Задача 3.3.

Дано: Диполь

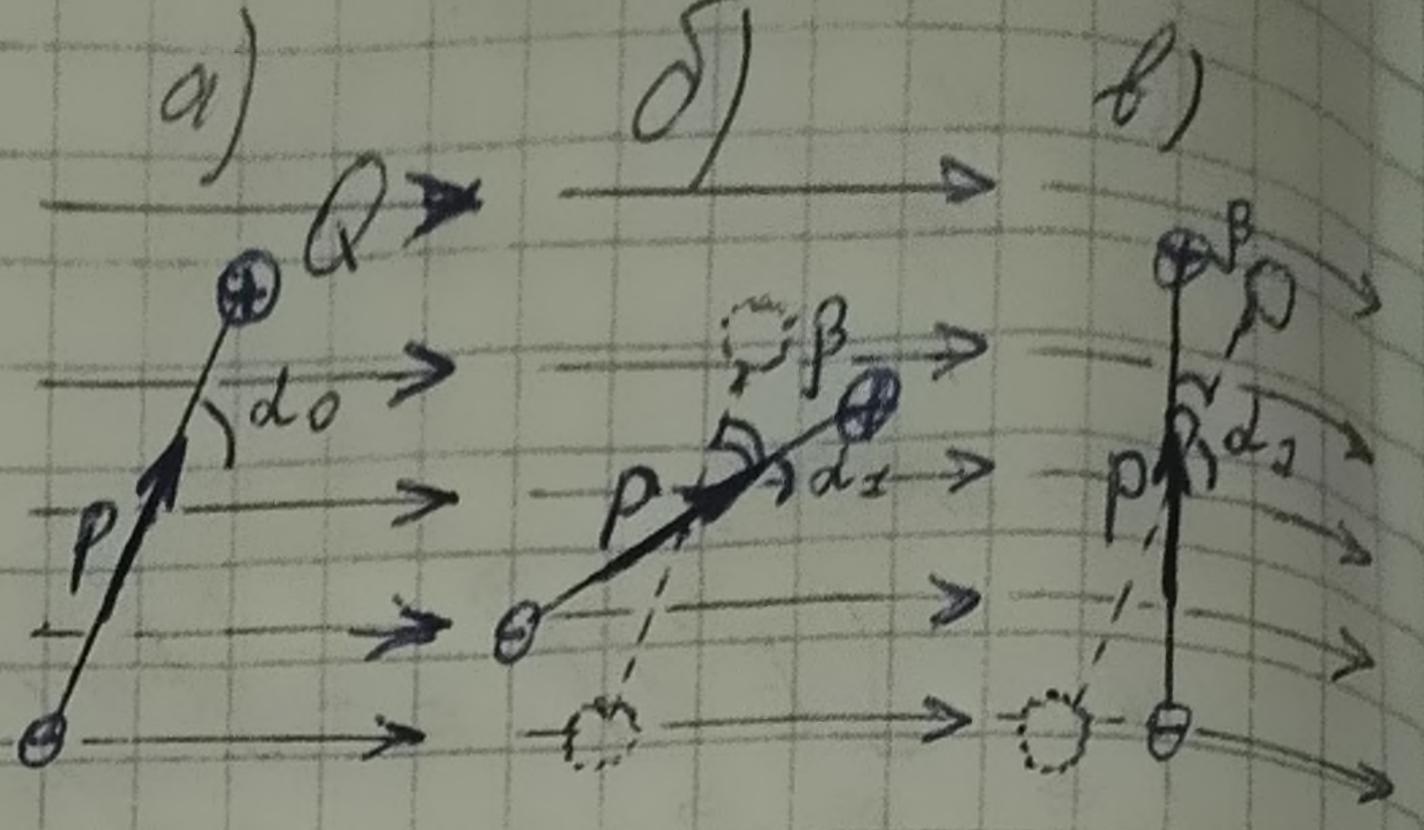
$p_e = 2$ нКл·м

$E = 30$ кВ/м.

$\alpha_0 = 60°$.

$\beta = 30°$.

A - ?



Решение:

Из исходн. полож. (а) диполь можно повернуть на $\beta = 30° = \frac{\pi}{6}$:
по час. стр. до $\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ (б)),
против час. стр. до $\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ (в)).

I способ:

$dA = M d\alpha = pE\sin\alpha\, d\alpha$.

