https://study.physics.itmo.ru/

19 марта 2022

Физика

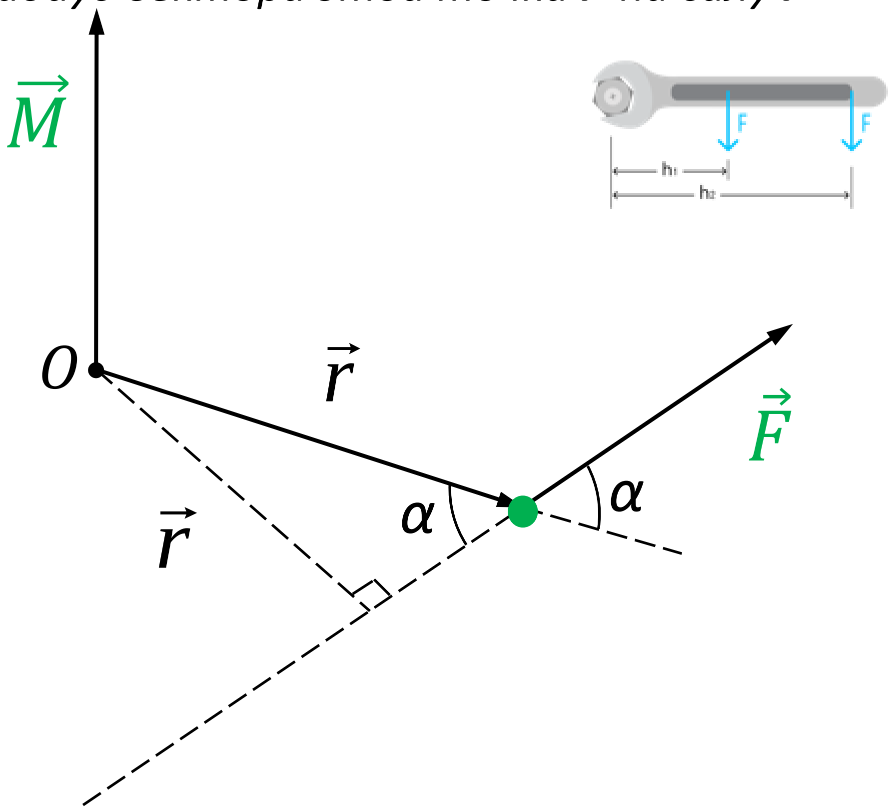
Факультет БИТ

Лекция 5

Скачать презентацию:

Момент силы относительно точки

*Моментом силы **M** относительно точки О называется векторное произведение радиус-вектора этой точки **r** на силу **F***



$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$|\vec{M}| = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}^{\wedge}\vec{F}) = F \cdot d$$

d – плечо силы $\vec{F}$ относительно точки O.

$$d$$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

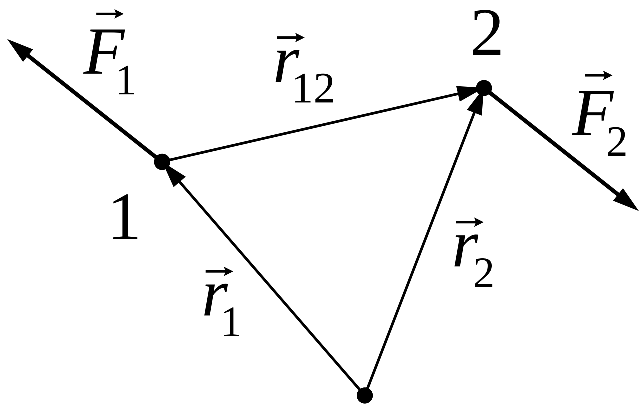
Принцип суперпозиции:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 \quad \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

https://books.ifmo.ru/file/pdf/2979.pdf http://ens.tpu.ru

Момент пары сил $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Парой сил называется приложенная к твердому телу система двух сил (**F$_1$**,**F$_2$**) равных по величине, противоположных по направлению и не лежащих на одной прямой сил.

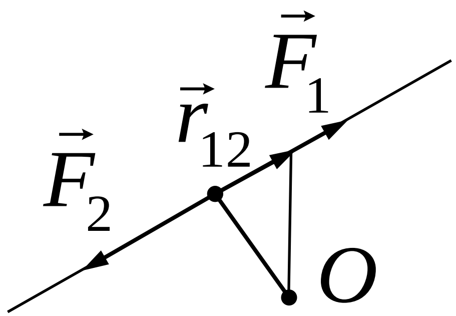


Пара сил не имеет равнодействующей, т.е. не может быть заменена одной силой.

***Момент пары сил* M** перпендикулярен плоскости действия пары, направлен *по правилу правого винта* и равен по модулю произведению модуля любой из сил на плечо пары.

$$\vec{M} = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \vec{F}_1] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \vec{F}_2] =$$
$$= [\vec{r}_{12}, \vec{F}_1] = [\vec{r}_{21}, \vec{F}_2]$$

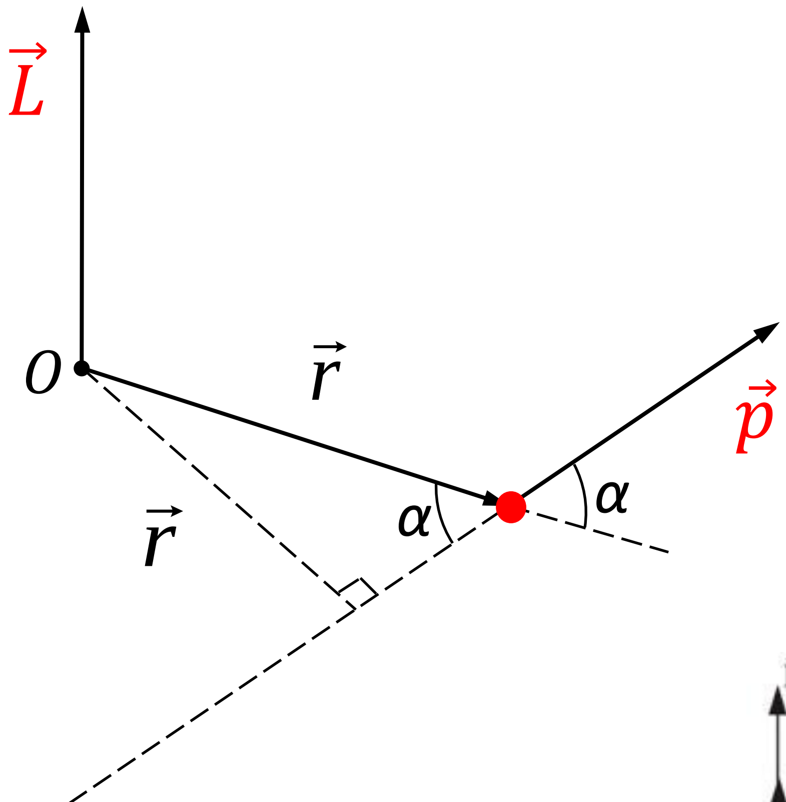
Если силы направлены вдоль одной прямой: $\vec{M} = 0$



https://books.ifmo.ru/file/pdf/2979.pdf

Момент импульса частицы относительно точки

*Моментом импульса **L** относительно точки O называется векторное произведение радиус-вектора этой точки **r** на импульс **p***

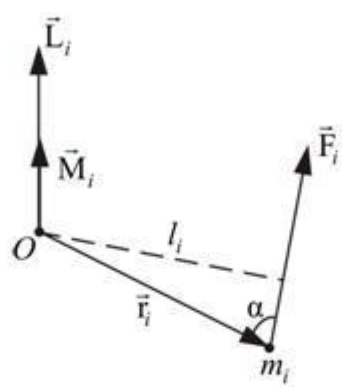


$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

$$|\vec{L}| = r \cdot p \cdot \sin(\vec{r}\,\widehat{\ }\,\vec{p}) = p \cdot d$$

d – плечо импульса относительно точки O.

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$



https://books.ifmo.ru/file/pdf/2979.pdf http://ens.tpu.ru

Основной закон динамики вращательного движения вокруг точки

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i \quad \Big| \times \vec{r}_i$$

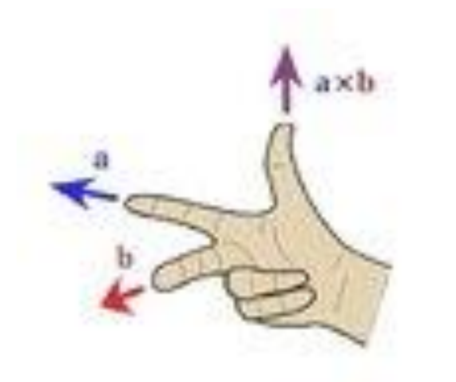
$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

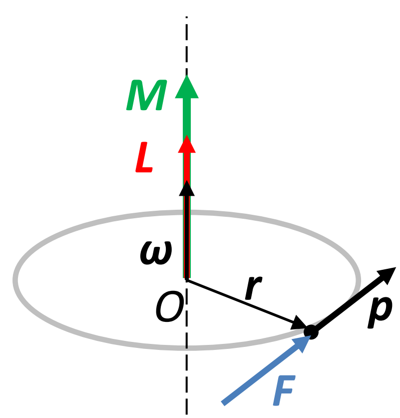
$$\frac{d}{dt}(\vec{L}) = \vec{M}$$

уравнение моментов

Момент импульса — $\vec{L}$

Момент силы — $\vec{M}$





https://books.ifmo.ru/file/pdf/2979.pdf

Уравнение моментов.

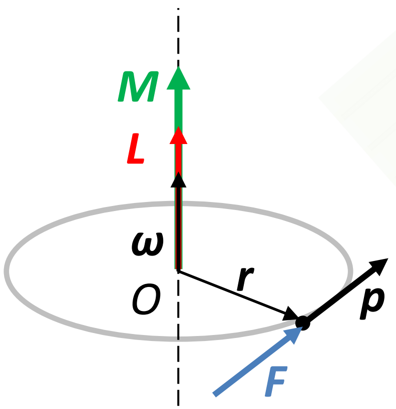
Закон сохранения момента импульса

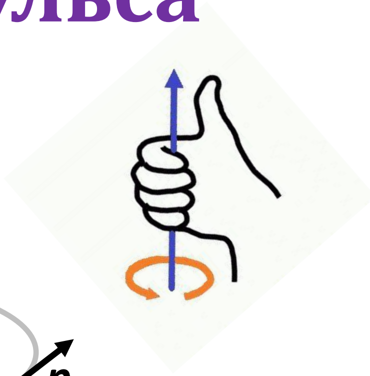
$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

$$\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$$

уравнение моментов

$$\frac{d}{dt}\Big(\underset{\text{Момент импульса}}{\vec{L}}\Big) = \underset{\text{Момент силы}}{\vec{M}}$$





$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш}$$

т.к. полный момент всех внутренних сил равен нулю

Если на систему не действуют внешние силы, то момент импульса системы сохраняется

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\vec{L} = const$$

**Еще один случай, когда момент импульса сохраняется: внешние силы действуют на систему, но линии их действия проходят через точку О. Поэтому полный момент сил равен нулю.*

https://books.ifmo.ru/file/pdf/2979.pdf

Законы Кеплера

Первый закон Кеплера (эмпирический) 1609г
Планета вращается по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце.

