Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет безопасности информационных технологий

Дисциплина:

«Дифференциальные уравнения»

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №2

Вариант 2

Выполнил:

Суханкулиев Мухаммет,

студент группы N3246

(подпись)

Проверил:

Лучин Александр Юрьевич,

инженер, НОЦ математики

(отметка о выполнении)

(подпись)

Санкт-Петербург

2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЗАДАНИЕ №9

Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающее понижение порядка.

29. $x^4y'' + x^3y' = 4$

Сделаем замену: $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$.

$$x^4z' + x^3z - 4 = 0$$

$$z' + \frac{z}{x} - \frac{4}{x^4} = 0$$

Замена: $z = uv, z' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} - \frac{4}{x^4} = 0$$

$$u\left(\frac{v}{x} + v'\right) + u'v - \frac{4}{x^4} = 0$$

Выберем v так, чтобы выполнялись:

$$\begin{cases} u\left(\frac{v}{x} + v'\right) = 0 \\ u'v - \frac{4}{x^4} = 0 \end{cases}$$

При $u = 0$ найдём решение для:

$$\frac{v}{x} + v' = 0$$

$$v' = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

Интегрируя получаем:

$$lnv = -lnx$$

$$v = \frac{1}{x}$$

Подставив v найдём u:

$$\frac{u'}{x} - \frac{4}{x^4} = 0$$

$$u' = \frac{4}{x^3}$$

Интегрируем:

$$u = -\frac{2}{x^2}$$

Обратная замена $z = uv$:

$$z = \frac{C - \frac{2}{x^2}}{x} = \frac{C}{x} - \frac{2}{x^3}$$

Обратная замена $y' = z$:

$$z = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} - \frac{2}{x^3}$$

$$\int dy = \int \left(\frac{C_1}{x} - \frac{2}{x^3}\right) dx$$

$$\boldsymbol{y = C_1 lnx + \frac{1}{x^2} + C_2}$$

Проверка:

$$y' = \frac{C_1}{x} - \frac{2x}{x^4} = \frac{C_1 x^2 - 2}{x^3}$$

$$y'' = -\frac{C_1}{x^2} - \left(-2 \cdot \frac{3x^2}{x^6}\right) = -\frac{C_1 x^2 + 6}{x^4}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$x^4 \left(-\frac{C_1 x^2 + 6}{x^4}\right) + x^3 \cdot \frac{C_1 x^2 - 2}{x^3} = 4$$

$$-C_1 x^2 + 6 + C_1 x^2 - 2 = 4$$

$$4 = 4$$

$$0 = 0$$

Ответ: Общее решение дифференциального уравнения: $y = C_1 lnx + \frac{1}{x^2} + C_2$.

2 ЗАДАНИЕ №10

Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

29. $\begin{cases} y^3 y'' = y^4 - 16 \\ y(0) = 2\sqrt{2} \\ y'(0) = \sqrt{2} \end{cases}$

Замена $y' = u(x)$. Тогда $y'' = u'(x)u$:

$$y^3 u u' = y^4 - 16$$

$$udu = \frac{y^4 - 16}{y^3} dy$$

Интегрируем:

$$\frac{u^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{8}{y^2} + C_1$$

$$u = \sqrt{C_1 + y^2 + \frac{16}{y^2}}$$

Делаем обратную замену и интегрируем:

$$y' = \sqrt{C_1 + y^2 + \frac{16}{y^2}}$$

Используем начальное условие $y'(0) = \sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \sqrt{C_1 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \frac{16}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}}$$

$$2 = C_1 + 8 + 2$$

$$C_1 = -8$$

Тогда решение задачи Коши для y':

$$y' = \frac{y^2 - 4}{y}$$

Интегрируем:

$$x = \int \frac{dy}{\frac{y^2 - 4}{y}} = \int \frac{y}{y^2 - 4} dy$$

Решение интеграла:

$$\int \frac{y}{y^2-4}dy = \langle \text{подстановка: } v = y^2-4, \frac{1}{2}dv = ydy \rangle =$$
$$= \int \frac{dv}{2v} = \frac{1}{2}\ln v = \langle \text{обратная подстановка} \rangle = \frac{\ln(y^2-4)}{2}$$

$x = \dfrac{\ln(y^2-4)}{2} + C_2$, при этом $y^2 - 4 \geq 1 => y \notin \left(-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\right)$ – соответствует условию

