

# 3. Нормальный закон распределения

- (закон Лапласа-Гаусса) наиболее часто встречающийся на практике з.р. непрерывных случайных величин
- является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся (типичных) условиях.



Карл Фридрих Гаусс  
(1777-1855)

© I.Krivtsova  
ITMO University



Пьер-Симон де Лаплас  
(1749-1827)

© I.Krivtsova  
ITMO University

## Определение 3

Непрерывная с.в.  $X$  имеет **нормальный закон распределения**, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R$$

где  $a \in R$ ,  $\sigma > 0$  – параметры нормального распределения.

Обозначение:  $X \sim N(a, \sigma)$

## Свойства функции $f(x)$

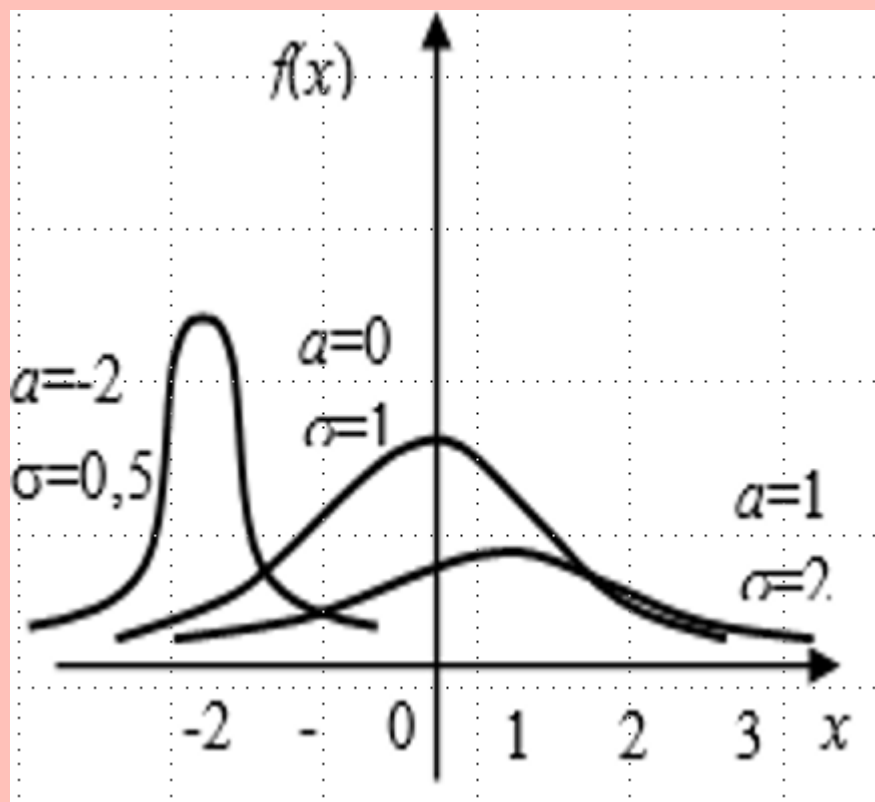
1.  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$f(x-a) = f(-(x-a)) \quad x=a$  ось симметрии  
 $x=a$  точка максимума:  $f_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}};$

$x_1=a-\sigma, \quad x_2=a+\sigma$  точки перегиба



Плотность нормального распределения

## Интеграл Эйлера-Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}$$

# Числовые характеристики нормального закона

## 1. Математическое ожидание:

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx = \left\langle \begin{array}{l} \text{подстановка } y = \frac{x-a}{\sigma}, \\ x = \sigma y + a, \quad dx = \sigma dy \end{array} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + a) e^{-\frac{1}{2}y^2} \sigma dy = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = a. \end{aligned}$$

$$m_x = a$$



## 2. Дисперсия:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - m_x^2$$

$$D_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx - a^2 = \left\langle \begin{array}{l} \text{интегрируем} \\ \text{по частям} \end{array} \right\rangle =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

$$D_x = \sigma^2 \quad \text{и} \quad \sigma_x = \sigma$$

При  $a=0$ ,  $\sigma=1$  нормальный закон называется **стандартным (нормированным)**, его плотность обозначается  $\varphi(x)$  и имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R$$

Функция  $\varphi(x)$  называется **функцией Гаусса**.

