Seminar 4
Введение в классическую механику

Victor Ivanov Yu.*

Аннотация

Physics and Mathematics

Содержание

1 Законы сохранения

Конец XIX века стал периодом гордости для физики, которая, казалось, наконец достигла состояния связности и ясности. Физики того времени считали, что мир состоит из двух царств: царства частиц и царства электромагнитных волн. Движение частиц было описано уравнением Исаака Ньютона с его поразительной простотой, универсальностью и красотой. Точно так же электромагнитные волны были точно описаны простыми и красивыми уравнениями Джеймса Клерка Максвелла. “Физика была элегантно упакована в коробку и перевязана бантиком“, – Молодой Планк. На этом закончилась классическая физика и началась квантовая.

1.1 Движение в $\mathbb{R}^1$

Theorem (Закон сохранения энергии)**.** *Предположим, что частица удовлетворяет закону Ньютона в виде* $m\ddot{x} = F(x)$. *Пусть* $V(x) = -\int F(x)dx$ *и* $E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$. *Тогда энергия* E *сохраняется, а это означает, что для каждого решения* $x(t)$ *закона Ньютона,* $E(x(t), \dot{x}(t))$ *не зависит от* t.

*VI

1.2 Движение в $\mathbb{R}^n$

Theorem (Закон сохранения энергии)**.** *Предположим, что частица удовлетворяет закону Ньютона в виде* $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}))$*, где* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^\mathbf{n} \times \mathbb{R}^\mathbf{n} \to \mathbb{R}^\mathbf{n}$ *некий силовой закон, который вообще может зависеть как от положения, так и от скорости частицы. Функция энергии* $E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{m}|\dot{\mathbf{x}}|^\mathbf{2} + \mathbf{V}(\mathbf{x})$ *сохраняется тогда и только тогда, когда справедливо равенство* $-\nabla V = \mathbf{F}$*, где* ∇V *градиент функции* V*.*

Definition. *Предположим, что* $\mathbf{F}$ *гладкая,* $\mathbb{R}^n$ *- значная функция на области* $U \subset \mathbb{R}^n$*.* $\mathbf{F}$ *называется консервативной функцией (силой) тогда и только тогда, когда существует гладкая, вещественнозначная функция* V *на* U *:* $\mathbf{F} = -\nabla\mathbf{V}$*.*

Если область определения функции U односвязная, тогда существует более простое условие на существование консервативной функции ($curl \nabla \times F = 0$ на U).

Теперь рассмотрим систему многих частиц.

Theorem (Закон сохранения импульса)**.** *Если система, состоящая из нескольких частиц, имеет закон силы, исходящий из потенциала* V*, то полный импульс системы сохраняется тогда и только тогда, когда* $V(\mathbf{x^1} + \mathbf{a}, \mathbf{x^2} + \mathbf{a}, ..., \mathbf{x^N} + \mathbf{a}) = \mathbf{V}(\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, ..., \mathbf{x^N})$ *для всех* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$

Theorem (Закон сохранения углового момента)**.** *Предположим, что частица массы m движется в* $\mathbb{R}^2$ *под действием консервативной силы с потенциальной функцией* $V(x)$*. Если* V *инвариантно относительно вращений в* R^2*, то угловой момент* $J = x_1 p_2 - x_2 p_1$ *не зависит от времени вдоль любого решения уравнения Ньютона. Наоборот, если* J *не зависит от времени на любом решении уравнения Ньютона, то* V *инвариантно относительно вращений.*

2 Преобразование Галилея

Галилео Галилей (1564–1642), итальянский ученый, профессор математики в Пизе. Только те, кто побывал в Пизе, могут оценить вдохновение (для изучения свободного падения тел из разных материалов) от невероятно падающей башни. Opus magnum Галилея (справа) был опубликован Elsevier в 1638 году. Предоставлено Википедией (общественное достояние).

Вывод следует из первого закона Ньютона. Рассмотрим две системы, где одна движется относительно другой,

$$x' = x + f(t)$$

Тогда для ученого в покоящейся системе координат, сила действующая на тело будет пропорциональна ускорению $\frac{d^2x}{dt^2}$. Для ученого в движущейся системе координат (в штрихованной) та же сила будет равна $\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2f}{dt^2}$. Здесь $\frac{d^2f}{dt^2}$ кажущаяся сила.

