Лекция 5-6
Многомерные случайные величины

1. Совместная функция распределения. Маргинальные распределения.
2. Двумерная дискретная случайная величина.
3. Двумерная непрерывная случайная величина.
4. Независимые случайные величины.
5. Числовые характеристики двумерной случайной величины.

1. Совместная функция распределения случайных величин

Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ заданы на вероятностном пространстве $(\Omega, \boldsymbol{B}, P)$.

Определение 1

Совокупность с.в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется многомерной (n-мерной) случайной величиной или n-мерным вектором.

Обозначение: $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – координаты случайного вектора:

при $n=1$ $\vec{X}=X$ – одномерный случайный вектор;

при $n=2$ $\vec{X}=(X_1, X_2)$ – двумерный случайный вектор.

С каждым элементарным событием $\omega \in \Omega$ связан набор числовых значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$.

Обозначим событие:

$$\{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < x_2\} \cap \ldots \cap \{X_n < x_n\} =$$

$$= \{X_1 < x_1,\, X_2 < x_2, \ldots,\, X_n < x_n\}$$

Определение 2

Совместной (n-мерной) функцией распределения случайных величин $X_1, X_2,\ldots, X_n$ или функцией распределения (вероятностей) случайного вектора $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция, значение которой в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ равно вероятности пересечения событий $\{X_1 < x_1\}, \{X_2 < x_2\}, \ldots, \{X_n < x_n\}$, т.е.:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}$$

или

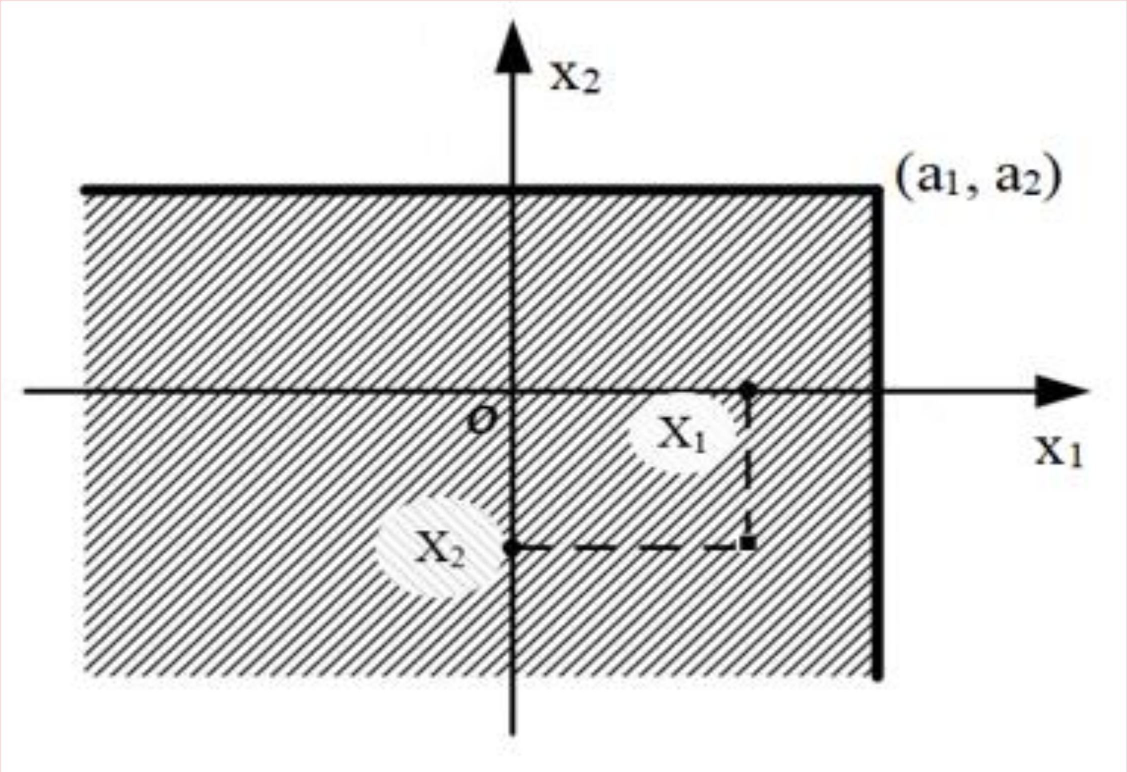
$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$\vec{X} = (X_1, X_2)$ – двумерный случайный вектор.