Исключим натуральный логарифм:

$$\sqrt{y^2-4} = C_2 e^x$$
$$y^2 = C_2 e^{2x} + 4$$

Подставим начальное условие $y(0) = 2\sqrt{2}$:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = C_2 e^0 + 4$$
$$C_2 = 4$$

Тогда решение задачи Коши:

$$\boldsymbol{y = \sqrt{4e^{2x}+4}}$$
$$\boldsymbol{x = \frac{\ln(y^2-4)}{2} + 4}$$

Проверка:

$$y'' = \left(\sqrt{4e^{2x}+4}\right)'' = \left(\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}\right)' = \frac{2e^{2x}\cdot 2\sqrt{e^{2x}+1} - \dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}+1}}\cdot 2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}^2} =$$
$$= \frac{2e^{4x}+4e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}(e^{2x}+1)}$$

Подставим в начальное уравнение:

$$(4e^{2x}+4)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2e^{4x}+4e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}(e^{2x}+1)} = (4e^{2x}+4)^{\frac{4}{2}} - 16$$
$$(2^2)^{\frac{3}{2}}(e^{2x}+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2e^{4x}+4e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}(e^{2x}+1)} = (4e^{2x}+4)^2 - 16$$
$$2^3(e^{2x}+1) \cdot \frac{2e^{4x}+4e^{2x}}{e^{2x}+1} = 16e^{4x} + 32e^{2x} + 16 - 16$$
$$16e^{4x} + 32e^{2x} = 16e^{4x} + 32e^{2x}$$
$$0 = 0$$

Ответ: Решение задачи Коши для дифференциального уравнения: $\begin{cases} y = \sqrt{4e^{2x}+4} \\ y(0) = 2\sqrt{2} \\ y'(0) = \sqrt{2} \end{cases}$.

3 ЗАДАНИЕ №11

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения с правой частью специального вида методом неопределённых коэффициентов.

29. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 13\lambda^2 + 12\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 12)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 12$$

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{12x}$$

$$y = \bar{y} + y_0, \text{где } y_0 - \text{частное решение}$$

Кратность правой части уравнения $s = 1$, тогда $y_0 = x(Ax^2 + Bx + C)$.

$$y_0' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y_0'' = 6Ax + 2B$$

$$y_0''' = 6A$$

Подставим в исходное уравнение:

$$6A - 13 \cdot (6Ax + 2B) + 12(3Ax^2 + 2Bx + C) = 18x^2 - 39$$

$$36Ax^2 - 78Ax + 6A + 24Bx - 26B + 12C = 18x^2 - 39$$

Приравняем коэффициенты подобных слагаемых:

$$\begin{cases} 36A = 18 \\ 6C - 26B + 12C = -39 \\ -78A + 24B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{13}{8} \\ C = \dfrac{1}{48} \end{cases}$$

$$y_0 = x\left(\frac{x^2}{2} + \frac{13x}{8} + \frac{1}{48}\right)$$

$$\boldsymbol{y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{12x} + x\left(\frac{x^2}{2} + \frac{13x}{8} + \frac{1}{48}\right)}$$

Проверка:

$$y' = 12C_3 e^{12x} \cdot 1\left(\frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{13}{8}\right)x + C_2 e^x + \frac{x^2}{2} + \frac{13x}{8} + \frac{1}{48} =$$

$$= 12C_3 e^{12x} + C_2 e^x + \frac{x^2}{2} + x\left(x + \frac{13}{8}\right) + \frac{13x}{8} + \frac{1}{48}$$

$$y'' = 12C_3e^{12x} \cdot 12 + 1 \cdot (1+0)x + C_2e^x + 2x + \frac{13}{4} = 144C_3e^{12x} + C_2e^x + 3x + \frac{13}{4}$$

$$y''' = 144C_3e^{12x} \cdot 12 + C_2e^x + 3 \cdot 1 + 0 = 1728C_3e^{12x} + C_2e^x + 3$$

Подставим в исходное уравнение:

$$y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$$

$$1728C_3e^{12x} + C_2e^x + 3 - 13\left(144C_3e^{12x} + C_2e^x + 3x + \frac{13}{4}\right) +$$
$$+12\left(12C_3e^{12x} + C_2e^x + \frac{x^2}{2} + x\left(x + \frac{13}{8}\right) + \frac{13x}{8} + \frac{1}{48}\right) = 18x^2 - 39$$

$$1728C_3e^{12x} + 3C_2e^x - 1872C_3e^{12x} - 13C_2e^x - 39x - \frac{169}{4} +$$
$$+12\left(12C_3e^{12x} + C_2e^x + \frac{3x^2}{2} + \frac{39x}{8} + \frac{1}{48}\right) = 18x^2 - 39$$

