Практическое занятие 2

Построение соответствий

© I.Krivtsova
ITMO University

Соответствием из множества X в Y называется тройка объектов $< X, Y, G >$, где:

- X – область отправления соответствия;
- Y – область прибытия соответствия;
- G – график соответствия.

$$G = \{(x, y): \ x \in X, \ y \in Y\} \subseteq X \times Y.$$

Область определения соответствия – множество всех первых компонент упорядоченных пар из G:

$$D=\{x:\ \exists\, y\in Y\ \ (x,y)\in G\}.$$

Область значений соответствия – множество всех вторых компонент упорядоченных пар из G:

$$R=\{y:\ \exists\, x\in X\ \ (x,y)\in G\}.$$

В общем случае $D\subseteq X$, $R\subseteq Y$.

Соответствие называется:

- всюду определенным, если $D=X$;
- сюръективным (сюръекцией), если $R=Y$;

- функциональным (функцией), если его график не содержит пар с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами:

$$\forall x \in D \ \ \exists!\, y \in R: (x,y) \in G;$$

- инъективным (инъекцией), если его график не содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами:

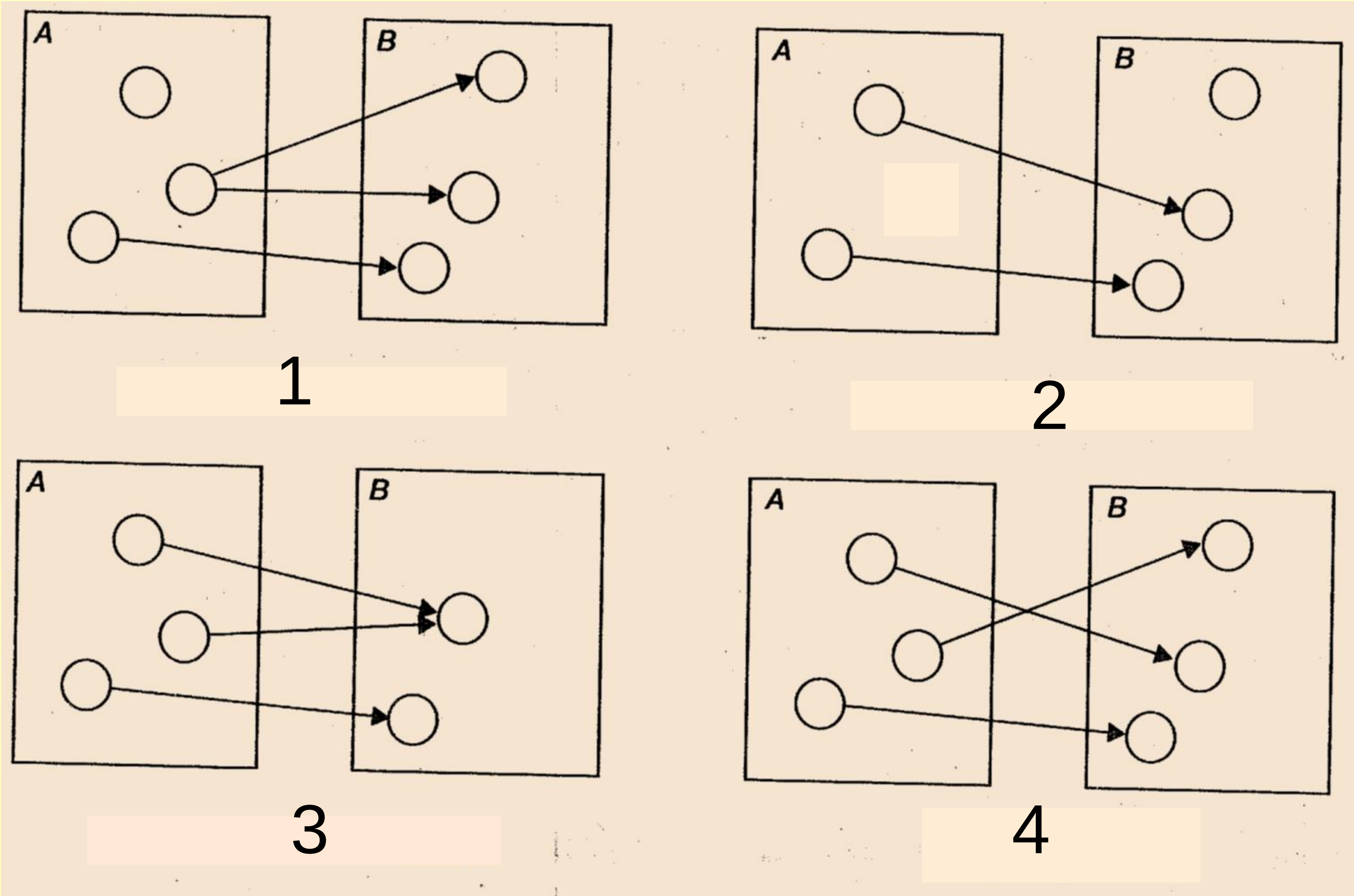
$$\forall y \in R \;\; \exists!\, x \in D: \;(x,y) \in G;$$

- отображением X в Y, если оно
  - ✓ всюду определено,
  - ✓ функционально;

- отображением X на Y, если оно
  - ✓ всюду определено,
  - ✓ функционально,
  - ✓ сюръективно;

- взаимно однозначным, если оно
  - ✓ функционально,
  - ✓ инъективно;

- биекцией, если оно
  - ✓ всюду определено,
  - ✓ сюръективно,
  - ✓ функционально,
  - ✓ инъективно.


A
B
1
A
B
2
A
B
3
A
B
4

Множество называется конечным, если число его элементов конечно, т.е. если существует число $n \in \boldsymbol{N}$, являющееся числом элементов множества.

Множество, не являющееся конечным, называется бесконечным.

Два множества называются эквивалентными, если существует биекция одного из них на другое.

Обозначение: $X \sim Y$.

Мощностью множества X называется класс всех множеств, эквивалентных множеству X.

Обозначение: $|X|$.

Эквивалентные множества X и Y являются *равномощными*:

$$|X|=|Y|.$$

Мощностью или порядком *конечного* множества $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ является число его элементов:

$$|X|=n.$$

Бесконечное множество X называется **счетным**, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел:

$$X \sim \boldsymbol{N}.$$

Множество, не являющееся счетным, называется **несчетным**.

Мощность бесконечного счетного множества обозначают $\aleph_0$ (*алеф-нуль*).

- **Теорема Кантора**

  Множество 2^N всех подмножеств множества натуральных чисел *несчетно*.

Мощность множества 2^N называется **мощностью континуума**.

Обозначение: $|2^N| = \mathfrak{c}$

Любое множество, эквивалентное множеству 2^N, называется континуальным множеством или континуумом.

$$2^N \sim [0,1] \sim (0,1) \sim (a,b) \sim [a,b] \sim \boldsymbol{R}$$

Мощность множества X строго меньше мощности множества Y, если множества X и Y неравномощны и

$$\exists Z \subset Y: \quad X \sim Z$$

- **Теорема Кантора-Бернштейна**

Для любых двух множеств X и Y существует одна и только одна из следующих возможностей:

$$\text{либо } |X| < |Y|,$$

$$\text{либо } |Y| < |X|,$$

$$\text{либо } |X| = |Y|.$$

- **Теорема** (о мощности булеана)

Для любого множества X верно неравенство:

$$|2^X| > |X|.$$

$$\aleph_0 < \mathfrak{c} < |2^{\mathbf{R}}|$$

Домашнее задание№1

Операции и соответствия на множествах