ОБЩАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

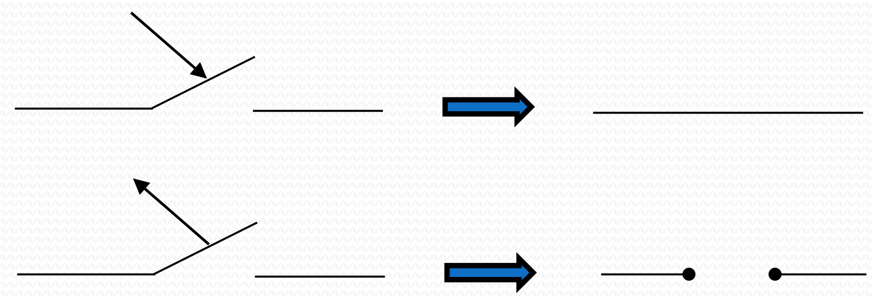
Расчет переходных процессов в цепях первого порядка

Никитина Мария Владимировна
mvnikitina@itmo.ru
Кононова Мария Евгеньевна
maria.kononova@itmo.ru

Санкт-Петербург - 2021

Алгоритм расчета **классическим методом**

1. Составить цепь, сложившуюся после коммутации. Цепь формируется из исходной путем замены



Используя законы Ома, Кирхгофа, электромагнитной индукции и т.д. составить систему дифференциальных уравнений. Исключением переменных свести систему к ***неоднородному*** дифференциальному уравнению (относительно i_L либо u_C) вида

$$B_0 \frac{d^n a}{dt^n} + B_1 \frac{d^{n-1} a}{dt^{n-1}} + \ldots + B_{n-1} \frac{da}{dt} + B_n a = C$$

Алгоритм расчета **классическим методом**

2. Решить ***неоднородное*** дифференциальное уравнение, т.е. определить i_L либо u_C

Решение уравнения ищут в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного дифференциального уравнения $a = a_{уст} + a_{св}$

Частное решение $a_{уст}$ определяют, используя методы расчёта цепей в установившемся режиме.

Общее решение уравнения $a_{св}$ определяется путем решения ***однородного*** уравнения

$$B_0 \frac{d^n a}{dt^n} + B_1 \frac{d^{n-1} a}{dt^{n-1}} + \ldots + B_{n-1} \frac{da}{dt} + B_n a = 0$$

Алгоритм расчета **классическим методом**

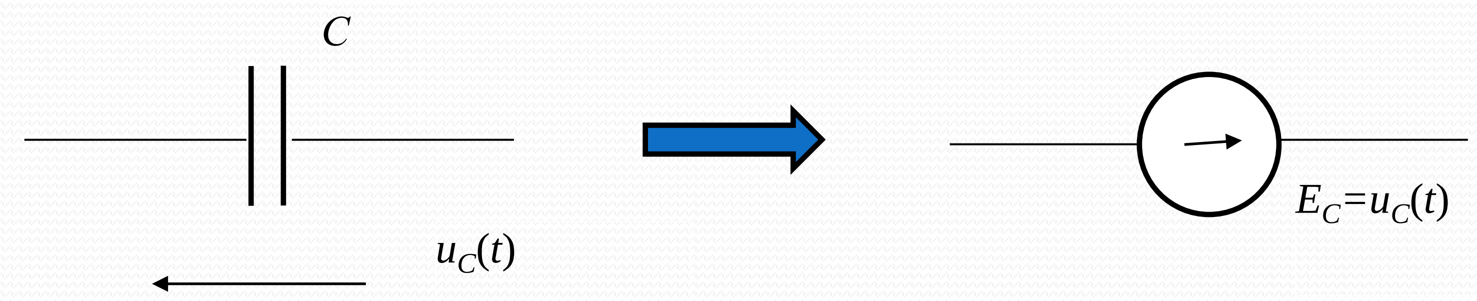
и представляет собой

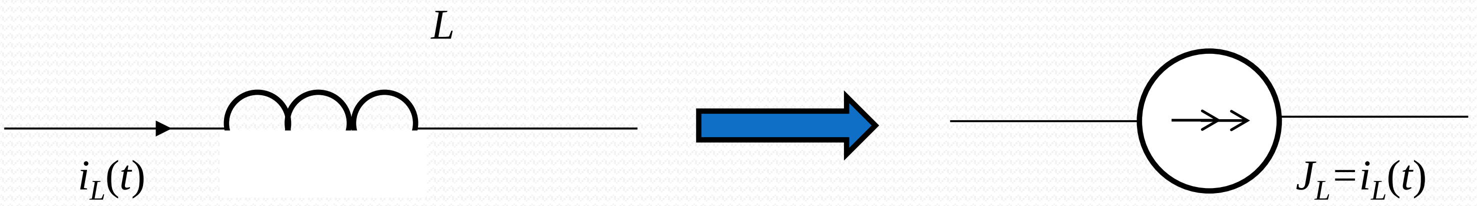
$$a_{\text{св}} = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}$$

где p_k – k-ый корень характеристического уравнения, составленного путем замены в ***однородном*** уравнении производных на p^k, k – порядок соответствующей производной.

Алгоритм расчета **классическим методом**

3. Для отыскания иных (кроме найденной) величин в цепи, сложившейся после коммутации, заменяют

