Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет безопасности информационных технологий

Дисциплина:

«Теория вероятностей»

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №2

Вариант 18

Выполнил:

Суханкулиев Мухаммет,

студент группы N3246

____

(подпись)

Проверил:

Лимар Иван Александрович,

ассистент, НОЦ математики

____

(отметка о выполнении)

____

(подпись)

Санкт-Петербург

2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЗАДАЧА 18.

1.1 Краткая теория

Для того чтобы функция $f(x)$ была плотностью распределения вероятностей, она должна удовлетворять следующим условиям:

1. $f(x) \geq 0$ для всех x.
2. Интеграл функции на всей области определения должен равняться 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

1. Математическое ожидание $\boldsymbol{E}X$:

$$\boldsymbol{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

2. Дисперсия $\boldsymbol{D}X$:

$$\boldsymbol{D}X = \boldsymbol{E}X^2 - (\boldsymbol{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\boldsymbol{E}X)^2$$

3. Мода – любая точка максимума $f(mod(X))$:

$$f'(mod(X)) = 0$$

4. Медиана такое значение $med(X)$ с.в. X, которое является корнем уравнения $F\big(med(X)\big) = 0{,}5$:

$$\int_{0}^{med(X)} f(x)dx = 0.5$$

1.2 Постановка задачи

Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \lambda(3x - x^2), & x \in (0, 3); \\ 0, & x \geq 3. \end{cases}$$

Найти: а) при каком λ функция $f(x)$ является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины X;

б) математическое ожидание $\boldsymbol{E}X$. дисперсию $\boldsymbol{D}X$, моду $mod(X)$ и медиану $med(X)$.

1.3 Ход работы

а) Чтобы найти λ нужно вычислить интеграл:

$$\int_0^3 (3x - x^2)dx = (\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^3 = \frac{3\cdot 3^2}{2} - \frac{3^3}{3} - \frac{3\cdot 0^2}{2} + \frac{0^3}{3} = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}.$$

Тогда:

$$\lambda \cdot \frac{9}{2} = 1 => \lambda = \frac{2}{9}.$$

Значит функция $f(x)$ будет плотностью распределения при $\lambda = \frac{2}{9}$.

б)

$$\boldsymbol{E}X = \int_0^3 x(\frac{2}{9}(3x - x^2))dx = \frac{2}{9}\int_0^3 (3x^2 - x^3)dx = \frac{2}{9}x^3 - \frac{x^4}{18}\Big|_0^3 = 6 - \frac{81}{18} = \frac{3}{2}.$$

$$\boldsymbol{D}X = \int_0^3 x^2(\frac{2}{9}(3x - x^2))dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{2}{9}\int_0^3 (3x^3 - x^4)dx - \frac{9}{4} = \frac{x^4}{6} - \frac{2x^5}{45}\Big|_0^3 - \frac{9}{4} =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{54}{5} - \frac{9}{4} = \frac{9}{20}.$$

$$f'(mod(X)) = \left(\frac{2}{9}(3mod(X) - mod(X)^2)\right)' = \left(\frac{2}{3}mod(X) - \frac{2}{9}mod(X)^2\right)' =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{9}mod(X)$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{9}mod(X) = 0$$

$$mod(X) = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{2}$$

Мода равна математическому ожиданию, так как распределение симметрично вокруг точки $x = \frac{3}{2}$.

Проверка:

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) < 0$$

$$f''(x) = -\frac{4}{9} => \text{условие выполняется}$$

Так же медиана должна быть равна математическому ожиданию.

$$\int_0^{med(X)} (\frac{2}{9}(3x - x^2))dx = 0.5$$

$$\frac{3}{9}x^2 - \frac{2x^3}{27}\Big|_0^{med(X)} = 0.5$$

$$9med(X)^2 - 2med(X)^3 = 13.5$$

$$\frac{18med(X)^2 - 4med(X)^3 - 27}{2} = 0$$

$$-4med(X)^3 + 6med(X)^2 + 12med(X)^2 - 18med(X) + 18med(X) - 27 = 0$$

$$(2med(X) - 3)(2med(X)^2 - 6med(X) - 9) = 0$$

$$\begin{cases} 2med(X) - 3 = 0 \\ 2med(X)^2 - 6med(X) - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} med(X) = \frac{3}{2} \\ med(X) = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Решение должно входить в диапазон } (0, 3) \Rightarrow\ med(X) = \frac{3}{2}$$

Такое совпадение моды, медианы и математического ожидания — особенность данного распределения и не является общим правилом для всех распределений.

1.4 Ответ

а) При $\lambda = \frac{2}{9}$ функция $f(x)$ является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины X.

б) $\boldsymbol{E}X = mod(X) = med(X) = \frac{3}{2} = 1.5$, $\boldsymbol{D}X = \frac{9}{20}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ИТМО ТВ 2024-25 – Google Диск
2. И. А. Лимар – Теория вероятностей и математическая статистика – pre-α version.