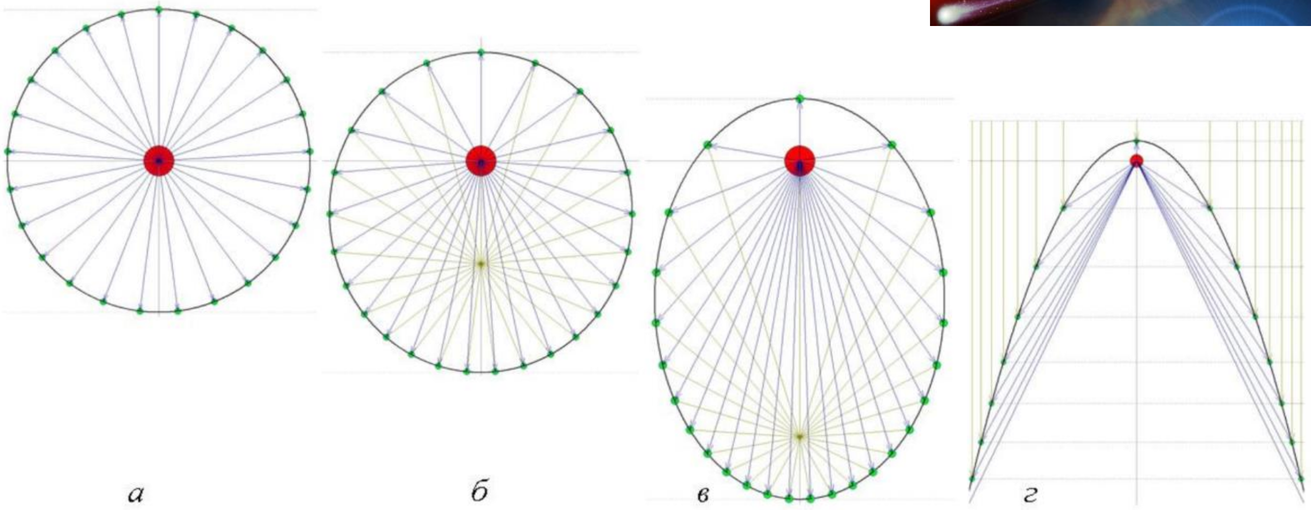
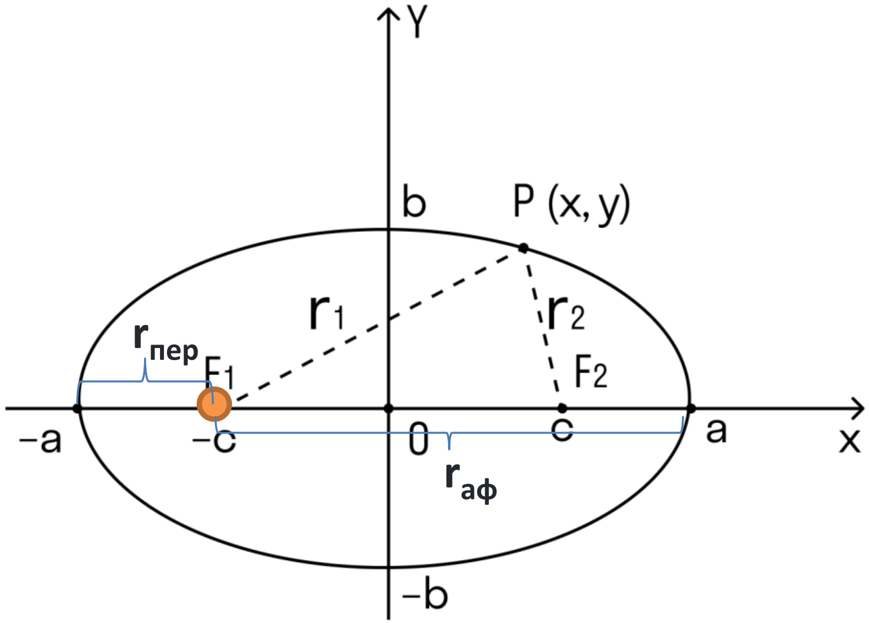


Рис. 3.8. Кеплеровские орбиты: круговая (*а*), эллиптические (*б*, *в*), параболическая (*г*)

http://ens.tpu.ru

Боярский К. К., Смирнов А. В., Прищепенок О. Б. Механика, часть 1. Кинематика, динамика – СПб: Университет ИТМО, 2018. – 76 с.

у эллипса два фокуса — это такие точки, сумма расстояний от которых до любой точки **P(x,y)** является постоянной величиной



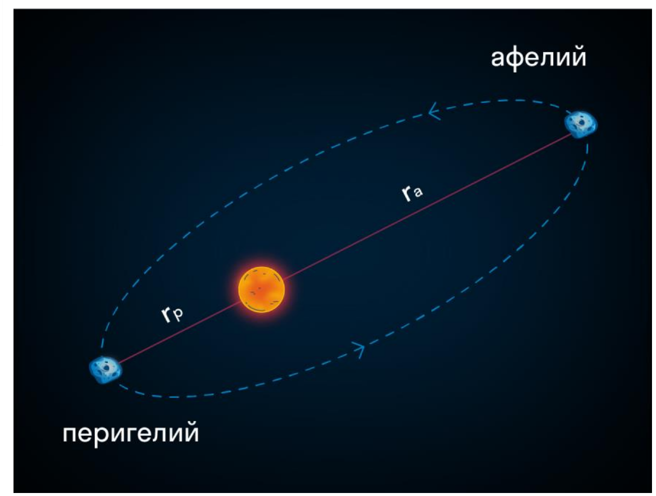
F_1 и **F_2** — фокусы
F_1 = (c ; 0)
F_2 = (-c ; 0)
c — половина расстояния между **F_1** и **F_2**
a — большая полуось
b — малая полуось
r_1 и **r_2** — фокальные радиусы

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$r_{\text{пер}} + r_{\text{аф}} = 2a$$
$$r_{\text{пер}} \cdot r_{\text{аф}} = a^2 - c^2 = b^2$$

эксцентриситет

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

- $\varepsilon = 0$ — окружность
- $0 < \varepsilon < 1$ — эллипс
- $\varepsilon = 1$ — парабола



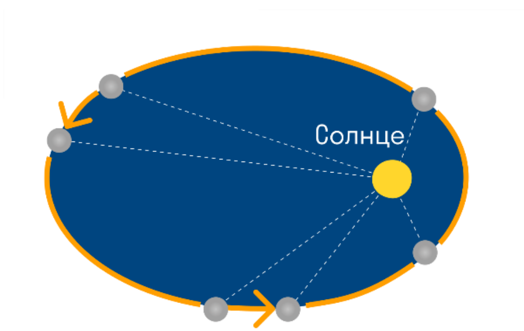
https://skysmart.ru/articles/physics/zakon-keplera

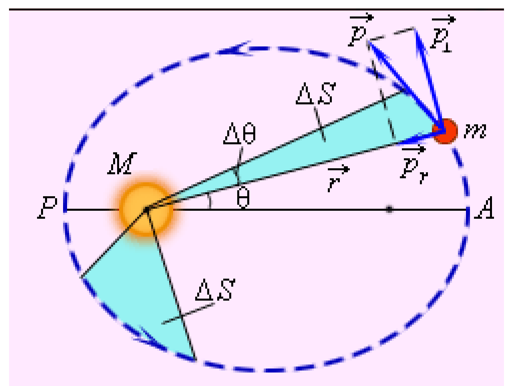
Законы Кеплера

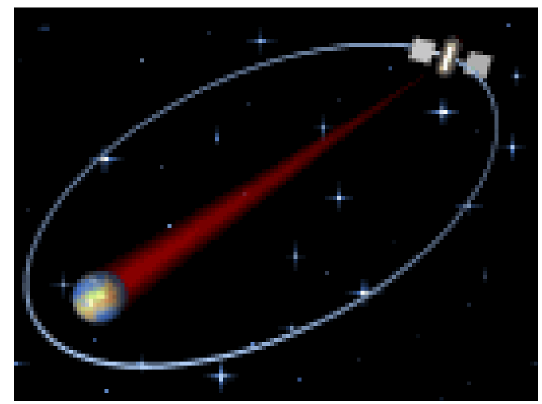
Второй закон Кеплера

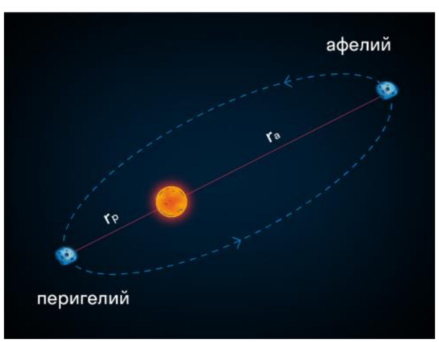
Радиус-вектор планеты описывает в равные промежутки времени равные площади.

Эквивалентом второго закона Кеплера можно считать закон сохранения момента импульса.









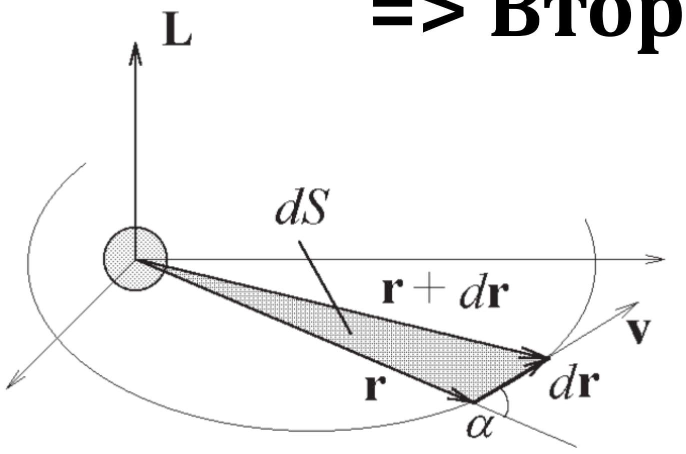
https://online.mephi.ru/courses/physics/osnovi_mehaniki/data/lecture/5/p1.html

http://ens.tpu.ru

https://books.ifmo.ru/file/pdf/2438.pdf

https://books.ifmo.ru/file/pdf/2979.pdf

Теорема площадей. Геометрический смысл момента импульса => Второй закон Кеплера



$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$dS = \frac{1}{2}\vec{r}\vec{v}\,dt\sin\alpha = \frac{1}{2}\vec{r}\frac{d\vec{r}}{\cancel{dt}}\cancel{dt}\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\vec{r}d\vec{r}\sin\alpha$$

Закон сохранения момента импульса $\vec{L} = const$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v} = m\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = 2m\frac{dS}{dt} = const$$

$$\vec{r}\times d\vec{r} = \vec{r}d\vec{r}\sin\alpha = 2\,dS$$

Второй закон Кеплера: *Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.*

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = const$$

секториальная скорость планеты постоянна

https://online.mephi.ru/courses/physics/osnovi_mehaniki/data/lecture/5/p1.html

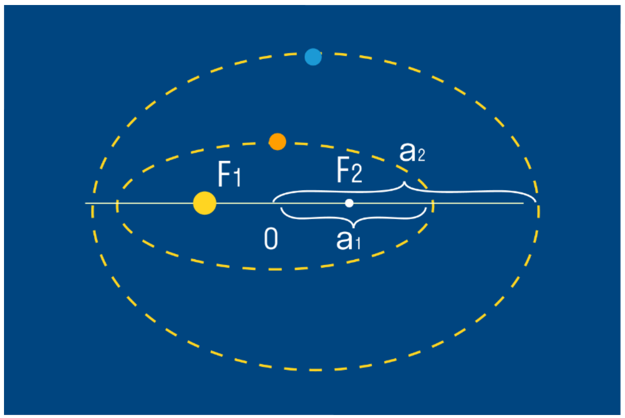
https://books.ifmo.ru/file/pdf/2438.pdf https://books.ifmo.ru/file/pdf/2979.pdf