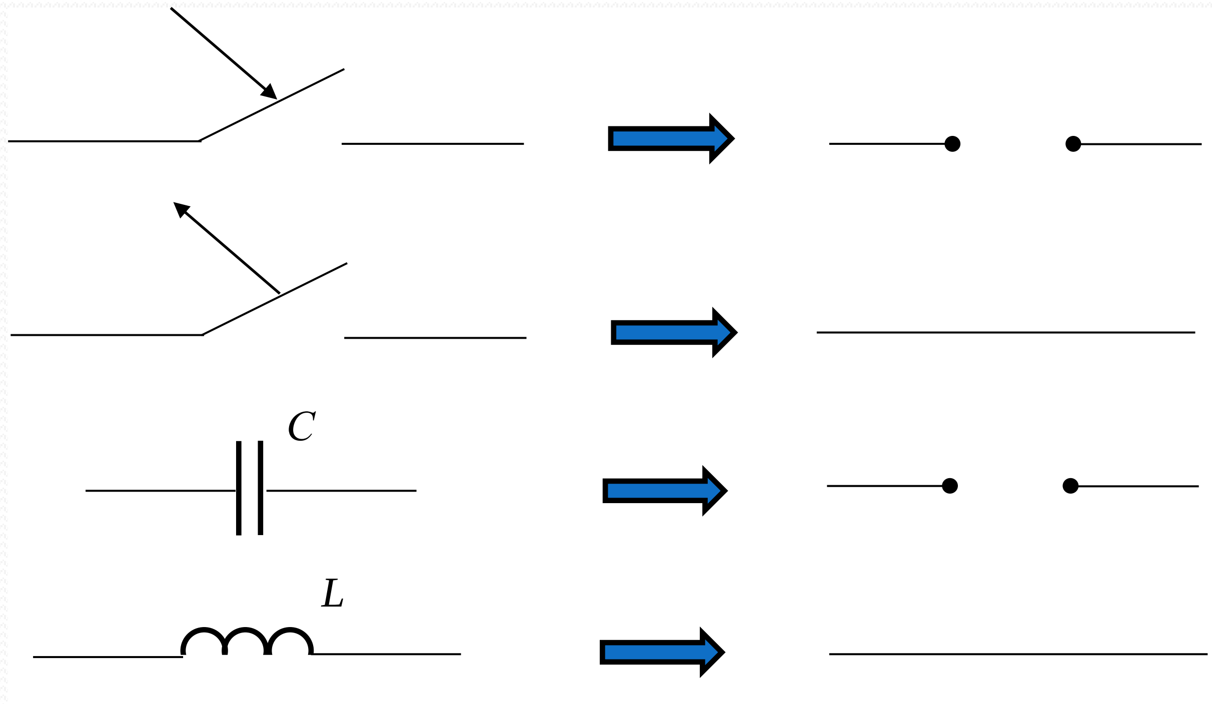




и используя законы Ома, Кирхгофа, электромагнитной индукции и т.д. определяют требуемые токи и напряжения.

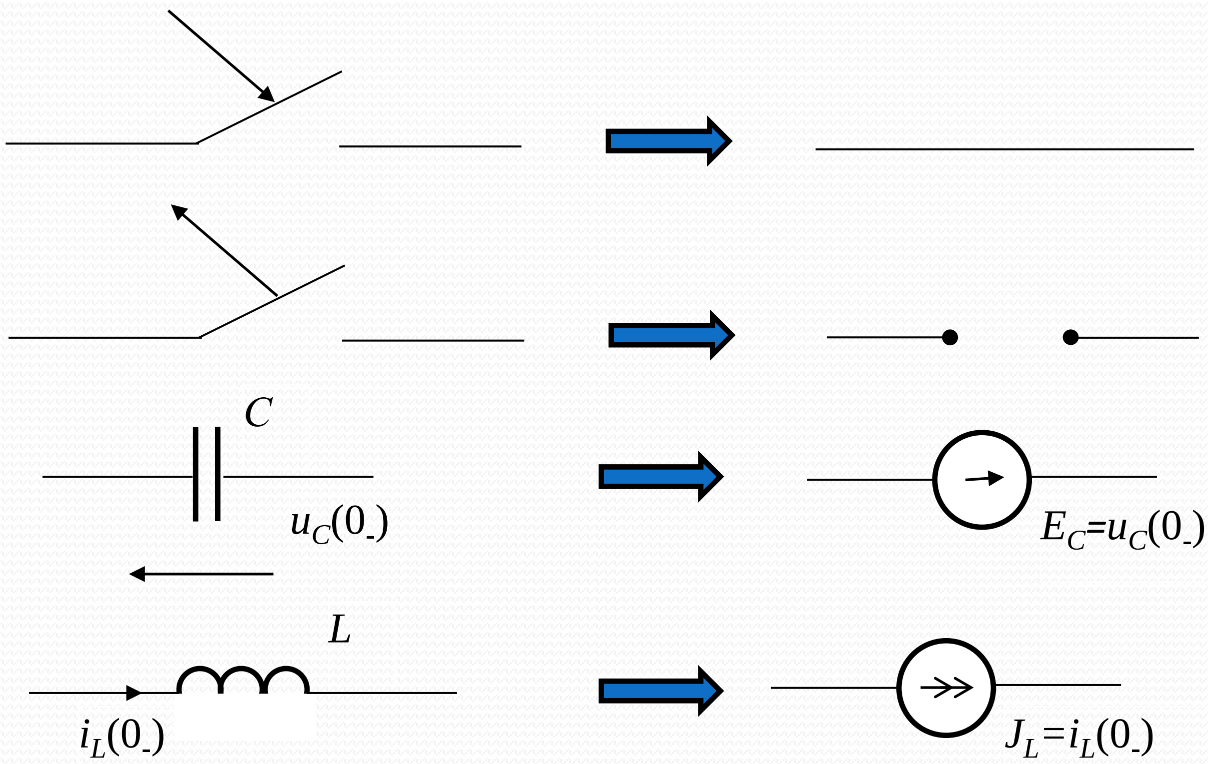
Алгоритм расчета ***упрощенным*** **классическим методом**

1. Составить цепь, сложившуюся **ДО** коммутации и определить значения токов через индуктивные элементы $i_L(0_-)$ и значения напряжений на емкостных элементах $u_C(0_-)$. Цепь формируется из исходной путем замены



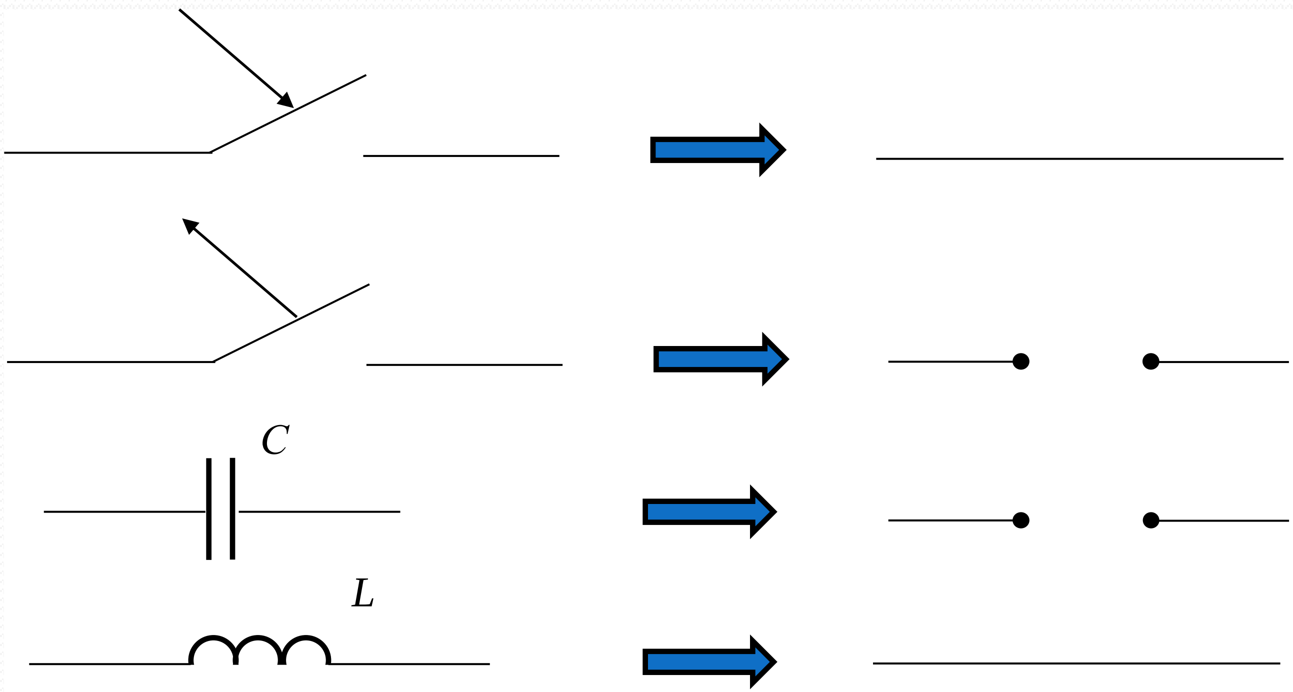
Алгоритм расчета ***упрощенным*** **классическим методом**

