Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет безопасности информационных технологий

Дисциплина:

«Дифференциальные уравнения»

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1

Вариант 20

Выполнил:

Суханкулиев Мухаммет,

студент группы N3246

(подпись)

Проверил:

Лучин Александр Юрьевич,

инженер, НОЦ математики

(отметка о выполнении)

(подпись)

Санкт-Петербург

2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЗАДАНИЕ №1

В этом задании в каждом варианте даны функция u трёх переменных x, y, z и уравнение в частных производных (e). Проверьте, является ли функция u решением уравнения (e).

20. $u = z^{2y} arcsinx,\ (e){:}\ 2y\frac{\partial u}{\partial x} = z\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^{2y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} arcsinx = z^{2y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{z^{2y}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(arcsinx \cdot \frac{\partial}{\partial z} z^{2y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(arcsinx \cdot 2yz^{2y-1}) = \frac{\partial}{\partial x}(arcsinx \cdot 2yz^{2y-1}) =$$
$$= \frac{2yz^{2y-1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Подставим в (e):

$$2y\frac{z^{2y}}{\sqrt{1-x^2}} = z\frac{2yz^{2y-1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{2yz^{2y}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2yz^{2y}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ответ: Функция u является решением уравнения (e).

2 ЗАДАНИЕ №2

Укажите тип дифференциального уравнения первого порядка, найдите общее решение уравнения.

20. $y'ctgx + y = 2$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

$$y' = -\frac{y-2}{ctgx}$$

$$dy = -\frac{(y-2)dx}{ctgx}$$

$$-\frac{dy}{y-2} = tgxdx, \text{при } y \neq 2$$

$$\int -\frac{dy}{y-2} = \int tgxdx$$

$$-\int \frac{d(y-2)}{y-2} = -ln|cosx| + C$$

$$\ln(y-2) = lncosx + C$$

$$y - 2 = e^C cosx, e^C = C$$

$$y = Ccosx + 2$$

$$y = 2 \text{ входит в общее решение при } C = 0$$

Проверка:

$$y' = -Csinx$$

$$-Csinxctgx + Ccosx + 2 = 2$$

$$2 = 2$$

Ответ: Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка: $y = C \cdot cosx + 2$.

3 ЗАДАНИЕ №3

Укажите тип дифференциального уравнения первого порядка, найдите общее решение уравнения.

20. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$

$$(y^2 + xy)dx = (xy + 2x^2)dy$$

Это однородное уравнение первого порядка:

Степени однородности функций $M(x, y) = y^2 + xy$ и $N(x, y) = xy + 2x^2$ равны.

Замена: $u = \frac{y}{x}, y = ux, dy = udx + xdu$

$$(u + 2)x^2(udx + xdu) = (u^2 + u)x^2dx$$

$$u^2x^2dx + 2ux^2dx + ux^3du + 2x^3du = u^2x^2dx + ux^2dx$$

$$2ux^2dx + ux^3du + 2x^3du = ux^2dx$$

$$(u + 2)xdu = -udx$$

$$\frac{(u + 2)du}{u} = -\frac{dx}{x}, \text{при } u \neq 0 => y \neq 0, x \neq 0$$

$$\int \frac{(u + 2)du}{u} = \int -\frac{dx}{x}$$

$$u + \int \frac{2du}{u} = -lnx + C$$

$$2lnu + u = C - lnx$$

Обратная замена: $u = \frac{y}{x}$

$$2ln\frac{y}{x} + \frac{y}{x} = C - lnx$$

$$2lny + \frac{y}{x} = lnx + C$$

$$ln\frac{y^2}{x} + \frac{y}{x} + C = 0$$

Рассмотрим $y = 0$:

$$0 = 2x^2y' => y' = 0, x \neq 0 \text{ (при } x = 0 \text{ } - \text{ непоределённость) =>}$$

$$=> \ y = 0 - \text{это частное решение}$$

Проверка:

$$\frac{d}{dx}\left(2lny + \frac{y}{x}\right) = \frac{d}{dx}(lnx + C)$$

$$\frac{d}{dy}(2lny)\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\frac{d}{dx}y\cdot x-y\cdot\frac{d}{dx}x}{x^2}=\frac{1}{x}$$

$$2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\frac{dy}{dx}\cdot x-y}{x^2}=\frac{1}{x}$$

