Лекция 3
Дискретная случайная величина

1. Понятие случайной величины. Функция распределения и ее свойства.
2. Дискретная случайная величина и ее закон распределения.
3. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
4. Производящая функция случайной величины.

1. Понятие случайной величины. Функция распределения и ее свойства

Примеры:

1. Ω={грань 1, грань 2, …, грань 6},
   с.в. X={1,2,3,4,5,6} – число очков на грани.

2. Ω={Г, ЦГ, ЦЦГ, …},

   $x_1=X(\text{Г})=0,\ x_2=X(\text{ЦГ})=1,\ x_3=X(\text{ЦЦГ})=2,\ldots$

   с.в. X={0,1,2,…} – число Ц, выпавших до первого появления Г.

3. Эксперимент: на плоский экран падает частица. Пусть известна вероятность попадания частицы в любое, имеющее меру, множество на экране.

Случайные величины:

- X – расстояние от центра экрана до точки падения;
- X^2 – квадрат этого расстояния;
- Z – угол в полярной системе координат.

Пусть ПЭС Ω – *конечно*.

Случайной величиной называется любая функция

$$X: \ \Omega \to \mathbf{R}$$

Замечание:

- Ω – конечно $\Rightarrow$ множество значений $X(\omega)$ конечно
- $X(\omega)$ принимает свои значения с некоторой вероятностью

$$P(X = x_0) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = x_0\})$$

Пусть $x \in \boldsymbol{R}$.

Множество $\{\omega : X(\omega) < x\} = \{X < x\}$ – *случайное* событие:

- можно говорить о его вероятности
- через событие $\{X < x\}$, где $x \in (-\infty, +\infty)$ с помощью алгебры событий можно выразить сколь угодно сложное событие, связанное со с.в. X.

Определение 1

Случайной величиной называется функция $X(\omega)$, заданная на Ω, если $\forall x \in \boldsymbol{R}$ множество $\{\omega\colon X(\omega) < x\}$ элементарных событий, удовлетворяющих условию $X(\omega) < x$, является *случайным событием*.

Обозначение: X, Y, Z,…;

ее значения x, y, z,…

Пусть (Ω, Σ, X) – вероятностное пространство.

Определение 2

Законом распределения (вероятностей) с.в. называется любое правило, позволяющее находить вероятность того, что с.в. примет свое значение из множества ее возможных значений.

Определение 3

Функцией распределения (вероятностей) с.в. X называется функция $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности того, что с.в. примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x) \quad \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

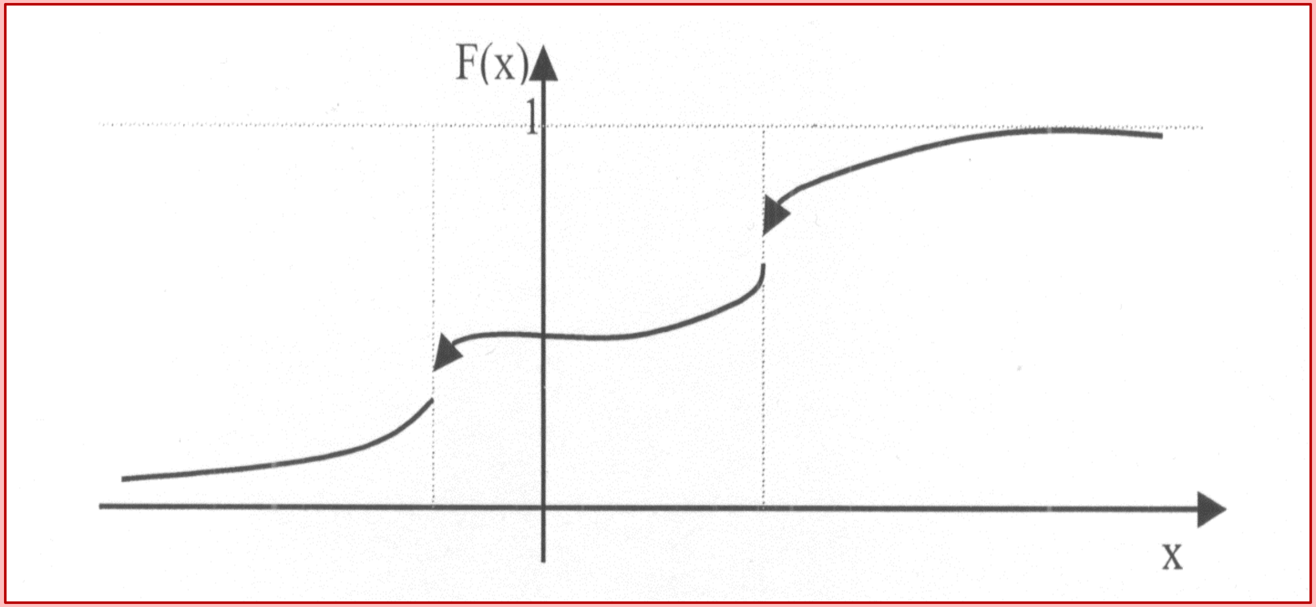
$$P(X < x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\})$$

Свойства функции $F(x)$

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$
3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$
5. $F(x) = F(x-0)$, где $F(x-0) = \lim\limits_{y \to x-0} F(y)$

СР Докажите:

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$$


F(x)
1
x

СР Пусть $F(x) = P(X \leq x) \quad \forall x \in \boldsymbol{R}$.

