Практическое занятие 5-6

Законы распределения дискретных с.в.

Литература

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. М.: Издательство «Юрайт», 2016.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Высш. шк., 2000.
3. Решетов С.В., Суслина И.А. Задачи для самостоятельного решения по теории вероятностей и математической статистике – СПб: НИУ ИТМО, 2014.

Вырожденное распределение

С.в. X имеет вырожденное распределение, если $\exists x_0 \in \boldsymbol{R}$ такое, что

$$P(X = x_0) = 1$$

Ряд распределения с.в. X:

x	$\boldsymbol{x_0}$
p	1

Функция распределения с.в. X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_0 \\ 1, & x > x_0 \end{cases}$$

Обозначение: $X \sim I_{x_0}$

Распределение Бернулли

С.в. X имеет распределение Бернулли, если $X = \{0,1\}$, причем $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p = q$.

Ряд распределения с.в. X:

x_i	0	1
p_i	q	p

Функция распределения с.в. X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - p, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Обозначение: $X \sim B(p)$

Биномиальное распределение

1. Производится n независимых экспериментов;
2. Каждый эксперимент имеет два исхода: A или $\overline{A}$;
3. Вероятность появления события A постоянна и равна p.

С.в. X – число появлений события A.

$$X = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n\}$$

с вероятностями

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

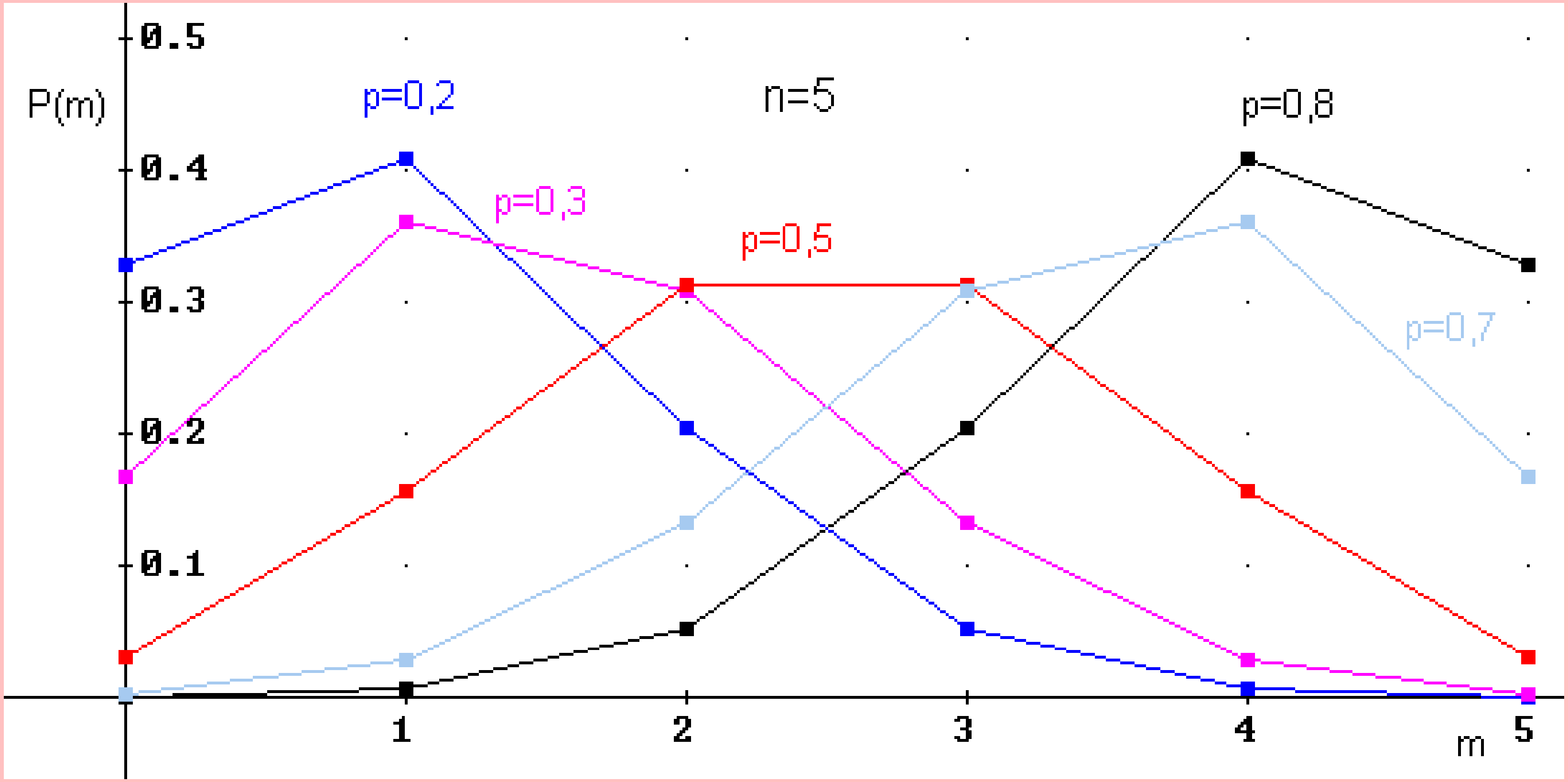
где $m \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n\}$

