

# Seminar 8

## Введение в классическую механику

Victor Ivanov Yu.\*

### Аннотация

Physics and Mathematics

## Содержание

<b>1</b>	<b>Колебания</b>	<b>1</b>
1.1	Простое гармоническое движение . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Упражнения</b>	<b>2</b>

## 1 Колебания

### 1.1 Простое гармоническое движение

Рассмотрим простое гармоническое движение – это движение, которое совершает частица под действием силы  $F(x) = -kx$ . Классическая система, совершающая простое гармоническое движение, представляет собой массу, прикрепленную к безмассовой пружине, на столе без трения. Обычная пружина имеет силу вида  $F(x) = -kx$ , где  $x$  есть смещение от состояния равновесия. Это закон Гука, и он действует до тех пор, пока пружина не растягивается и не сжимается слишком сильно. В конце концов это выражение перестает быть справедливым к любой настоящей пружине. Но если мы предположим, что сила  $-kx$ , то  $F = ma$  дает  $-kx = m\ddot{x}$ , или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1)$$

где  $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Это обычное линейное дифференциальное уравнение с очевидным решением

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (2)$$

Это тригонометрическое решение показывает, что система вечно колеблется вперед и назад во времени.  $\omega$  – угловая частота. Если  $t$  увеличивается на  $2\pi/\omega$ , тогда аргумент косинуса увеличивается на  $2\pi$ , таким образом, положение и скорость возвращаются к тем значениям, какие они были раньше. Период (время для одного полного цикла), следовательно, есть  $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$ . Частота в циклах за секунду (герцы) есть  $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ . Постоянная  $A$  (или лучше сказать абсолютное

---

\*VI

значение  $A$ , если  $A$  отрицательно) есть амплитуда, то есть, это максимальное расстояние, на которое масса может сдвинуться от начала (от равновесия). На всякий случай отмечу, что скорость, как функция времени есть

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \quad (3)$$

Постоянные  $A$  и  $\phi$  определяются начальными условиями.

## 2 Упражнения

**Задача 2.1.** Некоторая точка движется вдоль оси  $x$  по закону  $x = A \sin^2(\omega t - \pi/4)$ . Найти амплитуду и период колебаний, а также проекцию скорости  $v_x(x)$ .

Решение. Elementary ■

**Задача 2.2.** Частица массы  $m$  находится в одномерном силовом поле, где ее потенциальная энергия зависит от координаты  $x$ , как  $U(x) = U_0(1 - \cos(ax))$ ,  $U_0$  и  $a$  – постоянные. Найдите период малых колебаний частицы около положения равновесия.

Решение. Elementary ■

**Задача 2.3.** Определить период малых колебаний шарика, подвешенного на нерастяжимой нити длины  $l = 20$  см, если он находится в идеальной жидкости, плотность которой в  $\eta = 3$  раза меньше плотности шарика.

Решение. Elementary ■

**Задача 2.4.** Точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом  $T = 0.6$  с и с амплитудой  $A = 10$  см. Найти среднюю скорость точки за время, в течение которого она проходит путь  $A/2$ : 1) из крайнего положения; 2) из положения равновесия.

Решение. Elementary ■

**Задача 2.5.** Шарик подвесили на нити длины  $l$  к точке  $O$  стенки, составляющей небольшой угол  $\alpha$  с вертикалью. Затем нить с шариков отклонили на небольшой угол  $\beta > \alpha$  и отпустили. Считая удар шарика о стенку упругим, найти период колебаний такого маятника.

Решение. Elementary ■

**Задача 2.6.** Рассмотрим простое (приблизительно) гармоническое движение – простой маятник, то есть объект некоторой массы, который висит на безмассовой струне и качается в вертикальной плоскости. Пусть длина маятника равна  $l$ , а  $\theta(t)$  – угол, который струна образует с вертикалью. Найти  $\theta(t)$ , в предположении, что амплитуды осцилляций малы. Чему равен период колебаний?

Решение. Elementary ■

**Задача 2.7.** Среднее (в течение времени) натяжение струны маятника больше или меньше  $mg$ ? На сколько? Как обычно, предполагаем, что угловая амплитуда  $A$  мала.

*Решение.* Elementary ■

**Задача 2.8.** *Человек идет с постоянной скоростью  $v$  на восток относительно вращающегося стола, который вращается против часовой стрелки с постоянной частотой  $\omega$ . Человек идет по этому столу. Найдите общее выражение для координат человека относительно земли (при этом направление  $x$  возьмите на восток).*

*Решение.* Elementary ■

«Understanding is, after all, what science is all about – and science is a great deal more than mindless computation» – **Roger Penrose**