$$2C_2e^x + \frac{39x}{2} - 42 + 18x^2 = 18x^2 - 39$$

Здесь уже понятно, что $\exists C_2$ для которого будет выполняться равенство. Докажем:

$$C_2 = \frac{6 - 39x}{4e^x}$$

$$2\left(\frac{6 - 39x}{4e^x}\right)e^x + \frac{39x}{2} - 42 + 18x^2 = 18x^2 - 39$$

$$\frac{6 - 39x + 39x - 84}{2} + 18x^2 = 18x^2 - 39$$

$$-39 + 18x^2 = 18x^2 - 39$$

$$0 = 0$$

Ответ: Общее решение линейного дифференциального уравнения: $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{12x} + x\left(\frac{x^2}{2} + \frac{13x}{8} + \frac{1}{48}\right)$.

4 ЗАДАНИЕ №12

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения с правой частью специального вида методом неопределённых коэффициентов.

29. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$

Аналогично заданию №11:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 9\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$$

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}$$

$s = 1$ => $y_0 = x(Ax + B)e^x$.

$$y_0' = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B)e^x$$

$$y_0'' = (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B)e^x$$

$$y_0''' = (Ax^2 + 6Ax + Bx + 6A + 3B)e^x$$

Подставим в исходное уравнение:

$$(Ax^2 + 6Ax + Bx + 6A + 3B)e^x - (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B)e^x -$$
$$-9\left((Ax^2 + 2Ax + Bx + B)e^x\right) + 9(x(Ax + B)e^x) = (12 - 16x)e^x$$

$$(4A - 8B)e^x - 16Axe^x = (12 - 16x)e^x$$

Приравняем коэффициенты:

$$\begin{cases} 4A - 8B = 12 \\ -16A = -16 \end{cases} => \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$y_0 = x(x - 1)e^x$$

$$\boldsymbol{y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x} + (x - 1)xe^x}$$

Проверка:

$$y' = 3C_2 e^{3x} + xe^x + (e^x + x)(x - 1) + C_1 e^x - 3C_3 e^{-3x} =$$
$$= e^{-3x}(3C_2 e^{6x} + (x^2 + x + C_1 - 1)e^{4x} - 3C_3)$$

$$y'' = -3e^{-3x}(3c_2 e^{6x} + (x^2 + x + C_1 - 1)e^{4x} - 3C_3) +$$
$$+(18C_2 e^{6x} + (2x + 1)e^{4x} + 4(x^2 + x + C_1 - 1)e^{4x})e^{-3x} =$$
$$= e^{-3x}(9C_2 e^{6x} + (x^2 + 3x + C_1)e^{4x} + 9C_3)$$

$$y''' = -e^{-3x}(9C_2 e^{6x} + (x^2 + ex + C_1)e^{4x} + 9C_3) +$$
$$+(54C_2 e^{6x} + (2x + 3)e^{4x} + 4(x^2 + 3x + C_1)e^{4x})e^{-3x} =$$
$$= e^{-3x}(27C_2 e^{6x} + (x^2 + 5x + C_1 + 3)e^{4x} - 27C_3)$$

Подставим в $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$:

$$e^{-3x}(27C_2e^{6x} + (x^2 + 5x + C_1 + 3)e^{4x} - 27C_3) -$$
$$-\left(e^{-3x}(9C_2e^{6x} + (x^2 + 3x + C_1)e^{4x} + 9C_3)\right) -$$
$$-9\left(e^{-3x}(3C_2e^{6x} + (x^2 + x + C_1 - 1)e^{4x} - 3C_3)\right) +$$
$$+9(C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-3x} + (x-1)xe^x) = (12 - 16x)e^x$$

$$e^{-3x}(18C_2e^{6x} + 2xe^{4x} + 3e^{4x} - 36C_3) - e^{-3x}(-18C_2e^{6x} - 18xe^{4x} + 9e^{4x} + 36C_3) =$$
$$= (12 - 16x)e^x$$

$$e^{-3x}(36C_2e^{6x} + 20xe^{4x} - 6e^{4x} - 72C_3) = (12 - 16x)e^x$$

$$C_2 = \frac{1}{2e^{6x}}(e^{4x} - 2xe^{4x} + 4C_3)$$

$$e^{-3x}(36 \cdot \frac{e^{4x} - 2xe^{4x} + 4C_3}{2e^{6x}} \cdot e^{6x} + 20xe^{4x} - 6e^{4x} - 72C_3) = (12 - 16x)e^x$$

$$e^{-3x}(18e^{4x} - 36xe^{4x} + 20xe^{4x} - 6e^{4x}) = (12 - 16x)e^x$$

$$12e^x - 16xe^x = (12 - 16x)e^x$$

$$0 = 0$$

Ответ: Общее решение линейного дифференциального уравнения: $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-3x} + (x-1)xe^x$.