Законы Кеплера

Третий закон Кеплера

Квадраты периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

G = 6,67x10^{-11} Нсм^2/кг^2 гравитационная постоянная

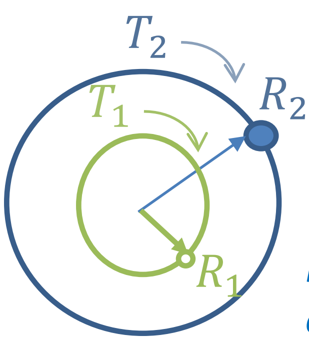


$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

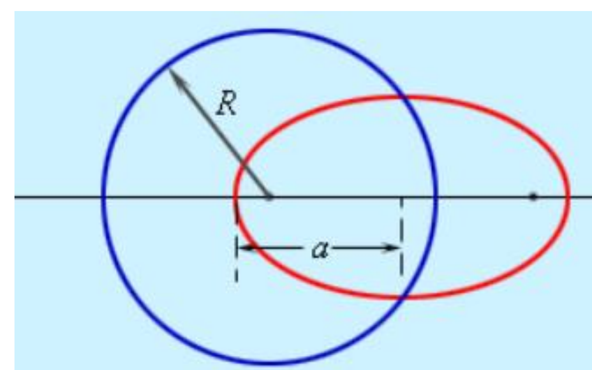
Ньютон показал, что третий закон Кеплера не совсем точен — на самом деле в него еще входит масса планеты:

$$\frac{T_1^2(M+m_1)}{T_2^2(M+m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3$$

Квадраты периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам радиусов их круговых орбит.

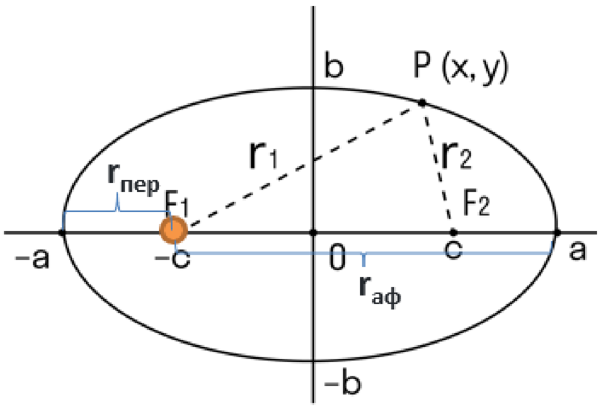


https://books.ifmo.ru/file/pdf/2438.pdf https://online.mephi.ru/courses/physics/osnovi_mehaniki/data/lecture/5/p1.html

Законы Кеплера

Третий закон Кеплера

Квадраты периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.



Рассмотрим планету как точку массой m, вращающейся по эллиптической орбите, в двух положениях:

перигелий с радиус-вектором $r_{пер}$=a-c и скоростью $v_{пер}$

афелий с радиус-вектором $r_{аф}$=a+c и скоростью $v_{аф}$

Закон сохранения момента импульса: $mv_{пер}r_{пер} = mv_{аф}r_{аф}$

Закон сохранения энергии: $\frac{mv_{пер}^2}{2} - \frac{GmM}{r_{пер}} = \frac{mv_{аф}^2}{2} - \frac{GmM}{r_{аф}}$

Решая систему, можно получить скорость планеты в перигелии $v_{пер} = \sqrt{2GM\frac{r_{аф}/r_{пер}}{r_{пер}+r_{аф}}}$

Секториальная скорость: $v_s = 1/2 \cdot v_{пер}r_{пер} = \sqrt{GM\frac{r_{аф}r_{пер}}{2(r_{пер}+r_{аф})}}$

Площадь эллипса: $S_{\text{ellipse}} = \pi ab = v_s \cdot T = T \cdot \sqrt{\frac{GMr_{аф}r_{пер}}{2(r_{пер}+r_{аф})}}$

$c^2 = a^2 - b^2$
$r_{пер} + r_{аф} = 2a$
$r_{пер} \cdot r_{аф} = a^2 - c^2 = b^2$

$$T \cdot \sqrt{GM\frac{\cancel{b}^2}{4a}} = \pi a\cancel{b} \qquad \frac{T}{a^{3/2}} = \sqrt{\frac{GM}{4\pi}} \qquad \frac{T}{a^{3/2}} = const \qquad \frac{T^2}{a^3} = const$$

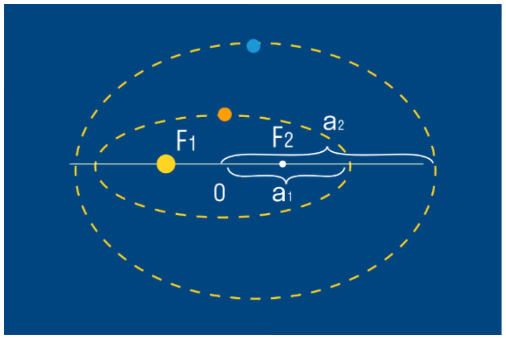
https://ru.wikipedia.org/wiki

G = 6,67x10^{–11} Нсм²/кг² гравитационная постоянная

Законы Кеплера

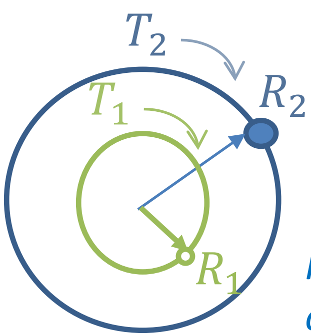
Третий закон Кеплера

Квадраты периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.



$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

G = 6,67x10^{-11} Нсм^2/кг^2 гравитационная постоянная



$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3$$

Квадраты периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам радиусов их круговых орбит.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T^2 \sim r^3$$

$$\omega^2 \sim r^{-3} \qquad a_n = \omega^2 r = F/m$$

$$F = m\omega^2 r \sim \frac{mr}{r^3} \sim \frac{m}{r^2}$$

$$F = C_1 \frac{m}{r^2}$$

$$\parallel$$

$$F = C_2 \frac{M}{r^2}$$

$$\frac{C_1}{M} = \frac{C_2}{m} = G \qquad C_1 = GM; C_2 = Gm$$

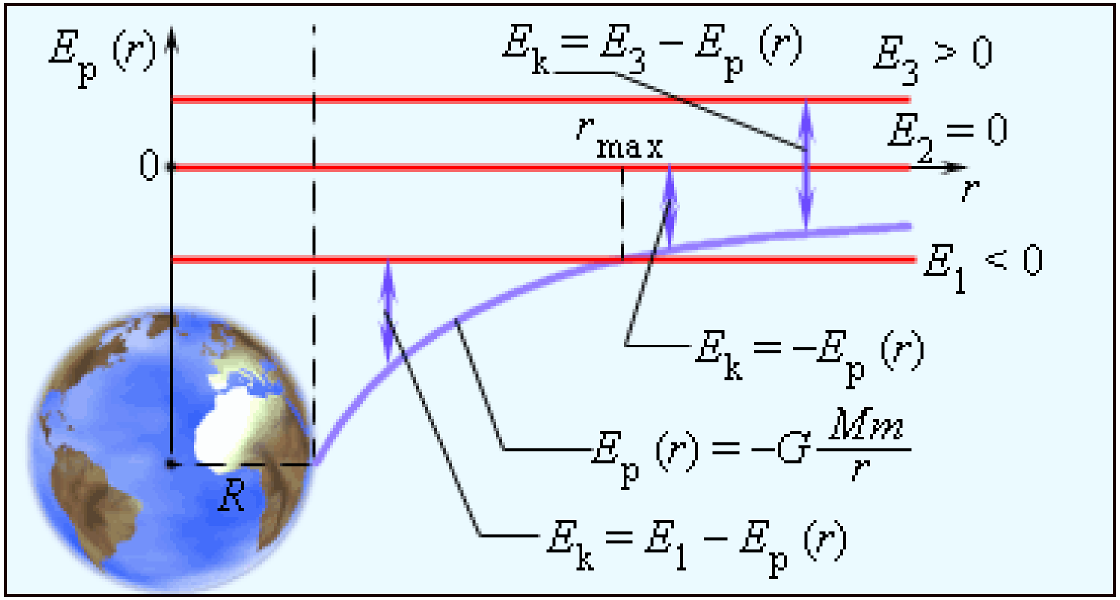
Закон всемирного тяготения: $F = G\frac{mM}{r^2}$

https://books.ifmo.ru/file/pdf/2438.pdf https://online.mephi.ru/courses/physics/osnovi_mehaniki/data/lecture/5/p1.html

Космические скорости

Если тело находится в гравитационном поле на некотором расстоянии *r* от центра тяготения и имеет некоторую скорость υ:

$E=E_k+E_p=m\upsilon^2/2-GMm/r=const$ – закон сохранения энергии



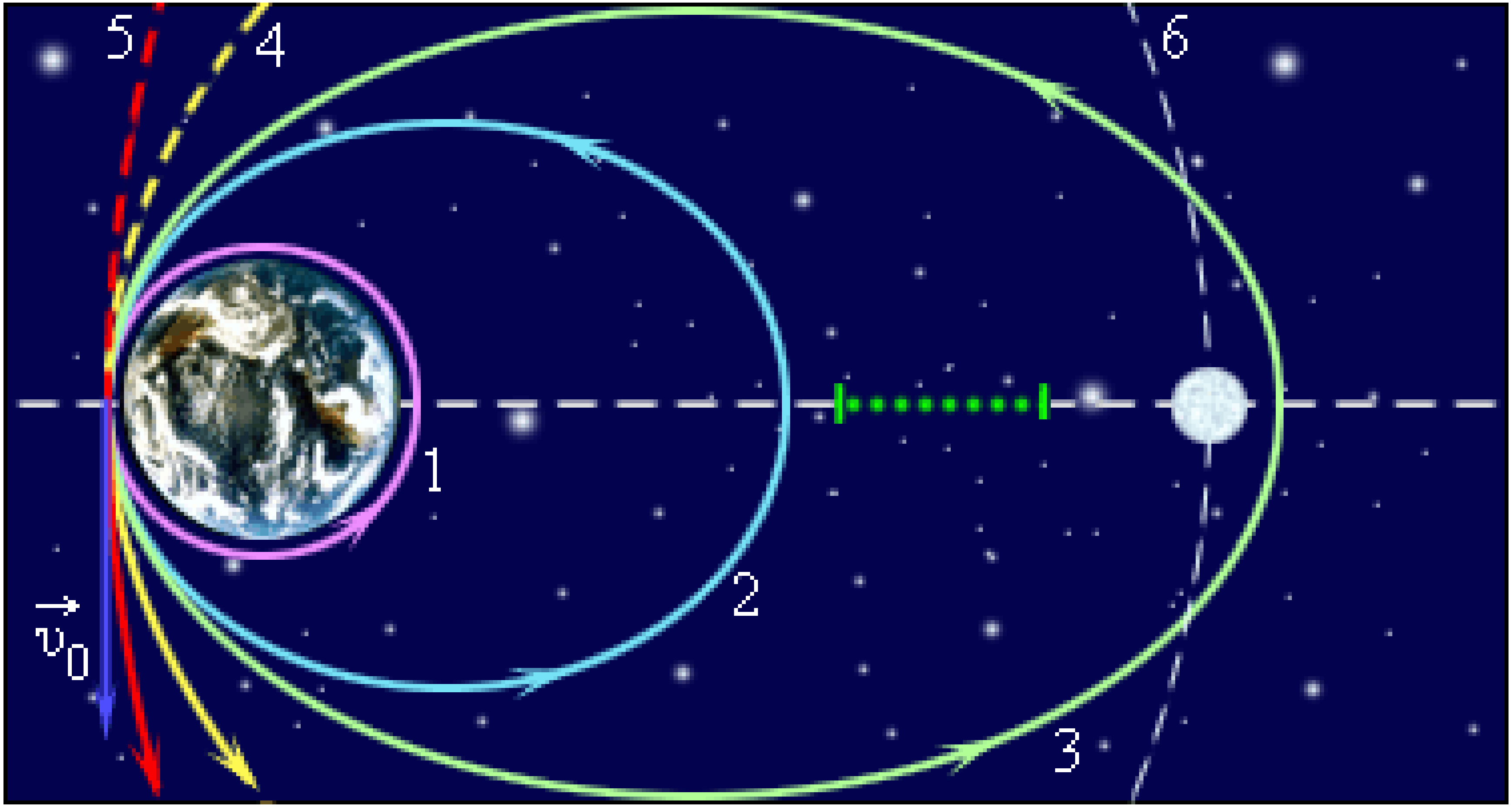
При E< 0 тело не может удалиться от центра притяжения на расстояние r > r_{max}. В этом случае небесное тело движется по эллиптической орбите.

