

Дисциплина

Теория вероятностей

Лекция 1-2

Вероятностное пространство

1. Случайные события. σ -алгебра событий.
2. Понятие вероятностной меры случайного события.
3. Понятие вероятностного пространства.
4. Свойства вероятностей.
5. Условная вероятность.

Литература

1. Теория вероятностей: Учеб. для вузов./ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Изд-во «Юрайт», 2020. <https://urait.ru/bcode/449646>
3. Горлач Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Изд-во «Лань», 2013. <http://e.lanbook.com/book/4864>

1. Случайные события. Сигма-алгебра событий

Случайный эксперимент:

- *непредсказуемость результата с абсолютной точностью,*
- *воспроизводимость (массовость),*
- *устойчивость относительных частот.*

Эксперимент: бросание монеты; результат: выпадение Г.

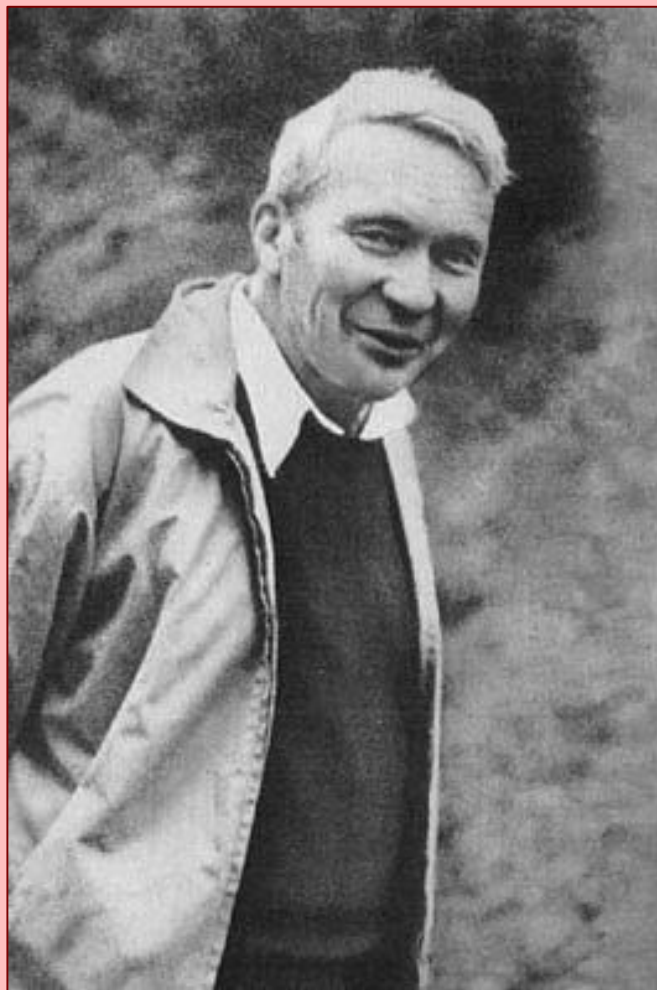
	Число бросаний n^*	Число выпадений Г m^*	Относительная частота Г
Ж. Бюффон	4040	2049	$\frac{2049}{4040} \approx 0,507$
К. Пирсон	24000	12012	$\frac{12012}{24000} \approx 0,5005$
В.И. Романовский	80640	39699	$\frac{39699}{80640} \approx 0,4923$

Относительная частота выпадения Г

$$\frac{m^*}{n^*} \approx 0,5$$

Устойчивость относительных частот позволяет, не имея возможности предсказать результат отдельного эксперимента, достаточно точно прогнозировать свойства событий, связанных с данным экспериментом.

Теория вероятностей – раздел математики, в котором изучают математические модели случайных экспериментов.



Андрей Николаевич
Колмогоров
1903 – 1987

Определение 1

Каждый результат случайного эксперимента называется **элементарным исходом (элементарным событием)**.

Обозначение: ω

Определение 2

Множество всех взаимоисключающих исходов случайного эксперимента называется **пространством элементарных событий (ПЭС)**.

