Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет безопасности информационных технологий

Дисциплина:

«Дифференциальные уравнения»

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

Вариант 14

Выполнил:

Суханкулиев Мухаммет,

студент группы N3246, поток ДУ 22 N.3

____

(подпись)

Проверила:

Мысляева Диана Владимировна,

ассистент, НОЦ математики

____

(отметка о выполнении)

____

(подпись)

Санкт-Петербург

2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ И С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Условие

Исследовать устойчивость положений равновесия с помощью системы первого приближения.

14. $\begin{cases} \dot{x} = e^{2x+2y} + x \\ \dot{y} = \arccos(x - x^3) - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Решение

Найдем сначала положения равновесия системы. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} e^{2x+2y} + x = 0 \\ \arccos(x - x^3) - \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

из второго уравнения:

$$x - x^3 = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1$$

подставим найденные значения в первое уравнение:

$$\begin{cases} e^{2\cdot 0+2y} + 0 = 0 \\ e^{2\cdot 1+2y} + 1 = 0 \\ e^{2\cdot(-1)+2y} + (-1) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y \notin \mathbb{R} \\ y \notin \mathbb{R} \\ e^{2\cdot(-1)+2y} = 1 => -2 + 2y = 0 => y = 1 \end{cases}$$

Решение системы: $(x, y) = (-1, 1)$, то есть положение равновесия: $(-1, 1)$.

Исследуем устойчивость этого положения равновесия. С этой целью в автономной системе сделаем замену $x + 1 = x_1, y - 1 = y_1$ и правые части полученной системы разложим по формуле Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$, являющейся положением равновесия новой системы. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x_1} = e^{2(x_1-1)+2(y_1+1)} + x_1 - 1 = e^{2x_1+2y_1} + x_1 - 1 \\ \dot{y_1} = \arccos(x_1 - 1 - (x_1 - 1)^3) - \dfrac{\pi}{2} = \arccos(-x_1^3 + 3x_1^2 - 2x_1) - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 1 + 2y_1 + o(y_1^2) + 2x_1\big(1 + 2y_1 + o(y_1^2)\big) + o(x_1^2) + x_1 - 1 = 3x_1 + 2y_1 + 4xy \\ \dot{y_1} = \dfrac{\pi}{2} + 2x_1 + o(x_1^2) - \dfrac{\pi}{2} = 2x_1 \end{cases}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 4$$

Следовательно, положение равновесия $(-1, 1)$ является неустойчивым.

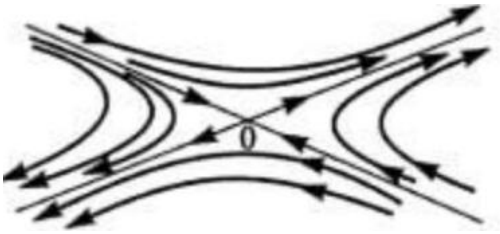

Рисунок 1 – Неустойчивая точка покоя (седло) (тут центр $(-1, 1)$, а не 0)

Ответ

Положение равновесия $(-1, 1)$ является неустойчивым (седло).

2 УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И СИСТЕМ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Условие

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение.

14. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y \end{cases}$

Решение

Положение равновесия $(0, 0)$.

Линеаризуем систему (1-е приближение):

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = -x + 3y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = 3$$

Следовательно, нулевое решение данной системы неустойчиво (седло) (Рисунок 1 –).

Ответ

По теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению нулевое решение данной системы неустойчиво (седло).

3 ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА. ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА И ЧЕТАЕВА

Условие

Исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева.

14. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3 \end{cases}$

Решение

Положение равновесия $(0, 0)$.

Выберем функцию Ляпунова $V = ax^2 + by^2$. Она положительно определена.