При E=0 тело может удалиться на бесконечность. Скорость тела на бесконечности будет равна нулю. Тело движется по параболической траектории.

При E > 0 движение происходит по гиперболической траектории. Тело удаляется на бесконечность, имея запас кинетической энергии.

https://physics.ru/textbook/chapter1/section/paragraph24/index.html

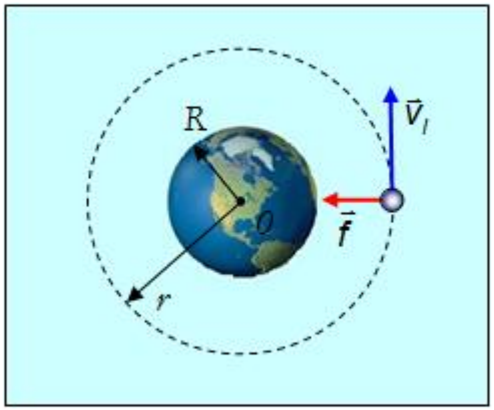
Космические скорости



Космические скорости

Первой космической скоростью называется скорость движения тела по круговой орбите вблизи поверхности Земли.

Выводится из второго закона Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$



$$\vec{F}_{\text{всем тяг}} = m\vec{a}_{\text{ц}}$$

$$r = R_З + h$$

$$G\frac{mM_З}{r^2} = m\frac{v_1^2}{r}$$

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M_З}{R_З + h}}$$

$$\parallel$$

в данном случае $F_{\text{всем тяг}} = F_{\text{тяж}} = mg = m\frac{v_1^2}{r}$

$$h \ll R_З$$

$$r \approx R_З$$

$$T = \frac{2\pi r}{v_1}$$

$$v_1 = \sqrt{gR_З} = \sqrt{9{,}81 \times 6{,}38 \cdot 10^6} \approx 7{,}9 \text{ км/с.}$$

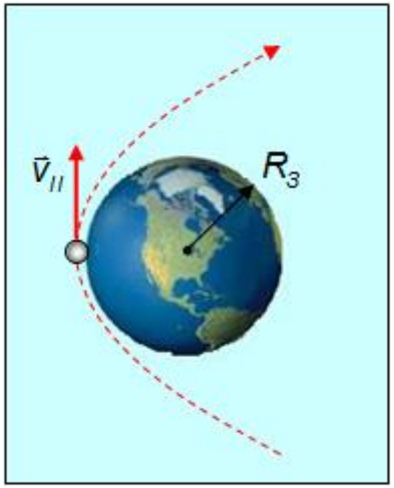
Боярский К. К., Смирнов А. В., Прищепенок О. Б. Механика, часть 1. Кинематика, динамика – СПб: Университет ИТМО, 2018. – 76 с.

http://ens.tpu.ru https://online.mephi.ru

Космические скорости

Второй космической скоростью называется скорость движения тела по параболической траектории. Она равна минимальной скорости, которую нужно сообщить телу на поверхности Земли, чтобы оно, преодолев земное притяжение, стало спутником Солнца.

Выводится по закону сохранения энергии $E = E_{к1} + E_{п1} = const = E_{к2} + E_{п2}$



На поверхности Земли (1): $E_к = 0$, $E_п = G\dfrac{mM_З}{R_З}$

На параболической Орбите (2): $E_к = \dfrac{mv_{II}^2}{2}$, $E_п = 0$

$E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2}$

$$\frac{\cancel{m}v_{II}^2}{2} = G\frac{\cancel{m}M_З}{R_З}$$

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_З}{R_З}} = \sqrt{2gR_З} = v_1\sqrt{2} = 11{,}2 \text{ км/с}$$

http://ens.tpu.ru https://online.mephi.ru

Космические скорости

Земля вращается вокруг Солнца со скоростью, которая находится аналогично первой космической, но для Солнца:

$$v_{\text{Зем}} = \sqrt{\frac{GM_\text{С}}{R_\text{С}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 1{,}99 \cdot 10^{30}}{1{,}496 \cdot 10^{11}}} = 29.8 \text{ км/с}$$

Критическая скорость, чтобы преодолеть притяжение Солнца, находится по принципу второй космической, но для Солнца:

$$\frac{mv_{\text{кр}}^2}{2} = G\frac{mM_\text{С}}{R_\text{С}}$$

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2GM_\text{С}}{R_\text{С}}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 1{,}99 \cdot 10^{30}}{1{,}496 \cdot 10^{11}}} = 42.1 \text{ км/с}$$

Третья космическая скорость – скорость движения, при которой тело может покинуть пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца.

Находится по принципу второй космической, но с условием, что рокета на большом расстоянии от Земли должно все еще иметь скорость $v_{\text{от}}$

$$v_{\text{от}} = v_{\text{кр}} - v_{\text{Зем}} = 12.3 \text{ км/с}$$

$$\frac{mv_{III}^2}{2} = G\frac{mM_\text{З}}{R_\text{З}} + \frac{mv_{\text{от}}^2}{2}$$

Можно выразить потенциальную энергию тела на поверхности Земли через кинетическую, а ее через вторую космическую скорость

$$\frac{mv_{III}^2}{2} = \frac{mv_{II}^2}{2} + \frac{mv_{\text{от}}^2}{2}$$

$$v_{III} = \sqrt{v_{II}^2 + v_{\text{от}}^2} = \sqrt{11.2^2 + 12.3^2} = 16.6 \text{ км/с}$$

Центр масс системы частиц. Закон движения центра масс.

1) Радиус-вектор центра масс:

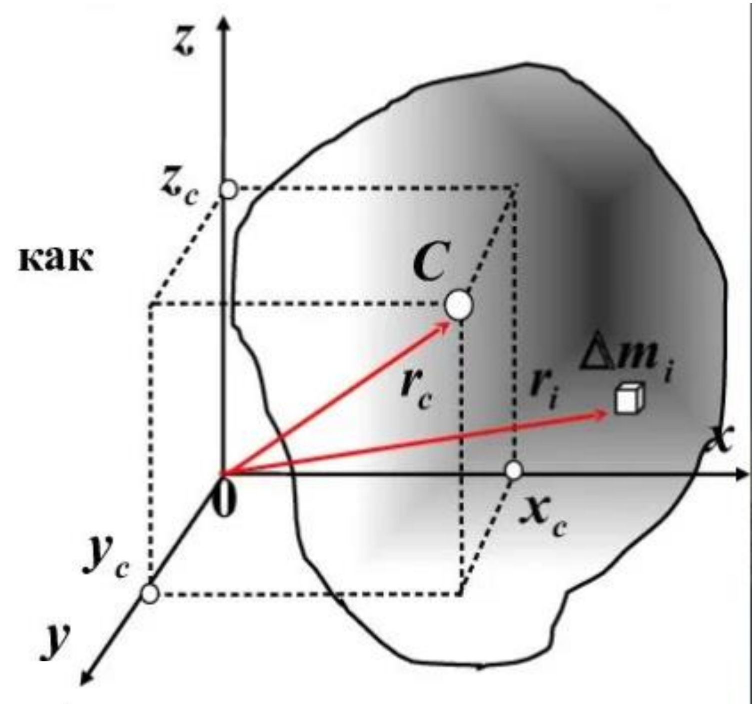
$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

2) Скорость центра масс:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\vec{P}_{\text{системы}}}{m_{\text{системы}}}$$

3) Закон движения центра масс системы частиц:

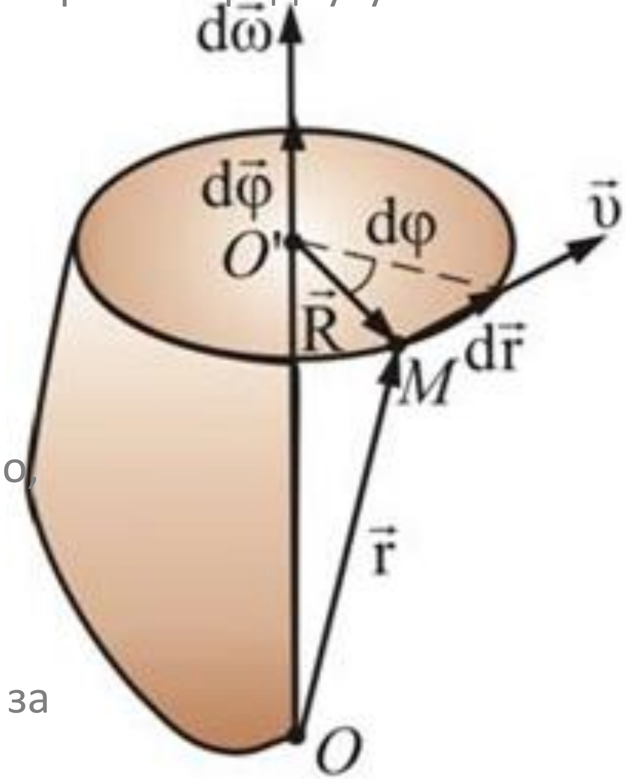
$$m_c \vec{a}_c = m_c \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d\vec{P}_c}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\text{внеш}}$$



Вращательное движение твердого тела

Линейная скорость точки тела перпендикулярна угловой скорости и радиусу

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

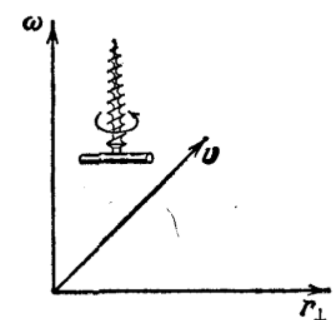


$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

Период вращения T – промежуток времени, за который тело, равномерно вращаясь с угловой скоростью ω, совершая один полный оборот на угол 2π.

Частота вращения *n* – число оборотов, совершаемых телом за 1с при равномерном вращении с угловой скоростью ω.

