Лекция 4
Непрерывные случайные величины

1. Непрерывная случайная величина и ее закон распределения.
2. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
3. Нормальное распределение. Правило «трех сигм».

ITMO University

1. Непрерывная случайная величина и ее закон распределения

Определение 1

Непрерывной случайной величиной называется с.в., множество возможных значений которой несчетно.

Определение 2

Плотностью распределения (вероятностей) $f(x)$ н.с.в. называется предел отношения вероятностей ее попадания в интервал $(x,\ x+\Delta x)$ к длине Δx этого интервала, если Δx стремится к нулю:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Непрерывная случайная величина – это случайная величина, для которой предел в равенстве существует для любого x, за исключением, быть может, отдельных точек.

График функции $f(x)$ называется кривой распределения.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

$f(x)$ – дифференциальная функция (закон) распределения н.с.в.

Свойства функции $f(x)$

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3. $\boxed{f(x) = F'(x)}$

4. $P(\alpha \leq X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} F'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Следствие:

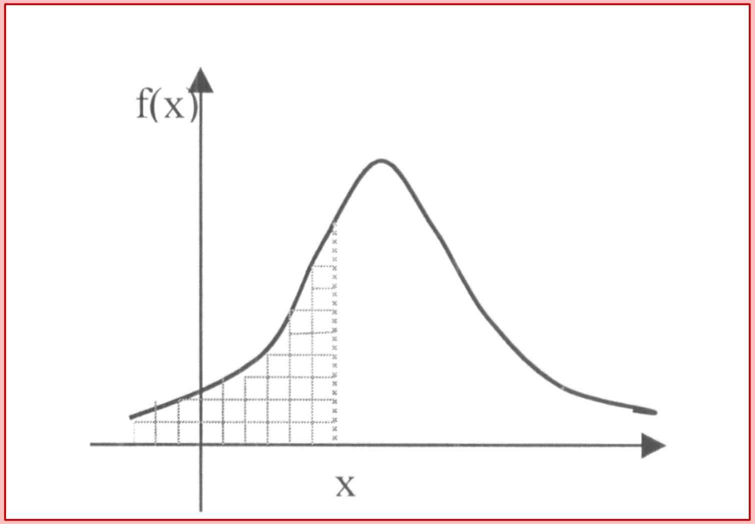
вероятность попадания непрерывной с.в. X в любую, заданную до эксперимента, точку равна нулю:

$$P(X=\alpha) = 0$$

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

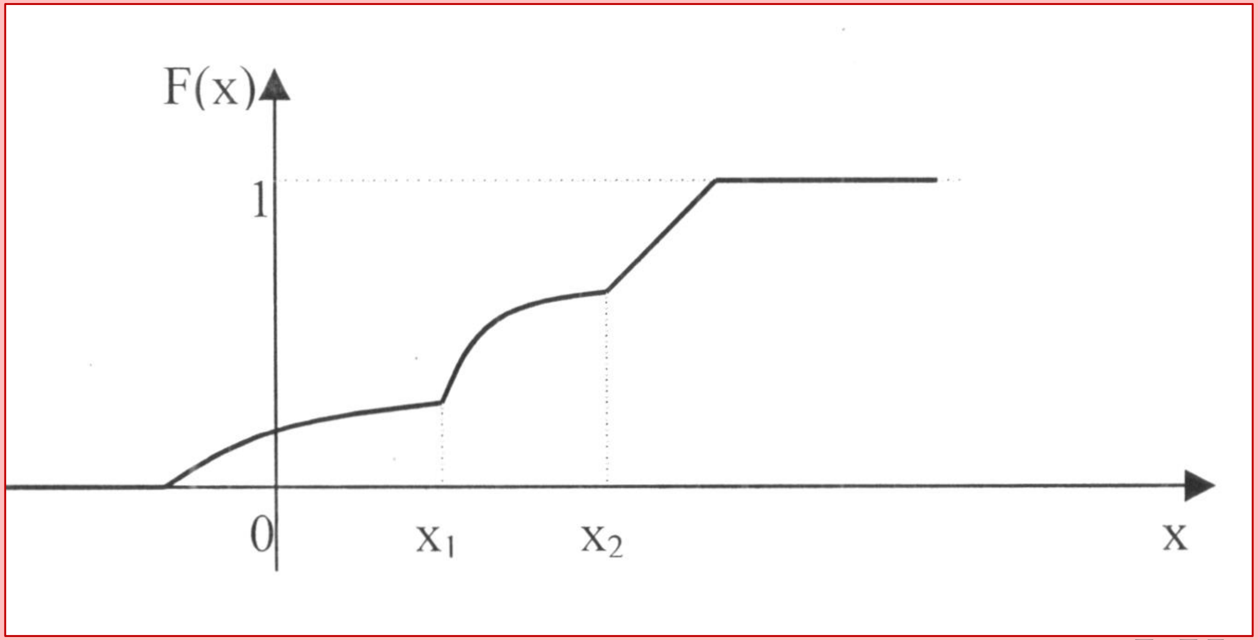
$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy}$$