Вычислим производную по траекториям системы:

$$V' = 2axx' + 2byy'$$

Подставим $x' = \dot{x}, y' = \dot{y}$

$$V' = 2ax(y - x + xy) + 2by(x - y - x^2 - y^3) =$$
$$= 2axy - 2ax^2 + 2ax^2y + 2bxy - 2by^2 - 2bx^2y - 2by^4 =$$
$$= 2(a + b)xy + 2(a - b)x^2y - 2ax^2 - 2by^2 - 2by^4$$

] $a = b > 0,$ тогда

$$V' = 4axy - 2ax^2 - 2ay^2 - 2ay^4 = -2a(x - y)^2 - 2ay^4 < 0$$

То есть V' отрицательно определена.

По теореме Ляпунова об устойчивости при $V > 0$ и $V' < 0$ точка покоя асимптотически устойчива.

Ответ

Нулевое решение системы является асимптотически устойчивым.

4 УСЛОВИЯ РАУСА-ГУРВИЦА. КРИТЕРИЙ МИХАЙЛОВА

Условие

Исследовать устойчивость нулевого решения, пользуясь известными условиями отрицательности вещественных частей всех корней многочлена, например, условиями Рауса-Гурвица или критерием Михайлова.

14. $y^V + 4y^{IV} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0$

Решение

Рассмотрим характеристический многочлен:

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 16\lambda^3 + 25\lambda^2 + 13\lambda + 9 = 0$$

Построим матрицу Гурвица для 5-го порядка:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 16 & 4 & 1 & 0 \\ 9 & 13 & 25 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Критерий Рауса-Гурвица требует, чтобы все главные миноры матрицы Гурвица были положительны:

$\Delta_1 = 4 > 0$

$\Delta_2 = 64 - 25 = 39 > 0$

$\Delta_3 = 25\Delta_2 - 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} = 975 - 4 \cdot 43 = 803 > 0$

$\Delta_4 = 13\Delta_3 - 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 25 & 16 & 1 \\ 9 & 13 & 16 \end{vmatrix} = 10439 - 9 \cdot (1024 + 9 - 452) = 5210 > 0$

$\Delta_5 = 9\Delta_4 > 0$

Все миноры Гурвица положительны, следовательно, все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, что дает асимптотическую устойчивость.

Ответ

Нулевое решение уравнения асимптотически устойчиво.

5 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Условие

Для данной систеы найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

14. $\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$

Решение

Решим систему:

$$\begin{cases} (x-1)(y-1) = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

Положения равновесия: $(x, y) = (1, 2),\ (2, 1)$

Для $(1, 2)$:

Сделаем замену $x - 1 = x_1, y - 2 = y_1$:

$$\begin{cases} \dot{x} = (x_1 + 1 - 1)(y_1 + 2 - 1) = x_1 y_1 + x_1 \\ \dot{y} = (x_1 + 1)(y_1 + 2) - 2 = x_1 y_1 + 2x_1 + y_1 \end{cases}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Следовательно, положение равновесия $(1, 2)$ неустойчиво (узел).

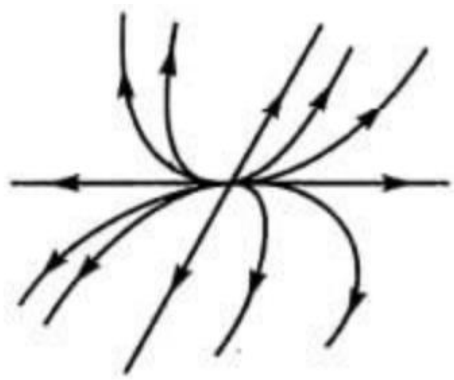

Рисунок 2 – Неустойчивая точка покоя (узел)

Для положения $(2, 1)$ матрица будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{2} + 1, \qquad \lambda_2 = \sqrt{2} + 1$$

Собственные числа имеют противоположный знак, следовательно, точка покоя неустойчива (седло) (Рисунок 1 –).