Угловое ускорение: $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$



Связь с линейным ускорением: $\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{R} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$

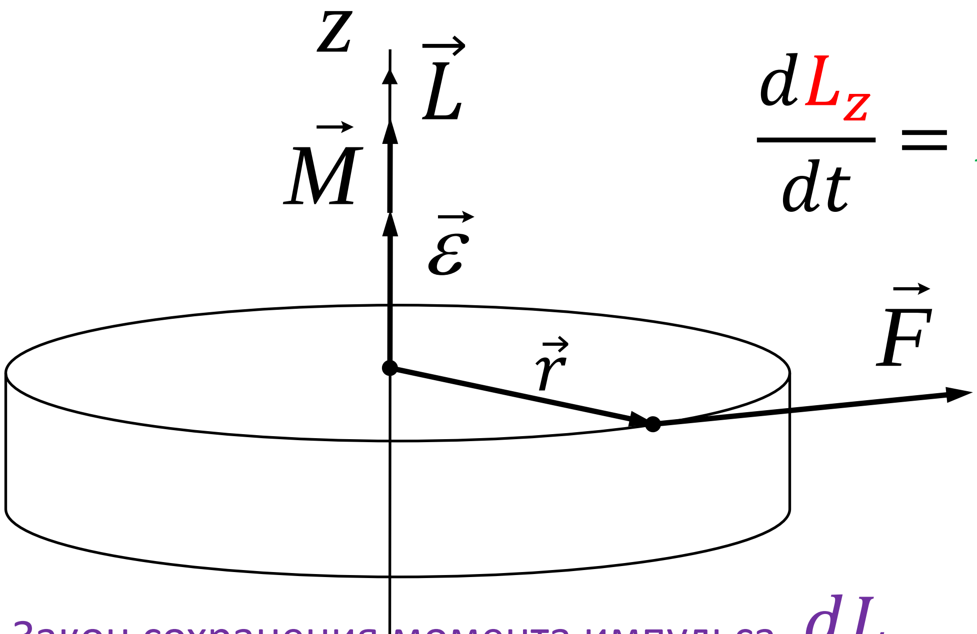
$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{R^2}\vec{R}$$

http://ens.tpu.ru/POSOBIE_FIS_KUSN

Момент импульса и **момент сил** **относительно оси**

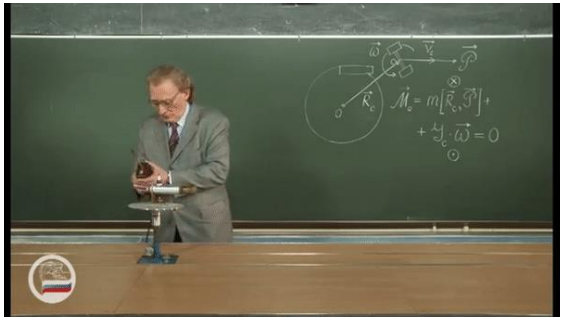
Ось вращения тела, положение которой в пространстве сохраняется без приложения извне каких-либо сил, называется **свободной осью** тела.

Существуют по крайне мере три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела, которые могут служить свободными осями. Такие оси называются **главными осями инерции** тела.



$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Моментом импульса (силы) относительно оси называется проекция вектора момента импульса (силы) на эту ось.



Закон сохранения момента импульса относительно неподвижной оси:
момент импульса относительно оси постоянен, если момент сил относительно этой же оси равен нулю.

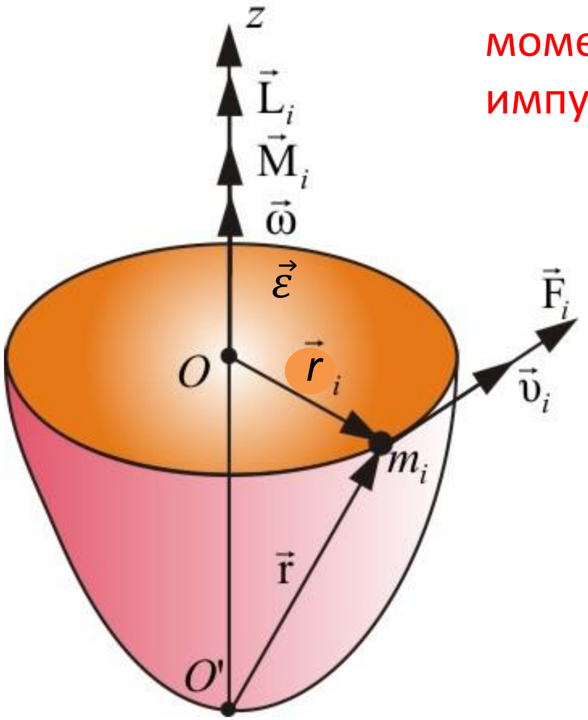
$$\frac{dL_z}{dt} = M_z = 0$$

$$=> \; Lz = const$$

https://online.mephi.ru

Момент инерции

$\omega = \frac{v}{r}$



момент импульса $L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i m_i v_i r_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega$

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Момент инерции – величина, равная сумме произведений элементарных масс тела на квадрат их расстояний от оси вращения

Момент инерции тела служит **мерой инертности** во вращательном движении.

Для главных осей: $L_z = \omega \sum_i m_i r_i^2 = \omega I$

Основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси:

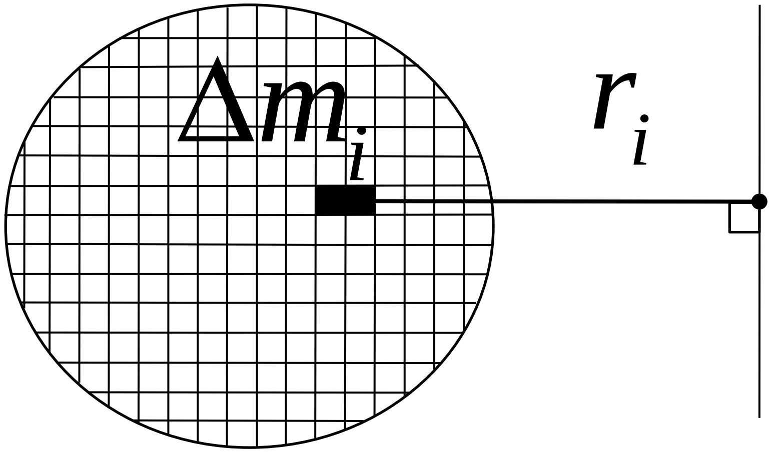
$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\varepsilon = M_z$$

момент силы

https://online.mephi.ru http://ens.tpu.ru

Момент инерции

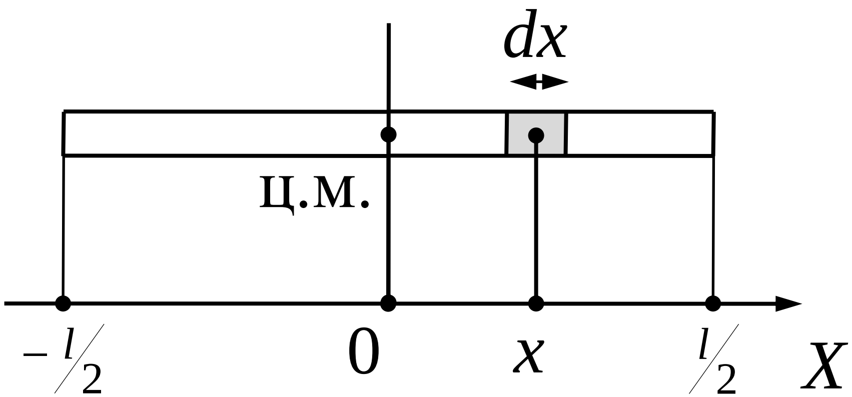
$$\begin{matrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{matrix}$$



$$I = \sum_i m_i r_i^{\,2}$$

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$

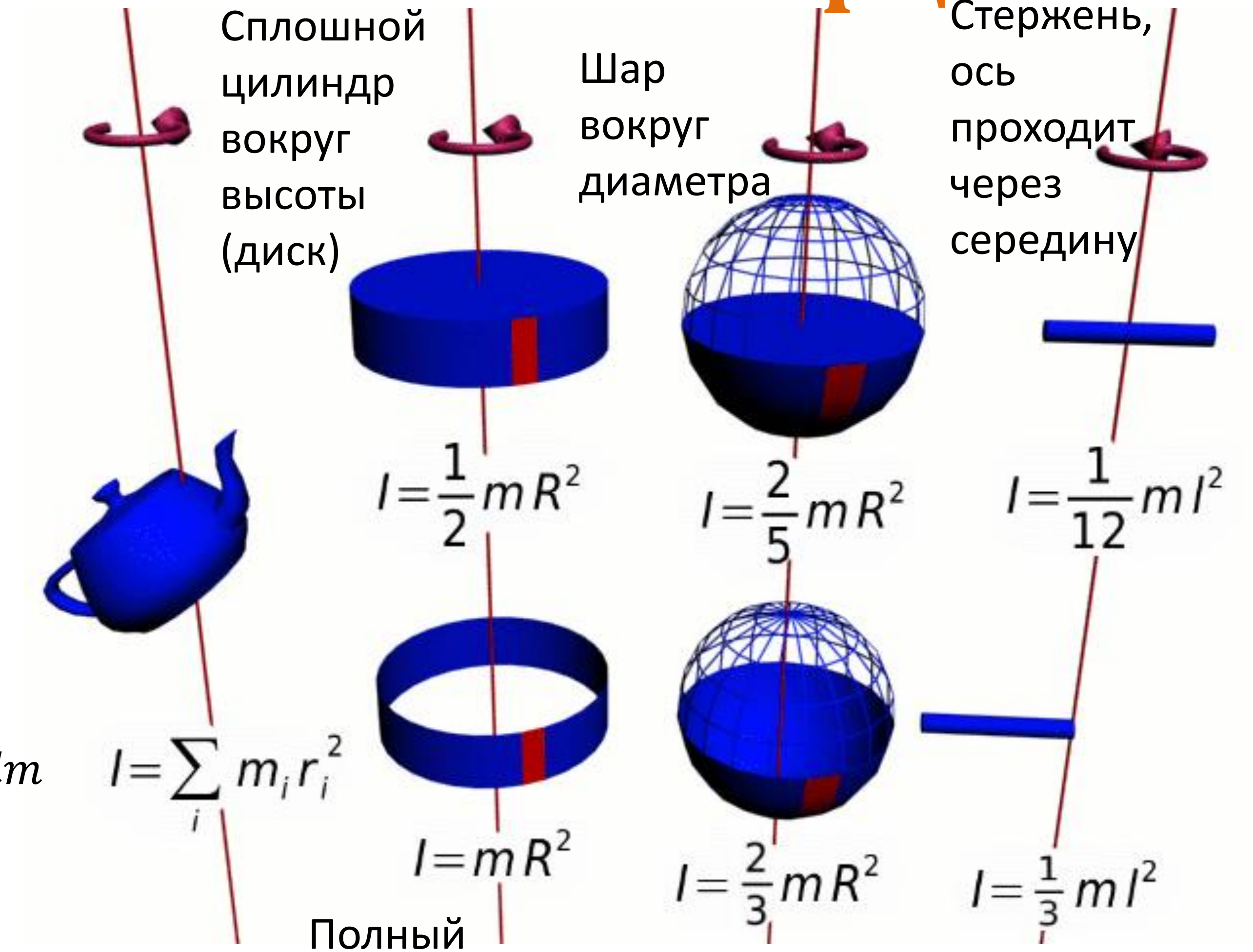
Пример: Вычислим I_0 стержня массой m и длинной l



$$dm = \frac{m}{l} dx$$

$$I_0 = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2}{12}$$

Момент инерции



Сплошной цилиндр вокруг высоты (диск)