2. Составить цепь, сложившуюся **В МОМЕНТ** коммутации и определить значения требуемых величин $x(0)$. Цепь формируется из исходной путем замены



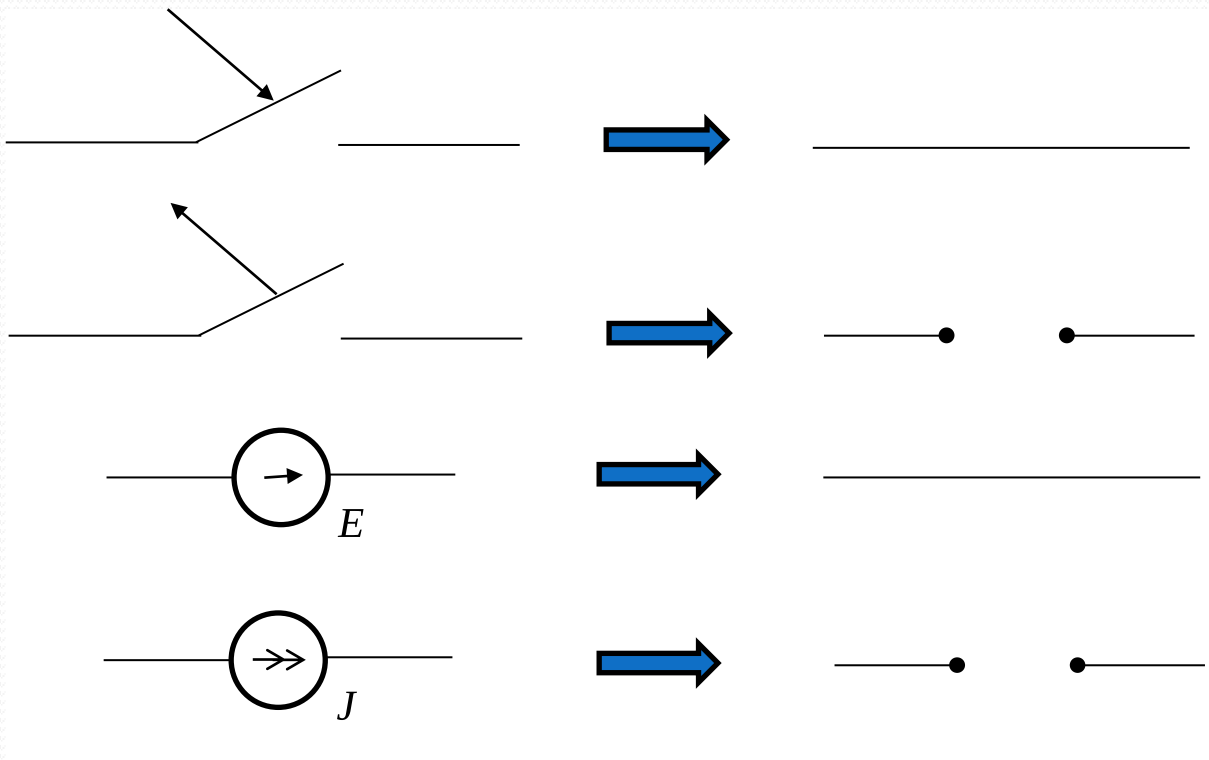
Алгоритм расчета ***упрощенным*** **классическим методом**

3. Составить цепь, сложившуюся **ПОСЛЕ** коммутации и определить значения требуемых величин $x(\infty)$. Цепь формируется из исходной путем замены



Алгоритм расчета ***упрощенным*** **классическим методом**

4. Составить пассивную цепь и определить постоянную времени цепи (τ) как $\tau = L/R_э$ или $\tau = CR_э$, где $R_э$ – эквивалентное сопротивление относительно L или C. Цепь формируется из исходной путем замены



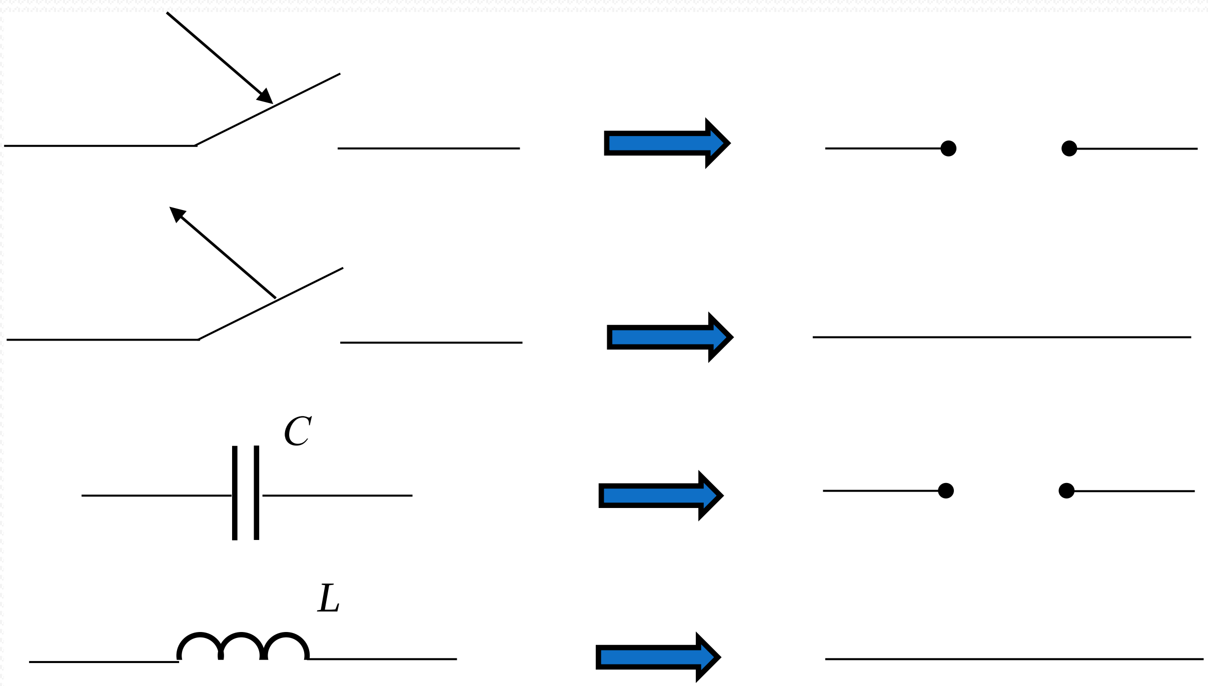
Алгоритм расчета ***упрощенным*** **классическим методом**

5. Определить мгновенные значения требуемых величин.