Двумерная функция распределения

$$F(x_1, x_2) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$$

$F(a_1, a_2) = P\{X_1 < a_1, X_2 < a_2\}$ – вероятность попадания т. (X_1, X_2) в квадрант с вершиной в т. (a_1, a_2)



Значение двумерной ф.р.

Свойства функции $F(x_1,x_2)$

Теорема 1

1. $0 \le F(x_1,x_2) \le 1$

2. $F(x_1,x_2)$ – неубывающая функция по каждому из x_1, x_2

3. $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$

4. $F(+\infty,+\infty) = 1$

5. $F(x_1,x_2)$ – непрерывная слева $\forall (x_1,x_2)\in \boldsymbol{R}^2$ по каждому из аргументов

6. $P(a_1 \le X_1 < b_1,\ a_2 \le X_2 < b_2) =$

$= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$

7. $F_{X_1,X_2}(x,+\infty) = F_{X_1}(x),\ \ F_{X_1,X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x)$

Функции $F_{X_1}(x)$ и $F_{X_2}(x)$ называются одномерными (частными или маргинальными) функциями распределения случайных величин X_1 и X_2.

Свойство 7 устанавливает связь между двумерной функцией распределения случайного вектора $\vec{X} = (X_1, X_2)$ и одномерными функциями распределения с.в. X_1 и X_2.

2. Двумерная дискретная случайная величина

Определение 3

Двумерная с.в. (X,Y) называется дискретной, если каждая из случайных величин X и Y является *дискретной*.

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$
(x_i, y_j) – координаты случайного вектора (X,Y)

Совместное распределение двумерной с.в.

Y / X	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}

Табл.1

– система двух дискретных случайных величин (X, Y), где X и Y – составляющие систему случайные величины.

Совместное распределение вероятностей двумерной дискретной с.в. (X, Y) – соответствие между возможными значениями координат (x_i, y_j) и их вероятностями $p_{ij} = p(x_i, y_j)$.

Обозначим: *Табл.1*

События $\{X=x_i, Y=y_j\}$, где $i=1\div n$, $j= 1\div m$ образуют полную группу несовместных событий, поэтому сумма их вероятностей равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

