# Seminar 7
# Введение в классическую механику

Victor Yu. Ivanov *

**Аннотация**

Physics and Mathematics

## Содержание



## 1 Неинерциальные системы отсчета

Пусть $O_I$ и $O$ – начала двух систем координат. Пусть вектор от $O_I$ до $O$ есть $\mathbf{R}$, пусть вектор от $O_I$ до частицы есть $\mathbf{r}_I$, и пусть вектор от $O$ до частицы есть $\mathbf{r}$. Тогда

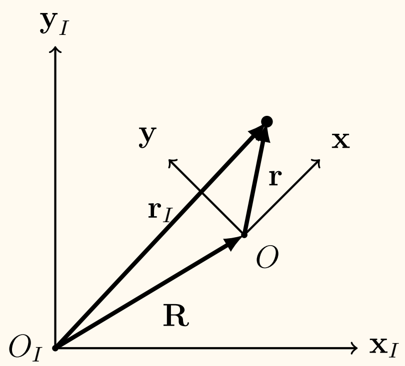
$$\mathbf{r}_I = \mathbf{R} + \mathbf{r} \tag{1}$$

Эти векторы существуют независимо от какой-либо конкретной системы координат, но давайте запишем их в терминах некоторых определенных координат. Мы можем написать

$$\mathbf{R} = X\hat{\mathbf{x}}_I + Y\hat{\mathbf{y}}_I + Z\hat{\mathbf{z}}_I$$

$$\mathbf{r}_I = x_I\hat{\mathbf{x}}_I + y_I\hat{\mathbf{y}}_I + z_I\hat{\mathbf{z}}_I \tag{2}$$

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$




*VI

Наша цель – взять вторую производную по времени от уравнения (1) и затем интерпретировать результат в форме $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Единственное нетривиальное место это вторая производная от $\mathbf{r}$.

Возьмем вторую производную от произвольного вектора $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$ в движущейся системе координат, а после заменим $\mathbf{A}$ на $\mathbf{r}$.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = (\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{z}}) + (A_x\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} + A_y\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{y}}}{\mathrm{d}t} + A_z\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{z}}}{\mathrm{d}t}). \tag{3}$$

Таким образом, полное изменение вектора $\mathbf{A}$ проявляется в виде двух групп слагаемых. Первая группа представляет скорость изменения $\mathbf{A}$, измеренную относительно движущейся системы отсчета. Обозначим это изменение как $\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t}$.

Вторая группа возникает из-за перемещения осей координат. Каким образом они движутся? Мы уже выделили движение начала ускоряющейся системы введением вектора $\mathbf{R}$, поэтому осталось только вращение вокруг некоторой оси $\boldsymbol{\omega}$ через это начало ($Theorem$). Ось $\boldsymbol{\omega}$ может меняться со временем, но во всякий момент систему описывает единственная ось вращения. Тот факт, что ось может измениться, будет иметь значение при нахождении второй производной от $\mathbf{r}$, но не при нахождении первой производной.

Очевидно, что всякий вектор фиксированной длины и вращающийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} \equiv \omega\hat{\boldsymbol{\omega}}$ изменяется со скоростью ($Theorem$)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \tag{4}$$

В частности,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}} \tag{5}$$

и т.д. Таким образом во второй группе преобразований $A_x(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t}) = A_x(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\omega} \times (A_x\hat{\mathbf{x}})$. Объединяя полученные выражения:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}. \tag{6}$$

Беря вторую производную, имеем

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{A}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

Вспоминая, что такое $\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t}$ и используя (6)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{A}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\delta^2\mathbf{A}}{\delta t^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{A} \tag{8}$$

Теперь перейдем от общей задачи к частной, и подставим $\mathbf{A} = \mathbf{r}$, что дает

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}, \tag{9}$$

где $\mathbf{r}, \mathbf{v} \equiv \delta\mathbf{r}/\delta t$, и $\mathbf{a} \equiv \delta^2\mathbf{r}/\delta t^2$ есть положение, скорость и ускорение частицы, измеренные относительно ускоренной системы отсчета.

