Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет безопасности информационных технологий

Дисциплина:

«Физика с элементами компьютерного моделирования»

ДОМАШНАЯ РАБОТА №5

Вариант 1

Выполнил:

Суханкулиев Мухаммет,

студент группы N3246

(подпись)

Проверил:

Бочкарев Михаил Эдуардович,

инженер, физический факультет

(отметка о выполнении)

(подпись)

Санкт-Петербург

2025 г.

1 ЗАДАЧА 1

1.1 Условие

Погрешность в измерении координаты электрона в опыте составила 10^{-10} м. Найти минимальную погрешность при измерении импульса электрона.

1.2 Дано

$$\Delta x = 10^{-10} \text{ м}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \qquad h \approx 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hbar \approx 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}\right)$$

$$\Delta p - ?$$

Задача аналитическая ⇒ без рисунка.

1.3 Решение

Принцип неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Эта формула – фундаментальное ограничение. Она показывает, что невозможно одновременно точно измерить координату и импульс частицы. Чем точнее измерена координата (Δx меньше), тем больше неопределённость импульса (Δp больше).

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

$$\Delta p \geq \frac{1.055 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 10^{-10}} \approx 5.275 \cdot 10^{-25} \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

Ответ:

Минимальная погрешность при измерении импульса электрона:

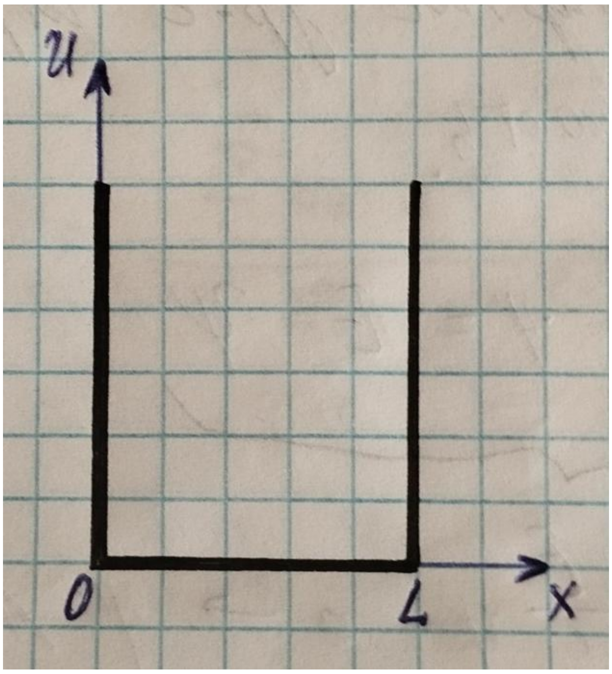
$$\Delta p \approx 5.275 \cdot 10^{-25} \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

2 ЗАДАЧА 2

2.1 Условие

Найти среднее значение оператора импульса для частицы в яме с бесконечным потенциальным барьером для состояния с уровнем энергии $n = 1$.

2.2 Дано



Бесконечно глубокая потанцевальная яма шириной L, или:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le L \\ \infty, & else \end{cases}$$

$$n = 1$$

Волновая функция для состояния n в такой яме:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Оператор импульса в координатном представлении:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\langle \hat{p} \rangle - ?$$

2.3 Решение

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \qquad \text{Пусть } \psi = \psi_1(x) \text{ (так как } \psi_1(x) \text{ – вещественна)}$$

Оператор импульса в координатном представлении в квантовой механике определяется через производную волновой функции. Среднее значение импульса определяется через скалярное произведение:

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_0^L \psi \hat{p} \psi dx$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_0^L \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) dx$$

$$\langle \hat{p} \rangle = -i\hbar \cdot \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

Производная:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) = \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = -i\hbar \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{\pi}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

Так как $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx$$

$\cos$ на границах 0 и L дает одинаковые значения, следовательно:

$$-\frac{L}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\Big|_0^L = 0, \qquad (\cos 0 = \cos 2\pi = 1)$$

А значит:

$$\langle \hat{p} \rangle = 0$$

Частица в яме с бесконечными стенками находится в стационарном состоянии, которое можно представить как суперпозицию двух бегущих волн с импульсами $+p$ и $-p$ (отражения от стенок). То есть вероятность найти частицу с положительным и отрицательным импульсом одинакова, а среднее значение – обнуляется.

Ответ:

Среднее значение оператора импульса для частицы в яме с бесконечным потенциальным барьером для состояния с уровнем энергии $n = 1$:

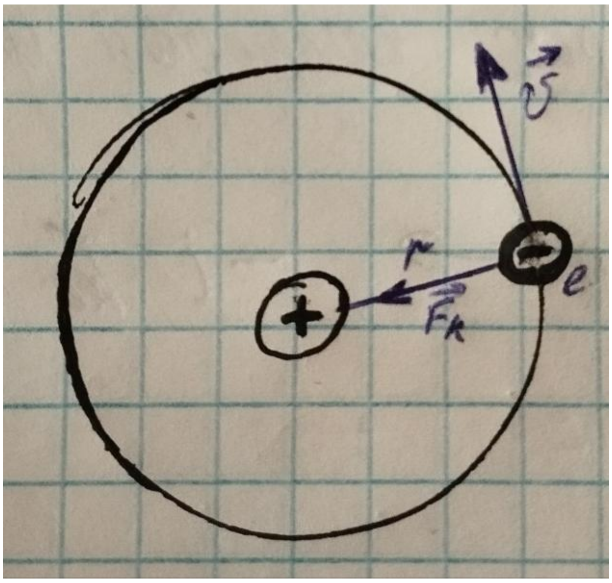
$$\langle \hat{p} \rangle = 0$$

3 ЗАДАЧА 3

3.1 Условие

Используя постулаты Бора для квантования момента импульса и считая, что электрон является классическим шариком в кулоновском потенциале $V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ (движется по окружности с центростремительным ускорением), определить уровни энергии электрона в такой системе.

3.2 Дано



Электрон массой m, зарядом $-q$, движется по окружности радиуса r

$$V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Квантование момента импульса (постулат Бора):

$mvr = n\hbar, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

$$E_n - ?$$

3.3 Решение

Кулоновская сила притяжения между электроном и ядром создаёт центростремительное ускорение:

$$F_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Из постулата Бора выразим:

$$v = \frac{n\hbar}{mr}$$

Подставим это в формулу выше:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{r^2} = \frac{m\left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2}{r}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q^2 = \frac{n^2\hbar^2}{mr}$$

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{mq^2}$$

Это радиус n-й боровской орбиты.

Полная энергия = кинетическая + потанцевальная:

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Также из первой формулы (из равенства центробежной и кулоновской сил):

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow mv^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Тогда:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Подставим радиус n-й боровской орбиты:

$$E_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{mq^2}} = -\frac{mq^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 n^2 \hbar^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ответ:

Уровни энергии электрона в такой системе:

$$E_n = -\frac{mq^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 n^2 \hbar^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Частный случай: энергия основного состояния водорода

$$n = 1, \qquad q = e, \qquad m = m_e$$

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \approx -13.6 \text{ эВ}$$

Её модуль называется энергией ионизации – минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из атома.