$F(x)$ – интегральная функция (закон) распределения н.с.в.



Вывод

Функция распределения $F(x)$ *непрерывной с.в.* непрерывна и дифференцируема на $\boldsymbol{R}$, за исключением, быть может, конечного числа точек.



Стандартные абсолютно непрерывные распределения

- Равномерное на $[a, b]$
- Экспоненциальное (показательное) с параметром λ
- Нормальное (гауссовское)

2. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

- Математическое ожидание

$$\boxed{m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx}$$

При этом предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно;

в противном случае м.о. не существует.

Меры положения

- Мода – любая точка максимума $f(x)$.

  Главное значение моды – точка глобального максимума $f(x)$.

  Обозначение: x_{mod} , $mod(X)$

- Медиана – такое значение x_{med} с.в. X, которое является корнем уравнения

$$F(x_{med}) = \frac{1}{2}$$

Обозначение: x_{med} , $med(X)$

Замечание:

$$P(X \le x_{med}) = P(X \ge x_{med}) = \frac{1}{2}$$

- Квантиль порядка p – такое значение x_p с.в. X, для которого выполняется

$$F(x_p) = P(X < x_p) = p, \text{ где } p \in (0,1).$$

Замечание:

x_{med} – квантиль порядка $p = \frac{1}{2}$

Меры рассеивания

- Дисперсия н.с.в. X

$$\boxed{D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx}$$

где несобственный интеграл сходится абсолютно;

в противном случае дисперсия не существует.

По свойствам м.о.:

$$D[X] = M\,[\,(X - m_x)^2\,] = M\,[\,X^2 - 2m_x X + m_x{}^2\,] =$$
$$= M\,[\,X^2\,] - 2m_x{}^2 + m_x{}^2 = M\,[\,X^2\,] - m_x{}^2\,.$$

$$D[X] = M\,[\,X^2\,] - m_x{}^2$$

Формула для вычислений:

$$\boxed{D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - m_x^2}$$

Дисперсия с.в. X характеризует среднее значение квадрата разброса (рассеивания) с.в. вокруг своего м.о.

СР

Если $D[X]=0$, то X – случайная величина или детерминированная (не случайная)? Докажите.

- Среднее квадратическое отклонение с.в. X

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

Обозначение: σ_x, $\sigma[X]$.

Моменты высших порядков

С.в. $\dot{X} = X - m_x$ называется **центрированной** с.в.

- Число $M[X^k]$ называется k–**тым моментом** с.в. X

при $k=1$ имеем m_x – математическое ожидание с.в. X

- Число $M[\,|X|^k\,]$ называется **абсолютным** k**-тым моментом** с.в. X

- Число $M[\dot{X}^k]$ называется центральным k-тым моментом с.в. X

  при $k=1$ имеем $M[\dot{X}]=M[X-m_x]=0$

  при $k=2$ имеем $M[(X-m_x)^2]=D_x$ –

дисперсию с.в. X

- Число $M[|\dot{X}|^k]$ называется центральным абсолютным k–тым моментом с.в.