5 ЗАДАНИЕ №13

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения с правой частью специального вида методом неопределённых коэффициентов.

29. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-sinx + 2cosx)$

Аналогично:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

$$D = -16$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i + 2$$

$$\bar{y} = C_1 e^{2x}\sin(2x) + C_2 e^{2x}\cos(2x)$$

$s = 0 \Rightarrow y_0 = e^x(Bsinx + Acosx)$.

$$\begin{aligned} y_0' &= e^x(Bsinx + Acosx) + (Bsinx + Acosx)'e^x = \\ &= e^x(Bsinx + Acosx) + \big(Bcosx + A(-sinx)\big)e^x = \\ &= (B - A)e^x sinx + (B + A)e^x cosx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0'' &= (B - A)(e^x sinx)' + (B + A)(e^x cosx)' = \\ &= (B - A)(e^x sinx + cosx e^x) + (B + A)(e^x cosx - sinx e^x) = \\ &= 2Be^x cosx - 2Ae^x sinx \end{aligned}$$

Подставим в исходное уравнение и упростим:

$$(4B + 2A)e^x sinx + (4A - 2B)e^x cosx = e^x(2cosx - sinx)$$

Приравняем коэффициенты:

$$\begin{cases} 4A - 2B = 2 \\ 4B + 2A = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{10} \\ B = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$y_0 = e^x\left(\frac{3cosx}{10} - \frac{2sinx}{5}\right)$$

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{2x}\sin(2x) + C_2 e^{2x}\cos(2x) - \frac{2e^x sinx}{5} + \frac{3e^x cosx}{10}}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} y' &= C_1(1e^{2x}sin2x + 2e^{2x}cos2x) + C_2(2e^{2x}cos2x - 2e^{2x}sin2x) + \\ &+ \frac{3(e^x cosx - e^x sinx)}{10} - \frac{2(e^x sinx + e^x cosx)}{5} = \\ &= (2C_1 - 2C_2)e^{2x}\sin 2x + (2C_2 + 2C_1)e^{2x}cos2x - \frac{7e^x sinx}{10} - \frac{e^x cosx}{10} \end{aligned}$$

$$y'' = (2C_1 - 2C_2)(2e^{2x}sin2x + 2e^{2x}cos2x) + (2C_2 + 2C_1)(2e^{2x}cos2x - 2e^{2x}sin2x) -$$

$$-\frac{7(e^x sinx+e^x cosx)}{10}-\frac{e^x cosx-e^x sinx}{10}=$$

$$=-8\text{C}_2 e^{2x} sin2x+8C_1 e^{2x} cos2x-\frac{3e^x sinx}{5}-\frac{4e^x cosx}{5}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$-8\text{C}_2 e^{2x} sin2x+8C_1 e^{2x} cos2x-\frac{3e^x sinx}{5}-\frac{4e^x cosx}{5}-$$

$$-4((2C_1-2C_2)e^{2x}\sin 2x+(2C_2+2C_1)e^{2x} cos2x-\frac{7e^x sinx}{10}-\frac{e^x cosx}{10})+$$

$$+8(C_1 e^{2x}\sin(2x)+C_2 e^{2x}\cos(2x)-\frac{2e^x sinx}{5}+\frac{3e^x cosx}{10})=e^x(-sinx+2cosx)$$

$$-8C_2 e^{2x} sin2x+8C_1 e^{2x} cos2x-e^x sinx+2e^x cosx-4e^{2x}(2C_1-2C_2)sin2x-$$
$$-4e^{2x}(2C_2+2C_1)cos2x+8C_1 e^{2x} sin2x+8C_2 e^{2x} cos2x=e^x(-sinx+2cosx)$$

Нетрудно(*) заметить, что при $C_{1,2}=0$:

$$-e^x sinx+2e^x cosx=e^x(-sinx+2cosx)$$

$$0=0$$

Ответ: Общее решение линейного дифференциального уравнения: $y=C_1 e^{2x}\sin(2x)+C_2 e^{2x}\cos(2x)-\frac{2e^x sinx}{5}+\frac{3e^x cosx}{10}$.