$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} pE\sin\alpha\, d\alpha = pE\int_{\alpha_0}^{\alpha}\sin\alpha\, d\alpha =$

$= -pE(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)$

II способ:

$A = \Delta U = U_2 - U_1$.

$U = -pE\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow A = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)$.

$A_1 = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1) = -21,9$ [мкДж].

$A_2 = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_2) = 30$ [мкДж].

Ответ: $A_1 = -21,9$; $A_2 = 30$ [мкДж]

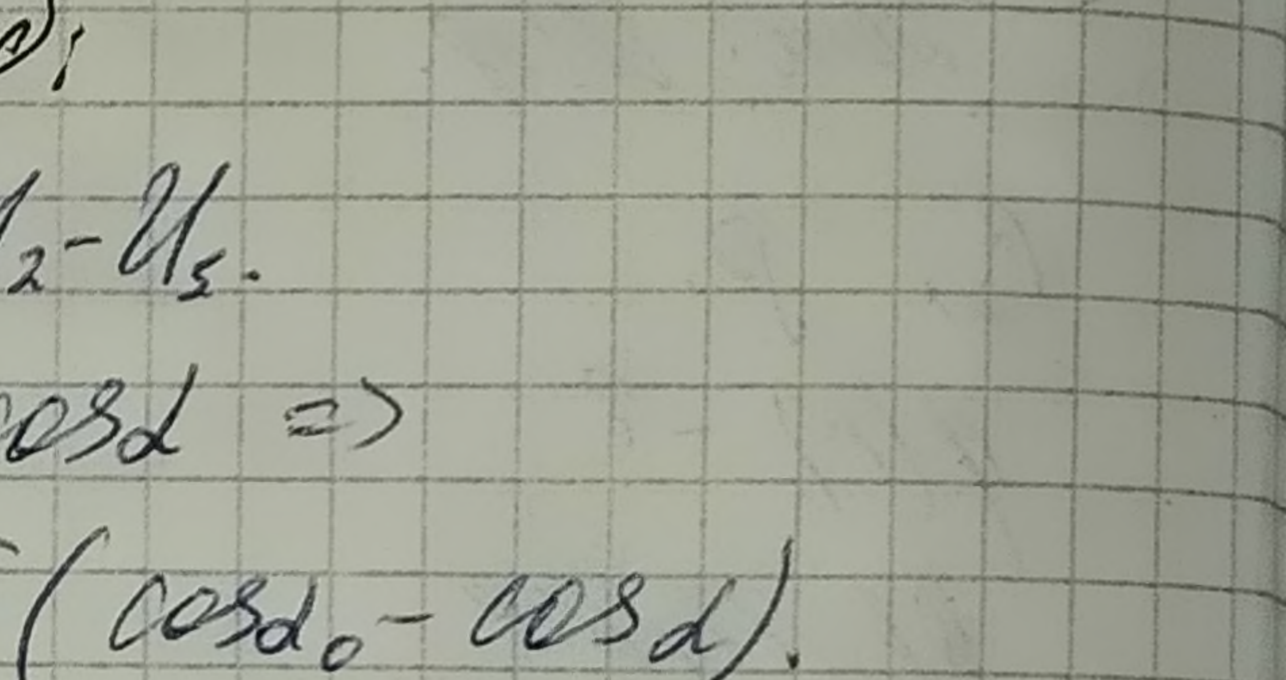
Задача 3.4.

Дано:

$r, \theta, r >> l$.

$p_e = ql$

φ, E - ?



Решение:

$r_+ = r - a\cos\theta = r - \vec a \vec{l_r}$

$r_- = r + a\cos\theta = r + \vec a \vec{l_r}$

$l = 2\vec a$

$2\vec a \vec{l_r} = \vec l \vec{l_r}$

$\vec p = q\vec l$.

$\vec p \vec{l_r} = p\cdot\cos\theta$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q(r_- - r_+)}{r_+ r_-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\vec{l} \cdot \vec{e}_r}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p\cos\theta}{r^2}.$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2p\cos\theta}{r^3}.$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\,d\theta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p\sin\theta}{r^2}.$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

Ответ: $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p\cos\theta}{r^2}$;

$E(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$.

Задача 3.5.

Дано: капли ртути.

φ. (маленьк. капля).

φ' – ? (большая капля).