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)] \cdot e^{-t/\tau}$$

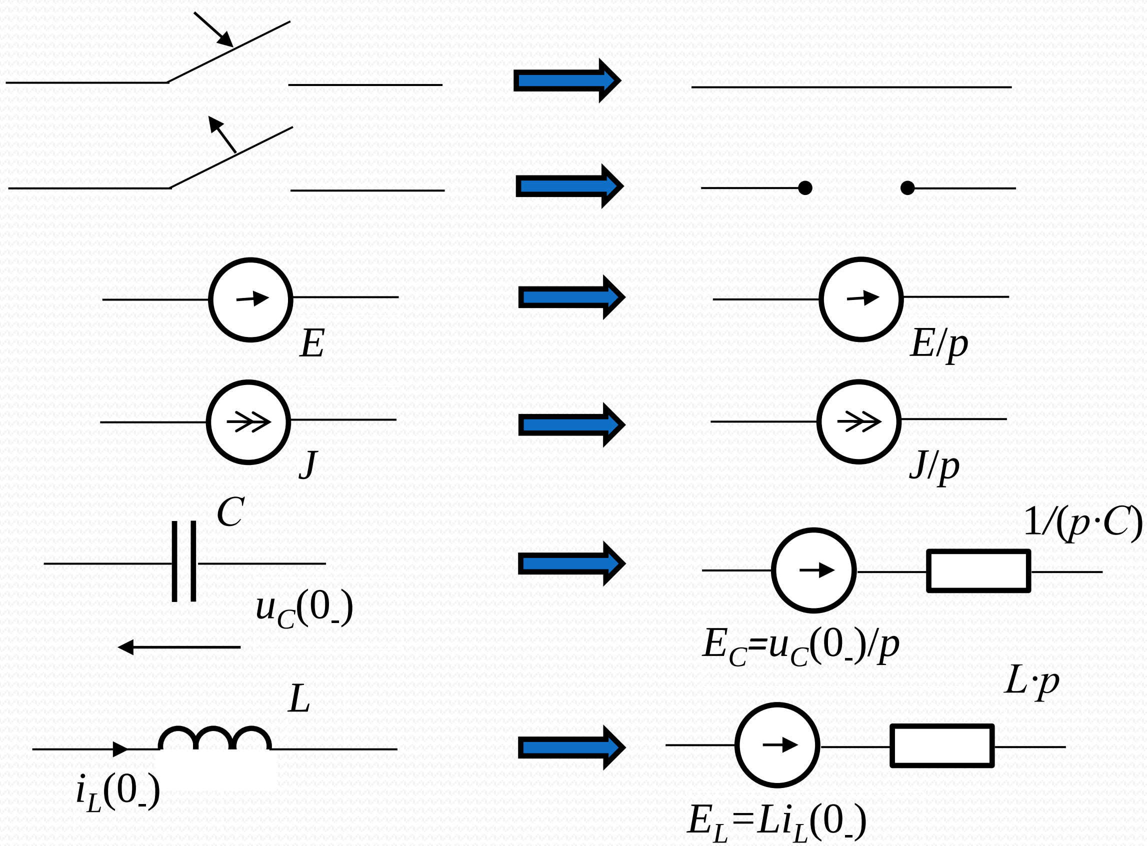
Алгоритм расчета **операторным методом**

1. Составить цепь, сложившуюся **ДО** коммутации и определить значения токов через индуктивные элементы $i_L(0_-)$ и значения напряжений на емкостных элементах $u_C(0_-)$. Цепь формируется из исходной путем замены



Алгоритм расчета **операторным методом**

2. Составить операторную схему замещения и определить операторные изображения $X(p)$ требуемых токов и напряжений. Цепь формируется из исходной путем замены



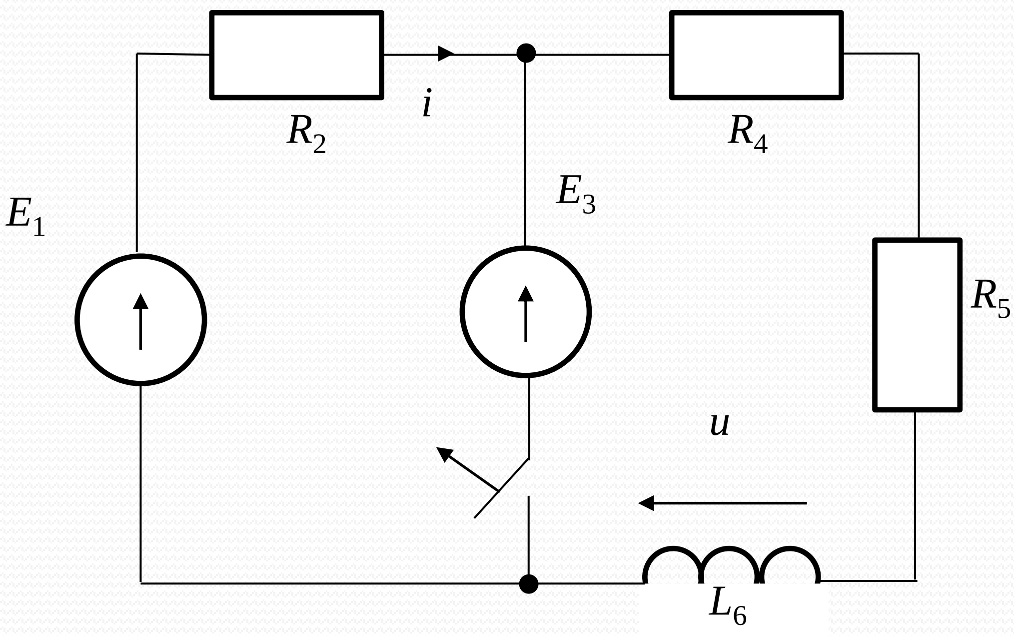
Алгоритм расчета **операторным методом**

3. Перейти от операторных изображений к мгновенным значениям величин, т.е. $X(p) \rightarrow x(t)$.

$$x(t) = X(p) \cdot (p - p_1) \cdot e^{p_1 t}\big|_{p=p_1} +$$
$$+ X(p) \cdot (p - p_2) \cdot e^{p_2 t}\big|_{p=p_2} + \ldots + X(p) \cdot (p - p_n) \cdot e^{p_n t}\big|_{p=p_n}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ корни знаменателя $X(p)$.