6 ЗАДАНИЕ №14

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения с правой частью специального вида методом неопределённых коэффициентов.

29. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30cos10x - 200e^{10x}$

$$\lambda^2 + 100 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 10i$$

$$\bar{y} = C_1 sin10x + C_2 cos10x$$

Вычисляем частное решение для слагаемого $20\sin 10x - 30cos10x$:

$s = 1 \Rightarrow y_0 = x(Bsin10x + Acos10x)$.

$$\begin{aligned} y_0' &= Bsin10x + Acos10x + Bcos10x \cdot (10x)' + A(-sin10x) \cdot (10x)' \cdot x = \\ &= Bsin10x + Acos10x + 10Bcos10x - 10Asin10x \cdot x = \\ &= x(10Bcos10x - 10Asin10x) + Bsin10x + Acos10x = \\ &= (B - 10Ax)sin10x + (10Bx + A)cos10x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0'' &= (B' - 10A(x)')sin10x + cos10x \cdot (10x)'(B - 10Ax) + (10B \cdot (x)' + A')cos10x - \\ &- sin10x \cdot (10x)'(10Bx + A) = 10(B - 10Ax)cos10x - 10(10Bx + A)sin10x + \\ &+ 10Bcos10x - 10Asin10x = -10(10Bx + A)sin10x - 10Asin10x + \\ &+ 10(B - 10Ax)cos10x + 10Bcos10x = \\ &= 20(B - 5Ax)cos10x - 20(5Bx + A)sin10x \end{aligned}$$

$$y_0'' = (-100Bx - 20A)sin10x + (20B - 100Ax)cos10x$$

Подставим в исходное уравнение и упростим:

$$20Bcos10x - 20Asin10x = 20sin10x - 30cos10x$$

Приравняем коэффициенты:

$$\begin{cases} -20A = 20 \\ 20B = -30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$y_0 = x\left(-\frac{3sin10x}{2} - cos10x\right)$$

Вычисляем частное решение для слагаемого $-200e^{10x}$:

$s = 0 \Rightarrow y_1 = Ae^{10x}$.

$$y_1'' = 100Ae^{10x}$$

$$200Ae^{10x} = -200e^{10x}$$

$$200A = -200 \Rightarrow A = -1$$

$$y_1 = -e^{10x}$$

$$y = \bar{y} + y_0 + y_1$$

$$\boldsymbol{y = C_1 sin10x + C_2 cos10x - \frac{3xsin10x}{2} - xcos10x - e^{10x}}$$

Проверка:

$$y' = -\frac{3}{2}(sin10x + 10xcos10x) - (cos10x - 10xsin10x) - 10C_2 sin10x +$$
$$+10C_1 cos10x - 10e^{10x} =$$
$$= \left(10x - \frac{20C_2 + 3}{2}\right) sin10x + (-15x + 10C_1 - 1)cos10x - 10e^{10x}$$

$$y'' = 10sin10x + 10\left(10x - \frac{20C_2 + 3}{2}\right) cos10x -$$
$$-15cos10x - 10(-15x + 10C_1 - 1)sin10x - 100e^{10x} =$$
$$= 10(15x - 10C_1 + 2)sin10x + 10(10x - 10C_2 - 3)cos10x - 100e^{10x}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$10(15x - 10C_1 + 2)sin10x + 10(10x - 10C_2 - 3)cos10x - 100e^{10x} +$$
$$+100\left(C_1 sin10x + C_2 cos10x - \frac{3xsin10x}{2} - xcos10x - e^{10x}\right)$$
$$= 20\sin 10x - 30cos10x - 200e^{10x}$$

$$10(15x - 10C_1 + 2)sin10x + 10(10x - 10C_2 - 3)cos10x - 200e^{10x} +$$
$$+100C_1 sin10x + 100C_2 cos10x - 150xsin10x - 100xcos10x =$$
$$= 20\sin 10x - 30cos10x - 200e^{10x}$$

Подберём $C_1 = \frac{1}{5}, C_2 = -\frac{3}{10}$:

$$-200e^{10x} + 100\left(\frac{1}{5}\right) sin10x + 100\left(-\frac{3}{10}\right) cos10x = 20\sin 10x - 30cos10x - 200e^{10x}$$

$$0 = 0$$

Ответ: Общее решение линейного дифференциального уравнения: $y = C_1 sin10x + C_2 cos10x - \frac{3xsin10x}{2} - xcos10x - e^{10x}$.

