Университет ИТМО
Факультет безопасности информационных технологий

Группа N3146 **К работе допущены**

Студенты Суханкулиев Мухаммет

Бардышев Артём Антонович

Шегай Станислав Дмитриевич

Шкляев Артем Романович

Работа выполнена

Преподаватель Иванов Виктор Юрьевич **Отчет принят**

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.01

Исследование распределения случайной величины

1. Цель работы.

Исследование распределения случайной величины на примере многократных измерений определённого интервала времени.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Провести многократные измерения определенного интервала времени.
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения.
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки.
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же, как и у экспериментального распределения средним значениями дисперсией.

3. Объект исследования.

Случайная величина – результат измерения заданного промежутка времени (5 сек).

4. Метод экспериментального исследования.

Многократное прямое измерение определенного интервала времени и проверка закономерностей распределения значений этой случайной величины.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

Нормальное распределение по функции Гаусса:

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t - \langle t \rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Выборочное среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N)^2}$$

Максимальная «высота» гистограммы:

$$\rho_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Доверительный интервал:

$$\Delta t = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\langle t\rangle}$$

Доверительная вероятность:

$$\alpha = P(t \in [\langle t\rangle - \Delta t, \langle t\rangle + \Delta t])$$

Среднеквадратичное отклонение среднего значения:

$$\sigma_{\langle t\rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N)^2}$$

Абсолютная погрешность с учетом погрешности приборов:

$$\Delta x = \sqrt{(\overline{\Delta x})^2 + (\frac{2}{3}\Delta_{ux})^2}$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Среднее арифметическое всех результатов измерения:

$$\langle t\rangle_N = \frac{1}{N}(t_1 + t_2 + \cdots + t_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$$

Соотношение для вероятности попадания результата измерения в интервал $[t_1, t_2]$:

$$P(t_1 < t < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)dt \approx \frac{N_{12}}{N}$$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	***Наименование***	***Тип прибора***	***Используемый диапазон***	***Погрешность прибора***
1	Секундомер	Электронный	4–6 с	0,005 с
2	Часы	Механические	0–10 с	0,005 с

7. Результаты прямых измерений и их обработки.

№	t_i, с	$t_i - \langle t \rangle_N$, с	$(t_i - \langle t \rangle_N)^2$, с^2
1	5,39	0,3892	0,151477
2	4,87	-0,1308	0,017109
3	5,01	0,0092	0,000085
4	5,09	0,0892	0,007957
5	4,84	-0,1608	0,025857
6	5,05	0,0492	0,002421
7	5,07	0,0692	0,004789
8	4,87	-0,1308	0,017109
9	5,00	-0,0008	0,000001
10	4,96	-0,0408	0,001665
11	5,08	0,0792	0,006273
12	5,00	-0,0008	0,000001
13	5,12	0,1192	0,014209
14	4,83	-0,1708	0,029173
15	5,07	0,0692	0,004789
16	4,95	-0,0508	0,002581
17	5,09	0,0892	0,007957
18	4,81	-0,1908	0,036405
19	5,30	0,2992	0,089521
20	4,74	-0,2608	0,068017
21	5,11	0,1092	0,011925
22	5,04	0,0392	0,001537
23	4,88	-0,1208	0,014593
24	4,92	-0,0808	0,006529
25	5,14	0,1392	0,019377
26	5,05	0,0492	0,002421
27	4,90	-0,1008	0,010161
28	4,99	-0,0108	0,000117
29	4,95	-0,0508	0,002581
30	4,91	-0,0908	0,008245
31	4,98	-0,0208	0,000433
32	5,20	0,1992	0,039681
33	5,03	0,0292	0,000853
34	4,78	-0,2208	0,048753
35	5,16	0,1592	0,025345
36	4,75	-0,2508	0,062901
37	5,18	0,1792	0,032113

38	5,06	0,0592	0,003505
39	4,89	-0,1108	0,012277
40	4,90	-0,1008	0,010161
41	5,11	0,1092	0,011925
42	5,02	0,0192	0,000369
43	5,14	0,1392	0,019377
44	4,83	-0,1708	0,029173
45	5,05	0,0492	0,002421
46	4,97	-0,0308	0,000949
47	5,09	0,0892	0,007957
48	4,86	-0,1408	0,019825
49	5,01	0,0092	0,000085
50	5,00	-0,0008	0,000001
	$\langle t\rangle_N = 5{,}0008$ с	$\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N) \approx 0\ c$	$\sigma_N = 0{,}135$ с $\rho_{max} = 2{,}955$ $с^{-1}$

$t_{min} = 4{,}74$ с; $t_{max} = 5{,}39$ с – тогда возьмём 10 интервалов с шагом 0,065 с.