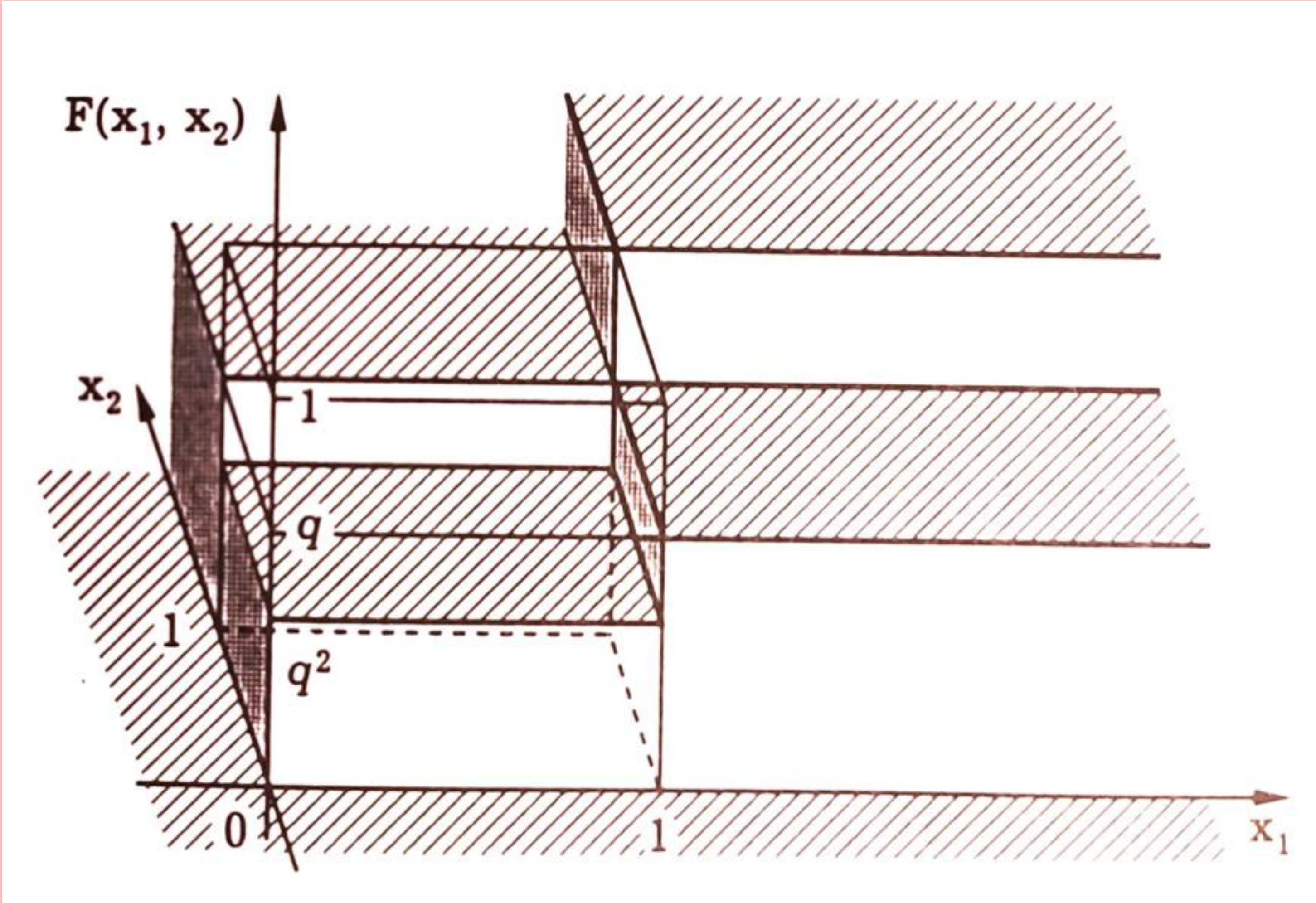
Совместная функция распределения

случайных величин X и Y:

$$F(x,y) = \sum_{\substack{i:\, x_i < x \\ j:\, y_j < y}} \boldsymbol{p_{ij}}$$

где суммирование p_{ij} ведется по всем тем значениям i и j, для которых $x_i < x$, $y_j < y$.

В *схеме Бернулли* $n=2$; случайный вектор $\vec{X} = (X,Y)$, где X,Y – число успехов в i-том эксперименте, $i=1,2$.



Совместная функция распределения

$F(x,y)$

Одномерные (маргинальные) распределения

Правило 1:

Для нахождения маргинального распределения с.в. X необходимо в первой строке таблицы записать значения x_i, а во второй – суммы соответствующих вероятностей i-той строки из *Табл.1*:

$$p(x_i) = p(x_i, y_1) + p(x_i, y_2) + \ldots + p(x_i, y_m)$$

где $i=1 \div n$.

Правило 2:

Для нахождения маргинального распределения с.в. Y необходимо в первой строке таблицы записать значения y_j, а во второй – суммы соответствующих вероятностей j-того столбца из *Табл.1*:

$$p(y_j) = p(x_1, y_j) + p(x_2, y_j) + \ldots + p(x_n, y_j)$$

где $j = 1 \div m$.

Условные законы распределения

(X, Y) – двумерная с.в.
Зафиксируем $Y{=}y_j$.

Определение 4

Условной вероятностью того, что $X{=}x_i$ при условии, что $Y{=}y_j$, называется условная вероятность события $\{X{=}x_i\}$ при условии события $\{Y{=}y_j\}$, т.е.

$$P(X{=}x_i\,/\,Y{=}y_j) = \frac{P(X{=}x_i\,, Y{=}y_j)}{P(Y{=}y_j)}$$

Обозначение: $p(x_i\,/\,y_j)$, $i{=}1 \div n$.

Условные вероятности вычисляют по формуле:

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_j}$$

Условный закон распределения с.в. X при условии, что $Y=y_j$, это соответствие между возможными значениями x_i и их условными вероятностями $p(x_i / y_j)$, $i=1 \div n$.

Зафиксируем $X = x_i$.