Значения функции  $\varphi(x)$  табулированы.

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} dy$$

При  $a=0$ ,  $\sigma=1$  ее обозначают

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

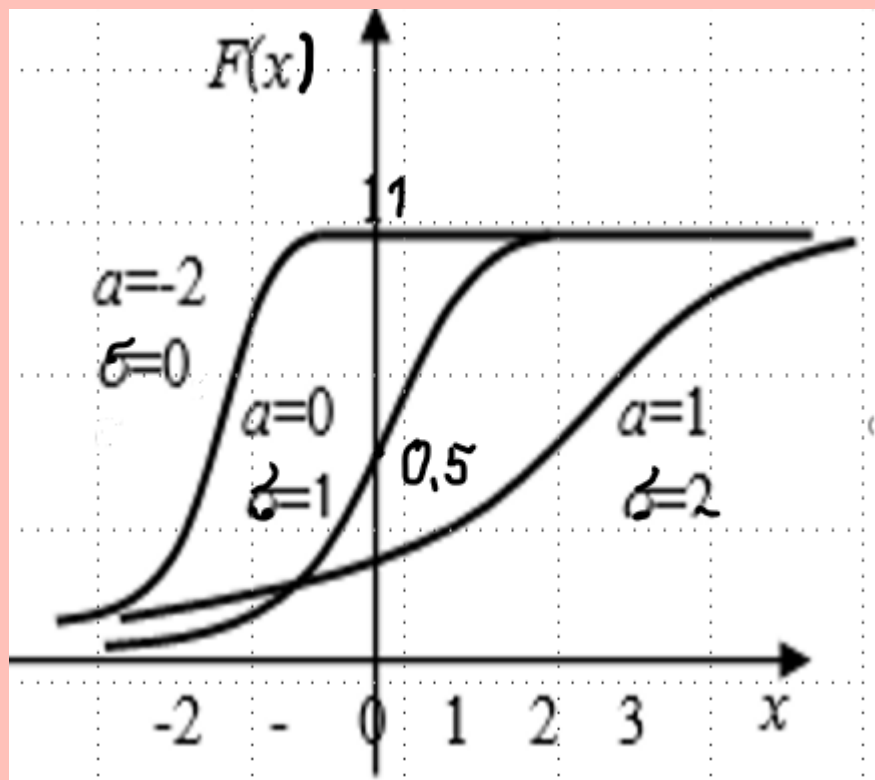
– функция стандартного нормального распределения.

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{2}$$



Функция распределения нормального  
закона

Обозначим

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Функция  $\Phi_0(x)$  называется **функцией Лапласа** или **интегралом вероятностей**.

Значения функции  $\Phi_0(x)$  табулированы.

## Свойства функции Лапласа

1.  $\Phi_0(0)=0$

2.  $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$

3.  $\Phi_0(-\infty) = -0,5$        $\Phi_0(+\infty) = 0,5$

4.  $\Phi(x) = \Phi_0(x) + 0,5$

$$\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

**СР**

Докажите, что

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + 0,5$$



## Теорема

Вероятность попадания с.в.  $X$ ,  
распределенной по нормальному закону, в  
интервал  $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$  вычисляется по  
формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

$$\text{Значения интеграла Лапласа } \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
x	Десятые доли x									
	0		2		4		6		8	
3,0	0,49865		49931		49966		49984		49993	
4,0	49997		49999							

Вероятность отклонения с.в.  $X$ ,  
распределенной по нормальному закону,  
от своего математического ожидания  
на величину  $3\sigma$ :

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi_0(3) \approx 0,9973$$

## Правило «трех сигм»:

если с.в. имеет нормальное распределение, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.