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = q^n + C_n^1 p q^{n-1} + \cdots +$$

$$+ C_n^{n-1} p^{n-1} q + p^n = (p+q)^n = 1$$

С.в. X имеет биномиальное распределение.

Обозначение: $X \sim Bin\,(n,p)$, $p \in (0,\ 1)$, $n \in \boldsymbol{N}$.



Многоугольники биномиального распределения:

$$X \sim Bin\,(5,p),$$
$$p \in \{0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}8\}$$

Производящая функция случайной величины

Пусть X={0,1,2,…, m,…}, $p_m = P(X=m)$

Определение

Производящей функцией для с.в. X называется функция вида:

$$f_X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m z^m, \quad \text{где } 0 < z \leq 1$$

Свойства производящей функции

1. $z_2 > z_1 \Rightarrow f_X(z_2) > f_X(z_1)$
2. $f'_X(1) = m_x$
3. $f''_X(1) + f'_X(1) - (f'_X(1))^2 = D_x,$
4. $\dfrac{f_X^{(k)}(0)}{k!} = p_k$
5. X, Y – независимые $\Rightarrow f_{X+Y}(z) = f_X(z) \cdot f_Y(z)$

Числовые характеристики биномиального распределения

- математическое ожидание $m_x = np$
- дисперсия $D_x = npq$
- среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{npq}$$

Геометрическое распределение

С.в. X – число экспериментов, которое нужно провести, прежде чем впервые появится событие A.