$$2x^2\frac{dy}{dx}+y\left(\frac{dy}{dx}x-y\right)=xy$$

$$(2x^2+xy)\frac{dy}{dx}=xy+y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy+y^2}{2x^2+xy}$$

$$xy+y^2=(2x^2+xy)\cdot\frac{xy+y^2}{2x^2+xy}$$

$$xy+y^2=xy+y^2$$

Ответ: Общее решение уравнения сводящегося к однородному уравнению первого порядка: $2lny+\frac{y}{x}=lnx+C$ или $ln\frac{y^2}{x}+\frac{y}{x}+C=0,\ x\neq 0.$

4 ЗАДАНИЕ №4

Найдите общее решение методом Лагранжа.

20. $y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

Замена:

$$\begin{cases} x = u + m \\ y = v + n' \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + 4n - 5 = 0 \\ 6m - 1n - 5 = 0 \end{cases} => \begin{cases} m = -4n + 5 \\ 6(-4n+5) - n - 5 = 0 \end{cases} => \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = u + 1, \ \ dx = du \\ y = v + 1, \ \ dy = dv \end{cases}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 1 + 4(v+1) - 5}{6(u+1) - v - 1 - 5} = \frac{u + 4v}{6u - v}$$

Замена: $t = \frac{v}{u}, v = tu, dv = tdu + udt$

$$tdu + udt = \frac{(4t+1)du}{6-t}$$

$$-\frac{(t-6)dt}{t^2 - 2t + 1} = \frac{du}{u}, \text{при } t - 1 \neq 0 => u \neq v$$

$$\int -\frac{(t-6)dt}{(t-1)^2} = \int \frac{du}{u}$$

$$-\int \frac{(t-1) - 5}{(t-1)^2} d(t-1) = lnu + C$$

$$-\left(\int \frac{d(t-1)}{t-1} - \int \frac{5d(t-1)}{(t-1)^2}\right) = lnu + C$$

$$-\ln(t-1) - \frac{5}{t-1} = lnu + C$$

Обратная замена: $t = \frac{v}{u}$

$$-\ln\left(\frac{v}{u} - 1\right) - \frac{5}{\frac{v}{u} - 1} = lnu + C$$

$$-\ln\left(\frac{v-u}{u}\right) - \frac{5u}{v-u} - lnu + C = 0$$

$$-\ln(v-u) - \frac{5u}{v-u} + C = 0$$

Рассмотрим $u = v$ для $\frac{dv}{du} = \frac{u+4v}{6u-v}$:

$$1=\frac{5u}{5u} => u=v - \text{частное решение}$$

Обратная замена: $\begin{cases} x=u+1 \\ y=v+1 \end{cases}, \begin{cases} u=1-x \\ v=1-y \end{cases}$

$$-\ln(x-y)-\frac{5(1-x)}{x-y}+C=0 - \text{общее решение}$$

$$x=y - \text{частное решение}$$

Проверка:

$$-\ln(x-y)-\frac{5(1-x)}{x-y}+C=0$$

$$-\frac{d}{dx}(\ln(x-y))-\frac{d}{dx}\left(\frac{5-5x}{x-y}\right)=0$$

$$-\frac{1}{x-y}\left(1-\frac{d}{dx}(y)\right)-\frac{-5(x-y)-(5-5x)\left(1-\frac{d}{dx}(y)\right)}{(x-y)^2}=0$$

$$-\frac{1-\frac{d}{dx}(y)}{x-y}-\frac{5y-5+5\frac{d}{dy}(y)\frac{dy}{dx}-5x\frac{d}{dy}(y)\frac{dy}{dx}}{(x-y)^2}=0$$

$$-\frac{1-\frac{dy}{dx}}{x-y}-\frac{5y-5+5\frac{dy}{dx}-5x\frac{dy}{dx}}{(x-y)^2}=0$$

$$-\left(x-y-x\frac{dy}{dx}+y\frac{dy}{dx}\right)-\left(5y-5+5\frac{dy}{dx}-5x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$-x-4y+6x\frac{dy}{dx}-y\frac{dy}{dx}+5-5\frac{dy}{dx}=0$$

$$(6x-y-5)\frac{dy}{dx}=x+4y+5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+4y-5}{6x-y-5}$$

Ответ: Общее решение:

$$-\ln(x-y)-\frac{5(1-x)}{x-y}+C=0 \text{ или } \ln(x-y)+\frac{5(1-x)}{x-y}+C=0$$

5 ЗАДАНИЕ №5

Укажите тип дифференциального уравнения первого порядка, найдите решение задачи Коши.