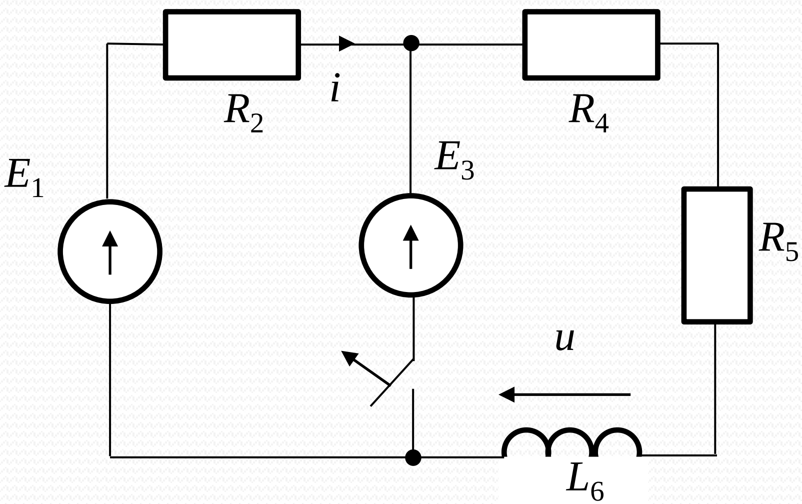
Пример

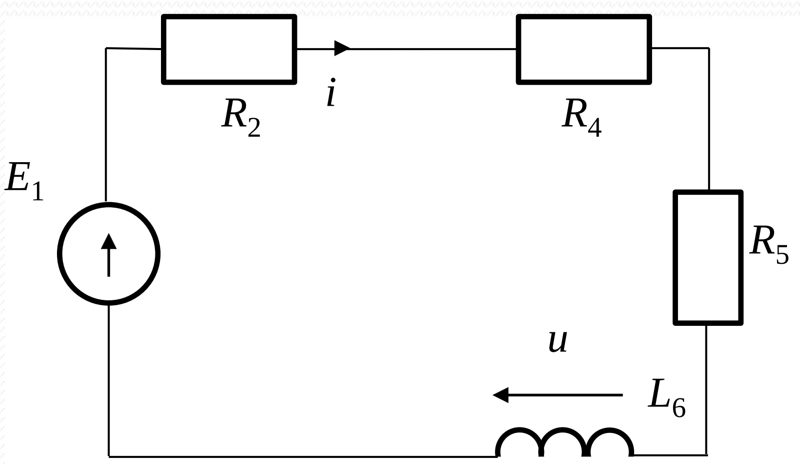


Дано: E=E_1=E_3=90 [В], R=R_2=R_4=R_5=30 [Ом], L=L_6=15 [мГн].

Найти: i, u классическим и операторным методами расчета; построить найденные величины на интервале времени [-τ;4τ].

Пример





Решение:

I.1 Классический метод

1) Составление диф. ур-ния

По ЗКII: $u_{R2}+u_{R4}+u_{R5}+u=E_1$ или

$$R_2\cdot i+R_4\cdot i+R_5\cdot i+L_6(di/dt)=E_1$$

$$(R_2+R_4+R_5)\cdot i+L_6(di/dt)=E_1$$

$$3\cdot R\cdot i+L(di/dt)=E$$

2) Решение диф. ур-ния ищем как

$$i= i_{уст}+i_{св}$$

$i_{уст}$: $$3\cdot R\cdot i_{уст}+L(di_{уст}/dt)=E$$

$$3\cdot R\cdot i_{уст}+L\cdot 0=E$$

$$i_{уст}=E/(3\cdot R)=90/(3\cdot 30)=1\ [А]$$

Пример

$i_{св}$: $3\cdot R\cdot i_{св} + L(di_{св}/dt)=0$ – однородное диф.ур-ние

$3\cdot R + L\cdot p=0$ – характеристическое уравнение

$p = -3\cdot R/L = -3\cdot 30/(15\cdot 10^{-3}) = -6000$ [1/с] – корень хар-го ур-я

$$i_{св} = A\cdot e^{pt} = A\cdot e^{-3\cdot R\cdot t/L} = A\cdot e^{-6000t}$$

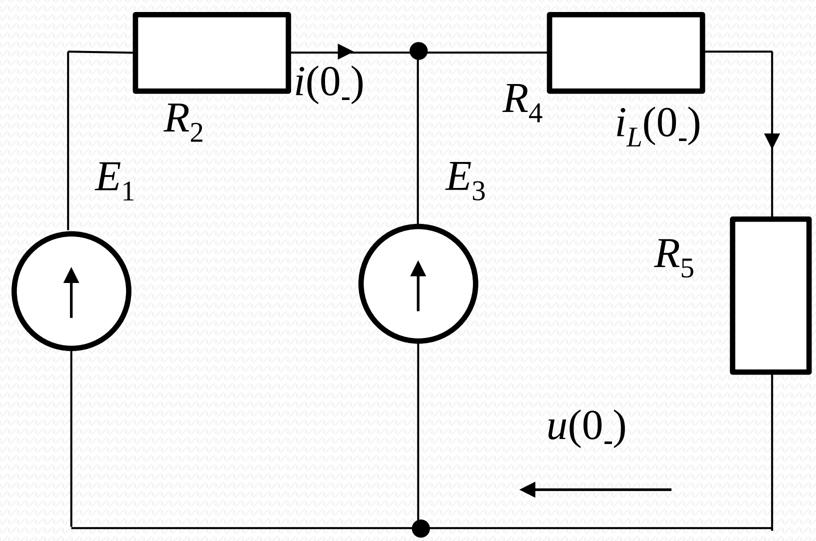
$i(0)=i_L(0)=i_L(0_-)$:

По ЗКII для правого контура

$$(R_4+R_5)\cdot i_L(0_-)=E_3$$

$$i_L(0_-)=E_3/(R_4+R_5)=E/(2\cdot R)=$$

$$=90/(2\cdot 30)=1,5 \text{ [А]}.$$



Пример

A: $\quad i = i_{уст} + i_{св} = E/(3\cdot R) + A\cdot e^{-3\cdot R\cdot t/L}$ и $i(0) = i_L(0) = i_L(0_-) = E/(2\cdot R)$

тогда $i(0) = E/(3\cdot R) + A\cdot e^{-3\cdot R\cdot \mathbf{0}/L} \rightarrow E/(2\cdot R) = E/(3\cdot R) + A$ или

$$A = E/(2\cdot R) - E/(3\cdot R) = E/(6\cdot R) = 90/(6\cdot 30) = 0{,}5\ [\text{А}]$$