7 ЗАДАНИЕ №15

Найдите решение задачи Коши методом неопределённых коэффициентов.

29. $\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 52sin2x \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$
$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$
$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$
$$\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

$s = 0 \Rightarrow y_0 = Acos2x + Bsin2x$

$$y_0' = 2Bcos2x - 2Asin2x$$
$$y_0'' = -4Bsin2x - 4Acos2x$$

Подставим в исходное:

$$-4Bsin2x - 4Acos2x + 5(2Bcos2x - 2Asin2x) + 6(Acos2x + Bsin2x) = 52sin2x$$
$$(2B - 10A)sin2x + (10B + 2A)cos2x = 52sin2x$$
$$\begin{cases} 2B - 10A = 52 \\ 10B + 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -5 \\ B = 1 \end{cases}$$
$$y_0 = sin2x - 5cos2x$$
$$\boldsymbol{y = sin2x - 5cos2x + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}}$$

Подставим начальные условия в общее решение и его производную:

$$\begin{cases} y = sin2x - 5cos2x + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} \\ y' = 10sin2x + 2cos2x - 2C_1 e^{-2x} - 3C_2 e^{-3x} \end{cases}, \text{при} \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ y' = -5 \end{cases} \text{ имеем:}$$

$$\begin{cases} -2 = C_2 + C_1 - 5 \\ -5 = -3C_2 - 2C_1 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$
$$\boldsymbol{y = sin2x - 5cos2x + 2e^{-2x} + e^{-3x}}$$

Проверка:

$$y' = 10sin2x + 2cos2x - e^{-3x}(4e^x + 3)$$
$$y'' = -4sin2x + 20cos2x + e^{-3x}(8e^x + 9)$$

Подставим в исходное уравнение:

$$-4sin2x + 20cos2x + e^{-3x}(8e^x + 9) + 5\big(10sin2x + 2cos2x - e^{-3x}(4e^x + 3)\big) +$$
$$+6(sin2x - 5cos2x + 2e^{-2x} + e^{-3x}) = 52sin2x$$
$$-4sin2x + 20cos2x + 8e^{-2x} + 9e^{-3x} + 50sin2x + 10cos2x - 20e^{-2x} - 15e^{-3x} +$$
$$+6sin2x - 30cos2x + 12e^{-2x} + 6e^{-3x} = 52sin2x$$
$$52sin2x = 52sin2x$$
$$0 = 0$$

Ответ: Решение задачи Коши: $\begin{cases} y = sin2x - 5cos2x + 2e^{-2x} + e^{-3x} \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$.

8 ЗАДАНИЕ №16

Найдите общее решение методом Лагранжа.

29. $y'' - 3y' + 2y = 1 + \frac{1}{1+e^x}$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$
$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$
$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

Метод Лагранжа:

Обозначим $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$

Составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = \dfrac{f(x)}{a_0}, \text{где} \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1 = e^{2x} & y_2 = e^x & a_0 = 1 \\ y_1' = 2e^{2x} & y_2' = e^x & f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} + 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} e^{2x} C_1'(x) + e^x C_2'(x) = 0 \\ 2e^{2x} C_1'(x) + e^x C_2'(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} + 1 \end{cases}$$

Метод Крамера:

$$w = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = -e^{3x}$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \dfrac{1}{e^x + 1} + 1 & e^x \end{vmatrix} = \frac{-e^{2x} - 2e^x}{e^x + 1}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \dfrac{1}{e^x + 1} + 1 \end{vmatrix} = \frac{e^{3x} + 2e^{2x}}{e^x + 1}$$

$$C_1'(x) = \frac{w_1}{w} = \frac{1}{e^x(e^x + 1)} + \frac{2}{(e^x + 1)e^{2x}}$$

$$C_2'(x) = \frac{w_2}{w} = -\frac{2}{e^x(e^x + 1)} - \frac{1}{e^x + 1}$$

Интегрируем:

$$C_1(x) = \int \left(\frac{1}{e^x(e^x + 1)} + \frac{2}{(e^x + 1)e^{2x}} \right) dx = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) + \frac{e^x - 1}{e^{2x}} + C_3$$

$$C_2(x) = \int \left(-\frac{2}{e^x(e^x + 1)} - \frac{1}{e^x + 1} \right) dx = 2\ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) + \ln(e^x + 1) + \frac{2}{e^x} - x + C_4$$

Подставим найденные $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в $\bar{y}$:

$$y = e^{2x}\left(\ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) + \frac{e^x - 1}{e^{2x}} + C_3\right) + e^x\left(2\ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) + \ln(e^x + 1) + \frac{2}{e^x} - x + C_4\right)$$