$$X = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m, \ldots\}$$

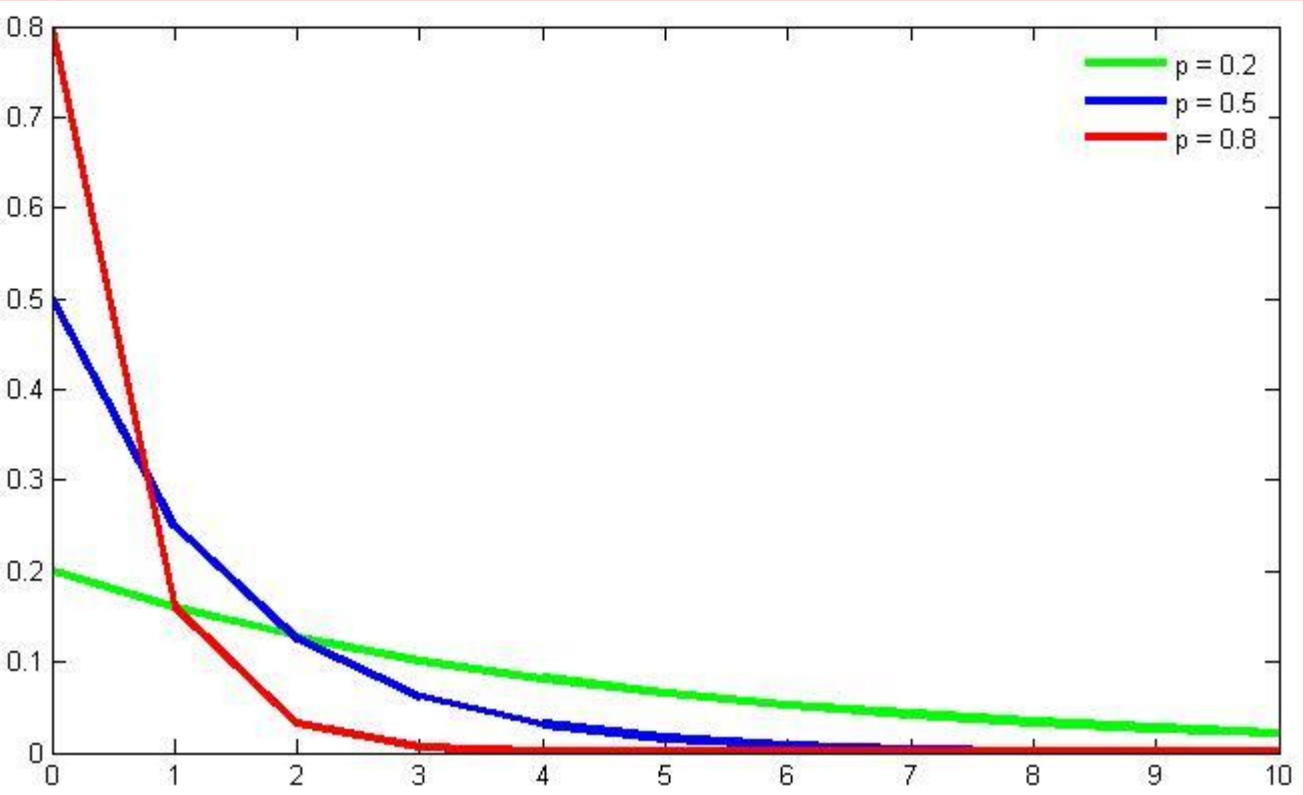
с вероятностями

$$P(X = m) = q^m p, \quad m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m p = p \sum_{m=0}^{\infty} q^m = p \frac{1}{1-q} = 1$$

С.в. X имеет геометрическое распределение.

Обозначение: $X \sim G(p),\ p \in (0,\ 1)$.



Многоугольники геометрического распределения:

$$X \sim G(p),$$
$$p \in \{0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}8\}$$

Числовые характеристики геометрического распределения

- математическое ожидание $m_x = \frac{q}{p}$
- дисперсия $D_x = \frac{q}{p^2}$
- среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{q}{p^2}}$$

Гипергеометрическое распределение

Пусть в партии из N изделий имеется n стандартных, $n < N$.

Случайный эксперимент: из партии выбирают m изделий:

- каждое изделие может быть извлечено с одинаковой вероятностью
- отобранное изделие в партию не возвращается.

С.в. X – число k стандартных изделий среди отобранных.

$$X = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ min\{n,\ m\}\}$$

с вероятностями

$$P(X = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

С.в. X имеет гипергеометрическое распределение.

Обозначение:

$$X \sim GG(N,n,m)$$

или $X \sim GG(N,m,p)$,

где $p = \dfrac{n}{N}$ – вероятность того, что первое извлеченное изделие – стандартное.

Замечание:

если $m < 0,1N$, то вероятности близки вероятностям, вычисленным по биномиальному закону.

