

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Факультет безопасности информационных технологий

Дисциплина:
«Теория вероятностей»

РАСЧЕТНО ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

Вариант 18

Выполнил:

Суханкулиев Мухаммет,
студент группы N3246



(подпись)

Проверил:

Лимар Иван Александрович,
ассистент, НОЦ математики

(отметка о выполнении)

(подпись)

Санкт-Петербург

2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1	Расчетно-графическая работа №1	4
1.1	Описание случайного эксперимента	5
1.2	Дискретная случайная величина	5
1.3	Исходные данные и закон распределения.....	5
1.4	Ряд распределения	5
1.5	Многоугольник распределения случайной величины	6
1.6	Математическое ожидание	7
1.7	Дисперсия.....	7
1.8	Среднее квадратическое отклонение.....	7
1.9	Функция распределения.....	8
1.10	Вычисление вероятности	8
	Список использованных источников.....	9

1 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

Вариант 18. Стрелок стреляет по мишени до трех попаданий или до тех пор, пока не израсходует все патроны, после чего прекращает стрельбу. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6.

*Построить**... отклонение числа выстрелов, произведенных стрелком, если у стрелка имеется 5 патронов.

Найти вероятность того, что стрелок произведет, по крайней мере, четыре выстрела.

Построить означает:

- 1) Опишите случайный эксперимент.
- 2) Обозначьте и опишите дискретную случайную величину, которую нужно исследовать в задаче. Запишите множество значений случайной величины.
- 3) Обозначьте и запишите значения исходных данных задачи. Укажите закон распределения случайной величины (если это один из известных законов).
- 4) Запишите, как вычисляются значения вероятностей $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ и составьте ряд распределения случайной величины.
- 5) Постройте многоугольник распределения случайной величины.
- 6) Запишите формулу для вычисления (в соответствии с законом распределения) и вычислите математическое ожидание д.с.в.
- 7) Запишите формулу для вычисления (в соответствии с законом распределения) и вычислите дисперсию д.с.в.
- 8) Запишите формулу для вычисления и вычислите среднее квадратическое отклонение д.с.в.
- 9) Запишите, как вычисляются значения функции распределения д.с.в. и постройте ее график.
- 10) Обозначьте события, вероятности которых требуется найти в задаче, запишите формулы для расчета и вычислите вероятности этих событий

1.1 Описание случайного эксперимента

Эксперимент — серия выстрелов по мишени с вероятностью попадания 0.6. Стрелок производит выстрелы до тех пор, пока не попадет три раза или не израсходует все 5 патронов.

1.2 Дискретная случайная величина

Дискретная случайная величина X обозначает количество произведенных выстрелов до достижения трех попаданий. Тогда возможные значения случайной величины X : $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Однако, в контексте этой задачи, значения $X = 0, 1, 2$ не приведут к достижению цели в три попадания, и их нужно учитывать лишь для полноты распределения.

1.3 Исходные данные и закон распределения

Вероятность попадания $p = 0.6$, вероятность промаха $q = 1 - p = 0.4$. Величина X — дискретная случайная величина.

Искомое распределение — это биномиальный процесс с условием на остановку (вариация задачи с отрицательным биномиальным распределением).

1.4 Ряд распределения

Для вычисления вероятностей $P(X = k)$, необходимо учесть условия завершения стрельбы:

$P(X = 0)$ — вероятность, что стрелок не попадает в мишень, при 5 выстрелах.

$P(X = 1)$ — вероятность, что стрелок попадает 1 раз, при 5 выстрелах.

$P(X = 2)$ — вероятность, что стрелок попадает 2 раза, при 5 выстрелах.

$P(X = 3)$ — вероятность, что стрелок попадет 3 раза и израсходует ровно 3 патрона.

$P(X = 4)$ — вероятность, что стрелок попадает 3 раза, но делает 4 выстрела.

$P(X = 5)$ — вероятность, что стрелок попадает 3 раза и делает 5 выстрелов.

$$P(X = k) = C_k^n \cdot p^n \cdot q^{k-n}$$

где:

n — количество попаданий;

k — количество выстрелов.

$$P(X = 0) = q^5 = 0.01024$$

$$P(X = 1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 0.0768$$

$$P(X = 2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 0.2304$$

Отрицательное биномиальное распределение описывает количество испытаний до достижения определенного количества успехов (в нашем случае 3 попадания). Это распределение уместно, так как мы фиксируем количество успехов и хотим узнать, сколько всего испытаний (выстрелов) будет произведено до их достижения:

$$P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} \cdot p^r \cdot q^{k-r}$$

где:

$r = 3$ (количество успехов).