Условие линейности функции $f(t)$ дает $x' = x + vt$. Теперь следует важный шаг в рассуждениях. Запишем в самом общем виде линейное преобразование координат и времени (поэтому силы, вычисляемые в обеих системах координат, одинаковы):

$$\begin{cases} x' = Ax + Bt \\ t' = Cx + Dt \end{cases}.$$

Такое преобразование должно быть обратимо, очевидно. Тогда можно показать, что должно выполняться $A = D$.

Преобразование Галилея

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}.$$

3 Центр масс

Рассмотрим теперь важное приложение закона сохранения импульса.

Определение 3.1. *Для системы из N частиц, движущихся в $\mathbb{R}^n$, центром масс системы в фиксированный момент времени является вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, заданный формулой*

$$\boldsymbol{c} = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{M} \boldsymbol{x}^j$$

где $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$ полная масса системы.

Дифференцируя по времени

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\mathbf{x}}_j = \frac{\mathbf{p}}{M}$$

где $\mathbf{p}$ полный импульс системы.

Утверждение 3.1. *Предположим, что полный импульс $\boldsymbol{p}$ системы сохраняется. Тогда центр масс движется прямолинейно с постоянной скоростью. А именно,*

$$\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{c}(t_0) + (t - t_0)\frac{\boldsymbol{p}}{M}$$

Доказательство. Очевидно ∎

Рассмотрим элементарный пример:

Задача 3.1. *Два шарика массой 250 г каждый, соединенные нитью длиной 1 м, движутся по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент один из шариков неподвижен, а скорость другого равна 4 м/с и направлена перпендикулярно нити. Чему равна сила натяжения нити?*

Решение. Elementary ∎

4 Упражнения

Задача 4.1. *Человек везет сани, прикладывая силу под углом 30^o к горизонту. Найдите эту силу, если известно, что сани движутся равномерно. Масса саней равна 10 кг. Коэффициент трения 0.5.*

Решение. Elementary ∎

Задача 4.2. *За сколько секунд маленькая шайба соскользнет с наклонной плоскости высотой 2.5 м и углом наклона к горизонту 60^o, если по наклонной плоскости из такого же материала с углом наклона 30^o она движется вниз равномерно?*

Решение. Elementary ■

Задача 4.3. *Частица совершила перемещение по некоторой траектории в плоскости xy из точки 1 с радиус-вектором* $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ *в точку 2 с радиус-вектором* $\boldsymbol{r}_2 = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$. *При этом на нее действовали некоторые силы, одна из которых* $\boldsymbol{F} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$. *Найти работу, которую совершила сила* $\boldsymbol{F}$.

Решение. Elementary ■

Задача 4.4. *Кинетическая энергия частицы, движущейся по окружности радиуса* R, *зависит от пройденного пути* s *по закону* $T = as^2$, *где* a *постоянная величина. Найти силу, действующую на частицу, в зависимости от* s.

Решение. Elementary ■

Задача 4.5. *Частица движется вдоль оси* x *по закону* $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, *где* α *и* β *– положительные постоянные. В момент* $t = 0$ *сила, действующая на частицу, равна* F_0. *Найти значения* F_x *силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке* $x = 0$.

Решение. Elementary ■

Задача 4.6. *В момент, когда скорость падающего тела составила* $v_0 = 4$ *м/с, оно разорвалось на три одинаковых осколка. Два осколка разлетелись в горизонтальной плоскости под прямым углом друг к другу со скоростью* $v = 5$ *м/с каждый. Найти скорость третьего осколка сразу после разрыва.*

Решение. Elementary ■

Задача 4.7. *Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы* $\boldsymbol{F}$, *совпадающей по направлению с ее скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью* μ *кг/с. Найти ускорение и скорость тележки в момент* t, *если в момент* $t = 0$ *тележка с песком имела массу* m_0 *и ее скорость была равна нулю.*

Решение. Elementary ■