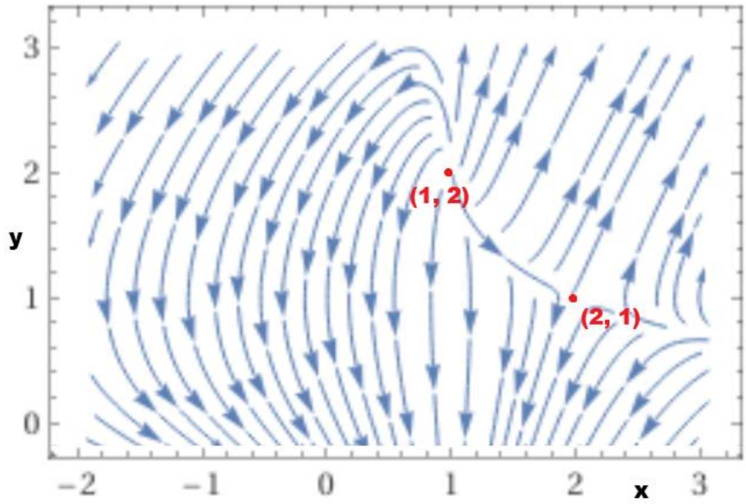

Рисунок 3 – Фазовый портрет

Ответ

Положение равновесия $(1, 2)$ является неустойчивым узлом.

Положение равновесия $(2, 1)$ является седлом.

6 ПОВЕДЕНИЕ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМЫ

Условие

Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для следующей системы:

14. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + ax\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) \\ \dot{y} = -2x + ay\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) \end{cases}$

Решение

При $a = 0$ имеем линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

Это система, в которой траектории являются прямыми линиями.

Собственные значения системы $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$.

Точка равновесия $(0, 0)$ для системы при $a = 0$ является неустойчивой.

Пусть $a \neq 0$. После перехода к полярным координатам $x(t) = r(t)\cos(t)$, $y(t) = r(t)\sin(t)$ получаем

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{x\big(2x + ax(1-r)(2-r)\big) + y\big(-2x + ay(1-r)(2-r)\big)}{r} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2ax^2 - 2xy + 2ay^2}{r} - 3ax^2 + arx^2 - 3ay^2 + ary^2 =$$

$$= \frac{2x^2 - 2xy}{r} + ar(r-1)(r-2) =$$

$$= r\big(2\cos^2\varphi - \sin 2\varphi + a(r-1)(r-2)\big)$$

Исследуем поведение $\dot{r}$ от r, ключевой член $a(r-1)(r-2)$:

Для выражения $2\cos^2\varphi - \sin 2\varphi \in [0 - 1, 2 + 1] = [-1, 3]$, то есть угловая часть колеблется в пределах $[-1, 3]$.

Рассмотрим ключевой член (радиальная часть):

Для $a > 0$:

Парабола $a(r-1)(r-2)$ положительная при $r \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$, отрицательна при $r \in (1, 2)$.

Слагаемое $\dot{r} = r(\dots)$ может менять знак в зависимости от r. Это создает кольцевую область, в которой:

$\dot{r} > 0$ – внешние траектории «расползаются»

$\dot{r} < 0$ в промежутке – притяжение внутрь.

По теореме Пуанкаре-Бендиксона, внутри такой области будет предельный цикл.

Внутри цикла: стремятся к циклу, снаружи: тоже притягиваются к нему.

Для $a < 0$:

Парабола $a(r-1)(r-2)$ отрицательна при всех $r \in \mathbb{R}$.

Во всей фазовой плоскости $\dot{r} < 0$.

Все фазовые траектории «сжимаются» внутрь, при этом $r \to 0$ при $t \to \infty$, то есть все стремится к началу координат.

Ответ

При $a = 0$ система имеет линейную структуру с центром в $(0, 0)$.

При $a < 0$ все траектории стремятся к бесконечности, то есть неустойчиво.

При $a > 0$ Фазовые траектории стремятся к устойчивым предельным циклам $r = 1$ или $r = 2$ в зависимости от начальных условий.