Распределение Пуассона

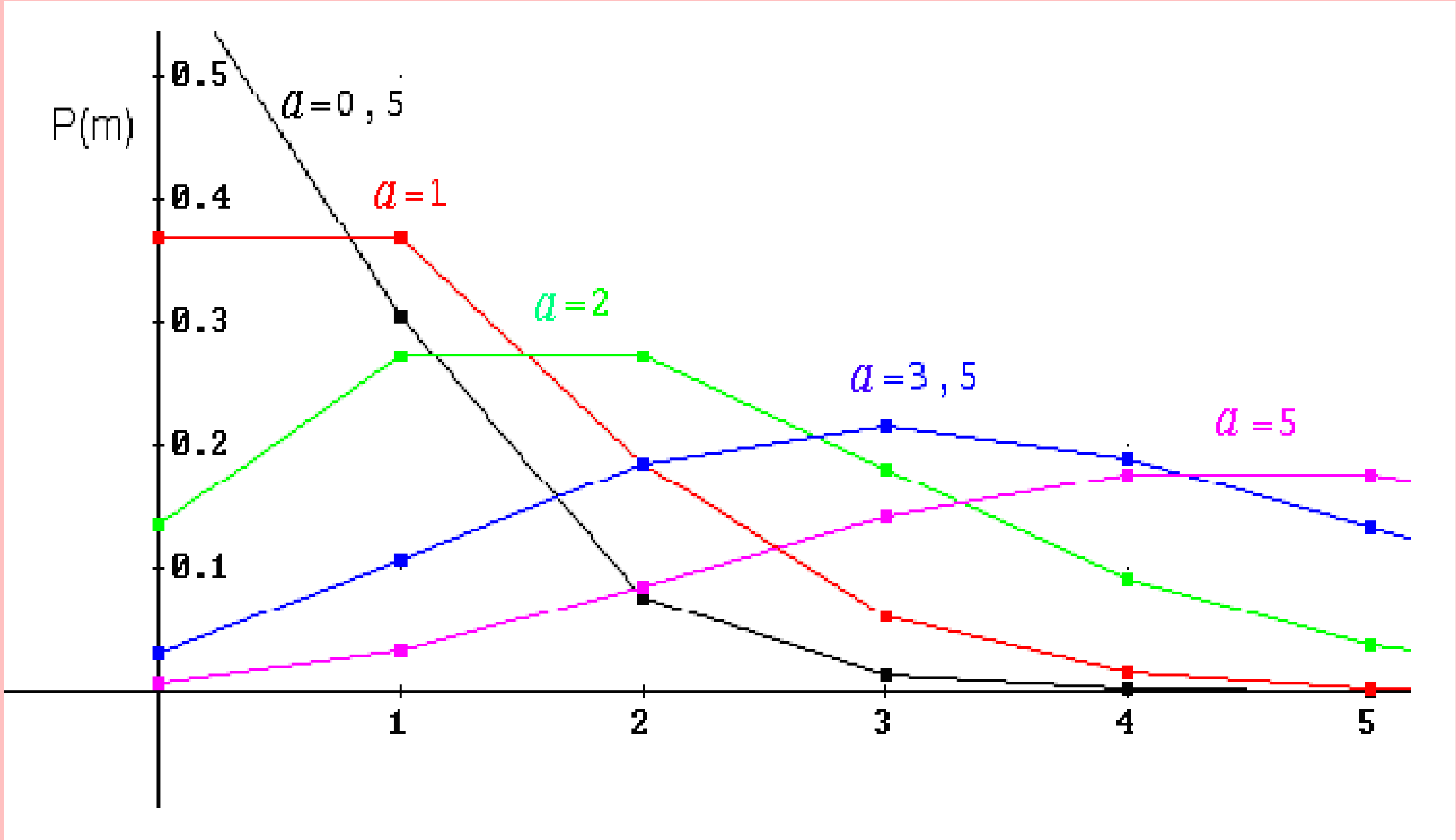
Пусть $X = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m, \ldots\}$
с вероятностями

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad m \in \{0,1,2,\ldots\}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} e^{a} = 1$$

С.в. X имеет распределение Пуассона.

Обозначение: $X \sim \Pi(a)$, $a > 0$.



Многоугольники распределения Пуассона:

$$X \sim \Pi(a),$$
$$a \in \{0{,}5;\ 1;\ 2;\ 3{,}5;\ 5\}$$

Числовые характеристики распределения Пуассона

- математическое ожидание $m_x=a$
- дисперсия $D_x=a$
- среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{a}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Значения функции $P(m;\lambda) = \dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	18394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007
8										00001

m	λ									
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	08422	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	08924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	00076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	00014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	10326
9	00002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00006	00018	00047	00109	00223
15						00002	00005	00016	00040	00089
16							00002	00005	00014	00033
17								00001	00004	00012
18									00001	00004
19										00001

Расчетно-графическая работа №1

Исследование дискретной случайной величины

Выполняем на сайте https://itmoprob.web.app

Инструкция для регистрации

https://drive.google.com/file/d/1cpjbGfPEvKLJPSUpE02ciJrcaj8_rMsy/view?usp=sharing

https://docs.google.com/document/d/1qVVfuavyvfddIebHgM6zNmm0jASr6sJIkS37dVam1Po/edit?usp=sharing