

Практическое занятие 4

Схема Бернулли

Литература

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. М.: Издательство «Юрайт», 2016.
2. Решетов С.В., Суслина И.А. Задачи для самостоятельного решения по теории вероятностей и математической статистике – СПб: НИУ ИТМО, 2014.

Схема Бернулли

Несколько экспериментов называются **независимыми**, если любые события, возникающие в разных экспериментах, независимы в совокупности.

Схемой Бернулли (повторными независимыми испытаниями, биномиальной схемой) называют последовательность экспериментов, удовлетворяющих следующим условиям:

- эксперименты независимы;
- в каждом эксперименте возможны только два исхода – появилось случайное событие A (успех) или \overline{A} (неудача);
- вероятность A в каждом эксперименте одна и та же и равна p .

Вероятность \overline{A} в каждом эксперименте
 $q = 1 - p.$

Задача:

найти вероятность события –
в n экспериментах событие A
появится ровно m раз.

Имеем:

n экспериментов,

$0 \leq m \leq n$ раз появляется событие A

$\omega = (\underbrace{A, A, \dots, A}_m, \underbrace{\bar{A}, \bar{A}, \dots, \bar{A}}_{n-m})$ – один из

благоприятствующих исходов,

$$P(\omega) = p^m q^{n-m}$$

причем:

- все исходы равновероятны
- события, соответствующие этим исходам, несовместны
- число таких исходов равно C_n^m

Теорема 1

Вероятность того, что в n экспериментах по схеме Бернулли событие A появится ровно m раз, вычисляется по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (1)$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $m = 0 \div n$

(1) – **формула Бернулли** (биномиальная формула).

Замечание

$$\begin{aligned} P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m) = \\ = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = (p + q)^n = 1, \text{ т.е.} \end{aligned}$$

сумма вероятностей всех исходов равна 1:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

Вывод: получаем вероятностное пространство $(\Omega, \Sigma, P_n(m))$

Следствие

вероятность появления события A в n испытаниях не более m_2 раз и не менее m_1 раз равна:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \quad (2)$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть события A_1, A_2, \dots, A_n
независимы в совокупности,
 A – осуществление хотя бы одного из
этих событий.

Обозначения:

$p_i = P(A_i)$ – вероятность A_i ,

$q_i = 1 - p_i$ – вероятность
неосуществления A_i .

Теорема 2

Вероятность появления *хотя бы одного* из независимых событий A_1, A_2, \dots, A_n вычисляется по формуле:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n. \quad (3)$$

Следствие

Если все A_i равновероятны с вероятностью p , то

$$P(A) = 1 - q^n$$

где n — число экспериментов.

Число экспериментов,
в которых событие A произойдет
хотя бы один раз

Если событие A в каждом эксперименте
может наступить с вероятностью p , то число
экспериментов, которые нужно провести,
чтобы событие A произошло хотя бы один раз,
с вероятностью, не меньшей P , вычисляется
по формуле:

$$n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)} \quad (4)$$

Полиномиальная (мультиномиальная) схема

Эксперимент:

- n -кратное повторение одинаковых независимых испытаний,
- в каждом из испытаний может произойти только одно из событий A_1, A_2, \dots, A_k ,
- события A_1, A_2, \dots, A_k несовместны,
- вероятность A_i равна p_i .

Теорема 3

Вероятность $P(m_1, m_2, \dots, m_k)$ того, что в n экспериментах событие A_1 произойдет ровно m_1 раз, событие A_2 произойдет ровно m_2 раз, ..., событие A_k произойдет ровно m_k раз, причем $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$, вычисляется по формуле:

$$P(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \quad (5)$$

Формула Пуассона

Теорема 4

Пусть число испытаний n по схеме Бернулли велико, а вероятность события A (успеха) p в одном испытании мала, причем мало также произведение $\lambda=np$.

Тогда вероятность $P_n(m)$ вычисляется по формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (6)$$

Формула (6) называется **формулой Пуассона**.

Замечание:

1. формула (6) справедлива также для числа появлений события \bar{A} (*неудачи*) в том случае, когда мало $\lambda = np$;
2. Значения функции $P(m, \lambda)$ для некоторых λ табулированы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Значения функции $P(m; \lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

[illegible][illegible]