7 УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Условие

Решить начально-краевую задачу для уравнения струны:

14. $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u'_t(x,0) = x \end{cases}$$

Решение

Уравнение содержит неоднородную правую часть. Применим классический метод: представим решение в виде суммы:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

где $v(x,t)$ удовлетворяет однородному равнению волнового типа, а $w(x) -$ стационарному решению, компенсирующему неоднородность. То есть $w(x) -$ частное решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1$, такое, что $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$, и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Найдем $w(x)$:

Потребуем, чтобы:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + 1 = 0, \qquad w(0) = w(1) = 0$$

Решим:

$$w''(x) = -1 \Rightarrow w'(x) = -x + C_1 \Rightarrow w(x) = -\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Подставим граничные условия:

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$w(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$

Итак:

$$w(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

Теперь функция $v(x,t) = u(x,t) - w(x)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению с тему же граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \end{cases}$$

но с начальными условиями:

$$\begin{cases} v(x,0) = u(x,0) - w(x) = -w(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} \\ v_t(x,0) = u_t(x,0) = x \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\pi n t) + B_n \sin(\pi n t) \sin(\pi n x))$$

Подставим начальные условия:

$$v(x,0) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi n x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

Разложим в ряд Фурье:

$$A_n = 2\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \sin(\pi n x)\, dx = \int_0^1 (x^2 - x) \sin(\pi n x)\, dx$$

Интегрируем по частям:

$$A_n = \begin{Bmatrix} u = x^2 - x & dv = \sin(\pi n x)\, dx \\ du = 2x - dx & v = -\dfrac{\cos(\pi n x)}{\pi n} \end{Bmatrix} = \int_0^1 \frac{(2x-1)\cos(\pi n x)}{\pi n} dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = 2x - 1 & dv = \cos(\pi n x)\, dx \\ du = 2dx & v = \dfrac{\sin(\pi n x)}{\pi n} \end{Bmatrix} = \int_0^1 \frac{2\sin(\pi n x)}{\pi n} dx = \begin{Bmatrix} z = \pi n x & x = \dfrac{z}{\pi n} \\ & dx = \dfrac{1}{\pi n} dz \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2} \cdot (-\cos z) = -\frac{2\cos(\pi n x)}{\pi^2 n^2} = \frac{2 \cdot (-1)^n - 2}{\pi^3 n^3}$$

Второе начальное условие:

$$v_t(x,0) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} B_n \pi n \sin(\pi n x) = x$$

Разложим x в ряд Фурье:

$$B_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^1 x \sin(\pi n x)\, dx$$

Рассчитаем интеграл:

$$\int_0^1 x \sin(\pi n x)\, dx = \begin{Bmatrix} u = x & dv = \sin(\pi n x)\, dx \\ du = dx & v = -\dfrac{\cos(\pi n x)}{\pi n} \end{Bmatrix} = \int_0^1 \frac{\cos(\pi n x)}{\pi n} dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} z = \pi n x & x = \dfrac{z}{\pi n} \\ & dx = \dfrac{1}{\pi n} dz \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \frac{\cos z}{\pi n} dz = \frac{\sin(\pi n x)}{\pi^2 n^2} = -\frac{(-1)^n}{\pi n}$$

Получаем:

$$B_n = -\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}$$

Запишем решение для $v(x,t)$:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} \cos(\pi n t) - \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2} \sin(\pi n t) \right] \sin(\pi n x)$$

Тогда полное решение:

Ответ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} \cos(\pi n t) - \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2} \sin(\pi n t) \right] \sin(\pi n x) \right) - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

8 УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Условие

Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности:

14. $\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u'_x(2,t) = 0 \\ u(x,0) = x^2 - 2x \end{cases}$

Решение

Приведем уравнение к каноническому виду:

$$2u_t = u_{xx} \Rightarrow u_t = \frac{1}{2}u_{xx}$$

Теперь используем метод разделения переменных. Ищем решение в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Подставим в уравнение:

$$X(x)T'(t) = \frac{1}{2}X''(x)T(t)$$

Разделим переменные:

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{2}\frac{X''}{X} = -\lambda$$

