

Seminar 5

Введение в классическую механику

Victor Yu. Ivanov *

Аннотация

Physics and Mathematics

Содержание

1	Центр масс	1
2	Упражнения	2

1 Центр масс

Рассмотрим теперь важное приложение закона сохранения импульса.

Определение 1.1. Для системы из N частиц, движущихся в \mathbb{R}^n , центром масс системы в фиксированный момент времени является вектор $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, заданный формулой

$$\mathbf{c} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \mathbf{x}^j$$

где $M = \sum_{j=1}^N m_j$ полная масса системы.

Дифференцируя по времени

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{x}}_j = \frac{\mathbf{p}}{M}$$

где \mathbf{p} полный импульс системы.

Утверждение 1.1. Предположим, что полный импульс \mathbf{p} системы сохраняется. Тогда центр масс движется прямолинейно с постоянной скоростью. А именно,

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0) \frac{\mathbf{p}}{M}$$

Доказательство. Очевидно ■

Рассмотрим элементарный пример:

*VI

Задача 1.1. Два шарика массой 250 г каждый, соединенные нитью длиной 1 м, движутся по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент один из шариков неподвижен, а скорость другого равна 4 м/с и направлена перпендикулярно нити. Чему равна сила натяжения нити?

Решение. Elementary ■

2 Упражнения

Задача 2.1. Частица совершила перемещение по некоторой траектории в плоскости xy из точки 1 с радиус-вектором $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ в точку 2 с радиус-вектором $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. При этом на нее действовали некоторые силы, одна из которых $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Найти работу, которую совершила сила \mathbf{F} .

Решение. Elementary ■

Задача 2.2. Мячик массой 200 г летел со скоростью 20 м/с. После удара о стенку он отскочил под прямым углом к прежнему направлению со скоростью 15 м/с. Найдите модуль изменения импульса мячика при ударе.

Решение. Elementary ■

Задача 2.3. Маленький шарик массой 0.2 кг находится на конце нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают без начальной скорости. Чему равна сила натяжения нити в тот момент, когда она составляет угол 60° с вертикалью.

Решение. Elementary ■

Задача 2.4. На легкой нерастяжимой нити подвешен тяжелый шарик. На какой угол надо отвести нить от положения равновесия, чтобы при последующих качаниях максимальная сила натяжения нити была бы в 4 раза больше минимальной?

Решение. Elementary ■

Задача 2.5. Кинетическая энергия частицы, движущейся по окружности радиуса R , зависит от пройденного пути s по закону $T = as^2$, где a постоянная величина. Найти силу, действующую на частицу, в зависимости от s .

Решение. Elementary ■

Задача 2.6. Частица движется вдоль оси x по закону $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где α и β – положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0 . Найти значения F_x силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

Решение. Elementary ■

Задача 2.7. В момент, когда скорость падающего тела составила $v_0 = 4$ м/с, оно разорвалось на три одинаковых осколка. Два осколка разлетелись в горизонтальной плоскости под прямым углом друг к другу со скоростью $v = 5$ м/с каждый. Найти скорость третьего осколка сразу после разрыва.

Решение. Elementary ■

Задача 2.8. Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы \mathbf{F} , совпадающей по направлению с ее скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью μ кг/с. Найти ускорение и скорость тележки в момент t , если в момент $t = 0$ тележка с песком имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю.

Решение. Elementary ■