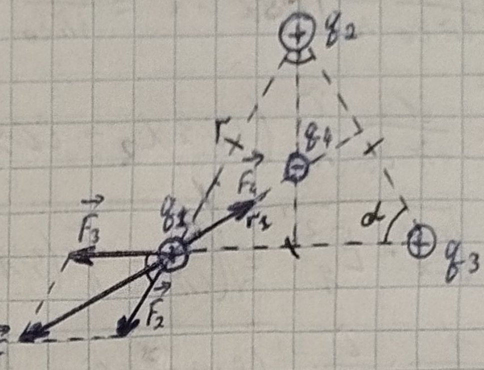
Задача 1.4.

Дано:

$q_1 = q_2 = q_3 = +1\,[нКл] = 10^{-9}\,[Кл]$; $\alpha = 60^\circ$; $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8{,}99 \cdot 10^9 \left[\frac{Н \cdot м^2}{Кл^2}\right]$

$q_4 - ?$



Решение:

q_1 будет находиться в равновесии, если:

$\vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{F} + \vec{F_4} = 0.$

$F_2 = F_3$; $F = F_4 \Rightarrow F = 2F_2\cos(\alpha/2)$

$F_2 = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}$; $F = k\frac{q_1 q_4}{\varepsilon r_1^2}$; $r_1 = \frac{2}{3} r\cos(\alpha/2)$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow k\frac{q_1 q_4}{\varepsilon\left(\frac{2}{3} r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} = 2k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_4 = 2q_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{4}{9}\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{8}{9}q_2\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$q_4 = \frac{8}{9}\cdot 10^{-9}\cdot\cos^3\left(\frac{60^\circ}{2}\right) \approx 5{,}7735\cdot 10^{-10}\,[Кл] \approx 0{,}577\,[нКл]$$

Ответ:

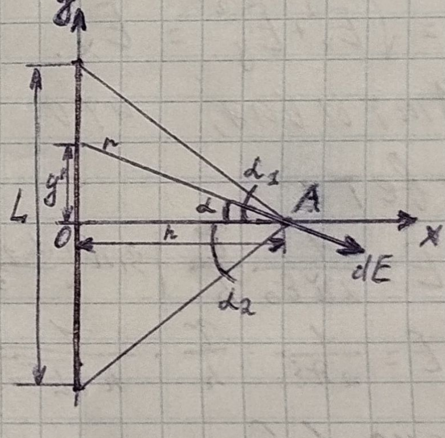
$q_4 = 0{,}577\,[нКл]$

Задача 1.5.

Дано:

$L, \tau, h.$

$E - ?$



1) Решение: (через углы $\alpha_{1,2}$)

$\vec{E}_A = k\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$; $dq = \tau\, dy \Rightarrow$

$\Rightarrow dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau\, dy'}{r^2}$, где $r = \sqrt{h^2 + y'^2} = \frac{h}{\cos\alpha}$ ⊛

$Ox: dE_x = dE\cos\alpha$, $\quad Oy: dE_y = dE\sin\alpha$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$y = h\,tg\alpha \Rightarrow dy = \frac{h}{\cos^2\alpha}d\alpha$

$$\Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}\cos\alpha\, d\alpha;\quad dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}\sin\alpha\, d\alpha$$

$$E_x = \int\limits_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2),$$ аналогично:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}(-\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1).$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}(-\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau}{h}\cdot\sqrt{(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)^2 + (-\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}\sqrt{2 - 2\cos(\alpha_2 + \alpha_1)} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau}{h}\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\right)} = 2k\frac{\tau}{h}\left|\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\right|,$$

2) Решение: (через длину L)

$$\circledast \Rightarrow dE = k\frac{\tau\, dy'}{y'^2 + h^2}$$

$$\left.\begin{aligned} O_x:\ dE_x &= dE\cos\alpha = dE\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+y'^2}} \\ O_y:\ dE_y &= dE\sin\alpha = dE\cdot\frac{y'}{\sqrt{h^2+y'^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} dE_x &= k\frac{\tau h\, dy'}{(h^2+y'^2)^{3/2}}. \\ dE_y &= k\frac{\tau y'\, dy'}{(h^2+y'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$E_x = \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k\frac{\tau h\, dy'}{(h^2+y'^2)^{3/2}} = \frac{2kL\tau}{h\sqrt{L^2+4h^2}}$$

$$E_y = \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k\frac{\tau y'\, dy'}{(h^2+y'^2)^{3/2}} = 0$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_x.$$

Учитывая, что $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

Ответ:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}\left|\sin\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\right)\right|,$$ или

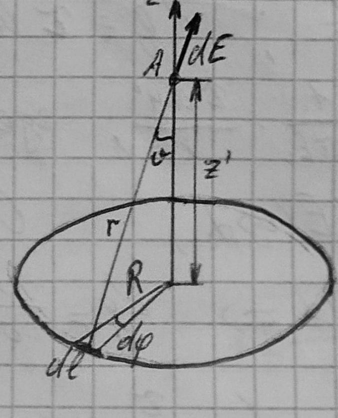
$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau}{h}\cdot\frac{1}{h\sqrt{L^2+4h^2}}$$

Задача 1.6.

Дано:

R, q.

$E - ?$



Решение:

$dl = R\,d\varphi$, $\quad dq = \tau\, dl$, где $\tau = \dfrac{q}{2\pi R}$

$dE_1 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, где $r = \sqrt{R^2 + z'^2}$

Oz: $\quad dE_z = dE \cos\vartheta$, где $\cos\vartheta = \dfrac{z'}{r}$ $\quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\frac{q R d\varphi}{2\pi R}}{R^2 + z'^2} \cdot \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q z'}{(z'^2 + R^2)^{3/2}}\, d\varphi$$

$$E_z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0} \cdot \frac{q z'}{(z'^2 + R^2)^{3/2}}\, d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q z'}{(z'^2 + R^2)^{3/2}}$$

Отлична от нуля только проекция на $O_z \Rightarrow E = E_z$.

Ответ:

$$E = E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q z'}{(z'^2 + R^2)^{3/2}}.$$