$$P(X = 3) = p^3 = 0.216$$

$$P(X = 4) = C_3^2 \cdot p^3 \cdot q^1 = 0.2592$$

$$P(X = 5) = C_4^2 \cdot p^3 \cdot q^2 = 0.20736$$

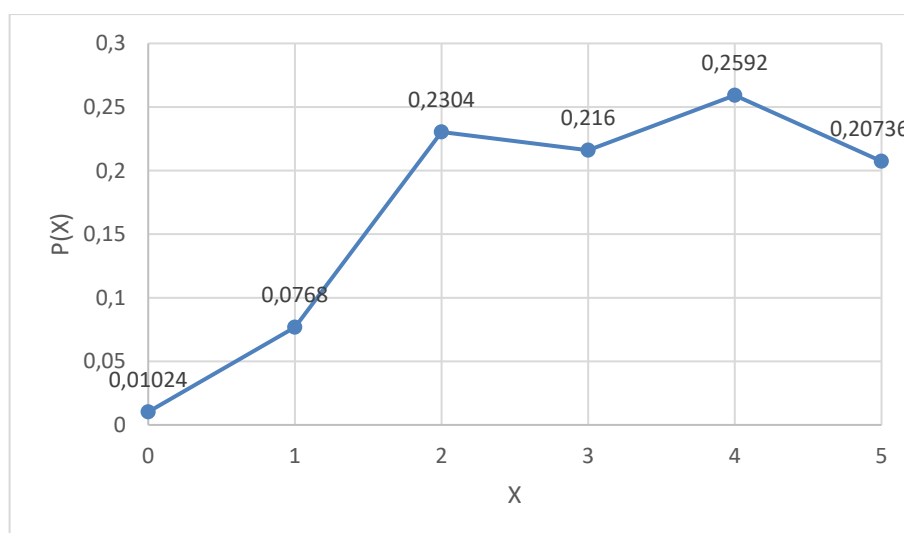
Проверка:

$$\begin{aligned} P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \\ = 0.01024 + 0.0768 + 0.2304 + 0.216 + 0.2592 + 0.20736 = 1 \end{aligned}$$

Итоговый ряд распределения (с учётом всех возможных исходов):

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0.01024	0.0768	0.2304	0.216	0.2592	0.20736

1.5 Многоугольник распределения случайной величины



При этом стоит отметить, что значения $P(X)$ при $X = 0, 1, 2$ — не должны учитываться в контексте нашей задачи, ибо цель (3 попадания) не была достигнута.

1.6 Математическое ожидание

В данной задаче используется **отрицательное биномиальное распределение**, так как мы рассматриваем количество выстрелов до достижения 3 попаданий. Математическое ожидание $M[X]$ вычисляется по формуле:

$M[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k)$, где $P(X = k)$ — это функция вероятности, показывающая вероятность того, что случайная величина X принимает значение k . Для отрицательного биномиального распределения с параметрами r и p существует уже известный результат, который позволяет быстро найти математическое ожидание, не вычисляя сумму:

$$M[X] = \frac{r}{p}$$
$$M[X] = \frac{3}{0.6} = 5$$

Это значение показывает, что в среднем стрелок произведет 5 выстрелов до достижения 3 попаданий.

Однако, если требуется рассмотреть фиксированное количество выстрелов и вероятность попадания 3 раза, тогда нужно применить биномиальное распределение:

$$M[X] = np$$
$$M[X] = 5 \cdot 0.6 = 3$$

Это значение отражает ожидаемое количество попаданий за 5 выстрелов.

1.7 Дисперсия

Для д.с.в. с отрицательным биномиальным распределением дисперсия вычисляется по следующей формуле:

$$D[X] = \frac{r \cdot q}{p^2}$$
$$D[X] = \frac{3 \cdot 0.4}{0.6^2} = 3.3333$$

1.8 Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$$
$$\sigma[X] = \sqrt{3.33} \approx 1.83$$

1.9 Функция распределения

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (-\infty, x_1] \\ \sum p_i, & \text{при } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 1, & \text{при } x \in (x_n, +\infty) \end{cases}$$

Вычислим:

$$F(0) = P(X = 0) = 0.01024$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.01024 + 0.0768 = 0.08704$$

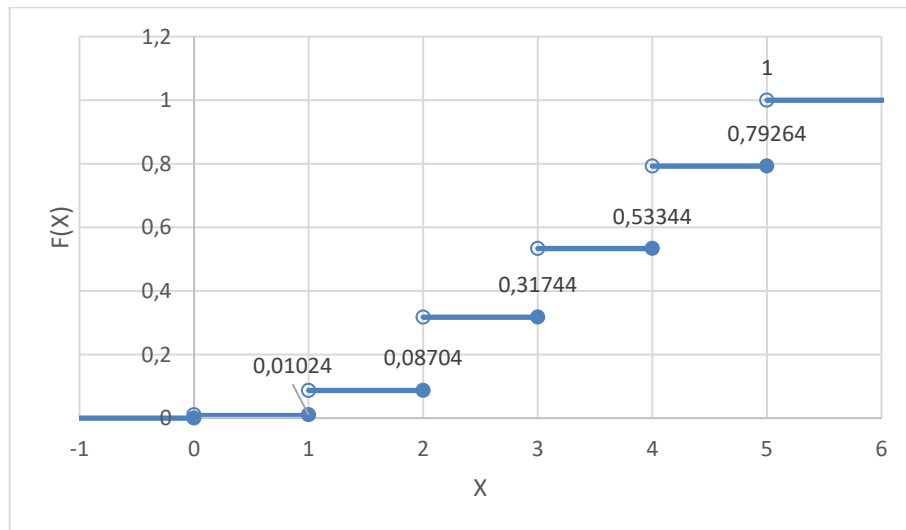
$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X \leq 1) + P(X = 2) = 0.08704 + 0.2304 = 0.31744$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + P(X = 3) = 0.31744 + 0.216 = 0.53344$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X \leq 3) + P(X = 4) = 0.53344 + 0.2592 = 0.79264$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = P(X \leq 4) + P(X = 5) = 0.79264 + 0.20736 = 1$$

График:



1.10 Вычисление вероятности

Найдем вероятность того, что стрелок произведет, по крайней мере, 4 выстрела:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0.2592 + 0.20736 = 0.46656$$

Ответ:

Вероятность того, что стрелок произведет по крайней мере 4 выстрела, составляет ≈ 0.47 .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. [ИТМО ТВ 2024-25 – Google Диск](#)
2. И. А. Лимар – Теория вероятностей и математическая статистика – pre- α version