TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 13: DAS PROZESSPROBLEM

Eric Kunze

eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

TU Dresden, 30.01.2020

Algebraisches Pfadproblem

ABSTRAKTION: ALGEBRAISCHES PFADPROBLEM

- **bisher:** kürzeste Wege
  - Summation $+$ entlang der Pfade
  - Minimum $\min$ über alle Pfade
- **jetzt:** Verallgemeinerung
  - Pfadoperation $\odot$ entlang der Pfade
  - Akkumulationsoperation $\oplus$
- **Ergebnis:** allgemeine algebraische Struktur — Semiring $(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

	Werte S	$\oplus$	$\odot$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
kürzeste Wegeproblem	$\mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$	$\min$	$+$	∞	0
Kapazitätsproblem	$\mathbb{N}_{\infty}$	$\max$	$\min$	0	∞
Erreichbarkeitsproblem	$\{\text{true}, \text{false}\}$	$\vee$	$\wedge$	false	true
Zuverlässigkeitsproblem	$[0, 1]$	$\max$	$\cdot$	0	1
Prozessproblem	$\mathcal{P}(\Sigma^*)$	$\cup$	$\circ$	$\varnothing$	$\{\varepsilon\}$

FLOYD-WARSHALL → AHO-HOPCRAFT-ULLMANN

- modifizierte Adjazenzmatrix

$$mA_G = \begin{cases} A_G(u,v) & \text{wenn } u \neq v \\ A_G(u,v) \oplus \mathbf{1} & \text{wenn } u = v \end{cases}$$

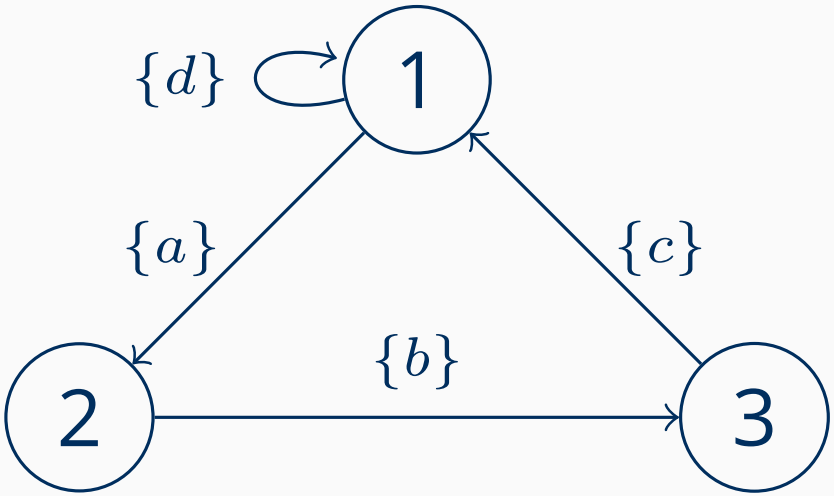
- **Initialisierung**: $D_G^{(0)} = mA_G$
- **Rekursion**:

$$\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u,v) \\ = \; & D_G^{(k)}(u,v) \oplus \left(D_G^{(k)}(u,k+1) \odot (D_G^{(k)}(k+1,k+1))^* \odot D_G^{(k)}(k+1,v) \right) \end{aligned}$$

- vgl. dazu Floyd-Warshall:

$$\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u,v) \\ = \; & \min \left\{ D_G^{(k)}(u,v), D_G^{(k)}(u,k+1) + D_G^{(k)}(k+1,v) \right\} \end{aligned}$$

AUFGABE 12.3



Teil (a) :

$$(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \circ, \varnothing, \{\varepsilon\})$$

Update-Formel: $D_G^{(k+1)}(u, v)$

$$= D_G^{(k)}(u,v) \oplus \left(D_G^{(k)}(u,k+1) \odot (D_G^{(k)}(k+1,k+1))^* \odot D_G^{(k)}(k+1,v) \right)$$

$$= D_G^{(k)}(u,v) \cup \left(D_G^{(k)}(u,k+1) \circ (D_G^{(k)}(k+1,k+1))^* \circ D_G^{(k)}(k+1,v) \right)$$

$$= \text{alt} \cup \left(\text{Zeile} \circ (\text{Diagonale})^* \circ \text{Spalte} \right)$$

AUFGABE 12.3

Teil (b) : $mA_G = D_G^{(0)} = \begin{pmatrix} \{\varepsilon, d\} & \{a\} & \varnothing \\ \varnothing & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\} & \varnothing & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$

Teil (c) : $D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} \{d\}^* & \{d\}^*\{a\} & \varnothing \\ \varnothing & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\}\{d\}^* & \{c\}\{d\}^*\{a\} & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$