Шар вокруг диаметра

Стержень, ось проходит через середину

$$I = \int_m r^2 dm$$

Полный тонкостенный цилиндр вокруг высоты (обруч)

Полая тонкостенная сфера вокруг диаметра

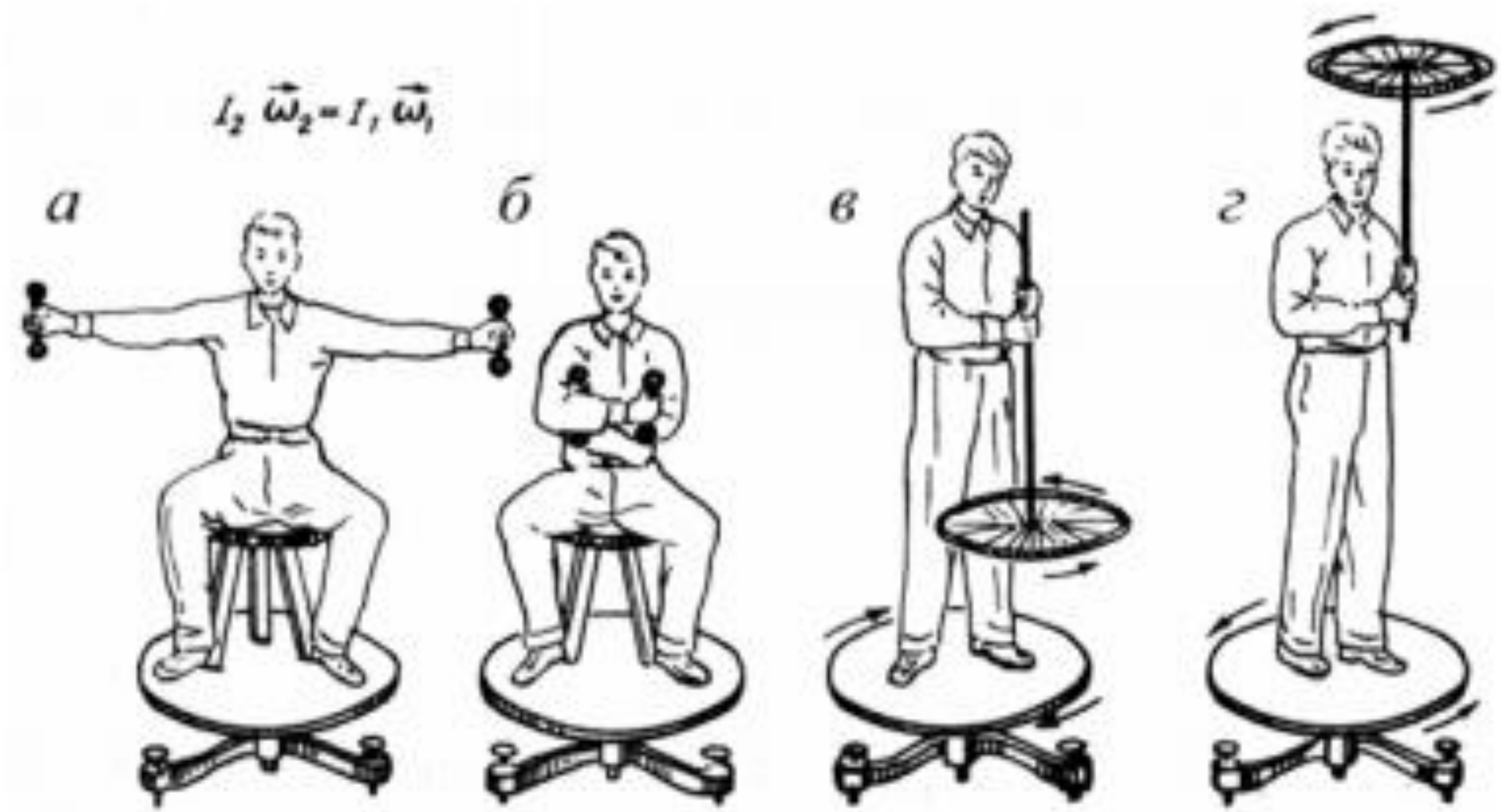
Стержень, ось проходит через конец

https://ru.wikipedia.org https://online.mephi.ru

Закон сохранения момента импульса

$\vec{M} = 0$ $\qquad$ $I\vec{\omega} = const$ $\qquad$ $\vec{L} = const$

Скамья Жуковского



https://youtu.be/8BB5sWXBKos?t=15
Человек с гантелями на скамье Жуковского

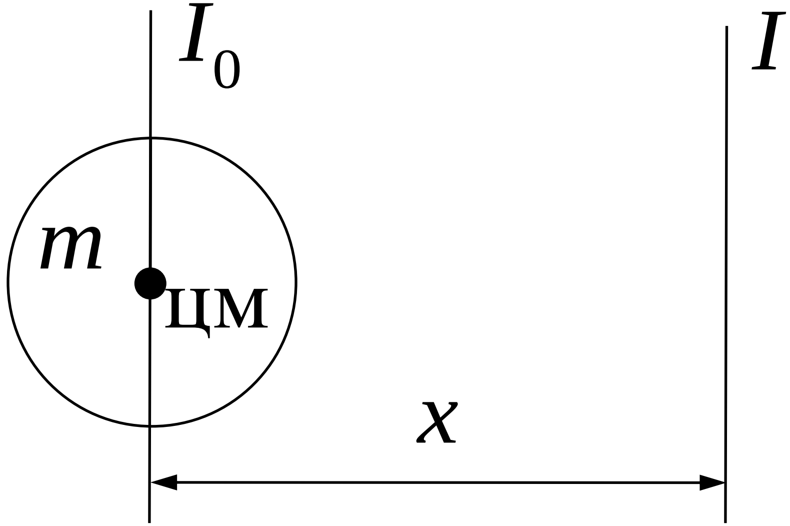
https://youtu.be/nR_E-Zmqq4M?t=16
Человек на скамье Жуковского с велосипедным колесом

https://phys.bspu.by/static/um/phys/meh/1mehanika/pos/glava06/6_6.pdf

Скамья Жуковского

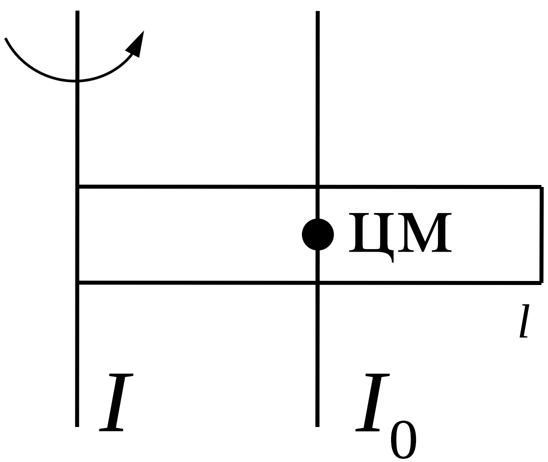
https://youtu.be/nR_E-Zmqq4M

Теорема Гюйгенса-Штейнера



$$I = I_0 + mx^2$$

Пример: Вычислим *I* стержня массой *m* и длиной *l* относительно его конца.



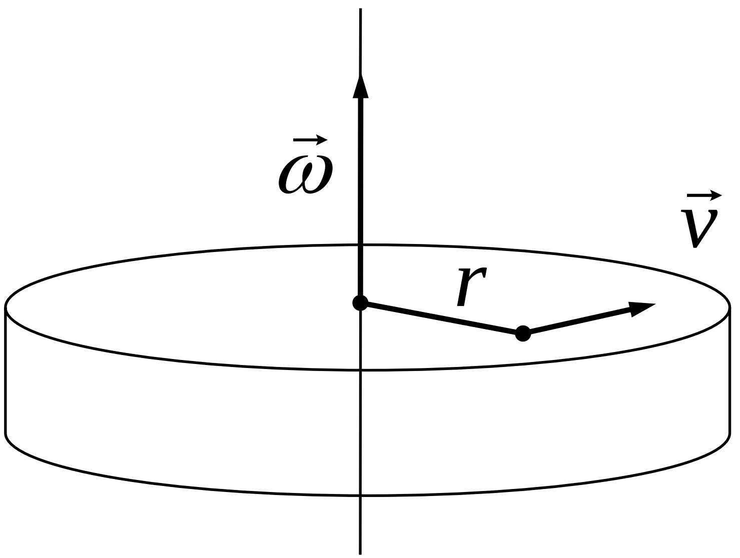
Центральный момент инерции $I_0 = \dfrac{ml^2}{12}$

$$I = I_0 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

Кинетическая энергия вращения твёрдого тела вокруг оси

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} R_i$$

$$E_{\text{к}} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\sum_i (m_i r_i^2)\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}$$

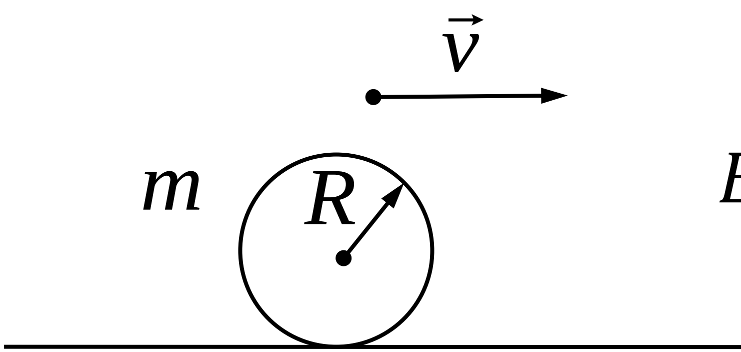


https://online.mephi.ru

Кинетическая энергия при плоском движении твёрдого тела

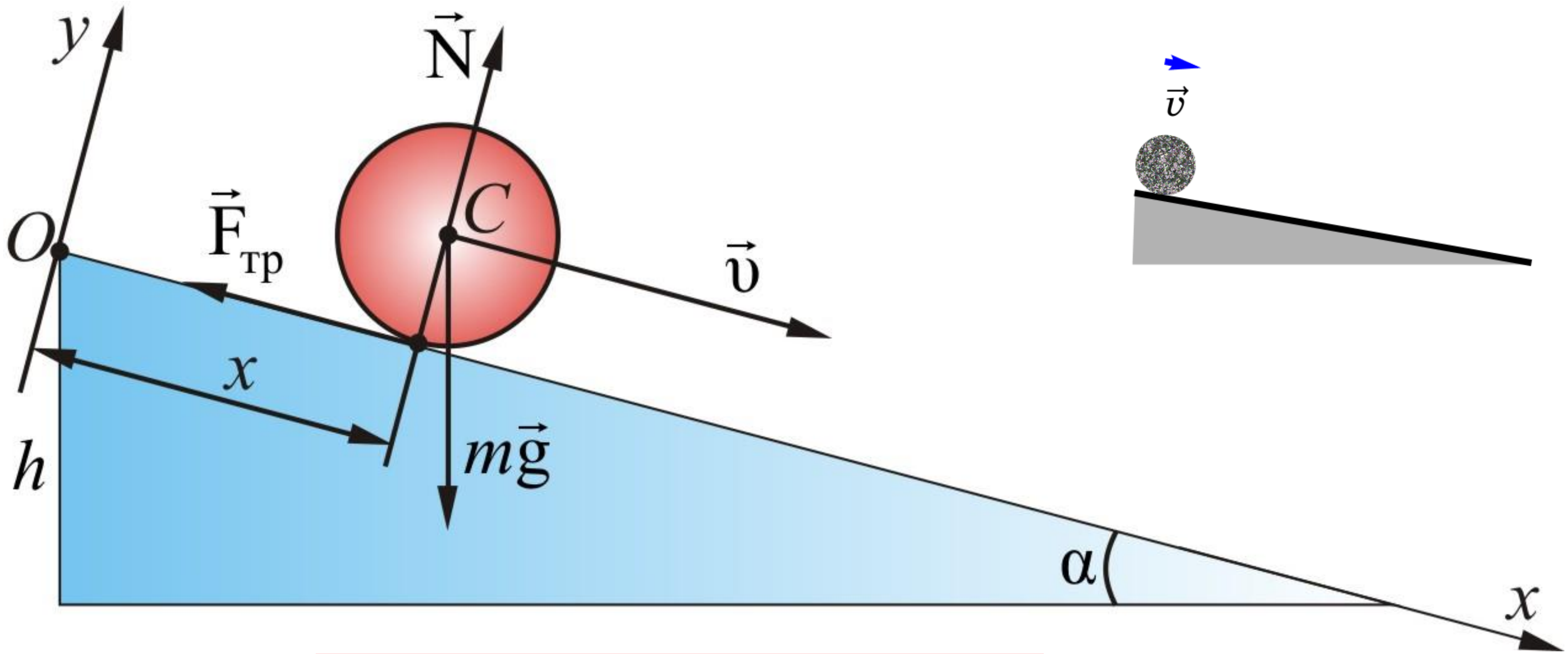
$$E_к = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}$$