Обозначение: Ω

Множество исходов образует ПЭС,
если:

- в результате эксперимента один из исходов обязательно происходит
- появление одного из исходов исключает появление всех остальных
- в данном эксперименте каждый исход неделим

Определение 3

Случайным событием называется произвольное подмножество ПЭС.

Обозначение: A, B, C, \dots

Элементарные исходы, которые являются элементами рассматриваемого случайного события, называются исходами, *благоприятствующими данному событию*.

Достоверное событие представляет собой совокупность всех элементарных исходов.

Обозначение: Ω

Невозможным событием называется пустое множество элементарных исходов.

Обозначение: \emptyset

Событие A **содержится** в событии B ,
если все элементарные события A
являются элементарными событиями B .

Обозначение: $A \subset B$

Определение 4

Объединением (суммой) двух событий A и B называется событие

$$A+B = \{ \omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B \}$$

Событие

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих хотя бы одному из событий A_n , где $n \in N$.

Определение 5

Пересечением (произведением) двух событий A и B называется событие

$$A \cdot B = \{ \omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B \}$$

Событие

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих всем событиям A_n , где $n \in N$.

Определение 6

Разностью двух событий A и B называется событие

$$A - B = \{ \omega : \omega \in A \text{ и } \omega \notin B \}$$

Определение 7

Дополнением (противоположным событием) события A называется событие

$$\overline{A} = \{ \omega : \omega \in \Omega \text{ и } \omega \notin A \}$$

СР

Основные свойства операций над событиями

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.

Определение 8

События A и B называются **несовместными**, если нет элементарных исходов, которые принадлежат как A , так и B , т.е.

$$A \cdot B = \emptyset$$

Определение 9

События A_1, A_2, \dots, A_n называются **попарно несовместными**, если любые два из них несовместны, т.е.

$$A_i \cdot A_k = \emptyset, \quad \text{где } i \neq k.$$

Определение 10

События A_1, A_2, \dots, A_n называются **несовместными в совокупности**, если

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = \emptyset$$

Определение 11

События A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу, если их сумма образует достоверное событие, т.е.

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$$

Обозначение:

Σ – булеан множества Ω .

Ω – конечно и $|\Omega|=n \Rightarrow |\Sigma|=2^n$

Пусть $A, B \in \Sigma$

Свойства операций на Ω

- $A+B \in \Sigma$
- $A \cdot B \in \Sigma$
- $\overline{A} \in \Sigma$

Вывод: $\langle \Sigma, +, \cdot, \overline{} \rangle$ – алгебра

Определение 3 допустимо, если Ω – *конечное* или *счетное* множество.

Если Ω – *несчетно*, то событиями называют только те подмножества из Ω , которые принадлежат некоторому классу \mathcal{B} .

Определение 12

Непустая система подмножеств B некоторого множества J , удовлетворяющая условиям:

$$1. A \in B \Rightarrow \bar{A} \in B$$

$$2. A_1, A_2, \dots, A_n \dots \in B \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in B$$

$$3. A_1, A_2, \dots, A_n \dots \in B \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots \in B$$

называется **сигма-алгеброй** (**σ -алгеброй**).

Замечание:

поскольку $J = A \cup \bar{A}$ и $\emptyset = \bar{J}$, то $J \in B$ и $\emptyset \in B$

Рассмотрим ПЭС Ω .

Событиями называются элементы некоторой σ -алгебры \mathcal{B} , заданной на Ω .

σ -алгебра \mathcal{B} называется **σ -алгеброй событий**.

Любая σ -алгебра событий включает достоверное событие Ω и невозможное событие \emptyset .

Например, множество Σ – σ -алгебра событий.

Пример

Эксперимент: бросание точки на числовую прямую $R = (-\infty, +\infty)$.

ПЭС $\Omega = R$.

Подмножества Ω : $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) .

Полагают, что σ -алгебра B содержит все эти интервалы.

Случайное событие $A = [a, b]$ – попадание точки на отрезок $[a, b]$.

2. Понятие вероятностной меры случайного события

Вероятность есть численная мера степени объективной возможности появления случайного события.

Обозначение: P или p

Такое определение вероятности в современной математике вводится на основании аксиом.

Классическое определение вероятности (классическая схема)

Пусть ПЭС $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$ – конечно.

Определение 13

Случайные события называются **равновозможными**, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие.