где λ − постоянная разделения. Получаем два ОДУ:

$$\begin{cases} X'' + 2\lambda X = 0 \\ T' + \lambda T = 0 \end{cases}$$

Из начальных граничных условий:

$$X(0) = 0, \qquad X'(2) = 0$$

Пусть $2\lambda = \mu^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\mu^2}{2}$. Тогда:

$$X'' + \mu^2 X = 0, \qquad X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$

Из условия $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$:

$$X(x) = B\sin(\mu x)$$

Из условия $X'(2) = 0$:

$$B\mu\cos(2\mu) = 0$$

$$\cos(2\mu) = 0$$

Следовательно:

$$2\mu = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{4}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda_n = \frac{\mu_n^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)^2 = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{32}$$

Соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{4}\right)$$

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t} = C_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{32}t}$$

Общее решение – сумма по n:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{32}t} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{4}\right)$$

Учтем начальное условие $u(x,0) = x^2 - 2x$:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{4}\right)$$

Далее нужно найти коэффициенты Фурье C_n, разлагая функцию начального условия

$$f(x) = x^2 - 2x$$

по ортогональной системе функций:

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{4}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \qquad x \in [0, 2]$$

Коэффициенты Фурье определяются формулой:

$$C_n = \frac{2}{\int_0^2 \phi_n^2(x)dx} \int_0^2 f(x)\phi_n(x)dx$$

Знаменатель (известный результат для полуволны синуса на $[0, 2]$):

$$\int_0^2 \sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi x}{4}\right) dx = 1$$

Следовательно:

$$C_n = \int_0^2 (x^2 - 2x) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{4}\right) dx$$

Обозначим $\alpha_n = \frac{(2n+1)\pi}{4}$. Тогда:

$$C_n = \int_0^2 (x^2 - 2x) \sin(\alpha_n x)\, dx$$

Найдем значение неопределенного интеграла (интегрирование по частям) (далее $\alpha_n = a$):

$$\int (x^2 - 2x)\sin(\alpha_n x)\,dx = \begin{Bmatrix} u = x^2 - 2x & dv = \sin(ax)\,dx \\ du = 2x - 2dx & v = -\dfrac{\cos(ax)}{a} \end{Bmatrix} =$$

$$= \int \frac{(2x-2)\cos(ax)}{a}dx = \begin{Bmatrix} u = 2x - 2 & dv = \cos(ax)\,dx \\ du = 2dx & v = \dfrac{\sin(ax)}{a} \end{Bmatrix} =$$

$$\int \frac{2\sin(ax)}{a}dx = \begin{Bmatrix} z = ax & x = \dfrac{z}{a} \\ & dx = \dfrac{1}{a}dz \end{Bmatrix} = \frac{2}{a}\int \frac{\sin z}{a}dz = -\frac{2\cos z}{a^2} = -\frac{2\cos(ax)}{a^2}$$

Подставим пределы интегрирования:

$$C_n = -\frac{2\cos(ax)}{a^2}\bigg|_0^2 = \frac{2a_n\sin(2a_n) + 2\cos(2a_n) - 2}{a_n^3}$$

Подставим обратно $\alpha_n = \frac{(2n+1)\pi}{4}$:

$$C_n = \frac{2\cdot\frac{(2n+1)\pi}{4}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) + 2\cos\left(2\cdot\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) - 2}{\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)^3} =$$

$$= \frac{32\pi(2n+1)\sin\left(\frac{2\pi n+\pi}{2}\right) + 128\cos\left(\frac{2\pi n+\pi}{2}\right) - 128}{(2\pi n+\pi)^3}$$

Итоговое решение:

Ответ

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{32}t}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{4}\right),$$

$$C_n = \frac{32\pi(2n+1)\sin\left(\frac{2\pi n+\pi}{2}\right) + 128\cos\left(\frac{2\pi n+\pi}{2}\right) - 128}{(2\pi n+\pi)^3}$$

9 УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Условие

Решить граничную задачу для оператора Лапласа в заданной области:

14. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \\ u(x,0) = \sin(4\pi x) \\ u(x,2) = u(2,y) = 0 \\ u(0,y) = \sin(\pi y) \end{cases}$$

Решение

Задача с неоднородными граничными условиями на двух сторонах. В таком случае используем метод суперпозиции, представив решение в виде суммы:

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$$

где:

$u_1 -$ решение с условием $u(x,0) = \sin(4\pi x)$, остальное – нули,

$u_2 -$ *решение с условием* $u(0,y) = \sin(\pi y)$, остальное – нули.