Решение:

$\exists$ r – радиус маленьк. капли, R – радиус большой к.

q – заряд мал. капли $\Rightarrow$ заряд большой к. $= Nq$.
(N – кол-во капель)

$q = \frac{\varphi r}{k} \Rightarrow \varphi' = \frac{kNq}{R} = \frac{kN\varphi r}{Rk} = N\varphi\frac{r}{R}$.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $V' = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V' = NV$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{r}{R} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} : \sqrt[3]{\frac{3V'}{4\pi}} = \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{V'}} = \sqrt[3]{\frac{V}{NV}} = \frac{1}{\sqrt[3]{N}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi' = N\varphi \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{N}} = \varphi N \cdot N^{-1/3} = \varphi N^{2/3} = \varphi\sqrt[3]{N^2}$.

Ответ: $\varphi' = \varphi\sqrt[3]{N^2}$

Задача 3.6.

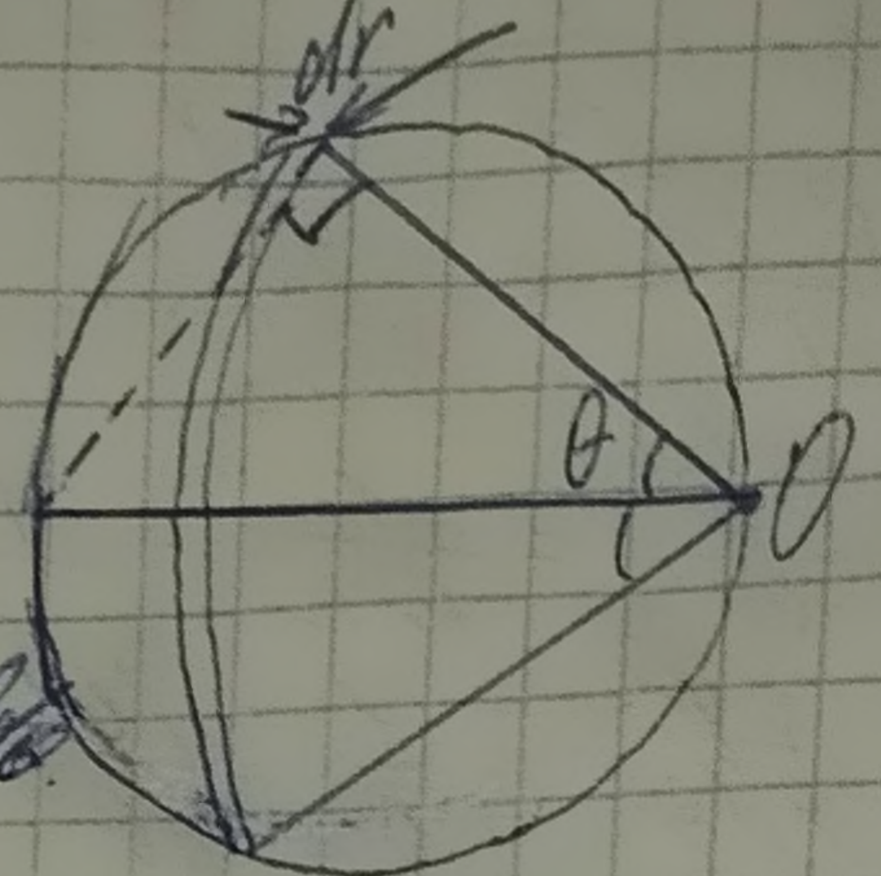
Дано: диск.

R, σ.

φ – ?

Решение:

$\varphi \overset{def}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma\, dS}{r}$.



$dS = 2\theta r\, dr$, $r = 2R\cos\theta$ и $dr = -2R\sin\theta\, d\theta$

$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma\, dS}{r} \Rightarrow \varphi = -\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\theta\sin\theta\, d\theta$.

$\int\theta\sin\theta\, d\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta$.

$-\theta\cos\theta + \sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$.

Ответ: $\varphi = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$.

Задача 3.7.

Дано: Диск.

R, σ, h

φ – ? при $R \gg h$,

$R \ll h$,

$\frac{R}{h} \to \infty$.

Решение:

$dq = \sigma 2\pi r\, dr$.

$d\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{l}$, где $l = \sqrt{r^2+h^2}$.

Ответы:

$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma 2\pi r\, dr}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+h^2} - h\right) = \boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+h^2} - h\right)}$.

при $h = 0$ $\boxed{\varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}}$

при $R \ll h$ $\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\pi R^2}{h} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{h}}$

при $R \gg h$ $\boxed{\varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{R}\right)}$

при $\frac{R}{h} \to \infty$ $\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(h_1 - h_2)$.