- Вероятностью $p_i(\omega_i)$ каждого элементарного исхода ω_i считают число $\frac{1}{n}$,
- вероятность события A , состоящего из m элементарных исходов ПЭС, определяют так:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}} \quad (1)$$

— классическое определение вероятности

где $n=|\Omega|$ – общее число исходов
случайного эксперимента,

$m=|A|$ – число исходов,
благоприятствующих событию A

Урновые схемы

Пусть есть ящик, в котором N пронумерованных шаров: $1, 2, \dots, N$
Эксперимент: выбор k шаров.

Возникает четыре схемы выбора:

1. *выбор без возвращения с учетом порядка*, тогда общее число исходов $n = A_N^k$
(число размещений из N по k);

2. *выбор без возвращения и без учета порядка*, тогда общее число исходов $n = C_N^k$ (число сочетаний из N по k);

3. *выбор с возвращением и с учетом порядка*, тогда общее число исходов $n = \overline{A}_N^k$ (число размещений с повторениями из N по k);

4. *выбор с возвращением и без учета порядка*, тогда общее число исходов $n = \overline{C}_N^k$ (число сочетаний с повторениями из N по k).

Свойства вероятности

1. $\forall A \in \Sigma \quad P(A) \geq 0$

2. $P(\Omega) = 1$

3. $A, B \in \Sigma$ и $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B)$

Геометрическое определение вероятности (геометрическая схема)

Пусть ПЭС Ω – бесконечное множество элементарных исходов, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$:

- при $n=1$ в \mathbf{R} рассматриваем подмножества, которые имеют длину;
- при $n=2$ в \mathbf{R}^2 – подмножества, которые имеют площадь;
- при $n=3$ в \mathbf{R}^3 (\mathbf{R}^n) – подмножества, которые имеют объем (обобщенный объем).

Под *мерой* множества $A \subset \Omega$ понимают его длину, площадь, ..., обобщенный объем.

Обозначение: $\lambda(A)$

Пусть:

- ПЭС Ω имеет конечную меру, т.е. $\lambda(\Omega) < +\infty$
- вероятность попадания случайно брошенной точки в любое подмножество Ω не зависит от его расположения и формы.

Говорят, что *случайное событие* A *наступило*, если случайно выбранная точка принадлежит подмножеству $A \subset \Omega$.

Определение 14

Геометрической вероятностью события A называется число $P(A)$, равное отношению меры множества A к мере множества Ω , т.е.

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} \quad (2)$$

Свойства вероятности

1. $\forall A \in \mathcal{B} \quad P(A) \geq 0$

2. $P(\Omega) = 1$

3. $A, B \in \mathcal{B}$ и $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B)$

Замечание:

в \mathbb{R}^n существуют подмножества, не имеющие меры. Поэтому в качестве событий A рассматривают только $A \in \mathcal{B}$.

3. Понятие вероятностного пространства

Аксиоматическое определение
вероятности
(А.Н. Колмогорова)

Рассмотрим определение вероятности события \forall ПЭС, основанное на свойствах вероятностей из всех предыдущих определений.

Пусть

Ω – ПЭС, B – σ -алгебра событий на Ω , $A \subset B$.

Определение 15

Функция $P(\cdot): B \rightarrow R$ называется **вероятностью** (**вероятностной мерой**), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

аксиома 1: $P(A) \geq 0$

аксиома 2: $P(\Omega) = 1$

аксиома 3: для любых попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ справедливо

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

Значение $P(A)$ называют **вероятностью** события A .

Замечание:

Ω – конечное или счетное множество.

$\forall \omega_i \rightarrow$ число $P(\omega_i)=p_i \geq 0$ так, что

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1.$$

Тогда $\forall A \subset \Omega$ вероятность $P(A)$ равна

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Определение 16

Тройка (Ω, \mathcal{B}, P) , где

Ω – ПЭС,

\mathcal{B} – σ -алгебра событий,

P – вероятностная мера, заданная на \mathcal{B} ,
называется **вероятностным пространством**.

(Ω, Σ, P) – простейшее вероятностное пространство.