Пример: Однородный шар массой m и радиусом R катится со скоростью v.



$$E_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5}mR^2\frac{\omega^2}{2} = \frac{7}{10}mv^2$$

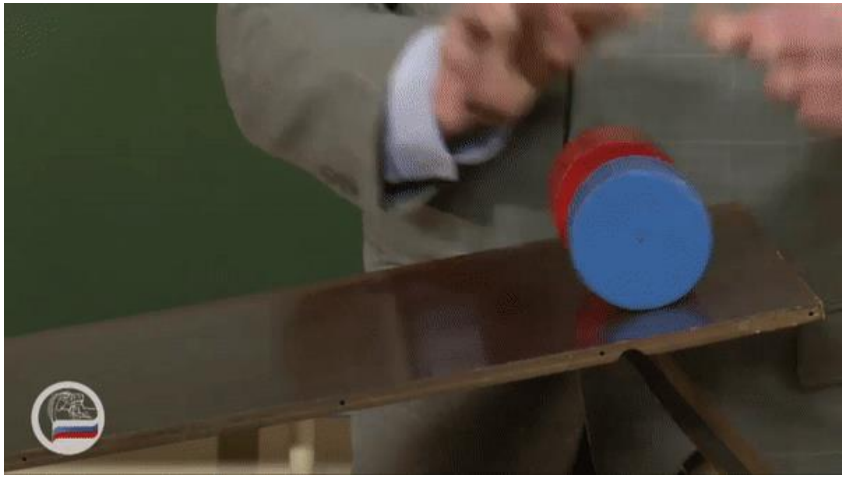
Полная энергия при плоском движении твёрдого тела



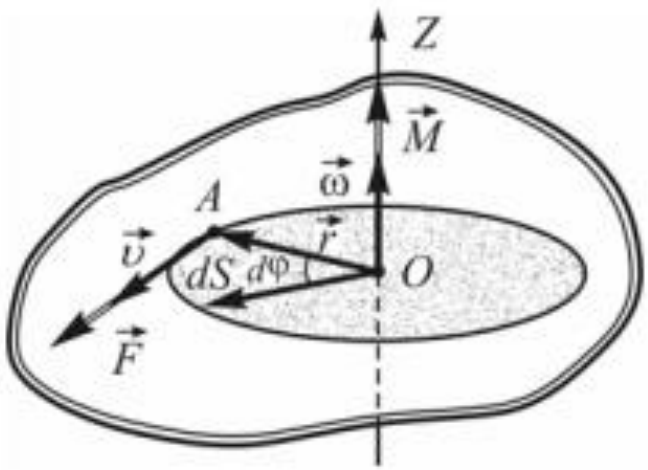
$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

http://www.mgup.by/sites/default/files/userfiles/TF/PHYSICS/lab/din_vra_dvig.ppt

Зависимость поведения цилиндров на наклонной плоскости от характера распределение массы по их объему



Работа при вращении твёрдого тела



При повороте на бесконечно малый угол $d\varphi$ перемещение точки можно считать равным длине дуги $ds = rd\varphi$. Тогда элементарная работа $dA = Fds = Frd\varphi$, или

$$dA = Md\varphi.$$

Работа при повороте на конечный угол φ равна интегралу

$$A = \int_0^{\varphi} Md\varphi, \text{ или } A = \int_0^{\varphi} \vec{M}d\vec{\varphi}.$$

Если момент силы не изменяется, то работа равна произведению момента силы и угла поворота тела

$$A = M\varphi.$$

Аналогия между поступательным и вращательным движением

Поступательное движение	*Вращательное движение*
Перемещение $d\vec{r}$	Поворот $d\vec{\varphi}$
Скорость $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{dt}$	Угловая скорость $\vec{\omega} = \mathrm{d}\vec{\varphi}/\mathrm{dt}$
Ускорение $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{dt}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$
Масса m	Момент инерции J
Импульс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса $\vec{L} = J\vec{\omega}$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$
Уравнение движения $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$	Уравнение движения $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ $J\varepsilon_z = M_z$
Работа $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Работа $dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$

$$v = v_0 \pm at$$

$$S = x_0 \pm v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

$$S = \int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\varphi = \int_0^t \omega\mathrm{d}t$$

Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики в 2 т. Том 1. https://online.mephi.ru

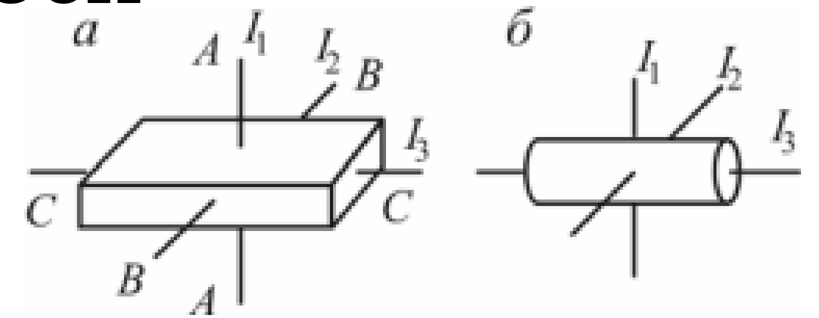
Аналогия между поступательным и вращательным движением

Поступательное движение	Вращательное движение
Основной закон динамики	
$F\Delta t = mv_2 - mv_1;$ $F = ma$	$M\Delta t = J\omega_2 - J\omega_1;$ $M = J\varepsilon$
Закон сохранения	
импульса $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i v_i = \text{const}$	*момента импульса* $\sum\limits_{i=1}^{n} J_i\varphi_i = \text{const}$
Работа и мощность	
$A = Fs;$ $N = Fv$	$A = M\varphi;$ $N = M\omega$
Кинетическая энергия	
$T = \dfrac{mv^2}{2}$	$T = \dfrac{J\omega^2}{2}$

А.Г. Чертов, А.А. Воробьев Задачник по физике.

https://youtu.be/Uu9R4u0f2zA?t=10
Бросание параллелепипеда

Главные оси



Связанная с телом ось, положение которой в пространстве сохраняется при отсутствии внешних воздействий, называется **свободной осью**.

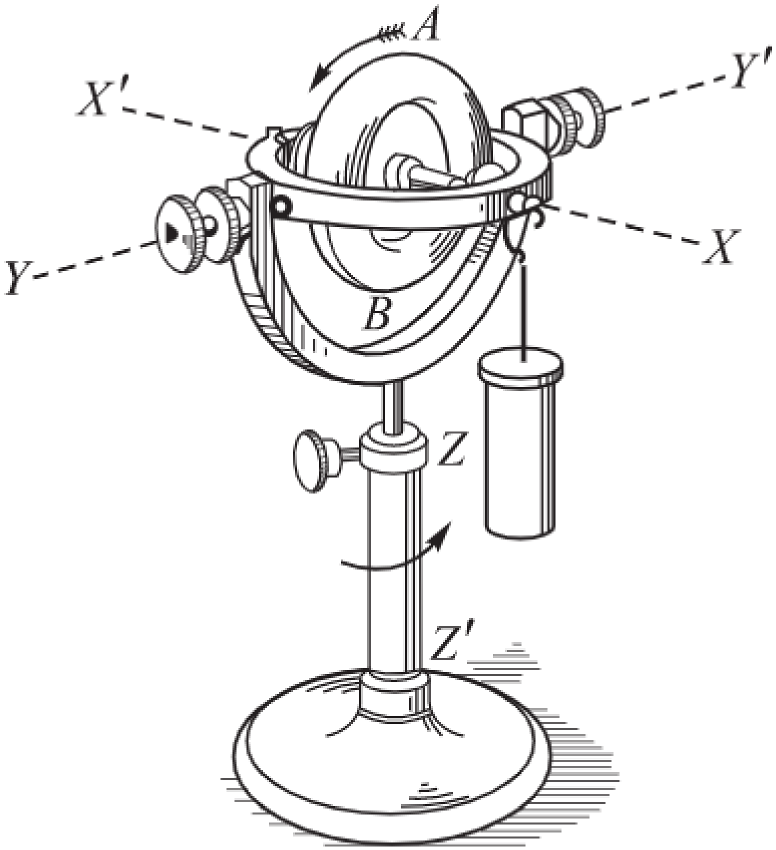
В любом теле существуют 3 взаимно перпендикулярные свободные оси, которые пересекаются в центре масс. Эти оси называют **главными осями инерции тела**, а соответствующие моменты инерции I_1 , I_2 , I_3 — главными моментами инерции.

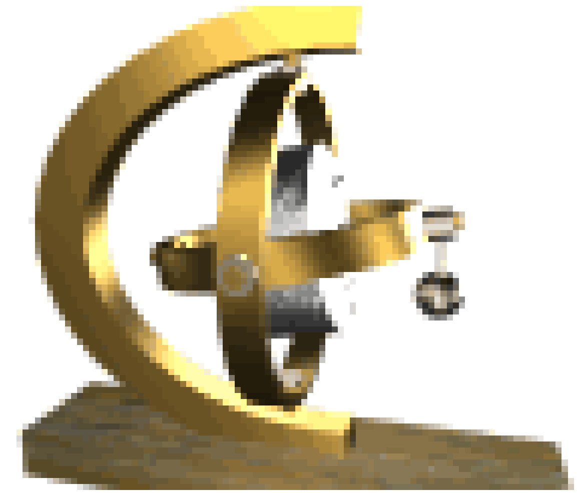
Для однородных тел вращения главными осями инерции являются оси симметрии.

$$\vec{L}_z = I_z\vec{\omega} = \text{const}$$

https://online.mephi.ru

Гироскоп





https://youtu.be/W6ii5GlLlNA?t=10

Рис. 5.12. Гироскоп в кардановом подвесе

$$d\vec{L} = \vec{M}dt$$

https://online.mephi.ru

Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики в 2 т. Том 1.

