ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Раздел 1
Множества и отношения

© I.Krivtsova
ITMO University

	Наименование раздела	Оценочные средства текущего контроля успеваемости
1	Множества и отношения	Домашние задания №1– №4 Тест №1
2	Алгебраические структуры	Контрольная работа №1 Контрольная работа №2
3	Нечеткие множества	Контрольная работа №3 Тест№2
Промежуточная аттестация:		Письменная экзаменационная работа

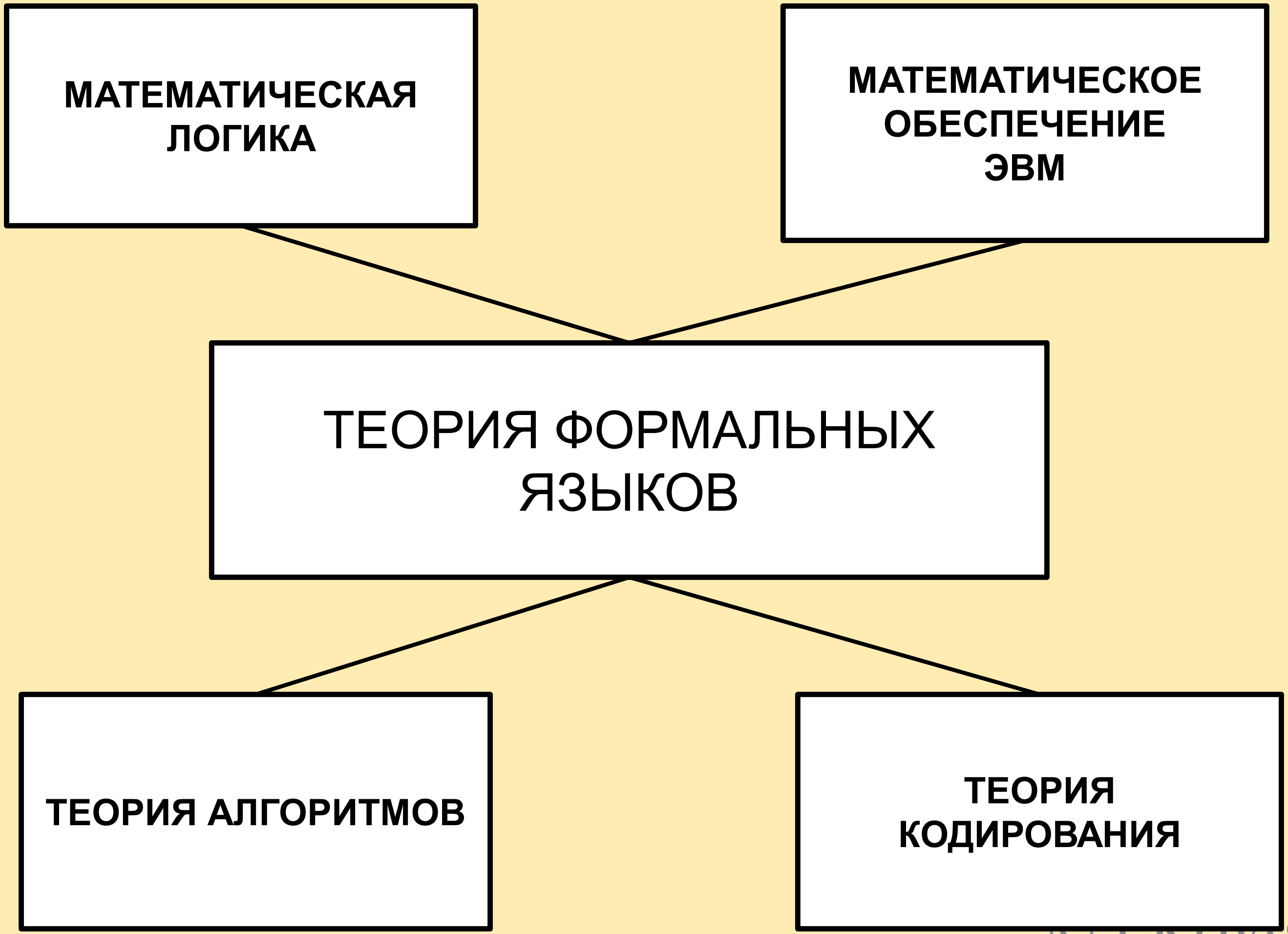
Лекция 1
Элементы комбинаторики

- 1. Предмет и задачи комбинаторики.
- 2. Размещения и перестановки.
- 3. Сочетания.
- 4. Число разбиений. Полиномиальная формула.

Литература

1. Мальцев И.А. Дискретная математика. — СПб: Лань, 2011. https://e.lanbook.com/book/638
2. Жуков А.Е. Элементы комбинаторики : учебное пособие. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. https://e.lanbook.com/book/58450
3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: ФИМА, МЦНМО, 2015.

Введение


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ
ТЕОРИЯ ФОРМАЛЬНЫХ ЯЗЫКОВ
ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ
ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ

Дискретная математика – область математики, занимающаяся изучением свойств структур конечного характера, которые возникают как в самой математике, так и в области ее приложений.

Для нее характерны алгебраические и топологические методы.

1. Предмет и задачи комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами (схемами).

Каждое такое правило называется *комбинаторной конфигурацией*.