4. Свойства вероятностей

Теорема 1

$$1. P(\emptyset) = 0$$

$$2. \forall A \in \mathcal{B} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

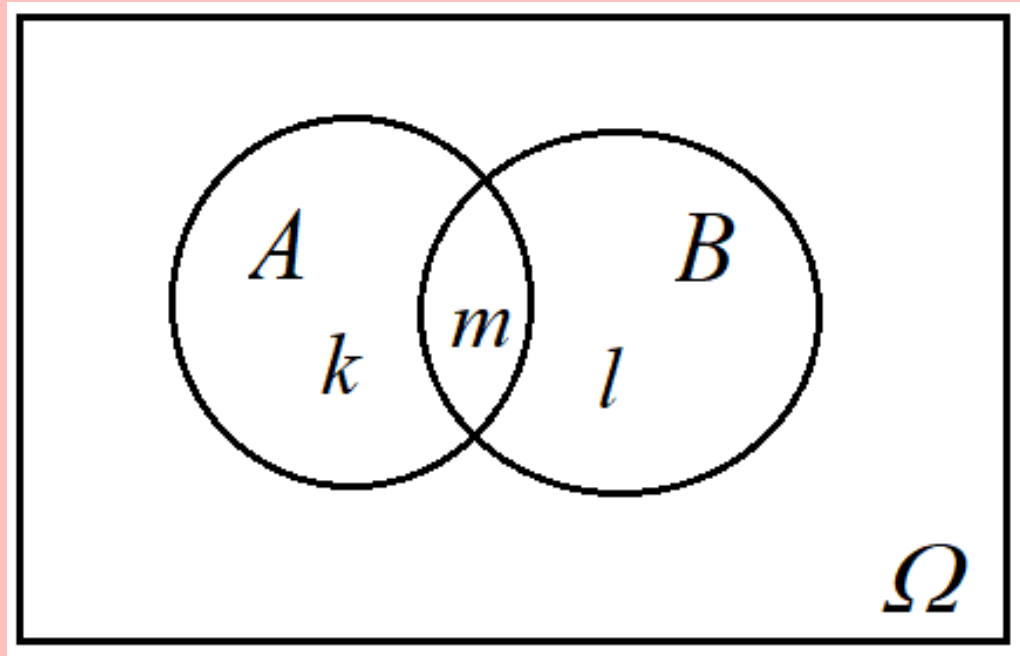
$$3. P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$4. A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Теорема 2 (сложения вероятностей для 2 событий)

Вероятность суммы двух случайных событий A и B равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (3)$$



$$\begin{aligned} P(A+B) &= \frac{k+l-m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{m}{n} = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \end{aligned}$$

Следствие 1

События A и B несовместны \Rightarrow

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

CP

Следствие 2

$$C \subset D \Rightarrow P(D - C) = ?$$

СР

Сформулируйте Теорему 2 для трех событий:

$$P(A+B+C) = ?$$

Теорема 3 (сложения вероятностей для n событий)

*

Вероятность суммы любого конечного числа событий равна

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = & P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - \\ & - P(A_1 \cdot A_2) - P(A_1 \cdot A_3) - \dots - P(A_{n-1} \cdot A_n) + \\ & + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) \end{aligned}$$

Замечание:

Если события A_i , где $i=1,2,\dots,n$ образуют полную группу несовместных событий, то вероятность их суммы равна 1:

$$P(\sum_{i=1}^n A_i) = 1$$

5. Условная вероятность

Пусть дано (Ω, \mathcal{B}, P) .

В результате эксперимента осуществилось событие B .

Если при этом изменилась вероятность некоторого другого события A , то говорят, что событие A зависит от события B .

Пусть $P(B) \neq 0$.

Определение 17

Вероятность события A при условии, что произошло событие B , называется **условной вероятностью** события A .

Обозначение: $P(A/B)$

Пусть все исходы эксперимента
равновозможны.

Тогда по классической схеме
вычисления вероятностей:

$$P(A/B) = \frac{m}{l} = \frac{m \cdot n}{l \cdot n} = \frac{m}{n} : \frac{l}{n} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Пусть $P(B) \neq 0$ и $P(A) \neq 0$.