Какие из свойств $F(x)$ изменятся?

Определение 4

Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая с.в.

Случайные величины:

- дискретные
- непрерывные
- смешанные

2. Дискретная случайная величина и ее закон распределения

Пусть $(\Omega, \Sigma, \mathcal{P})$ – вероятностное пространство.

Определение 5

Дискретной случайной величиной называется с.в., множество возможных значений которой конечно или счетно.

Говорят, что с.в. имеет *дискретное распределение*.

Ряд распределения вероятностей д.с.в.

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

где x_i расположены в порядке возрастания, $p_i = P(X = x_i)$, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty}\{X = x_i\}\right) = 1$$

Если одному и тому же x_l значению с.в. соответствует несколько элементарных событий ω_k, то

$$p_l = \sum_{k:X(\omega_k)=x_l} p(\omega_k)$$

Графическое изображение ряда распределения д.с.в. называется многоугольником распределения.

Построение функции распределения д.с.в. по ряду распределения *

$$F(x) = P(X < x)$$

1. При $x \le x_1$: событие $\{X < x\} = \varnothing$,

$$F(x) = P(X < x) = 0.$$

2. При $x_1 < x \le x_2$: событие $\{X < x\} = \{X = x_1\}$,

$$F(x) = P(X = x_1) = \boldsymbol{p_1}.$$

3. При $x_2 < x \le x_3$: событие $\{X < x\} = \{X = x_1\} + \{X = x_2\}$,

$$F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2}.$$

…

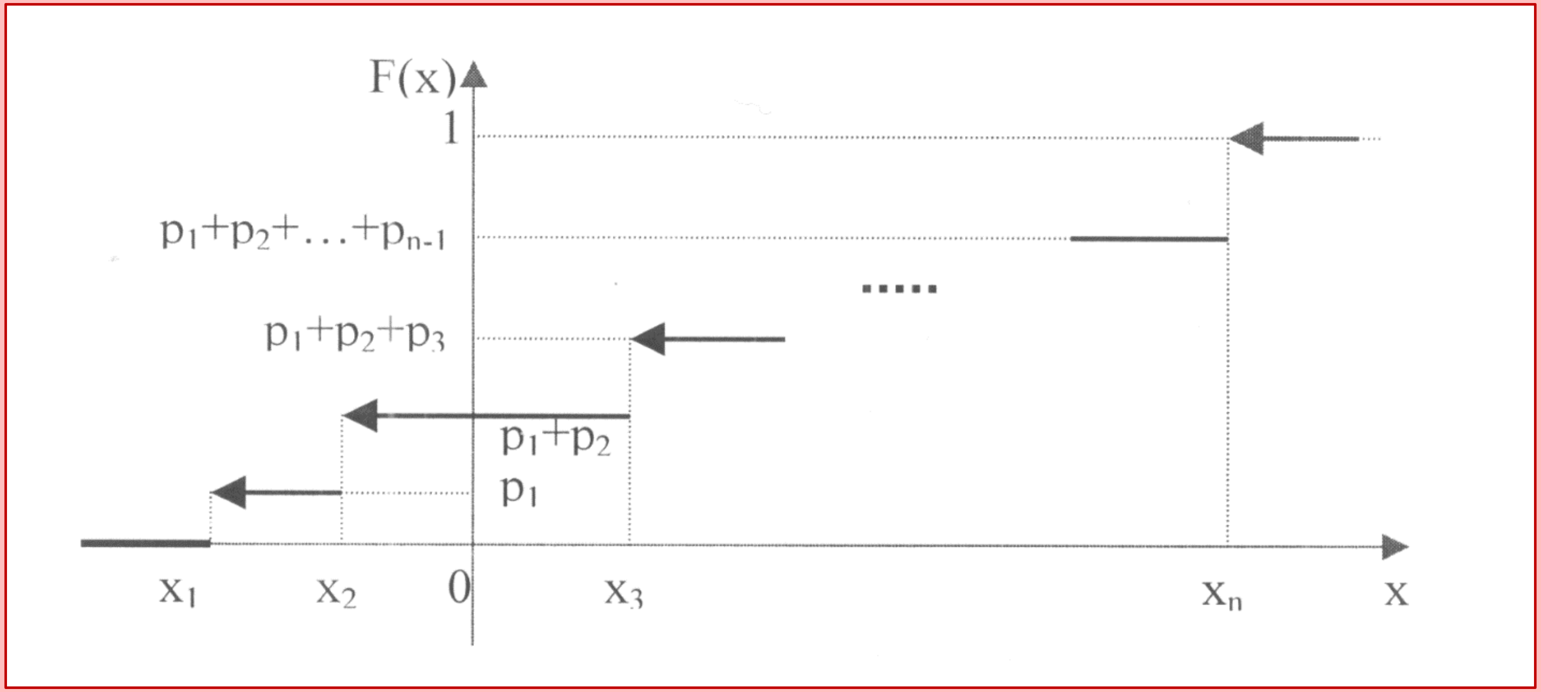
*

При $x_{n-1} < x \le x_n$:

$$F(x) = \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} + \ldots + \boldsymbol{p_{n-1}}.$$