AUFGABE 12.3

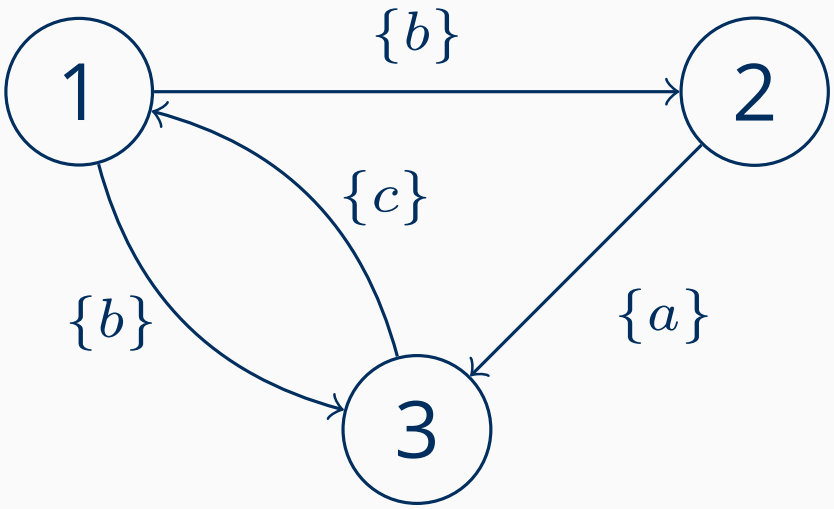
Teil (d) :

$$
\begin{aligned}
D_G^{(2)}(3,3) &= D_G^{(1)}(3,3) \cup \left(D_G^{(1)}(3,2) \circ (D_G^{(1)}(2,2))^* \circ D_G^{(1)}(2,3) \right) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \left(\{c\} \{d\}^* \{a\} \circ \{\varepsilon\}^* \circ \{b\} \right) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \left(\{c\} \{d\}^* \{ab\} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_G^{(3)}(3,3) &= D_G^{(2)}(3,3) \cup \left(D_G^{(2)}(3,3) \circ (D_G^{(2)}(3,3))^* \circ D_G^{(2)}(3,3) \right) \\
&= D_G^{(2)}(3,3) \cup \left(D_G^{(2)}(3,3) \right)^* \\
&= \left(D_G^{2}(3,3) \right)^* \\
&= \left(\{\varepsilon\} \cup \{c\} \{d\}^* \{ab\} \right)^* \\
&= \left(\{c\} \{d\}^* \{ab\} \right)^*
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 13

AUFGABE 1



Teil (a) :

$$mA_G = \begin{pmatrix} \{\varepsilon\} & \{b\} & \{b\} \\ \varnothing & \{\varepsilon\} & \{a\} \\ \{c\} & \varnothing & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$$

Teil (b):

$$D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} \{\varepsilon\} & \{b\} & \{b\} \\ \varnothing & \{\varepsilon\} & \{a\} \\ \{c\} & \{cb\} & \{cb, \varepsilon\} \end{pmatrix} \quad D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} \{\varepsilon\} & \{b\} & \{b, ba\} \\ \varnothing & \{\varepsilon\} & \{a\} \\ \{c\} & \{cb\} & \{cb, cba, \varepsilon\} \end{pmatrix}$$

AUFGABE 1

Teil (c):

$$
\begin{aligned}
D_G(3,1) &= D_G^{(3)}(3,3) \\
&= D_G^{(2)}(3,3) \cup \left\{ \; D_G^{(2)}(3,3) \cdot (D_G^{(2)}(3,3))^* \cdot D_G^{(2)}(3,1) \right\} \\
&= \quad \{c\} \quad \cup \left\{ \; \{cb, cba, \varepsilon\} \cdot \{cb, cba, \varepsilon\}^* \cdot \quad \{c\} \quad \right\} \\
&= \{cb, cba\}^* \cdot \{c\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_G(3,2) &= D_G^{(2)}(3,2) \cup \left\{ \; D_G^{(2)}(3,3) \cdot (D_G^{(2)}(3,3))^* \cdot D_G^{(2)}(3,2) \right\} \\
&= \quad \{cb\} \quad \cup \left\{ \; \{cb, cba, \varepsilon\} \cdot \{cb, cba, \varepsilon\}^* \cdot \quad \{cb\} \quad \right\} \\
&= \{cb, cba\}^* \cdot \{cb\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_G(3,3) &= D_G^{(2)}(3,3) \cup \left\{ \; D_G^{(2)}(3,3) \cdot (D_G^{(2)}(3,3))^* \cdot D_G^{(2)}(3,3) \right\} \\
&= \{cb, cba, \varepsilon\} \cup \left\{ \; \{cb, cba, \varepsilon\} \cdot \{cb, cba, \varepsilon\}^* \cdot \{cb, cba, \varepsilon\} \right\} \\
&= \{cb, cba\}^*
\end{aligned}
$$

Teil (d): $D_G(3,3) = \{cb, cba, ba\}^* \rightsquigarrow (3, 3, \{cb, cba, ba\}^*)$