Решение для $u_1(x,y)$:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u_1(x,0) = \sin(4\pi x) \\ u_1(x,2) = u_1(0,y) = u_1(2,y) = 0 \end{cases}$$

Нужно найти:

$$u_1(x,y) = X(x)Y(y)$$

Подставляем в уравнение Лапласа:

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

Получаем уравнения:

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(2) = 0 \Rightarrow X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \qquad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$$

$$Y_n'' - \lambda_n Y_n = 0 \Rightarrow Y_n(y) = A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$$

С учетом $u_1(x,2) = 0 \Rightarrow Y_n(2) = 0 \Rightarrow \sinh(n\pi) \ne 0 \Rightarrow A_n = 0$. Не подходит.

Заменим $Y_n(y) = A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{2}(2-y)\right)$, тогда условие на $y = 2$ выполнено автоматически.

Сейчас имеем:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2}(2-y)\right)$$

Осталось учесть $u_1(x,0) = \sin(4\pi x)$:

$$u_1(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sinh(n\pi)$$

Разложим $\sin(4\pi x)$ в ряд Фурье по базису $\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ на $x \in [0, 2]$:

$$\frac{n\pi x}{2} = 4\pi x \Rightarrow n = 8$$

То есть, в разложении только один ненулевой член: $n = 8$
Используем ортогональность синусоид на отрезке:

$$A_n \sinh(n\pi) = \frac{2}{\int_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx} \int_0^2 \sin(4\pi x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

Считаем, что $\sin(4\pi x) = \sin\left(\frac{8\pi x}{2}\right)$, тогда:

$$\int_0^2 \sin^2(4\pi x)\, dx = 1$$

Следовательно:

$$A_8 \sinh(8\pi) = 1 \Rightarrow A_8 = \frac{1}{\sinh(8\pi)}$$

Тогда:

$$u_1(x, y) = \frac{\sin(4\pi x) \sinh\big(4\pi(2 - y)\big)}{\sinh(8\pi)}$$

Решение для $u_2(x, y)$:

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ u_2(0, y) = \sin(\pi y) \\ u_2(x, 0) = u_2(x, 2) = u_2(2, y) = 0 \end{cases}$$

Аналогично, ищем:

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(n\pi) \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$$

Сравниваем с $\sin(\pi y) = \sin\left(\frac{2\pi y}{2}\right) \Rightarrow n = 2$
Тогда:

$$B_n = \frac{1}{\sinh(2\pi)}$$

Получаем:

$$u_2(x, y) = \frac{\sin(\pi y) \sinh\big(\pi(2 - x)\big)}{\sinh(2\pi)}$$

Полное решение:

Ответ

$$u(x, y) = \frac{\sin(4\pi x) \sinh\big(4\pi(2 - y)\big)}{\sinh(8\pi)} + \frac{\sin(\pi y) \sinh\big(\pi(2 - x)\big)}{\sinh(2\pi)}$$

10 ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Условие

Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется:

14. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$

Решение

Найдем дискриминант Δ в нашей задаче. Так как $a_{11} = x^2, a_{12} = xy, a_{22} = y^2$, получаем:

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$$

Значит уравнение параболического типа во всем (за исключением осей $x = 0$ или $y = 0$, где оно вырождается).