Блез Паскаль
(1623 – 1662)

Пьер Ферма
(1601 – 1665)

Готфрид Вильгельм Лейбниц
(1646 – 1716)

Основные задачи комбинаторики

- перечисление;
- пересчет;
- оптимизация.

Правило суммы:

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_к$ – конечные, попарно непересекающиеся множества,

т.е. $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Тогда выполняется равенство:

$$|\bigcup_{i=1}^{k} X_i| = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} |X_i|$$

Пусть $|X_1|=m$, $|X_2|=n$.

Для $\kappa=2$ правило формулируется так:

если объект x может быть выбран m способами, а объект y – другими n способами, то выбор *либо x, либо y* может быть осуществлен $m+n$ способами.

Правило произведения:

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_к$ – конечные множества.

Тогда выполняется равенство:

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_к| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_k|$$

Для $\kappa=2$ правило формулируется так: если объект x может быть выбран m способами и после каждого из таких выборов объект y, в свою очередь, может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары (x,y) может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

2. Размещения и перестановки

Пусть $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$, $|X|=n$.

- **Определение 1**

Набор элементов $x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_r}$ называется выборкой объема r из n элементов или иначе (n, r)-выборкой.

- **Определение 2**

Выборка называется

- упорядоченной, если в ней задан порядок следования элементов;
- неупорядоченной, если порядок следования элементов в выборке не является существенным.

- **Определение 3**

Упорядоченная (n,r) выборка в которой элементы могут повторяться, называется размещением с повторениями из n по r;

если элементы упорядоченной (n,r) выборки попарно различны, то она называется размещением без повторений из n по r или просто размещением.

- **Теорема 1**

Число различных *размещений с повторениями из n элементов по r* определяется по формуле:

$$\boxed{\overline{A}_n^r = n^r}$$

- **Теорема 2**

  Число различных *размещений без повторений из* n *элементов по* r вычисляется по формуле:

$$\boxed{A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}} \qquad \text{при} \quad r \le n,$$

$$A_n^r = 0 \qquad \text{при} \quad r > n.$$

CP Свойства размещений

- **Определение 4**

  (n,n) размещение без повторений называется перестановкой множества X.

Пусть имеем $\{x_1, \ldots, x_r\} \neq \varnothing$,

$n_i \in \mathbf{Z}$, $n_i > 0$ и $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

- **Определение 5**

Каждая упорядоченная выборка, содержащая элемент x_i ровно n_i раз, где $1 \leq i \leq r$, называется перестановкой с повторениями X.

- **Теорема 3**

  Число различных *перестановок без повторений из* n *элементов* вычисляется по формуле:

$$\boxed{P_n = n!}$$

СР Свойства перестановок

3. Сочетания

- **Определение 6**

Неупорядоченная (n,r) выборка в которой элементы могут повторяться называется сочетанием с повторениями из n по r;

если элементы неупорядоченной (n,r) выборки попарно различны, то она называется сочетанием без повторений или просто сочетанием.

- **Теорема 4**

Число *сочетаний без повторений из* n *элементов по* r вычисляется по формуле:

$$\boxed{C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}} \quad \text{при } r \le n,$$

$$C_n^r = 0 \qquad \text{при } r > n.$$

- **Теорема 5**

  Число *сочетаний с повторениями из* n *элементов по* r *вычисляется по формуле*:

$$\boxed{\overline{C_n^r} = C_{n+r-1}^r}$$

СР Доказательство Т. 5

СР Свойства сочетаний

4. Число разбиений. Полиномиальная формула

Пусть X – конечное множество, $|X|=n$.

Множество $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ – разбиение X, если:

- $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$
- $\bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i = X$

При этом $|X_i| = n_i, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$

- **Теорема 6**

  Число *разбиений множества* X вычисляется по формуле:

$$\boxed{N\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}}$$

- **Теорема 7**

Число *перестановок с повторениями из n элементов* вычисляется по формуле:

$$\boxed{\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_\kappa!}}$$

где n_i – число повторений i-того элемента и $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$.

Бином Ньютона: $n \in \mathbf{Z},\ n > 0$

$$(x_1+x_2)^n = x_1{}^n + n\, x_1{}^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\, x_1{}^{n-2} x_2{}^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\, x_1{}^{n-3} x_2{}^3 + \ldots + x_2{}^n$$

$$(x_1+x_2)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r\, x_1{}^{n-r} x_2{}^r$$

C_n^r – *биномиальные коэффициенты*
(интерпретация числа сочетаний)

Обобщенная формула бинома Ньютона или полиномиальная формула:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n=\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} C_{n_1 n_2 \cdots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$$

где $n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$,

n_i – показатель степени переменной x_i

и $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$.

- **Теорема 8**

Коэффициенты полинома в правой части полиномиальной формулы вычисляются по формуле:

$$\boxed{C_{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}}$$

Пример 1

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{r=0}^{n} C_{(n-r)r}\, x_1^{n-r} x_2^{r}$$

$$C_{(n-r)r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = C_n^r,$$

где $n - r + r = n$.

Пример 2

Рассмотрим полиномиальную формулу

$$(x_1 + x_2 + x_3)^{10} = \sum_{n_1+n_2+n_3=10} C_{n_1 n_2 n_3}\, x_1^{n1} x_2^{n2} x_3^{n3}$$

Найдем коэффициент $C_{n_1 n_2 n_3}$ при одночлене $x_1^2 x_2^3 x_3^5$:

$$C_{235} = \frac{10!}{2!3!5!} = 2520$$