8. Расчет результатов косвенных измерений.

Границы интервалов, с		ΔN	$\frac{\Delta N}{N\Delta t}$, c^{-1}	***t, c***	ρ, $с^{-1}$
4,74	4,805	1	0,3077	4,7725	0,7072
4,805	4,87	7	2,1538	4,8375	1,4218
4,87	4,935	6	1,8462	4,9025	2,2670
4,935	5	9	2,7692	4,9675	2,8667
5	5,065	11	3,3846	5,0325	2,8749
5,065	5,13	9	2,7692	5,0975	2,2865
5,13	5,195	4	1,2308	5,1625	1,4422
5,195	5,26	1	0,3077	5,2275	0,7215
5,26	5,325	1	0,3077	5,2925	0,2862
5,325	5,39	1	0,3077	5,3575	0,0901

Опытное значение плотности вероятности (пятый интервал):

$$\frac{\Delta N}{N\Delta t} = \frac{11}{50 \cdot 0{,}065} = 3{,}3846$$

9. Расчет погрешностей измерений.

Погрешность		***Интервал, с***		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	***P***
		от	***до***			
$\langle t\rangle_N \pm \sigma_N$	$5{,}0008 \pm 0{,}135$ с	4,8658	5,1358	44	0,88	0,6827
$\langle t\rangle_N \pm 2\sigma_N$	$5{,}0008 \pm 0{,}27$ с	4,7308	5,2708	50	1	0,9545
$\langle t\rangle_N \pm 3\sigma_N$	$5{,}0008 \pm 0{,}405$ с	4,5958	5,4058	50	1	0,9973

Δ_{ux}= 0,005 c; $\overline{\Delta x} = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle}$; $t_{\alpha,N} = 2{,}009575$ (коэфф. Стьюдента при α=0,95)

$$\overline{\Delta x} \approx 0{,}27129$$

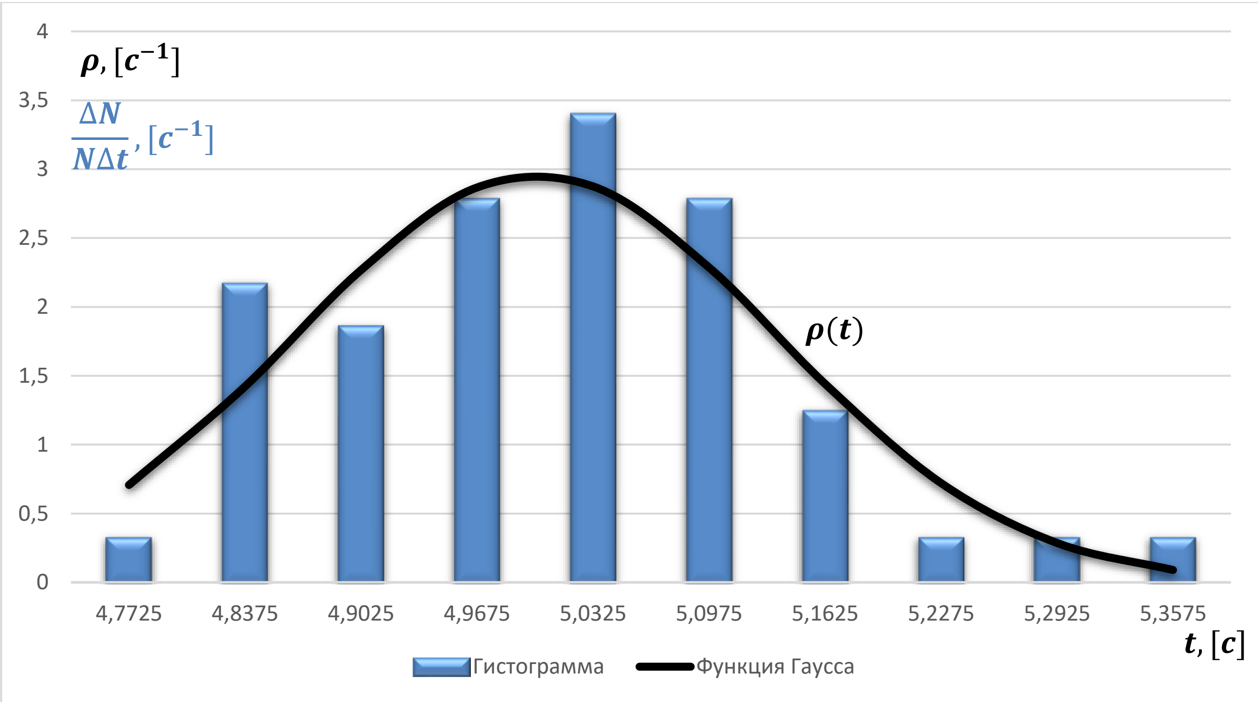
Абсолютная погрешность с учетом погрешности прибора:

