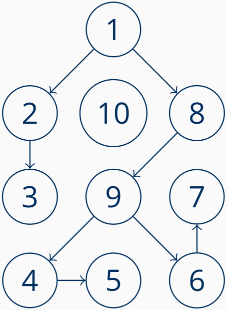


AUFGABE 2 — TEIL (B)

Es gibt 5 verschiedene breadth-first-trees, z.B.:







Floyd-Warshall-Algorithmus

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

- (gewichteter) Graph $G = (V, E, c)$ mit Weglängen c und ohne Schlingen
- **Ziel**: kürzeste Wege von beliebigem Startknoten zu beliebigem Zielknoten
- oBdA: $V = \{1, \ldots, n\}$
- $P_{u,v}$ = Menge aller Wege von u nach v
- $D_G(u, v) = \begin{cases} \min\{c_p : p \in P_{u,v}\} & \text{wenn } P_{u,v} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- $P_{u,v}^{(k)}$ = Menge aller Wege von u nach v, deren innere Knoten in $\{\ell : 1 \leq \ell \leq k\}$ liegen
- $D_G^{(k)}(u, v) = \begin{cases} \min\left\{c_p : p \in P_{u,v}^{(k)}\right\} & \text{wenn } P_{u,v}^{(k)} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- Es gilt $P_{u,v}^{(n)} = P_{u,v}$ und somit $D_G^{(n)} = D_G$

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

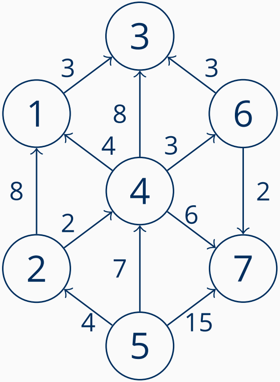
- modifizierte Adjazenzmatrix

$$mA_G = \min\{A_G, \mathbf{0}_n\} = \begin{cases} c(u,v) & \text{wenn } u \neq v, (u,v) \in E \\ 0 & \text{wenn } u = v \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Initialisierung**: $D_G^{(0)} = mA_G$
- **Rekursion**:

$$\boxed{D_G^{(k+1)}(u,v) = \min\left\{D_G^{(k)}(u,v), D_G^{(k)}(u,k+1) + D_G^{(k)}(k+1,v)\right\}}$$

AUFGABE 3



$$mA_G = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 8 & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 8 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

AUFGABE 3 — TEIL (B)

$$D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 11 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ 12 & 4 & 15 & 6 & 0 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. es ändern sich folgende Einträge:

$$\underbrace{(4,3,7),(2,3,11)}_{\text{aus } D_G^{(1)}},\underbrace{(5,3,15),(5,1,12),(5,4,6)}_{\text{aus } D_G^{(2)}}$$

AUFGABE 3 — TEIL (C)

Für $k \in \{4, 6\}$, d.h. durch Zulassen der Knoten 4 und 6 als innere Knoten eines Weges, erreichen wir eine Verbesserung. Dagegen sind die Knoten 3 und 7 *Senken*, d.h. es bringt nichts, diese zu besuchen, weil wir nicht wieder weg kommen. Ebenso bringt uns der Knoten 5 als *Quelle* keine Verbesserung, weil wir diesen gar nicht erreichen können. Somit gilt also

$$D_G^{(2)} = D_G^{(3)} \qquad D_G^{(4)} = D_G^{(5)} \qquad D_G^{(6)} = D_G^{(7)}$$

und wir müssen lediglich $D_G^{(4)}$ sowie $D_G^{(6)}$ explizit berechnen.

AUFGABE 3 — TEIL (D)

$$D_G^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 9 & 2 & \infty & 5 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 11 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ 10 & 4 & 13 & 6 & 0 & 9 & 12 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = D_G^{(5)}$$

$$D_G^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 8 & 2 & \infty & 5 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 & 5 \\ 10 & 4 & 12 & 6 & 0 & 9 & 11 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = D_G^{(7)} = D_G$$