Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет безопасности информационных технологий

Дисциплина:

«Теория вероятностей»

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №3

Вариант 18

Выполнил:

Суханкулиев Мухаммет,

студент группы N3246

(подпись)

Проверил:

Лимар Иван Александрович,

ассистент, НОЦ математики

(отметка о выполнении)

(подпись)

Санкт-Петербург

2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЗАДАЧА 18.

1.1 Постановка задачи

Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-3t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = \exp(X)$ и $Z = X^2 - XY + 3Y - 1$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины Y;

б) математическое ожидание $\boldsymbol{E}Z$.

1.2 Решение

1.2.1 а

Функция распределения $F_X(t)$ – это экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 3$ (для $t \geq 0$). Плотность распределения $f_X(t)$ – это производная $F_X(t)$ по t:

$$f_X(t) = \begin{cases} 3\exp(-3t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда плотность случайной величины X:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3\exp(-3x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Из условия $Y = \exp(X) => X = \ln(Y)$. Чтобы найти плотность $f_Y(v)$ воспользуемся формулой преобразования случайных величин:

$$f_Y(v) = f_X(x) \cdot \left|\frac{dx}{dv}\right|, \text{где } x = \ln(v)$$

$$\boldsymbol{f_Y(v)} = 3\exp(-3\ln(v)) \cdot \frac{1}{v} = 3v^{-3} \cdot v^{-1} = \boldsymbol{3v^{-4}},$$

$$\boldsymbol{v \geq 1} \text{ (поскольку } Y = \exp(X)\text{, а } X \geq 0).$$

1.2.2 б

Используем линейность математического ожидания:

$$E[Z] = E[X^2] - E[XY] + E[3Y] - E[1] = E[X^2] - E[XY] + 3E[Y] - 1$$

Для экспоненциального распределения с параметром $\lambda = 3$:

$$E[X^2] = Var(X) + (E[X])^2, \text{где}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}, Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{9}$$

Тогда:

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}^2] = \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$$

Так же поскольку $Y = \exp{(X)}$:

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{Y}] = \int_1^\infty y \cdot f_Y(v) dy = \int_1^\infty y \cdot 3y^{-4} dy = 3\left[-\frac{y^{-2}}{2}\right]_1^\infty = 3\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

Так как X и Y не независимы $E[XY] \neq E[X] \cdot E[Y]$.

В этом случае:

$$E[XY] = \int_0^\infty x \cdot \exp(x) \cdot f_X(x) dx = \int_0^\infty x \cdot \exp(x) \cdot 3\exp(-3x)\, dx = 3\int_0^\infty x \cdot \exp(-2x)\, dx$$

Вычислим:

$$\int x \cdot \exp(-2x)\, dx = x\left(-\frac{\exp(-2x)}{2}\right) - \int -\left(\frac{\exp(-2x)}{2}\right) dx$$

$$= x\left(-\frac{\exp(-2x)}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\exp(-2x)}{-2} = -\frac{x}{2\exp(2x)} - \frac{1}{4\exp(2x)}$$

Подставим пределы интегрирования:

$$\left[-\frac{x}{2\exp(2x)} - \frac{1}{4\exp(2x)}\right]_0^\infty = \frac{1}{4}$$

Тогда:

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{XY}] = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

Подставим значения в $E[Z]$:

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{Z}] = \frac{2}{9} - \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 = \frac{\mathbf{107}}{\mathbf{36}} = \mathbf{2}\frac{\mathbf{35}}{\mathbf{36}}.$$

1.3 Ответ

а) $f_Y(v) = 3v^{-4}, v \geq 1$;

б) $\boldsymbol{E}Z = \frac{107}{36} = 2\frac{35}{36}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Решетов, Суслина Типовые расчеты по ТВ 2014.pdf - Google Диск
2. ИТМО ТВ 2024-25 – Google Диск