Seminar 6
Введение в классическую механику

Victor Yu. Ivanov *

Аннотация

Physics and Mathematics

Содержание

1 Абсолютно твердое тело

Система для полного описания абсолютно твердого тела

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{F}_i \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{M}_i \end{cases} \tag{1}$$

Угловой момент точечной массы, относительно заданного начала координат, определяется как

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{2}$$

Для набора частиц угловой момент есть просто сумма угловых моментов всех частиц.

Крутящий момент определяется как

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{dL}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} \tag{3}$$

Пусть $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{L}}$. Тогда задачи, связанные с угловым моментом можно разбить на три типа, когда меняется только длина вектора углового момента, его направление, а также, когда меняется и то и другое.

*VI

1.1 Constant $\hat{\mathbf{L}}$

Здесь все просто. Рассмотрим вращающуюся пластинку, центр которой выбран в качестве начала координат. Тогда вектор **L** перпендикулярен пластинке, потому что пластинке перпендикулярен каждый терм суммы.

Найдем кинетическую энергию и момент импульса твердого тела на плоскости $x - y$ в общем случае (это удобно сделать, введя координаты центра масс $\mathbf{R}$, тогда штрихованные координаты будут координаты точки относительно центра масс)

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm \\ &= \int (\mathbf{R} + \mathbf{r}') \times (\mathbf{V} + \mathbf{v}') dm \\ &= \int \mathbf{R} \times \mathbf{V} dm + \int \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' dm \\ &= M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \int r'^2 \omega' dm \cdot \hat{\mathbf{z}} \\ &\equiv \mathbf{R} \times \mathbf{P} + (I_z^{CM} \omega')\hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \tag{4}$$

Theorem. *Угловой момент (относительно начала координат) тела может быть найдет, если вместо тела рассмотреть точку в центре масс и после этого найти угловой момент этой точки относительно начала координат и после прибавить угловой момент относительно центра масс.*

Доказательство. Очевидно ■

Эта теорема работает только в том случае, если мы используем центр масс в качестве воображаемой точечной массы (иначе в выражении для интеграла перекрестные термы не будут равны нулю).

В специальном случае, когда центр масс движется вокруг начала координат по окружности с угловой скоростью Ω, мы получим

$$\mathbf{L} = (MR^2\Omega + I_z^{CM}\omega')\hat{\mathbf{z}} \tag{5}$$

Выражение для кинетической энергии

$$\begin{aligned} T &= \int \frac{1}{2} v^2 dm \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{V} + \mathbf{v}'|^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \int V^2 dm + \frac{1}{2} \int v'^2 dm \\ &= \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \int r'^2 \omega'^2 dm \\ &\equiv \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_z^{CM} \omega'^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Theorem. *Кинетическая энергия тела может быть найдена, рассматривая тело как точечную массу, расположенную в центре масс, а после останется добавить кинетическую энергию тела, обусловленную движением относительно центра масс.*

Доказательство. Очевидно ■

Theorem. *(О параллельной оси)* $I_z = MR^2 + I_z^{CM}$

Доказательство. Очевидно ■

2 Упражнения

Задача 2.1. *Частица движется вдоль оси x по закону $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где α и β – положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0. Найти значения F_x силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.*

Решение. Elementary ■

Задача 2.2. ***(Расчет моментов инерции)**: Кольцо массы M и радиуса R (ось проходит через центр, перпендикулярно плоскости).*

Решение. MR^2 ■

Задача 2.3. ***(Расчет моментов инерции)**: Диск массы M и радиуса R (ось проходит через центр в плоскости).*

Решение. $\frac{1}{2}MR^2$ ■

Задача 2.4. ***(Расчет моментов инерции)**: Тонкий однородный стержень массы M и длины L (ось через центр, перпендикулярно стержню, а также рассмотреть ось через один из концов стержня).*

Решение. $\frac{1}{12}ML^2$ и $\frac{1}{3}ML^2$ ■

Задача 2.5. ***(Расчет моментов инерции)**: Сферическая оболочка массы M и радиуса R (ось через центр сферы).*

Решение. $\frac{2}{3}MR^2$ ■

Задача 2.6. *Баскетбольный мяч, закрученный с угловой скоростью ω_0, брошен на пол под углом $\alpha = 11,4^o$ к вертикали со скоростью $v_0 = 2$ м/с. Ось вращения перпендикулярна плоскости падения. Определить величину угловой скорости ω_0, при которой мяч отскочит от пола вертикально. Коэффициент трения мяча о пол $k = 0.2$. Радиус мяча $R = 0.15$ м. Считать, что вся масса мяча сосредоточена в тонком поверхностном слое, изменением формы мяча и действием силы тяжести при ударе пренебречь.*

Решение. Elementary ■

Задача 2.7. *Однородный цилиндр массой M и радиусом R вращается без трения вокруг горизонтальной оси под действием веса груза P, прикрепленного к легкой нити, намотанной на цилиндр (То есть, к потолку прикреплен цилиндр, который вращается, и через него перекинута нить, к концу которой прикреплен груз P). Найти угол ϕ поворота цилиндра в зависимости от времени, если при $t = 0$ $\phi = 0$*

Решение.

$$\phi = \frac{gt^2}{2R(1 + \frac{Mg}{2P})} \tag{7}$$

■

«Computers are like humans – they do everything except think» – **John von Neumann**