$$\Delta x = \sqrt{(\overline{\Delta x})^2 + (\frac{2}{3}\Delta_{ux})^2} = \mathbf{0,27131}\ \boldsymbol{c}$$

Относительная погрешность измерения:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\% = \mathbf{5,4262}\%$$

10. График.



11. Окончательные результаты.

Среднеквадратичное отклонение среднего значения:

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t \rangle_N)^2} = 0{,}0190913 \approx \mathbf{0,0191}$$

Дисперсия:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t \rangle_N)^2 \approx \mathbf{0,018}$$

Доверительный интервал:

$$\overline{\Delta x} = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle} \approx \mathbf{0,2713}$$

По итогам измерений:

$$t = \langle t \rangle_N + \Delta t = (5{,}0008 \pm 0{,}27129)c;\ \varepsilon_x = 5{,}4262\%;\ \alpha = 0{,}95$$

12. Выводы и анализ результатов работы.

Мы провели многократные измерения определенного интервала времени в 5 секунд, получили выборку из 50 измерений, построили гистограмму распределения результатов измерения, вычислили средние значения измерений ($(5{,}0008 \pm 0{,}27129)c$) и дисперсию ($0{,}018$). При сравнении гистограммы с графиком функции Гаусса – распределения случайной величины – можно отметить сходство поведения построенной опытным путём функции с теоретико-статической сущностью.

Работа позволила ознакомиться с законом распределения случайной величины и подробно его изучить.

13. Дополнительные задания.

Контрольные вопросы

1. Являются ли, по вашему мнению, случайными следующие физические величины:
   - плотность алмаза при $20°C$
   - напряжение сети
   - сопротивление резистора, взятого наугад из партии с одним и тем же номинальным сопротивлением
   - число молекул в 1см^3 при нормальных условиях?

   Приведите другие примеры случайных и неслучайных физических величин.
2. Изучая распределение ЭДС партии электрических батареек, студент использовал цифровой вольтметр. После нескольких измерений получились такие результаты (в вольтах): 1,50; 1,49; 1,50; 1,50; 1,49. Имеет ли смысл продолжать измерения? Что бы вы изменили в методике этого эксперимента?
3. При обработке результатов измерений емкости партии конденсаторов получено: $\langle C \rangle$ = 1,1 мкФ, σ = 0,1 мкФ. Если взять коробку со 100 конденсаторами из этой партии, то сколько среди них можно ожидать конденсаторов с емкостью меньше 1 мкФ? больше 1,3 мкФ?
4. Как изменяется коэффициент Стьюдента при возрастании количества измерений?
5. Как зависит коэффициент Стьюдента от доверительной вероятности?
6. В чем отличие среднеквадратичного отклонения среднего значения от среднеквадратичного отклонения выборки?
7. Обязательно ли в данной работе должно получиться распределение, близкое к нормальному? Почему?

14. Выполнение дополнительных заданий.

1. – Плотность алмаза при $20°C$ – это не случайная величина. $\rho \approx 3{,}51$ г/см^3.

   – Напряжение сети — это также не случайная величина. Напряжение в электрической сети обычно контролируется и поддерживается на определенном уровне. Однако, могут быть небольшие колебания напряжения из-за различных факторов, таких как нагрузка на сеть.