Обозначим условную вероятность того, что $Y = y_j$ при условии, что $X = x_i$:

$$p(y_j / x_i),\ \ j = 1 \div m\ .$$

Условные вероятности вычисляют по формуле:

$$p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}$$

Условный закон распределения с.в. Y при условии, что $X = x_i$, это соответствие между возможными значениями y_j и условными вероятностями $p(y_j / x_i),\ j = 1 \div m$.

3. Двумерная непрерывная случайная величина

Определение 5

Непрерывной двумерной случайной величиной (X, Y) называется с.в., *совместная функция распределения* которой имеет вид:

$$F(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_1} \cdot \int_{-\infty}^{x_2} f(y_1,y_2)\, dy_1\, dy_2$$, где

- интеграл справа сходится
- $f(y_1,y_2)$ – непрерывная (за исключением отдельных точек) функция по обоим аргументам.

$f(x_1,x_2)$ – *совместная двумерная плотность распределения* случайных величин X и Y.

По теореме о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом в точках непрерывности плотности имеем:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Совместная n*-мерная плотность распределения* случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, или *плотность распределения случайного вектора* $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$

Свойства функции $f(x_1,x_2)$

Теорема 2

1. $f(x_1,x_2)\geq 0$

2. $P(a_1< X < b_1,\ a_2 < Y < b_2) =$

$$=\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)\, dx_2$$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 =1$

4. $P(X=x_1,\ Y=x_2) = 0$

5. Маргинальная плотность распределения с.в. X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy$$

6. Маргинальная плотность распределения с.в. Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx$$

Замечание

Свойство 2 можно обобщить:

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

Условные законы распределения

*

Пусть $f(x,y)$, $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ – *непрерывные функции*.

Определение 6

Условной функцией распределения с.в. X при условии $Y=y$ называется функция

$$F_X(x\,/\,Y=y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} f(u,y)\, du$$

$f(x,y)$ – непрерывная $\Rightarrow F_X(x\,/\,Y{=}y)$ имеет *
производную по x, т.е. существует условная плотность распределения с.в. X при условии $Y{=}y$:

$$f_X(x\,/\,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Определение 7

*

Условной функцией распределения с.в. Y при условии $X=x$ называется функция

$$F_Y(y\,/\,X=x) = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{y} f(x,v)\,dv$$

Условная плотность распределения с.в. Y при условии $X=x$:

$$f_Y(y\,/\,x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

*

Условная функция распределения отражает только вероятностную (стохастическую) связь между случайными величинами.

Предсказать точное значение одной с.в. по значению другой, вообще говоря, невозможно.

4. Независимые случайные величины

Определение 8

Случайные величины X и Y называются независимыми, если их совместная функция распределения является произведением одномерных функций распределения:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

В противном случае случайные величины называются зависимыми.

С.в. X и Y независимы $\Rightarrow$ события $\{X< x\}$ и $\{Y< y\}$ являются независимыми.

Независимыми являются и все события $\{x_1\leq X< x_2\}$ и $\{y_2 \leq Y< y_2\}$.

Замечание

С.в. X и Y независимы $\Leftrightarrow$ независимы любые события $\{X\in A\}$ и $\{Y\in B\}$, где A и B – любые интервалы или объединения интервалов.

Определение 9

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, называются независимыми в совокупности, если

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

Теорема 3

Дискретные с.в X и Y независимы $\Leftrightarrow$ $\forall x_i$ и $\forall y_j$

$$p(x_i, y_j) = p(x_i).p(y_j)$$

или

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j$$

Теорема 4

Непрерывные с.в X и Y независимы $\Leftrightarrow$

$$\forall\ x,y \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

С.в. X и Y являются *независимыми* $\Leftrightarrow$ условное распределение (функция распределения, плотность распределения) с.в. X при условии $Y=y$ совпадает с безусловным распределением с.в. X.