Окончательно $i = i_{уст} + i_{св} = E/(3\cdot R) + E/(6\cdot R)\cdot e^{-3\cdot R\cdot t/L} =$

$$= 90/(3\cdot 30) + 90/(6\cdot 30)\cdot e^{-3\cdot 30\cdot t/0{,}015} = = 1 + 0{,}5\cdot e^{-6000\cdot t}\ [\text{А}]$$

3. Определение u

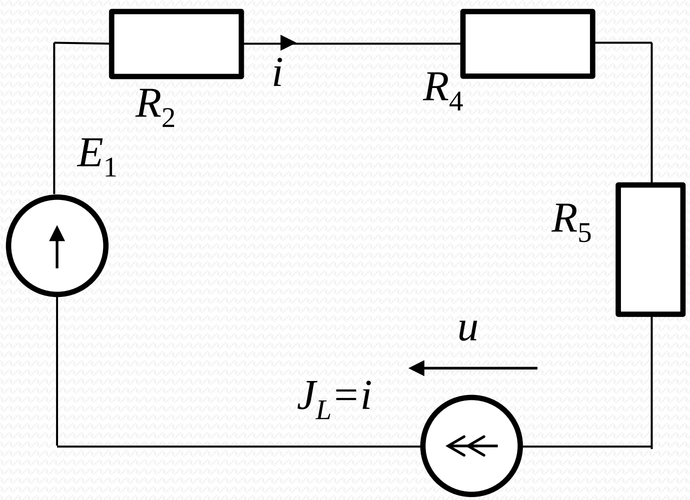
По ЗКІІ: $\quad u + (R_2 + R_4 + R_5)i = E_1$

$$u = E_1 - (R_2 + R_4 + R_5)i = E - 3\cdot R\cdot i =$$

$$= E - 3\cdot R\cdot[E/(3\cdot R) + E/(6\cdot R)\cdot e^{-3\cdot R\cdot t/L}] =$$

$$= E - E - E/2\cdot e^{-3\cdot R\cdot t/L} = -E/2\cdot e^{-3\cdot R\cdot t/L} =$$

$$= -90/2\cdot e^{-3\cdot 30\cdot t/0{,}015} = -45\cdot e^{-6000\cdot t}\ [\text{В}]$$



Пример

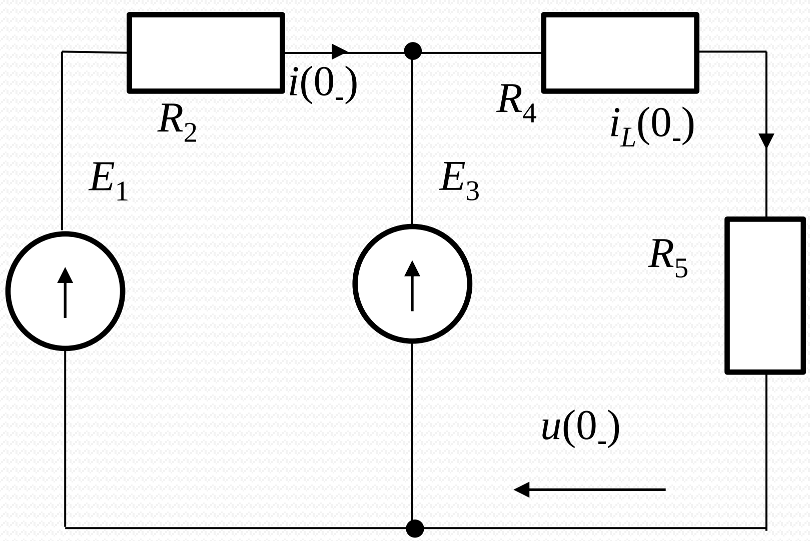
Величина *u* так же может быть определена как

$$u = L(di/dt) = L\cdot E/(6\cdot R)\cdot e^{-3\cdot R\cdot t/L}\cdot(-3\cdot R/L) = -E/2\cdot e^{-3\cdot R\cdot t/L} =$$

$$= -90/2\cdot e^{-3\cdot 30\cdot t/0{,}015} = -45\cdot e^{-6000\cdot t}\ [\text{В}].$$

I.2 Классический (упрощенный) метод

1. $t<0$



По ЗКII для левого контура

$R_2 i(0_-)=E_1\text{-}E_3$

$Ri(0_-)=E\text{-}E \rightarrow i(0_-)=0$ [А]

По ЗКII для правого контура

$(R_4+R_5)i_L(0_-)=E_3$

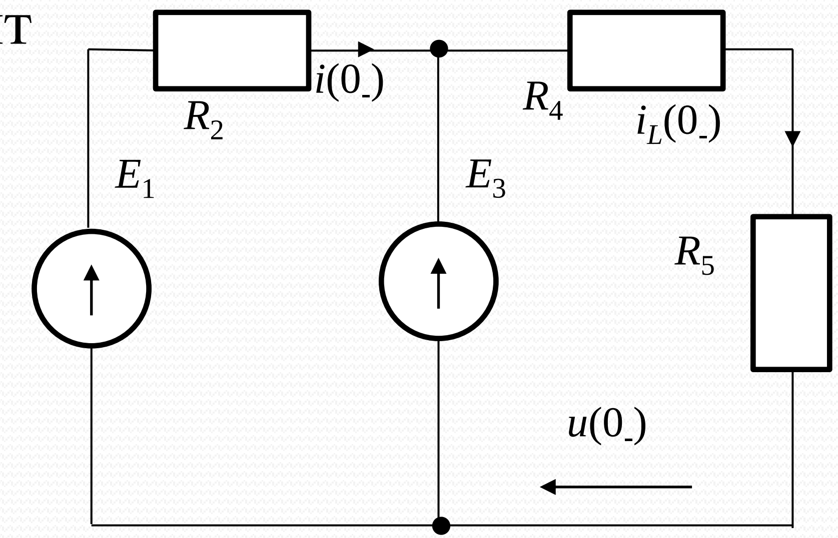
$2Ri_L(0_-)=E \rightarrow i_L(0_-)=E/(2R)=$

$=90/(2\cdot 30)=1{,}5$ [А]

Пример

Поскольку индуктивный элемент заменяется проводником, то

$u(0\text{-})=0$ [В].



