Практическое занятие 7

Законы распределения непрерывных с.в.

Литература

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. М.: Издательство «Юрайт», 2016.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Высш. шк., 2000.
3. Решетов С.В., Суслина И.А. Задачи для самостоятельного решения по теории вероятностей и математической статистике – СПб: НИУ ИТМО, 2014.

Равномерное распределение

С.в. X имеет равномерное распределение на отрезке $[a,\ b]$, если ее плотность распределения:

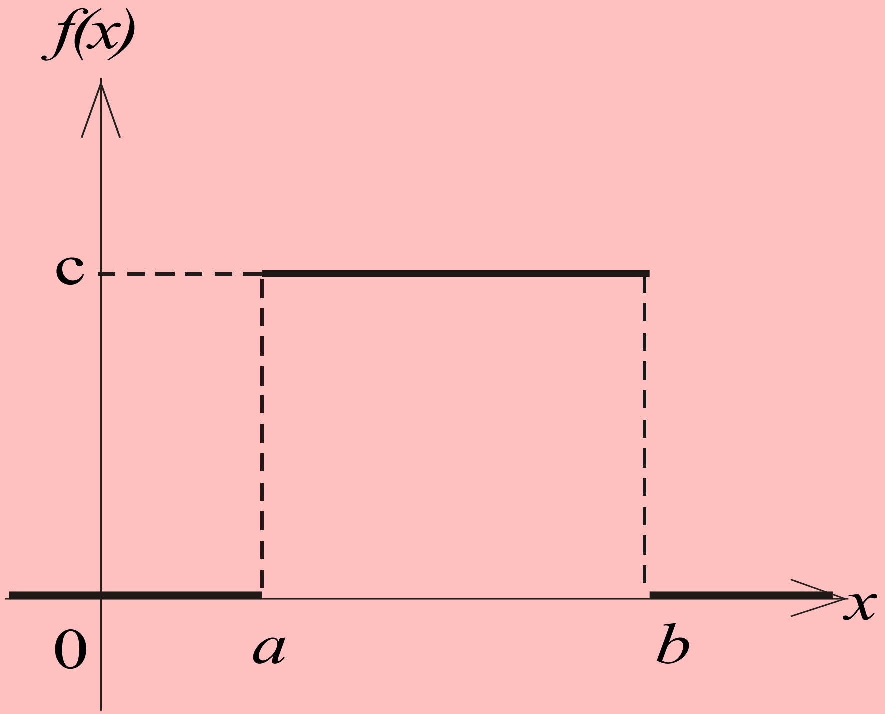
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a \le x \le b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} x \ \Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Обозначение: $X \sim U(a,b)$

Кривая равномерного распределения



$$c = \frac{1}{b-a}$$

Числовые характеристики равномерного распределения

- математическое ожидание $m_x = \frac{a+b}{2}$
- дисперсия $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$
- среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Показательное (экспоненциальное) распределение

С.в. X имеет показательное распределение с параметром $\lambda>0$, если ее плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & при\ x\geq 0 \end{cases}$$

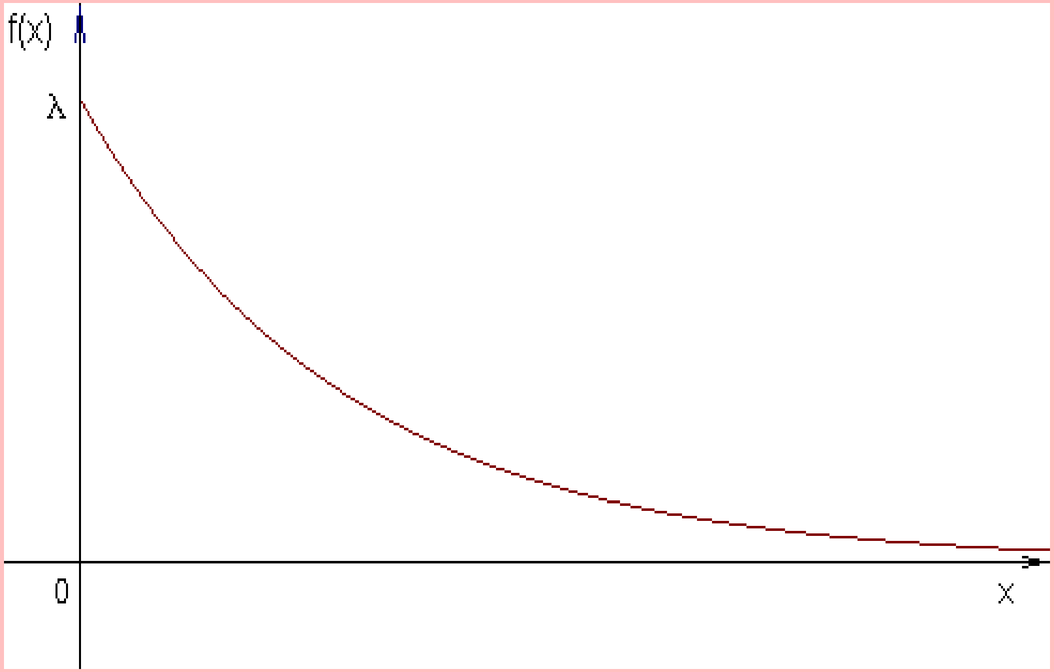
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lambda\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx=$$

$$=\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,d(-\lambda x)=-e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}=$$

$$=-\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}}-e^{0}\right)=1$$

Обозначение: $X\sim Exp(\lambda)$

Кривая показательного распределения



Числовые характеристики показательного распределения

- математическое ожидание $m_x = \frac{1}{\lambda}$
- дисперсия $D_x = \frac{1}{\lambda^2}$
- среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x = \frac{1}{\lambda}$$

Пример:

Пусть $t_0=0$ – момент начала работы элемента, t – момент отказа.

С.в. T – длительность времени безотказной работы радиоэлектронного оборудования.

Вероятность отказа элемента за время длительностью t:

$$F(t) = P(T<t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

где $\lambda>0$ – *интенсивность отказов* (среднее число отказов в единицу времени).

Функция надежности – функция, определяющая *вероятность безотказной работы* элемента за время t:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

Показательный закон надежности:

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Гамма-распределение

С.в. X имеет гамма-распределение с параметрами $\lambda>0$ и $k>0$, если ее плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{\lambda^k}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-\lambda x}, & x>0 \end{cases}$$

где $\Gamma(k)=\int\limits_0^\infty x^{k-1}e^{-x}dx$ – гамма-функция Эйлера.

Обозначение: $X\sim\Gamma(\lambda,k)$

Свойства гамма-функции

1. $\Gamma(k+1) = k\cdot\Gamma(k), \quad \Gamma(1)= 0!=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma(k+1)=k!$, если k – целое неотрицательное число.

2. $\Gamma(k+\frac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}(2k-1)!!}{2^k}$,
где $(2k–1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k–1)$

Функция распределения определяется выражением:

$$F(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^x t^{k-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(k, \lambda x)}{\Gamma(k)}, \qquad x \geq 0$$

где $\Gamma(k, x) = \int_0^x t^{k-1} e^{-t} dt$, $k>0$ – неполная гамма-функция.

При целом $k>1$ гамма-распределение превращается в распределение Эрланга порядка k с плотностью распределения:

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

При $k=1$ гамма-распределение превращается в показательное распределение с параметром λ.

Числовые характеристики гамма-распределения

- математическое ожидание $m_x = \dfrac{k}{\lambda}$
- дисперсия $D_x = \dfrac{k}{\lambda^2}$
- среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}$$