Можем обозначить $C_3 = C_1, C_4 = C_2$

$$\boldsymbol{y = e^{2x} \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) + 2e^x \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) + e^x \ln(e^x + 1) + C_1 e^{2x} - x e^x + C_2 e^x + e^x + 1}$$

Проверка:

$$y' = e^x(e^x + 1) \cdot \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x)e^x}{(e^x + 1)^2} +$$

$$+2\left(e^x \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + (e^x+1)\cdot\frac{e^x(e^x+1)-(e^x)e^x}{(e^x+1)^2}\right)+$$

$$+\frac{e^{2x}}{e^x+1} + 2e^{2x}\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + e^x\ln(e^x+1) + 2C_1e^{2x} - xe^x + C_2e^x =$$

$$= (2e^{2x}+2e^x)\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + e^x\ln(e^x+1) + 2C_1e^{2x} + (-x+C_2+2)e^x$$

$$y'' = (4e^{2x}+2e^x)\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + e^{-x}(e^x+1)(2e^{2x}+2e^x)\cdot\frac{e^x(e^x+1)-(e^x)e^x}{(e^x+1)^2} +$$

$$+\frac{e^{2x}}{e^x+1} + (-1)e^x + e^x\ln(e^x+1) + 4C_1e^{2x} + (-x+C_2+2)e^x =$$

$$= \frac{1}{e^x+1}\left((4e^{3x}+6e^{2x}+2e^x)\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + (e^{2x}+e^x)\ln(e^x+1) + 4C_1e^{3x}\right.$$

$$\left. + (-x+C_2+4C_1+4)e^{2x} + (-x+C_2+3)e^x\right)$$

Подставим в исходное уравнение:

$$\frac{1}{e^x+1}\left((4e^{3x}+6e^{2x}+2e^x)\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + (e^{2x}+e^x)\ln(e^x+1) + 4C_1e^{3x}\right.$$

$$\left. + (-x+C_2+4C_1+4)e^{2x} + (-x+C_2+3)e^x\right) -$$

$$-3\left((2e^{2x}+2e^x)\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + e^x\ln(e^x+1) + 2C_1e^{2x} + (-x+C_2+2)e^x\right) +$$

$$+2\left(e^{2x}\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + 2e^x\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + e^x\ln(e^x+1) + C_1e^{2x} - xe^x + C_2e^x + e^x + 1\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{1+e^x}$$

$$\frac{1}{e^x+1}\left(-4\ln(e^x+1)\,e^{3x} + xe^{2x} - 6\ln(e^x+1)\,e^{2x} - 2\ln(e^x+1)\,e^x\right.$$
$$+ (e^{2x}+e^x)\ln(e^x+1) - e^{2x} + e^x + 4\ln(e^x+1)\,e^{2x}(e^x+1)$$
$$\left. + \ln(e^x+1)\,e^x(e^x+1) + 2\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{1+e^x}$$

Упростил левую часть с помощью sympy в python

$$\frac{e^x+2}{e^x+1} = 1 + \frac{1}{1+e^x}$$

$$0 = 0$$

Ответ: Общее решение:

$$y = e^{2x}\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + 2e^x\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + e^x\ln(e^x+1) + C_1e^{2x} - xe^x + C_2e^x + e^x + 1$$

9 ЗАДАНИЕ №17

Методом Лагранжа найти решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения.

29. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1+e^{-x}} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Аналогично заданию №16:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$
$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$
$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$
$$\begin{cases} e^{2x} C_1'(x) + e^x C_2'(x) = 0 \\ 2e^{2x} C_1'(x) + e^x C_2'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^{-x}} \end{cases}$$
$$w = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = -e^{3x}$$
$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \dfrac{e^x}{1 + e^{-x}} & e^x \end{vmatrix} = -\frac{e^{3x}}{1 + e^x}$$
$$w = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \dfrac{e^x}{1 + e^{-x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{4x}}{1 + e^x}$$
$$C_1'(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$
$$C_2'(x) = -\frac{e^x}{e^x + 1}$$
$$C_1(x) = \int \frac{1}{e^x + 1} dx = -\ln(e^x + 1) + x + C_3$$
$$C_2(x) = \int -\frac{e^x}{e^x + 1} dx = -\ln(e^x + 1) + C_4$$
$$y = e^{2x}(-\ln(e^x + 1) + x + C_3) + e^x(-\ln(e^x + 1) + C_4)$$
$$y = -e^{2x}\ln(e^x + 1) - e^x \ln(e^x + 1) + xe^{2x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