20. $\begin{cases} dx(sin^2x + yctgx) = dy \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

$$-y' + sin^2x + yctgx = 0$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' - yctgx = sin^2x$$

Метод Лагранжа:

$$y' = yctgx$$

$$\frac{dy}{y} = ctgxdx, y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int ctgxdx$$

$$lny = lnsinx + C(x)$$

$$y = C(x)sinx$$

$$y = 0 \text{ входит в общее решение при } C(x) = 0$$

$$y' = C'(x)sinx + C(x)cosx$$

$$C'(x)sinx + C(x)cosx - C(x)sinxctgx = sin^2x$$

$$C'(x) = sinx, x \neq 0$$

$$dC(x) = sinxdx$$

$$\int dC(x) = \int sinxdx$$

$$C(x) = -cosx + C$$

$$x = 0 - \text{частное}$$

$$y = (C - cosx)sinx$$

$$y = Csinx - sinxcosx - \text{общее решение}$$

Проверка:

$$y' = Ccosx - \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) = Ccosx - \cos\,(2x)$$

$$Ccosx - \cos\,(2x) - (Csinx - sinxcosx)ctgx = sin^2x$$

$$Ccosx - \cos(2x) - Csinxctgx + sinxcosxctgx = sin^2x$$

$$Ccosx - \cos(2x) - Ccosx + cos^2x = sin^2x$$

$$-cos^2x + sin^2x + cos^2x = sin^2x$$

$$sin^2x = sin^2x$$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$0 = Csin\frac{\pi}{2} - sin\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}$$

$$C = 0$$

$$y = -sinxcosx \quad \text{при } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ответ: Решение задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка: $\begin{cases} y = -sinxcosx \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

6 ЗАДАНИЕ №6

Решить задачу Коши для линейного уравнения для функции $x(y)$.

20. $\begin{cases} dx = (siny + 3cosy + 3x)dy \\ y\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$x' = siny + 3cosy + 3x$$

Замена: $x = uv, x' = uv' + u'v$

$$uv' + +u'v - 3uv = siny + 3cosy$$

$$u'v + u(v' - 3v) = siny + 3cosy$$

$$v' - 3v = 0$$

$$dv = 3vdy$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int 3dy$$

$$lnv = 3y$$

$$v = e^{3y}$$

$$u'^{e^{3y}} = siny + 3cosy$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{siny + 3cosy}{e^{3y}}$$

$$\int du = \int \frac{siny + 3cosy}{e^{3y}} dy$$

Для правого интеграла: $\int \frac{siny}{e^{3y}} dy + 3\int \frac{cosy}{e^{3y}} dy = \left\langle \begin{matrix} u = \frac{1}{e^{3y}} & dv = sinydy \\ du = -\frac{3}{e^{3y}} dy & v = -cosy \end{matrix} \right\rangle =$

$-\frac{cosy}{e^{3y}} - 3\int \frac{cosy}{e^{3y}} dy + 3\int \frac{cosy}{e^{3y}} dy + C = -\frac{cosy}{e^{3y}} + C$

$$u = C - \frac{cosy}{e^{3y}}$$

Обратная замена: $u = \frac{x}{v}, v = e^{3y}$

$$x = Ce^{3y} - cosy$$

Проверка:

$$x' = Ce^{3y} \cdot 3 - (-siny) = 3Ce^{3y} + siny$$

$$3Ce^{3y} + siny = siny + 3cosy + 3(Ce^{3y} - cosy)$$

$$siny = siny$$

$y\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$:

$$e^{\frac{\pi}{2}} = Ce^{3\frac{\pi}{2}} - cos\frac{\pi}{2}$$

$$C = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{3\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{e^{\pi}}$$

$$x = e^{3y-\pi} - cosy, \text{при } y\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ответ: Решение задачи Коши для линейного уравнения для функции $x(y)$:

$$\begin{cases} x = e^{3y-\pi} - cosy \\ y\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

7 ЗАДАНИЕ №7

Решить задачу Коши для уравнения Бернулли.