В частности, дискретные с.в. являются независимыми $\Leftrightarrow$ условные вероятности совпадают с безусловными:

$$p(x_i / y_j) = p(x_i),\ i=1 \div n$$

5. Числовые характеристики двумерной случайной величины

Математическим ожиданием двумерной д.с.в. (X, Y) называется вектор $\vec{m} = (m_x, m_y)$, компоненты которого определяются по формулам:

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}$$

$$m_y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}$$

Дисперсией двумерной д.с.в. (X, Y) называется вектор $\overrightarrow{D} = (D_x, D_y)$, где:

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)^2 p_{ij}$$

$$D_y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (y_j - m_y)^2 p_{ij}$$

Ковариацией (корреляционным моментом) K_{xy} случайных величин X и Y называется число, равное математическому ожиданию произведения отклонений случайных величин от их математических ожиданий:

$$K_{xy} = M[(X - m_x)\cdot(Y - m_y)]$$

Обозначение: $cov(X, Y)$

Свойства ковариации

1. $K_{xy} = K_{yx}$
2. $K_{xx} = D_x$, $K_{yy} = D_y$
3. $K_{xy} = M[X \cdot Y] - M[X] \cdot M[Y]$
4. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \pm 2K_{xy}$
5. X и Y независимы $\Rightarrow K_{xy} = 0$
6. $|K_{xy}| \leq \sqrt{D_x}\sqrt{D_y}$

СР Доказательство:

1) Пусть $Z = \sigma_y X - \sigma_x Y$, найдем D_z.

$$D_z = M[(Z - m_z)^2] = M[Z^2] - 2m_z^2 + m_z^2 =$$

$$= M[Z^2] - (M[Z])^2 = M[\sigma_y^2 X^2 - 2\sigma_x\sigma_y XY + \sigma_x^2 Y^2] -$$

$$- (\sigma_y M[X] - \sigma_x M[Y])^2 =$$

$$= \sigma_y^2 M[X^2] - 2\sigma_x\sigma_y M[XY] + \sigma_x^2 M[Y^2] - \sigma_y^2 (M[X])^2 +$$

$$+ 2\sigma_x\sigma_y M[X]M[Y] - \sigma_x^2 (M[Y])^2 =$$

$$= \sigma_y^2 (M[X^2] - m_x^2) - 2\sigma_x\sigma_y (M[XY] - M[X]M[Y]) +$$

$$+ \sigma_x^2 (M[Y^2] - m_y^2) = \sigma_y^2 D_x - 2\sigma_x\sigma_y K_{xy} + \sigma_x^2 D_y =$$

$$= \sigma_y^2 \sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_y K_{xy} + \sigma_x^2 \sigma_y^2$$

$$D_z = 2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y K_{xy} \geq 0 \Rightarrow K_{xy} \leq \sigma_x\sigma_y$$

2) Аналогично, для $Z = \sigma_y X + \sigma_x Y$, получаем $K_{xy} \geq -\sigma_x \sigma_y$

3) Таким образом, $-\sigma_x \sigma_y \leq K_{xy} \leq \sigma_x \sigma_y$ или

$$|K_{xy}| \leq \sqrt{D_x}\sqrt{D_{\boldsymbol{y}}}$$

7. $|K_{xy}| = \sqrt{D_x}\sqrt{D_y} \Leftrightarrow \exists\, a, b \in \boldsymbol{R}$:

$$Y = aX - b$$

СР

Замечание:

если X и Y связаны *линейной зависимостью* $Y = aX - b$, $a \neq 0$,

то

$$K_{xy} = a\, K_{xx} = a\, D[X]$$

Вывод

Знак ковариации совпадает со знаком коэффициента a.

Формулы для расчетов

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x) \cdot (y_j - m_y) p_{ij}$$

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - m_x m_y$$

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dxdy$$

Определение 10

Случайные величины X и Y называются некоррелированными, если их ковариация равна нулю, т.е.

$$K_{xy} = 0$$

Замечания:

1. $K_{xy} = 0 \not\Rightarrow X$ и Y – независимые. О зависимости X и Y *сделать никакого вывода нельзя.*

2. $K_{xy} \neq 0 \Rightarrow X$ и Y заведомо *зависимы.*

Коэффициентом корреляции r_{xy} с.в. X и Y называется число, равное отношению ковариации этих величин к произведению их средних квадратических отклонений:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Свойства коэффициента корреляции

1. $r_{xx} = 1$

2. X и Y независимы и существуют $D[X], D[Y] \Rightarrow r_{xy} = 0$

3. $|\, r_{xy} \,| \le 1$

4. $|r_{xy}|=1 \Leftrightarrow \exists\, a,b\in \boldsymbol{R}$, что $Y = aX+b$ с вероятностью 1,

причем $a>0 \Leftrightarrow r_{xy}=1$, $a<0 \Leftrightarrow r_{xy}=-1$

Имеет место функциональная зависимость с.в. Y от с.в. X – по значению одной с.в. можно однозначно определить значение другой.