В нашем случае характеристическое уравнение примет вид:

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \qquad |: x^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

Получаем полное квадратное уравнение:

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

Следовательно, есть только одна кратная характеристика:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{y}{x} = const$$

Пусть $\xi = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \xi x$

Так как уравнение параболическое, нам нужна вторая переменная, независимая от первой. Выберем любую (логарифм упрощает вывод канонической формы):

$$\eta = \ln x$$

Обозначим $u(x, y) = U(\eta, \xi)$. Тогда по цепному правилу:

$$u_x = \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$$u_x = U_\eta \cdot \frac{1}{x} + U_\xi \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$u_y = \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

$$u_y = U_\eta \cdot 0 + U_\xi \cdot \frac{1}{x}$$

теперь вычислим u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}:

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2U_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x} + U_{\eta\eta} \cdot \frac{1}{x^2} + U_\xi \cdot \frac{2y}{x^3} + U_\eta \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$u_{yy} = U_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$u_{xy} = U_{\xi\xi} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x} + U_{\xi\eta}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) + U_\xi \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Теперь подставим все это в исходное уравнение:

$$x^2\left(U_{\xi\xi} \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2U_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x} + U_{\eta\eta} \cdot \frac{1}{x^2} + U_\xi \cdot \frac{2y}{x^3} + U_\eta \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) +$$

$$+2xy\left(U_{\xi\xi} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x} + U_{\xi\eta}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) + U_\xi \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) +$$

$$+y^2\left(U_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$U_{\xi\xi} \cdot \frac{y^2}{x^2} + 2U_{\xi\eta} \cdot (-y) \cdot \frac{1}{x} + U_{\eta\eta} + U_\xi \cdot \frac{2y}{x} + U_\eta \cdot (-1) +$$

$$+U_{\xi\xi} \cdot \left(-\frac{2y^2}{x^2}\right) + U_{\xi\eta}\left(2y \cdot \frac{1}{x}\right) + U_\xi \cdot \left(-\frac{2y}{x}\right) +$$

$$+U_{\xi\xi} \cdot \frac{y^2}{x^2} = 0$$

$$U_{\eta\eta} - U_\eta = 0$$

Ответ

Уравнение, приведенное к каноническому виду во всех областях, где его тип сохраняется, имеет следующую форму:

$$U_{\eta\eta} - U_\eta = 0, \qquad \text{параболический тип}$$

При этом замены переменных:

$$\eta = \ln x\,, \qquad \xi = \frac{y}{x}$$

P.s. для решу ещё с заменой $\eta = x$, чтобы убедиться, что в любом случае получим канонический вид:

Пусть $\xi = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \xi x$

Нам нужна вторая переменная, независимая от первой. Выберем любую:

$$\eta = x$$

Обозначим $u(x, y) = U(\eta, \xi)$. Тогда по цепному правилу:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2U_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + U_{\eta\eta} + U_{\xi} \cdot \frac{2y}{x^3}$$

$$u_{yy} = U_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$u_{xy} = U_{\xi\xi} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x} + U_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{x} + U_{\xi} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Теперь подставим все это в исходное уравнение:

$$x^2 \left(U_{\xi\xi} \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2U_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + U_{\eta\eta} + U_{\xi} \cdot \frac{2y}{x^3}\right) +$$

$$+2xy \left(U_{\xi\xi} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x} + U_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{x} + U_{\xi} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) +$$

$$+y^2 \left(U_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$U_{\eta\eta} x^2 = 0$$

Деление на x^2 – допустимая операция в любом каноническом преобразовании, если тип уравнения сохраняется, и мы рассматриваем локальное поведение в области, где знаменатель не обращается в ноль.

Ответ

Уравнение, приведенное к каноническому виду во всех областях, где его тип сохраняется, имеет следующую форму:

$$U_{\eta\eta} = 0, \qquad \text{параболический тип}$$

При этом замены переменных:

$$\eta = x, \qquad \xi = \frac{y}{x}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А.И. Попов, И.Ю. Попов – Типовой расчет по теории устойчивости и уравнениям в частных производных
2. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. – Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями – Учебное пособие. Изд. 4-е., испр. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.