20. $\begin{cases} 4y' + x^3y = (x^3+8)e^{-2x}y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\frac{x^3}{4y} + \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{4}(x^3+8)e^{-2x}$$

Это уравнение Бернулли при $n = -1$.

Замена: $z = y^{-1}, z' = -\frac{1}{y^2}y'$

$$\frac{1}{4}x^3z - z' = \frac{1}{4}(x^3+8)e^{-2x}$$

Замена: $z = uv, z' = u'v + uv'$

$$\frac{1}{4}uvx^3 - uv' - u'v - \frac{1}{4}(x^3+8)e^{-2x} = 0$$

$$u\left(\frac{1}{4}vx^3 - v'\right) - u'v - \frac{1}{4}x^3e^{-2x} - 2e^{-2x} = 0$$

$$\frac{1}{4}vx^3 - v' = 0$$

$$v' = \frac{1}{4}vx^3$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{1}{4}x^3dx$$

$$lnv = \frac{1}{16}x^4$$

$$v = e^{\frac{x^4}{16}}$$

$$-u'v - \frac{1}{4}x^3e^{-2x} - 2e^{-2x} = 0$$

$$-u'e^{\frac{x^4}{16}} - \frac{1}{4}x^3e^{-2x} - 2e^{-2x} = 0$$

$$u' = e^{-\frac{x^4}{16}}(-\frac{1}{4}x^3e^{-2x} - 2e^{-2x})$$

$$4u' = \frac{4\left(-\frac{x^3}{4e^{2x}} - \frac{2}{e^{2x}}\right)}{e^{\frac{x^4}{14}}}$$

$$4u'^{e^{\frac{x^4}{16}+2x}} = 4(-\frac{x^3}{4e^{2x}} - \frac{2}{e^{2x}})e^{2x}$$

$$u' = -\frac{(x^3+8)e^{-\frac{x^4}{16}-2x}}{4}$$

$$\int du = \int -\frac{(x^3+8)e^{-\frac{x^4}{16}-2x}dx}{4}$$

Для правого интеграла: $\int -\frac{(x^3+8)e^{-\frac{x^4}{16}-2x}dx}{4} = \left\langle \begin{matrix} t = e^{-\frac{x^4}{16}-2x} \\ -4dt = (x^3+8)e^{-\frac{x^4}{16}-2x}dx \end{matrix} \right\rangle =$

$-\frac{1}{4}\int -4dt = e^{-\frac{x^4}{16}-2x} + C$

$$u = e^{-\frac{x^4}{16}-2x} + C$$

Обратная замена: $z = uv$

$$z = \left(e^{-\frac{x^4}{16}-2x} + C\right)e^{\frac{x^4}{16}} = e^{-2x} + Ce^{\frac{x^4}{16}}$$

Обратная замена: $z = y^{-1}$

$$y^{-1} = e^{-2x} + Ce^{\frac{x^4}{16}}$$

$$y = \frac{e^{2x}}{1 + Ce^{2x+\frac{x^4}{16}}} - \text{общее решение}$$

$y(0) = 1$:

$$0 = \frac{1}{1+C}$$

$$C = -1$$

$$y = \frac{e^{2x}}{1 - e^{2x+\frac{x^4}{16}}} - \text{частное решение}$$

Ответ: Решение задачи Коши для уравнения Бернулли: $\begin{cases} y = \frac{e^{2x}}{1-e^{2x+\frac{x^4}{16}}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

8 ЗАДАНИЕ №8

Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах (ответ представить в виде $\psi(x,y)=C$).

20. $(y^3+cosx)dx+(3xy^2+e^y)dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3y^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=3y^2$$

$$\psi(x,y)=\int_0^x(0^3+cosx)dx+\int_0^y(3xy^2+e^y)dy=sinx|\begin{matrix}x\\0\end{matrix}+(xy^3+e^y)|\begin{matrix}y\\0\end{matrix}=$$

$$=sinx+xy^3+e^y-1=C$$

Ответ: Общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах в виде $\psi(x,y)=C$: $sinx+xy^3+e^y=C$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ - О.И. Брагина, Т.Ф. Панкратова, А.И. Попов, И.Ю. Попов, А.В. Рябова
2. https://t.me/c/2238652947/709 - Чат в телеграм.