   – Сопротивление резистора, взятого наугад из партии с одним и тем же номинальным сопротивлением – это может быть случайной величиной. Даже если резисторы имеют одно и то же номинальное сопротивление, их реальное сопротивление может немного отличаться из-за производственных отклонений.

   – Число молекул в 1см3 при нормальных условиях – это не случайная величина. При определенных условиях (нормальных условиях) число молекул в определенном объеме газа является константой, определенной законом идеального газа. Однако, если условия (температура, давление) меняются, то число молекул в данном объеме также изменится.

   Другие примеры:

   Случайные физические величины:

   – Температура частицы газа: В газе частицы постоянно сталкиваются друг с другом и обмениваются энергией, поэтому температура отдельной частицы может случайно изменяться.

   – Радиоактивный распад: Время, через которое конкретный атом распадается, является случайной величиной.

   – Шум в электронных схемах: это случайные колебания напряжения, вызванные тепловыми эффектами.

   Неслучайные физические величины:

   – Скорость света в вакууме: это константа и не изменяется.

   – Заряд электрона: это также константа и не изменяется.

   – Планковская константа: это фундаментальная константа в квантовой механике, которая не изменяется.

2. Если цель исследования состоит в оценке средней ЭДС партии батареек с высокой точностью, то даже небольшие различия в измерениях могут быть значимы. В таком случае продолжение измерений может быть оправданным.

   Однако, если измерения проводятся для простой оценки ЭДС с достаточной точностью для общего представления о состоянии партии батареек, то результаты уже довольно близки друг к другу, и продолжение измерений может быть излишним.

Чтобы улучшить точность эксперимента, можно применить следующие изменения в методике:

- Увеличить количество измерений.
- Использовать более точный прибор.
- Проверить калибровку прибора.
- Стандартизировать условия измерений чтобы исключить влияние внешних переменных на результаты.

3. Мы можем использовать формулу стандартизации для нормального распределения:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Для емкости меньше 1 мкФ:

$$Z = \frac{1 - 1,1}{0,1} = -1$$

Для емкости больше 1,3 мкФ:

$$Z = \frac{1,3 - 1,1}{0,1} = 2$$

Из таблицы стандартного нормального распределения мы можем найти, что вероятность того, что Z меньше -1, примерно равна 0,1587, вероятность того Z больше 2, примерно равна 0,0228.

Теперь мы можем использовать эти вероятности для расчета количества конденсаторов:

Д ля емкости меньше 1 мкФ: $100 \cdot 0,1587 = 15,87$, то есть примерно 16 конденсаторов.

Д ля емкости больше 1,3 мкФ: $100 \cdot 0,0228 = 2,28$, то есть примерно 2 конденсатора.

4. При большом количестве измерений t-распределение Стьюдента будет очень похоже на нормальное распределение, и t-статистика будет давать очень похожие результаты на z-статистику, которая используется при нормальном распределении. Это является основой для центральной предельной теоремы в статистике.
5. Когда доверительная вероятность увеличивается, доверительный интервал становится шире, чтобы включить больше возможных значений параметра. Это означает, что критическое t-значение, которое определяет эти границы, также увеличивается. Таким образом, коэффициент Стьюдента напрямую зависит от доверительной вероятности.
6. Основное отличие между этими двумя величинами заключается в том, что среднеквадратичное отклонение выборки описывает разброс данных в выборке, в то время как среднеквадратичное отклонение среднего значения описывает точность, с которой среднее значение выборки оценивает среднее значение генеральной совокупности.

7. Не обязательно, что в данной работе должно получиться распределение, близкое к нормальному. Распределение данных зависит от многих факторов, включая природу измеряемой величины и процесс, который генерирует данные.

Список использованных источников

1. Методическое пособие «Обработка экспериментальных данных» / Курепин В.В., Баранов И.В., под ред. В.А. Самолетова : методическое пособие. – 2012. – (дата обращения: 11.02.2024).
2. Элементарные оценки ошибок измерений / Зайдель А.Н., Изд. 3-е испр. и доп. Л., "Наука Ленинградское отделение : книга. – 1968. – (дата обращения: 11.02.2024).
3. Практическая физика / Сквайрс Дж., М.: Мир : книга. – 1971. – (дата обращения: 11.02.2024).