## 2 Псевдосилы

Из (1)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_I}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2} \tag{10}$$

Можно приравнять это выражение с (9), а после умножить на массу частицы $m$, и заметить, что $m(d^2\mathbf{r}_I)/dt^2$ это сила $\mathbf{F}$ действующая на частицу ($\mathbf{F}$ может быть гравитацией, нормальной силой, трением, силой натяжения нити и т.д.), можно получить для $m\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= \mathbf{F} - m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r} \\ &\equiv \mathbf{F} + \mathbf{F}_{translation} + \mathbf{F}_{centrifugal} + \mathbf{F}_{Coriolis} + \mathbf{F}_{azimuthal} \end{aligned} \tag{11}$$

где псевдосилы определены следующими выражениями

$$\mathbf{F}_{trans} \equiv -m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2} \tag{12}$$

$$\mathbf{F}_{cent} \equiv -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{13}$$

$$\mathbf{F}_{cor} \equiv -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \tag{14}$$

$$\mathbf{F}_{az} \equiv -m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r} \tag{15}$$

## 3 Упражнения

**Задача 3.1.** *Коробка стоит на горизонтальном полу в кузове фургона. Статический коэффициент трения между коробкой и полом равен $\mu$, а коэффициент трения скольжения $f$ $(< \mu)$. Какое максимальное ускорение $A$ может иметь фургон при котором ящик остается в покое? Предположим, что фургон тормозит с ускорением, чуть превышающим $A$, так что ящик скользит вперед. Найти скорость ящика в момент удара о стену кабины водителя, считая, что начальное расстояние до этой стены равно $d$.*

*Решение.* Elementary ■

**Задача 3.2.** *Однородный шар массы $m = 4$ кг движется поступательно слева направо по поверхности стола под действием постоянной силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к середине правого полушария под углом $\alpha = 45^o$ к горизонту.Коэффициент трения $k = 0.2$. Найти $F$ и ускорение шара.*

*Решение.* Elementary ■

**Задача 3.3.** *К точке с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_1 = a\boldsymbol{i}$ приложена сила $\boldsymbol{F}_1 = A\boldsymbol{j}$, а к точке $\boldsymbol{r}_2 = b\boldsymbol{j}$ - сила $\boldsymbol{F}_2 = B\boldsymbol{i}$. Здесь $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ – орты осей $x$ и $y$, $A$ и $B$ – постоянные. Найти плечо равнодействующей силы относительно начала координат.*

*Решение.* Elementary ■

**Задача 3.4.** *Однородный диск радиуса $R$ имеет круглый вырез в виде круга с центром, расположенным на середине прямой, соединяющей самую левую точку диска и его центр. Масса оставшейся части диска равна $m$. Найти момент инерции такого диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр диска; через его центр масс.*

*Решение.* Elementary ∎

**Задача 3.5.** *Небольшой шар радиуса $r$ и с равномерно распределенной плотностью катается без проскальзывания вблизи нижней части фиксированного цилиндра радиуса $R$. Чему равна частота малых колебаний? Очевидно, что $r << R$.*

*Решение.* Elementary ∎

**Задача 3.6.** ***(Расчет моментов инерции)****: Сферическая оболочка массы $M$ и радиуса $R$ (ось через центр сферы).*

*Решение.* $\frac{2}{3}MR^2$ ∎

**Задача 3.7.** *В середине круглого стола лежит массивный объект. Коэффициент трения между объектом и столом $\mu$. В какой-то момент стол начали двигать с постоянным ускорением $\boldsymbol{a}$ вдоль одного направления в течение времени $t$, а после равномерно остановили за то же время. Найдите минимальный радиус стола при котором объект с него не упадет.*

*Решение.* Elementary ∎

«Computers are like humans – they do everything except think» – **John von Neumann**