Теорема 4 (умножения вероятностей)

Вероятность произведения двух случайных событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место быть, т.е.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A / B)} \quad (4)$$

или

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A)}$$

Определение 18

Событие A называется **независимым от события B** , если осуществление события B не изменяет вероятности появления события A .

Следствие

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Лемма (о взаимной независимости событий)

Если событие A не зависит от события B , то и событие B не зависит от события A :

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B) \end{aligned}$$

Определение 19

События A и B называются **независимыми**, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Определение 20

События A_1, A_2, \dots, A_n называются **попарно независимыми**, если

$$P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

$\forall i, j$ где $1 \leq i < j \leq n$.

Определение 21

События A_1, A_2, \dots, A_n называются **независимыми в совокупности**, если для любого $1 \leq k \leq n$ и для любого набора индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ выполняется равенство:

$$P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}).$$

Замечание:

из попарной независимости
событий *не следует* их
независимость в совокупности.

Пусть события A_1, A_2, \dots, A_n независимы в совокупности,

A – осуществление *хотя бы одного* из этих событий.

Обозначения:

$p_i = P(A_i)$ – вероятность A_i ,

$q_i = 1 - p_i$ – вероятность $\overline{A_i}$ (неосуществления A_i)

Теорема 5

Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий A_1, A_2, \dots, A_n вычисляется по формуле:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n \quad (5)$$

Следствие:

если все A_i равновероятны с вероятностью p ,
то

$$P(A) = 1 - q^n$$

где n — число экспериментов.

6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть события H_1, H_2, \dots, H_n :

1. образуют полную группу,
2. попарно несовместны.

Событие A может осуществиться лишь вместе с одним из событий H_i , где $i=1 \div n$.

События, удовлетворяющие условиям 1, 2, называются **гипотезами**.

Пусть известны вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, причем $P(H_i) \neq 0, i=1 \div n$.

Пусть событие A , может осуществиться лишь вместе с одним из событий $H_i, i=1 \div n$.

Пусть известны $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$ – условные вероятности события A при условии осуществления каждой из гипотез.

Теорема 6

Вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + \\ + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i). \quad (6)$$

– формула **полной вероятности**.

$P(H_i)$ – *априорная* вероятность гипотезы H_i .

Теорема 7 (гипотез)

Для любого $i=1\div n$ условную вероятность события H_i при условии, что событие A произошло, вычисляют по формуле:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i)} \quad (7)$$

– формула Байеса.

$P(H_i/A)$ – апостериорная вероятность гипотезы H_i .

7. Схема Бернулли

Несколько экспериментов называются **независимыми**, если любые события, возникающие в разных экспериментах, независимы в совокупности.

Схемой Бернулли (повторными независимыми испытаниями, биномиальной схемой) называют последовательность экспериментов, удовлетворяющих следующим условиям:

- эксперименты независимы;
- в каждом эксперименте возможны только два исхода – появилось или не появилось случайное событие A (*успех*);
- вероятность A в каждом эксперименте одна и та же и равна $p \in [0, 1]$.

Задача:

найти вероятность события – в n экспериментах событие A появится ровно m раз.

Обозначим:

q – вероятность непоявления A (неудачи)
в каждом эксперименте, тогда

$$q = 1 - p.$$

Имеем:

n экспериментов

$0 \leq m \leq n$ раз появляется событие A

$\omega = \{ \underbrace{A, A, \dots, A}_{m}, \dots, \underbrace{\bar{A}, \bar{A}, \dots, \bar{A}}_{n-m} \}$ – один из

благоприятствующих исходов, причем:

- все исходы равновероятны
- события, соответствующие этим исходам, несовместны
- число таких исходов равно C_n^m

Вывод: см. Теорему

Теорема 8

Вероятность того, что в n экспериментах по схеме Бернулли событие A появится ровно m раз, вычисляется по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (8)$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $m = 0 \div n$ — число сочетаний из n по m .

(8) – **формула Бернулли** (биномиальная формула).

Замечание:

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m) = \\ = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} \stackrel{[?]}{=} (p + q)^n = 1, \text{ т.е.}$$

сумма вероятностей всех исходов равна 1:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

Вывод: получаем вероятностное пространство $(\Omega, \Sigma, P_n(m))$