Факт 1. Сильно раскрутим колесо AB в указанном на рис. 5.12 направлении и подвесим к оси XX' груз. Казалось бы, рамка должна повернуться вокруг оси YY', колесо должно наклониться, а груз — опуститься. Так и произойдет в том случае, если зажать винт Z. Но если отпустить его, система поведет себе совсем иначе: вместо ожидавшегося наклона колеса гироскоп начинает вращаться вокруг оси ZZ'. Это вращение называется *прецессией*.

Факт 2. Если вместо постоянно подвешенного груза оказать на ось XX' кратковременное воздействие — стукнуть по ней, то гироскоп не изменит своего состояния, только ось XX' задрожит, начнет слегка покачиваться туда-сюда вокруг оси YY'.

Факт 3. Если вынуть рамку с вращающимся колесом из креплений YY', взять в руку и попытаться резко повернуть вокруг оси YY', т. е. риск, что гироскоп вырвется из рук незадачливого экспериментатора, стремясь повернуться вокруг оси ZZ'. Поступательное же перемещение рамки или ее вращение вокруг оси XX' никакого особого эффекта не производит.

Факт 4. Если поддерживать вращение стоящего на столе гироскопа долгое время, то направление оси XX' опишет по комнате полный круг за 24 часа.

Факт 5. Если зажать винтами ось YY' так, чтобы плоскость кольцевой рамки была горизонтальной, то ось XX' установится по меридиану данной местности и будет указывать на север.

Факт 6. Если отпустить винты и снова дать оси YY' возможность свободно вращаться, то ось XX' установится в плоскости меридиана, причем угол наклона ее к горизонтальной плоскости будет равен широте данной местности. Иными словами, ось XX' будет указывать на Полярную звезду.

Факт 7. Если взять подставку с гироскопом в руку и повальсировать с ней по комнате, то ось гироскопа все время будет указывать на Полярную звезду. Но если зажать винтом ось ZZ', то ось XX' гироскопа сразу же установится вертикально, параллельно оси вращения вальсирующего (см. рис. 5.13, *а*). При смене экспериментатором направления вращения ось гироскопа немедленно совершит сальто-мортале и снова встанет вертикально, но в противоположном направлении.

Факт 8. На рис. 5.13, *б* гироскоп с горизонтальной осью прецессирует вокруг оси ZZ' под действием собственного веса. Если ускорить прецессию, приложив к раме гироскопа горизонтальную силу, центр тяжести системы тут же начнет подниматься.

Сказанного достаточно, чтобы продемонстрировать, насколько необычно поведение гироскопа для человека, не столь хорошо знакомого с физикой вращательного движения. Однако, такое «противоестественное» поведение вытекает, как мы сейчас убедимся, из законов механики и используется на практике в множестве технических приложений.

Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики в 2 т. Том 1.

Гироскоп

https://youtu.be/IkcI5x7i19o?t=10

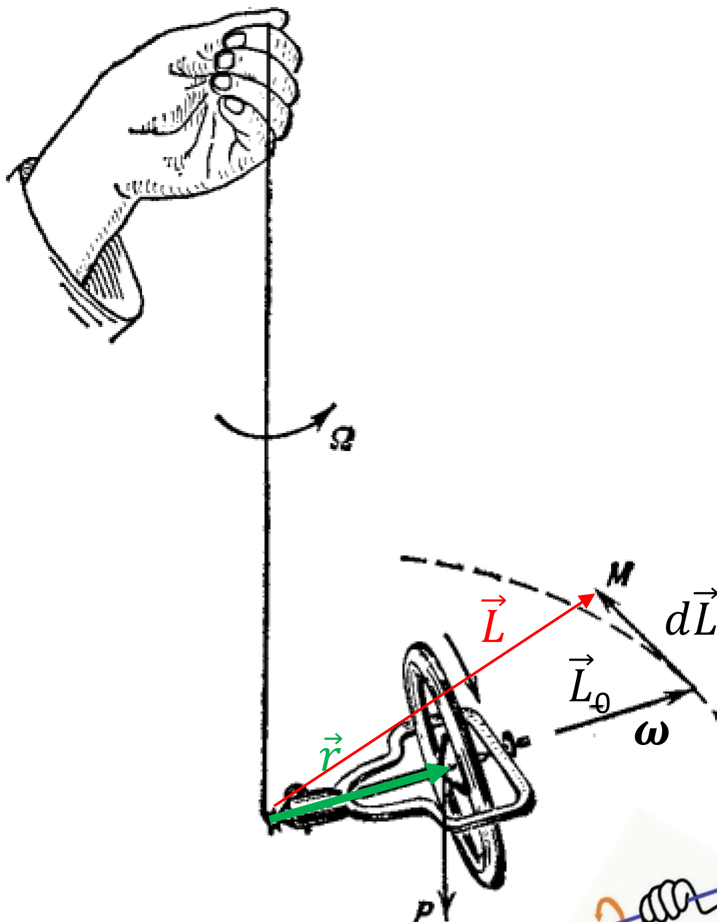
Подвешенный волчок

https://youtu.be/dJEAFOwOXSk?t=1647

Колесо на веревочке

https://youtu.be/hVQw_08n9rc?t=74

Велосипед с гироскопом на проволоке

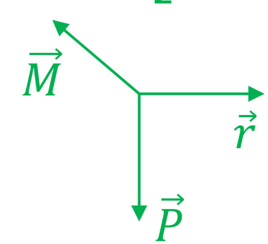


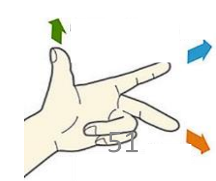
$$\vec{L} = \vec{L_0} + \mathrm{d}\vec{L}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$d\vec{L} = \vec{M}dt$$

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$$





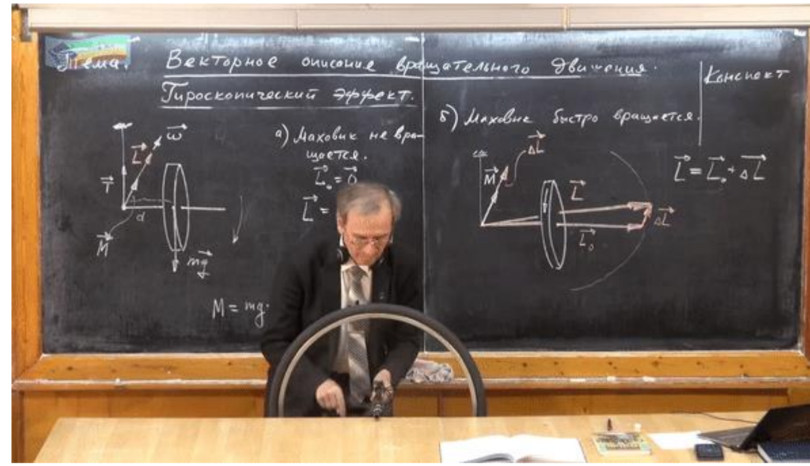
https://online.mephi.ru

Сивухин Д.В. Общий курс физики, том 1, Механика

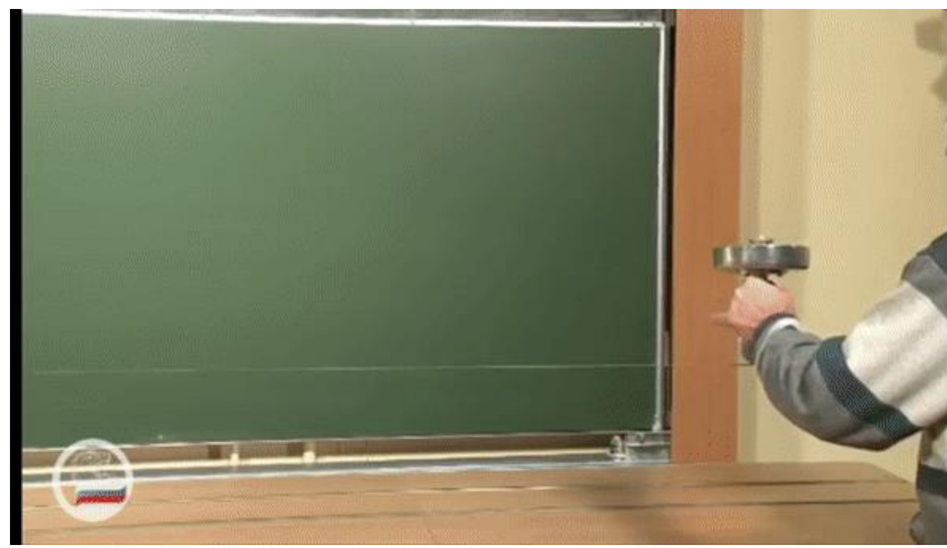
Гироскоп

https://youtu.be/Ikcl5x7i19o?t=10
Подвешенный волчок

https://youtu.be/dJEAFOwOXSk?t=1647 Колесо на веревочке

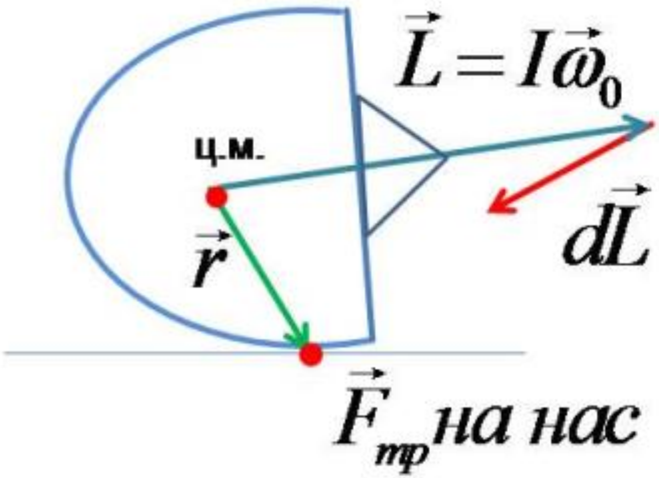


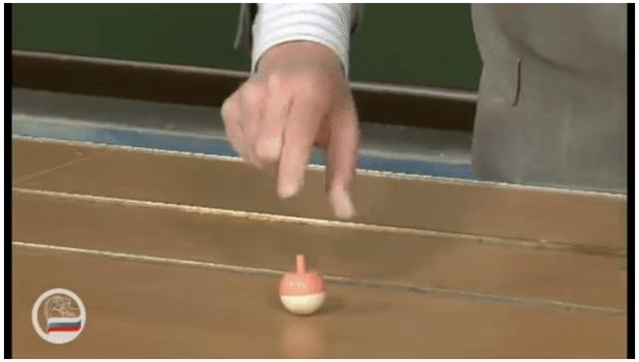
https://youtu.be/hVQw_08n9rc?t=74
Велосипед с гироскопом на проволоке



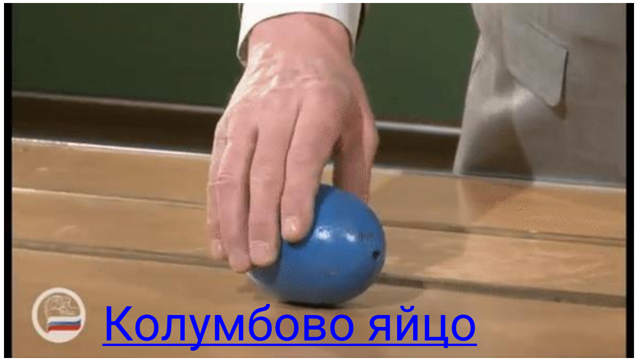
Китайский волчок.

Момент силы трения относительно центра масс заставляет волчок переворачиваться на ножку.





[Китайский волчок]



[Колумбово яйцо]

https://online.mephi.ru

С. А. Курашова