2. $t=0$

$i(0_-)=J_L=E/(2R)=90/(2\cdot 30)=1{,}5$ [А]

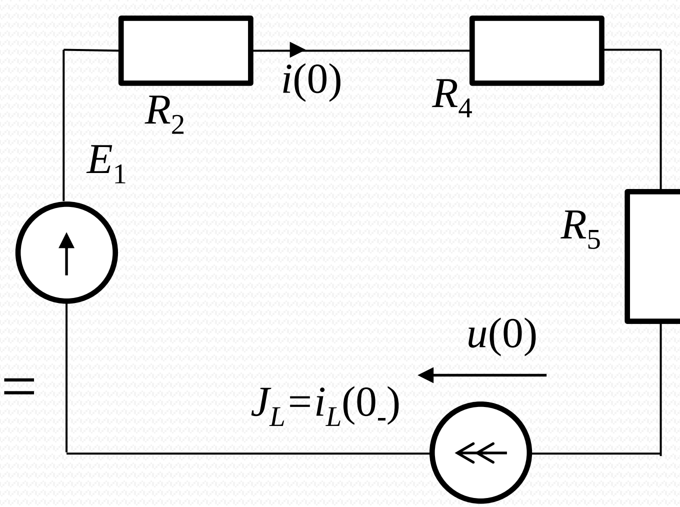
По ЗКII:

$u(0)+(R_2+R_4+R_5)i(0)=E_1$

$u(0)=E_1-(R_2+R_4+R_5)i(0)=$

$=E-3\cdot R\cdot i(0)=E-3\cdot R\cdot E/(2R)=-E/(2R)=$

$=-90/2=-45$ [В]

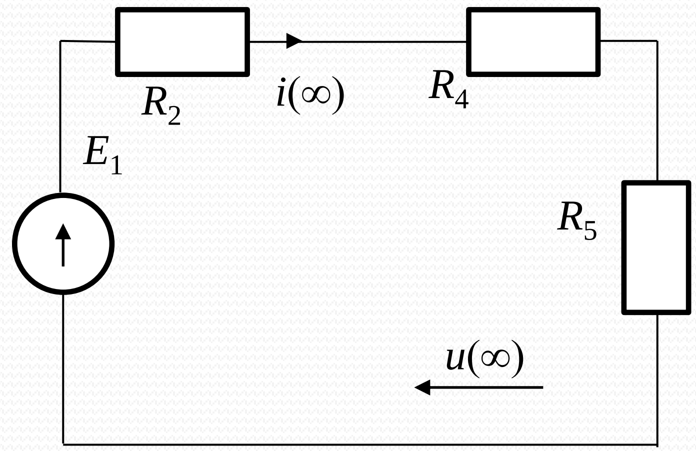


Пример

3. $t>0$

Поскольку индуктивный элемент заменяется проводником, то

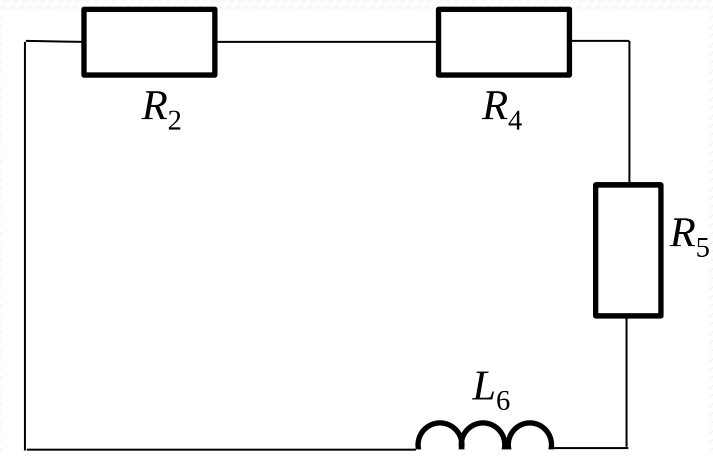
$u(\infty)=0$ [В].



По ЗКII: $(R_2+R_4+R_5)i(\infty) = E_1$

$i(\infty)=E_1/(R_2+R_4+R_5)= E/(3R) = 90/(3{\cdot}30)=1$ [А]

4. τ - ?



$R_{экв}=R_2+R_4+R_5=3R=3{\cdot}30= 90$ [Ом]

Тогда $\tau = L_6/R_{экв} = L/(3R) =$

$= 15{\cdot}10^{-3}/(3{\cdot}30) = 10^{-3}/6$ [с]

$d = 1/\tau = 1/(10^{-3}/6) = 6000$ [1/с]

Пример

5. $x(t)$ - ?

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)]\cdot e^{-t/\tau}$$

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]\cdot e^{-t/\tau} = E/(3R) + [E/(2R) - E/(3R)]\cdot e^{-d\cdot t} =$$

$$= E/(3R) + E/(6R)\cdot e^{-d\cdot t} = 90/(3\cdot 30) + 90/(6\cdot 30)\cdot e^{-6000\cdot t} =$$

$$= 1 + 0{,}5\cdot e^{-6000\cdot t}\ [\text{А}]$$

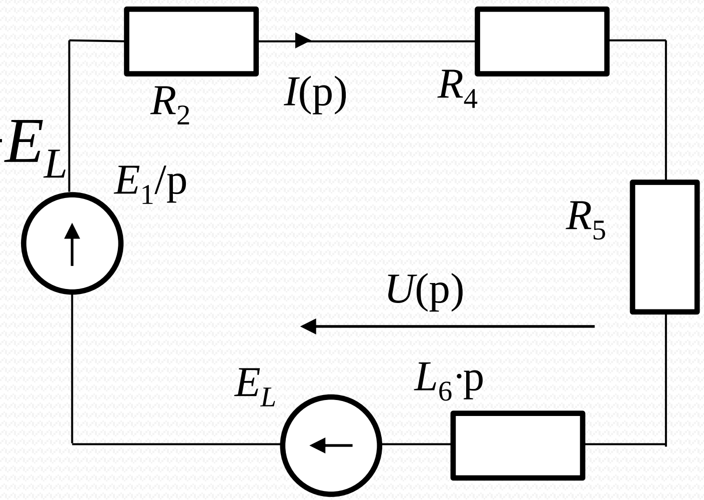
$$u(t) = u(\infty) + [u(0) - u(\infty)]\cdot e^{-t/\tau} = 0 + [-E/2 - 0]\cdot e^{-d\cdot t} =$$

$$= -E/2\cdot e^{-d\cdot t} = -90/2\cdot e^{-6000\cdot t} = -45\cdot e^{-6000\cdot t}\ [\text{В}]$$

Пример

II. Операторный метод

1. $i_L(0_-)=E/(2R)=90/(2\cdot 30)=1{,}5$ [А] (см. классический метод)



2. $E_L=L_6\cdot i_L(0_-)=E\cdot L/(2R)$

По ЗКII: $(R_2+R_4+R_5+L_6\cdot p)\cdot I(p)=E_1/p+E_L$

$I(p)=(E_1/p+E_L)/(R_2+R_4+R_5+L_6\cdot p)$

$I(p)=(E/p+E\cdot L/(2R))/(3R+Lp)=$

$$=\frac{E(2R+Lp)}{2Rp(3R+Lp)}$$

По обобщённому ЗО: $U(p)=L_6pI(p)-E_L=$

$$=\frac{LpE(2R+Lp)}{2Rp(3R+Lp)}-\frac{EL}{2R}=\frac{-ERL}{2R(3R+Lp)}=\frac{-EL}{2(3R+Lp)}$$