Подставим начальные условия в общее решение и его производную:

$$y' = -\left(2e^{2x}\ln(e^x + 1) + \frac{e^{2x}}{e^x + 1}(e^x)\right) - \left(e^x \ln(e^x + 1) + \frac{e^x}{e^x + 1}(e^x)\right) +$$
$$+2xe^{2x} + 2C_1 e^{2x} + e^{2x} + C_2 e^x =$$
$$= -2e^{2x}\ln(e^x + 1) - e^x \ln(e^x + 1) - \frac{e^{3x}}{e^x + 1} - \frac{e^{2x}}{e^x + 1} + 2xe^{2x} + 2C_1 e^{2x} + e^{2x} + C_2 e^x$$
$$\begin{cases} y = -e^{2x}\ln(e^x + 1) - e^x \ln(e^x + 1) + xe^{2x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^x \\ y' = -2e^{2x}\ln(e^x + 1) - e^x \ln(e^x + 1) - \dfrac{e^{3x}}{e^x + 1} - \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} + 2xe^{2x} + 2C_1 e^{2x} + e^{2x} + C_2 e^x \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = -2\ln 2 + C_2 + C_1 \\ 0 = -3ln2 + C_2 + 2C_1 \end{cases} => \begin{cases} C_1 = ln2 \\ C_2 = ln2 \end{cases}$$

Тогда:

$$\boldsymbol{y = -e^{2x}\ln(e^x+1) - e^x\ln(e^x+1) + xe^{2x} + e^{2x}ln2 + e^x ln2}$$

Проверка:

$$y' = -\left(2e^{2x}\ln(e^x+1) + \frac{e^{2x}}{e^x+1}(e^x)\right) - \left(e^x\ln(e^x+1) + \frac{e^x}{e^x+1}(e^x)\right) +$$
$$+2xe^{2x} + 2e^{2x}ln2 + e^{2x} + e^x ln2 =$$
$$= (-2e^{2x} - e^x)\ln(e^x+1) + 2(x+\ln 2)e^{2x} + e^x ln2$$

$$y'' = (-4e^{2x} - e^x)\ln(e^x+1) + \frac{e^x(-2e^{2x} - e^x)}{e^x+1} + 2(2(x+ln2)e^{2x} + e^{2x}) + e^x ln2 =$$
$$= -\frac{1}{e^x+1}\cdot$$
$$\cdot((4e^{3x} + 5e^{2x} + e^x)\ln(e^x+1) - 4(x+ln2)e^{3x} + (-4x - 5ln2 - 1)e^{2x} - e^x ln2)$$

Подставим в исходное уравнение:

$$-\frac{1}{e^x+1}\cdot$$
$$\cdot\left((4e^{3x} + 5e^{2x} + e^x)\ln(e^x+1) - 4(x+ln2)e^{3x} + (-4x - 5ln2 - 1)e^{2x} - e^x ln2\right) -$$
$$-3((-2e^{2x} - e^x)\ln(e^x+1) + 2(x+\ln 2)e^{2x} + e^x ln2) +$$
$$+2(-e^{2x}\ln(e^x+1) - e^x\ln(e^x+1) + xe^{2x} + e^{2x}ln2 + e^x ln2) = \frac{e^x}{1+e^{-x}}$$

$$\frac{1}{e^x+1}\Big((-4e^{3x} - 5e^{2x} - e^x)\ln(e^x+1) + 4e^{3x}ln2 + 5e^{2x}ln2 + e^{2x} + e^x ln2$$
$$- 3\ln(e^x+1)(-2e^{3x} - 3e^{2x} - e^x) - 4e^{2x}ln2(e^x+1) - e^x ln2(e^x+1)$$
$$- 2\ln(e^x+1)e^{2x}(e^x+1) - 2\ln(e^x+1)e^x(e^x+1)\Big) = \frac{e^x}{1+e^{-x}}$$

Аналогично, с помощью python упрощена левая часть:

$$\frac{e^{2x}}{e^x+1} = \frac{e^x}{1+e^{-x}}$$
$$0 = 0$$

Ответ: Решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y = -e^{2x}\ln(e^x+1) - e^x\ln(e^x+1) + xe^{2x} + e^{2x}ln2 + e^x ln2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ - О.И. Брагина, Т.Ф. Панкратова, А.И. Попов, И.Ю. Попов, А.В. Рябова