При $x > x_n$: событие $\{X < x\} = \Omega$,

$$F(x) = P(X < x) = \mathbf{1}.$$



$$F(x)=\begin{cases} 0, \ \ \text{при} \ \ x\in(-\infty, x_1] \\ p_1+p_2+\ldots+p_i, \ \ \text{при} \ \ x\in(x_i, x_{i+1}], \ \ \text{где} \ 1\le i\angle n \\ 1, \ \ \text{при} \ \ x\in(x_n, +\infty) \end{cases}$$

3. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Определение 6

Математическим ожиданием д.с.в. X называется число

$$\boxed{m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

Обозначение: m_x, $E(X)$, $M[X]$.

Если д.с.в. X имеет счетное число значений, то математическое ожидание

$$\boxed{m_x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i}$$

если ряд сходится абсолютно;
в противном случае м.о. не существует.

Вероятностный смысл м.о.

Пусть произведено n экспериментов.

Значения д.с.в. X :

x_1 появилось m_1 раз,

x_2 – m_2 раз, …, x_k – m_k раз,

где $n = m_1 + m_2 + ... + m_k$.

Сумма всех значений с.в.:

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k$$

Среднее арифметическое значений с.в.:

$$\overline{X} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_k x_k}{n}$$

При $n \to \infty$:

$$\overline{X} \approx p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_k x_k = m_x$$

Вывод: при $n \to \infty$

математическое ожидание с.в. приближенно равно среднему арифметическому значению с.в.

m_x называют *средневероятностным значением* с.в., а также *центром распределения* (*рассеивания*) с.в.

Свойства м.о.

1. $M\,[c] = c$, где $c = const$
2. $M\,[aX+b] = a \cdot M[X] + b \quad \forall a, b \in \boldsymbol{R}$
3. $\forall X, Y \quad M\,[X+Y] = M[X] + M[Y]$
4. X, Y – независимы $\Rightarrow M\,[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$

СР

Следствие:

$$\forall X \quad |M[X]| \;\mathbf{?}\; M[|X|]$$

С.в. $\dot{X} = X - m_x$ называется центрированной с.в.

$$M[\dot{X}] = M[X - m_x] = M[X] - m_x = 0$$

Определение 7

Дисперсией с.в. X называется число

$$D[X] = M\left[\, (X - m_x)^2 \,\right]$$

Обозначение: D_x, $D[X]$

Дисперсия д.с.в. X:

$$\boxed{D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i}$$

$$\boxed{D_x = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_x)^2 p_i}$$

если ряд сходится абсолютно;

в противном случае дисперсия не существует.

По свойствам м.о.:

$$D[X] = M[\,(X - m_x)^2\,] = M[\,X^2 - 2m_x X + m_x^2\,] =$$
$$= M[\,X^2\,] - 2m_x^2 + m_x^2 = M[\,X^2\,] - m_x^2\,.$$

$$D[X] = M[\,X^2\,] - m_x^2$$

Формула для вычислений:

$$\boxed{D_x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2}$$

Дисперсия с.в. X характеризует среднее значение квадрата разброса (рассеивания) с.в. вокруг своего м.о.

Свойства дисперсии

1. $D[c] = 0$, где $c = const$
2. $D\,[aX+b] = a^2\,D[X] \quad \forall a,b \in \boldsymbol{R}$
3. X, Y – независимы $\Rightarrow$

$$D[X+Y] = D[X]+D[Y]$$

Определение 8

Средним квадратическим отклонением с.в. X называется арифметический корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

Обозначение: σ_x, $\sigma[X]$.

Свойства с.к.о.

1. $\sigma[c\cdot X] = |c|\,\sigma[X] \quad \forall c \in \boldsymbol{R}$.

2. X, Y – независимы $\Rightarrow$

$$\sigma[X+Y] = \sqrt{\sigma^2[X] + \sigma^2[Y]}$$

5. Производящая функция случайной величины

Пусть $X=\{0,1,2,\ldots, m,\ldots\}$, $p_m = P(X=m)$

Определение 9

Производящей функцией для с.в. X называется функция вида:

$$f_X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m z^m \,, \quad \text{где } 0 < z \le 1$$

Свойства производящей функции

1. $z_2 > z_1 \Rightarrow f_X(z_2) > f_X(z_1)$

2. $f'_X(1) = m_x$

3. $f''_X(1) + f'_X(1) - (f'_X(1))^2 = D_x,$

4. $\dfrac{f_X^{(k)}(0)}{k!} = p_k$

5. X, Y – независимые $\Rightarrow f_{X+Y}(z) = f_X(z) \cdot f_Y(z)$