Пример

3. $x(t)$ - ?

$$x(t) = X(p)\cdot(p-p_1)\cdot e^{p_1 t}\big|_{p=p_1} +$$

$$+ X(p)\cdot(p-p_2)\cdot e^{p_2 t}\big|_{p=p_2} + \ldots + X(p)\cdot(p-p_n)\cdot e^{p_n t}\big|_{p=p_n}$$

$$i(t) = \frac{E(2R+Lp)}{2Rp(3R+Lp)}(p-0)\cdot e^{p_1 t}\big|_{p=0} +$$

$$+\frac{E(2R+Lp)}{2Rp(3R+Lp)}\left(p-\left(-\frac{3R}{L}\right)\right)\cdot e^{p_2 t}\big|_{p=-\frac{3R}{L}} =$$

$$= \frac{E(2R+L\cdot 0)}{2Rp(3R+L\cdot 0)}(p-0)\cdot e^{0\cdot t} + \frac{E\left(2R+L\left(-\frac{3R}{L}\right)\right)}{2R\left(-\frac{3R}{L}\right)(3R+Lp)}\left(p+\frac{3R}{L}\right)\cdot e^{-\frac{3R}{L}\cdot t} =$$

$$= \frac{E}{3R} + \frac{E}{6R}\cdot e^{-\frac{3R}{L}\cdot t} = 90/(3\cdot 30) + 90/(6\cdot 30)\cdot e^{-3\cdot 30\cdot t/0{,}015} =$$

$$= 1 + 0{,}5\cdot e^{-6000\cdot t}\ [\mathrm{A}]$$

Пример

$$u(t)=\frac{-EL}{2(3R+Lp)}\left(p-\left(-\frac{3R}{L}\right)\right)\cdot e^{p_1 t}\Big|_{p=-\frac{3R}{L}}=$$

$$=\frac{-EL}{2\left(3R+L\left(-\frac{3R}{L}\right)\right)}\left(p+\frac{3R}{L}\right)\cdot e^{-\frac{3R}{L}\cdot t}=\frac{-E}{2}\cdot e^{-\frac{3R}{L}\cdot t}=$$

$$=-90/2\cdot e^{-3\cdot 30\cdot t/0{,}015}=-45\cdot e^{-6000\cdot t}\ [\text{В}]$$

Пример

III. Графики

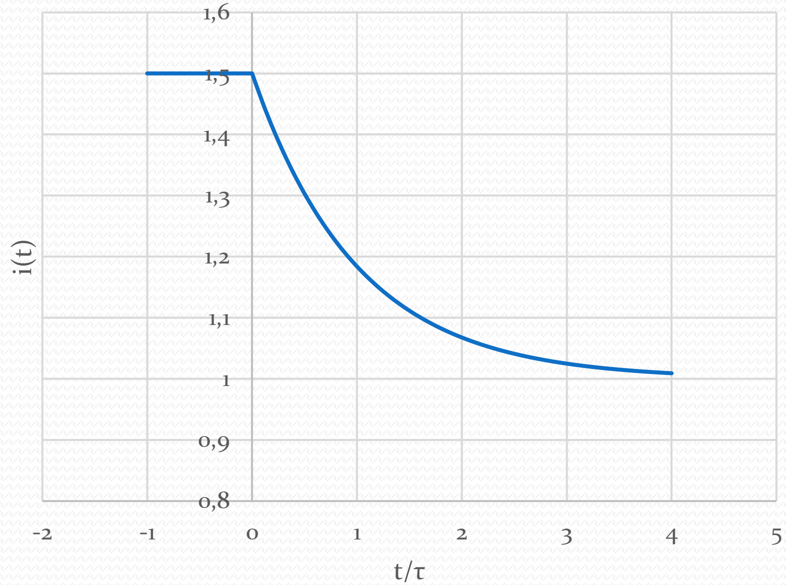
$$x(t)=\begin{cases} x(0_{-}) \text{ если } t<0 \\ x(\infty)+[x(0)-x(\infty)]\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ если } t\geq 0 \end{cases}$$

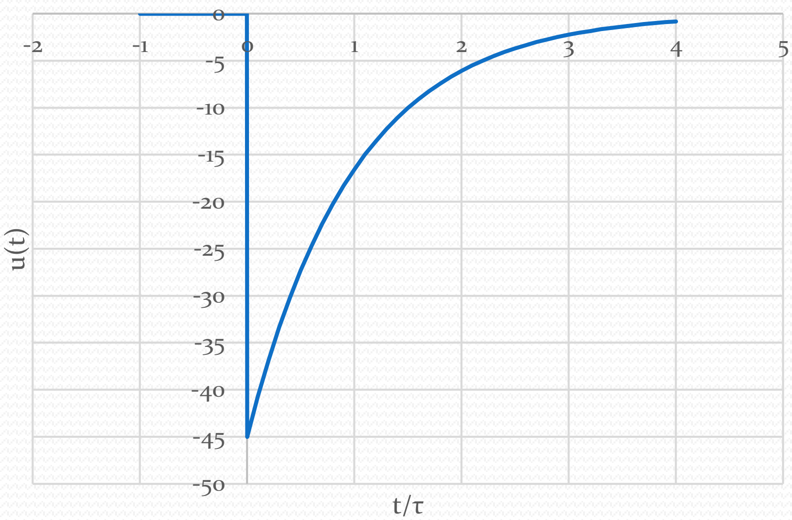
$$i(t)=\begin{cases} 1{,}5 \text{ если } t<0 \\ 1+0{,}5\cdot e^{-6000t} \text{ если } t\geq 0 \end{cases}, \text{ [A]}$$

$$u(t)=\begin{cases} 0 \text{ если } t<0 \\ -45\cdot e^{-6000t} \text{ если } t\geq 0 \end{cases}, \text{ [B]}$$

Пример

t/τ	-1	0	1	2	3	4
$i(t)$	1,5	1,5	1,184	1,066	1,025	1,009
$u(t)$	0	-45	-16,555	-6,09	-2,24	-0,824





Пример

Ответ:

$$i(t)=\begin{cases} 1{,}5 \ \text{если } t < 0 \\ 1 + 0{,}5 \cdot e^{-6000t} \ \text{если } t \geq 0 \end{cases}, \ [A]$$

$$u(t)=\begin{cases} 0 \ \text{если } t < 0 \\ -45 \cdot e^{-6000t} \ \text{если } t \geq 0 \end{cases}, \ [B]$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!