

# ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

## ÜBUNG 10: SUCHEN & KORRIGIEREN, AVL-BÄUME

---

Eric Kunze

`eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

TU Dresden, 09.01.2020

## Was bisher geschah ...

- ▶ Syntax von Programmiersprachen  
(Syntaxdiagramme, EBNF, Fixpunktsemantik)
- ▶ Programmieren in C – Arrays, Pointer, Listen, Bäume
- ▶ grundlegende Algorithmen in der Informatik
  - ▷ Sortieren mit Quicksort und Heapsort
  - ▷ Suchen in Texten (KMP-Algorithmus)

## Was heute geschieht ...

- ▶ Wiederholung: Suche mit dem KMP-Algorithmus
- ▶ Fehlerkorrektur mit der Levenshtein-Distanz
- ▶ Balancieren von Bäumen (AVL-Bäume)

# KMP-Algorithmus

---

Die Methode beruht auf der Gleichung

$$\begin{aligned} & \text{Tab}[i] \\ &= \max \{ -1 \} \cup \{ m \mid 0 \leq m \leq i-1 \wedge b_0 \dots b_{m-i} = b_{i-m} \wedge b_{i-1} \wedge b_m \neq b_j \} \\ & \hspace{15em} (*) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nach Initialisierung von  $\text{Tab}[0] = -1$  für jeden folgenden Eintrag  $\text{Tab}[i]$  folgendes Verfahren:

- ▶ *linker Finger*: wähle  $m < i$  in absteigender Reihenfolge (also  $i-1, i-2, \dots$ ), sodass  $\text{Pat}[i] \neq \text{Pat}[m]$
- ▶ *Parallelverschiebung beider Finger bis zum linken Rand*: wenn  $\text{Pat}[0 \dots m-1] = \text{Pat}[i-m \dots i-1]$ , dann fülle  $\text{Tab}[i] = m$ .
- ▶ wenn keine passende Position  $m$  gefunden werden kann, dann fülle  $\text{Tab}[i] = -1$ .

# AUFGABE 1

## Teil (a)

Pattern: abbabbaa

Position	0	1	2	3	4	5	6	7
Pattern	a	b	b	a	b	b	a	a
Tabelle	-1	0	0	-1	0	0	-1	4

## Teil (b)

Position	0	1	2	3	4	5
Pattern	<i>b</i>	a	b	a	b	c
Tabelle	-1	?	?	0	?	3

- ▶  $\text{Pat}[0 \dots 2] = \text{Pat}[2 \dots 4]$  wegen  $\text{Tab}[5] = 3$  (Zyklenmethode), d.h.  $\text{Pat}[2] = \text{Pat}[0] = \text{Pat}[4] = b$
- ▶ wegen  $\text{Tab}[3] = 0$  ist  $\text{Pat}[3] \neq \text{Pat}[0] = b$  und wegen  $\text{Tab}[5] = 3$  ist  $\text{Pat}[3] \neq \text{Pat}[5] = c$  (Zwei-Finger-Methode bzw. Gleichung (??))  
 $\Rightarrow \text{Pat}[3] = \text{Pat}[1] = a$

# Levenshtein-Distanz

---

# LEVENSHTEIN-DISTANZ

**Kosten** zur Überführung eines Wortes  $w = w_1 \dots w_n$  in ein Wort  $v = v_1 \dots v_k$ ; schreibe  $d(w_1 \dots w_j, v_1 \dots v_i) = d(j, i)$ .

$$d(0, i) = i$$

$$d(j, 0) = j$$

$$d(j, i) = \min \{ d(j, i-1) + 1, d(j-1, i) + 1, d(j-1, i-1) + \delta_{j,i} \}$$

für alle  $1 \leq j \leq n$  und alle  $1 \leq i \leq k$  wobei

$$\delta_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } w_j \neq v_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Anschaulich:** Überlagerung durch Pattern → Pfeile zeigen "Ursprung" des Minimums an

$w_j \neq v_i :$

+1	+1
+1	?

$w_j = v_i :$

+0	+1
+1	?

## AUFGABE 9.4

$d(j, i)$		D	i	s	t	a	n	z
	0	→ 1	→ 2	→ 3	→ 4	→ 5	→ 6	→ 7
<b>D</b>	↓ 1		→ 1	→ 2	→ 3	→ 4	→ 5	→ 6
<b>i</b>	↓ 2	↓ 1		→ 1	→ 2	→ 3	→ 4	→ 5
<b>n</b>	↓ 3	↓ 2	↓ 1		→ 2	→ 3	→ 3	→ 4
<b>s</b>	↓ 4	↓ 3	↓ 2	↓ 1		→ 2	→ 3	→ 4
<b>t</b>	↓ 5	↓ 4	↓ 3	↓ 2	↓ 1		→ 2	→ 3
<b>a</b>	↓ 6	↓ 5	↓ 4	↓ 3	↓ 2	↓ 1		→ 2
<b>s</b>	↓ 7	↓ 6	↓ 5	↓ 4	↓ 3	↓ 2	↓ 2	↓ 3

$$d(\text{Dinstas}, \text{Distanz}) = 3$$



## AUFGABE 9.4

Alignments mit minimaler Levenshtein-Distanz:

D	i	n	s	t	a	*	s
D	i	*	s	t	a	n	z
		<i>d</i>				<i>i</i>	<i>s</i>

D	i	n	s	t	a	s	*
D	i	*	s	t	a	n	z
		<i>d</i>				<i>s</i>	<i>i</i>

## AUFGABE 2

$d(j, i)$		s	c	h	ü	r	z	e
	0	→ 1	→ 2	→ 3	→ 4	→ 5	→ 6	→ 7
<b>b</b>	1	↓ 1	↘ 2	↘ 3	↘ 4	↘ 5	↘ 6	↘ 7
<b>ü</b>	2	↓ 2	↓ 2	→ 3	↘ 3	→ 4	→ 5	→ 6
<b>r</b>	3	↓ 3	↓ 3	↓ 3	↘ 4	↘ 3	→ 4	→ 5
<b>s</b>	4	↓ 3	↘ 4	↘ 4	↘ 4	↘ 4	↘ 4	↘ 5
<b>t</b>	5	↓ 4	↓ 4	→ 5	↘ 5	↘ 5	↘ 5	↘ 5
<b>e</b>	6	↓ 5	↓ 5	↘ 5	↘ 6	↘ 6	↘ 6	↘ 5

$d(\text{bürste}, \text{schürze}) = 5$

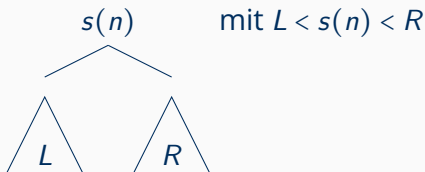
Anzahl der Backtraces =  $3 * 2 = 6$

# AVL-Bäume

---

Wir betrachten einen Baum  $t$  und bezeichnen die *Schlüssel* an den Knoten  $n$  mit  $s(n)$ .

**Suchbaum:**

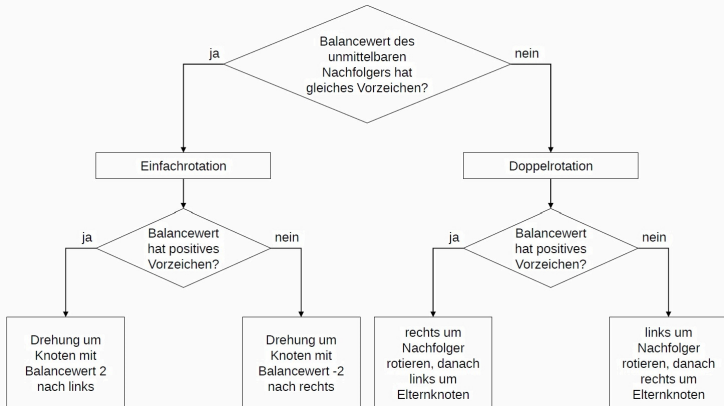


Die *Höhe* des Baumes bezeichnen wir mit  $h(t)$ . Wir ordnen jedem Knoten  $n$  einen *Balancefaktor*  $b(n)$  zu:

$$b(n) := h(R) - h(L)$$

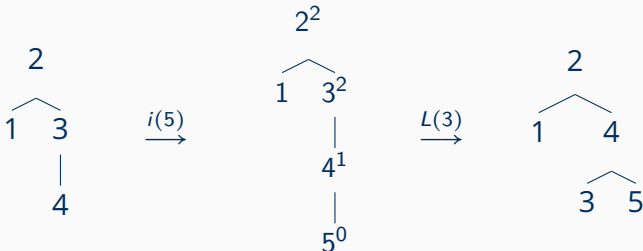
**AVL-Baum:** Suchbaum mit  $b(n) \in \{-1, 0, 1\}$

- ▶ Einfügen eines neuen Schlüssels  $s$
- ▶ Berechne Balancefaktoren auf dem Pfad von  $s$  zur Wurzel bis zum ersten Auftreten von  $\pm 2$
- ▶ **Balancierungsalgorithmus:**

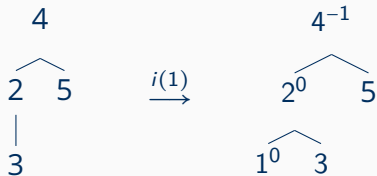


## AUFGABE 3

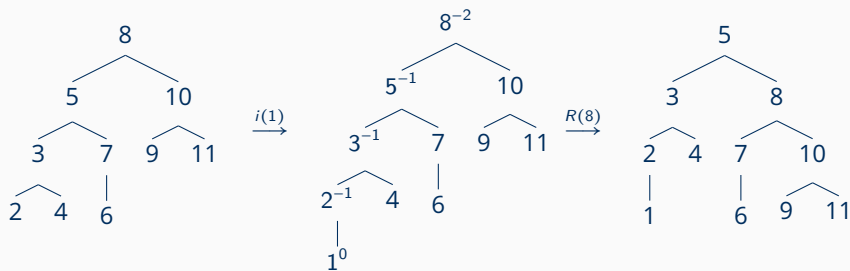
**Achtung:** Die Blätter sind eigentlich links oder rechts des Elternknotens angeordnet, nicht exakt darunter.



## AUFGABE 3



## AUFGABE 3





# AUFGABE 3