- при $r_{xy}>0$ говорят о *положительной* корреляционной зависимости с.в. X и Y
- при $r_{xy}<0$ – об *отрицательной*.

Вывод:

ковариация и коэффициент корреляции характеризуют степень линейной зависимости случайных величин.

Чем больше $|r_{xy}|$, тем более линейна зависимость между величинами X и Y.

Вывод:

из некоррелированности случайных величин не следует их независимость.

Ковариация (коэффициент корреляции) случайных величин отражает, насколько их зависимость близка к *линейной*.

Рассмотрим n-мерный случайный вектор $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Определение 11

Матрицей ковариаций (ковариационной матрицей) случайного вектора $\vec{X}$ называется матрица

$$\Sigma = (\sigma_{ij}) = (cov(X_i, X_j)), \quad i,j = 1 \div n$$

состоящая из ковариаций случайных величин X_i и X_j.

Свойства матрицы ковариаций

1. Матрица Σ – симметрическая.

2. Пусть $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ m-мерный случайный вектор, такой, что

$$\vec{Y} = \vec{X} \cdot A + \vec{b}$$

Тогда матрица ковариаций случайного вектора $\vec{Y}$:

$$\Sigma_{\vec{Y}} = A^T \cdot \Sigma_{\vec{X}} \cdot A$$

3. Матрица ковариаций Σ неотрицательно определена, т.е.

$$\forall \vec{a} \quad \vec{a} \cdot \Sigma \cdot \vec{a}^{\,T} \geq 0$$

Замечание

Если ранг r матрицы Σ $r < n$, то среди случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ровно r таких, что остальные $n - r$ случайных величин являются их *линейной комбинацией*.

Определение 12

Корреляционной (нормированной ковариационной) матрицей случайного вектора $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется матрица

$$P = (r_{xy}) = (r\,(X_i,\, X_j)),\ \text{где}\ \ i,\, j = 1 \div n$$

состоящая из коэффициентов корреляции случайных величин X_i и X_j.

Корреляционная матрица порядка n имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Условные характеристики с.в.

Условным математическим ожиданием одной из случайных величин X или Y двумерной д.с.в. (X, Y) называется ее математическое ожидание, вычисленное при условии, что другая с.в. приняла определенное значение, т.е.:

$$\mathrm{M}(X / Y{=}y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i / y_j),$$

где $p(x_i / y_j) = \dfrac{p_{ij}}{p(y_j)}$

– *среднее значение* с.в. X при условии, что $Y{=}y_j$.

Значение $\mathrm{M}(X / y_j)$ зависит только от значения y_j.

Определение 13

Условным математическим ожиданием д.с.в. X относительно д.с.в. Y называется функция

$$\mathrm{M}(X / Y) = g(Y)$$

случайной величины Y, где область определения функции есть $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, а каждому значению аргумента y_j поставлено в соответствие число

$$g(y_j) = \mathrm{M}(X / y_j)$$

Функция $g(y)$, выражающая зависимость, *в среднем*, с.в. X от значений с.в. Y называется **регрессией X на Y**.

Её график – *линия регрессии* X на Y.

$$\mathrm{M}(Y / X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p(y_j / x_i),$$

$$\text{где } p(y_j / x_i) = \frac{p_{ij}}{p(x_i)}$$

– *среднее значение* с.в. Y при условии, что $X = x_i$.

Функция $\mathrm{M}(Y / X) = h(X)$ случайной величины X, где область определения функции есть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, а каждому значению аргумента x_i поставлено в соответствие число

$$h(x_i) = \mathrm{M}(Y / x_i)$$

Функция $h(x)$ выражающая зависимость *в среднем* с.в. Y от значений с.в. X называется регрессией Y на X.

Её график – *линия регрессии* Y на X.

Условная функция распределения отражает только *вероятностную* (*стохастическую*) *связь* между случайными величинами.

Предсказать точное значение одной с.в. по значению другой, вообще говоря, невозможно.