Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет безопасности информационных технологий

Дисциплина:

«Дифференциальные уравнения»

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1, 2

Вариант 20

Выполнил:

Суханкулиев Мухаммет,

студент группы N3246

(подпись)

Проверил:

Лучин Александр Юрьевич,

инженер, НОЦ математики

(отметка о выполнении)

(подпись)

Санкт-Петербург

2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы – применение численных методов для решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка с построением графических представлений решений.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Изучить основные численные методы решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка.
- Решить задачи из представленного варианта, применяя численные методы.
- Представить решение в виде численных значений.
- Построить графические представления численных решений.

1 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1 Задание

Численно решить дифференциальное уравнение

$$y' = 3x - \frac{y}{x}, \qquad y(1) = 1$$

на отрезке $[1; 2]$ с шагом $h = 0.2$ методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутта. Найти точное решение $y = y(x)$ и сравнить значения точного и приближенных решений в точке $x = 2$. Найти абсолютную и относительную погрешности в этой точке для каждого метода. Вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.

1.2 Теория

1.2.1 Метод Эйлера

Метод Эйлера основывается на аппроксимации решения дифференциального уравнения через касательную к графику функции в текущей точке. Формула метода Эйлера для решения уравнения $y' = f(x, y)$ с шагом h:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

где $h -$ шаг сетки, а $f(x_n, y_n) -$ это правая часть дифференциального уравнения.

То есть, метод Эйлера дает приближенное значение y_{n+1} в точке $x_{n+1} = x_n + h$.

1.2.2 Модифицированный метод Эйлера

Модифицированный метод Эйлера, также известный как метод Хунга, улучшает метод Эйлера, принимая среднее значение наклонов на интервале. Формула модифицированного метода Эйлера выглядит следующим образом:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right)$$

1.2.3 Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка является более точным методом и использует несколько оценок производной (промежуточных оценок наклонов) для вычисления более точного значения y_{n+1}. Формулы для этого метода:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

1.3 Численные решения

Разобьем отрезок $[1; 2]$ на равные части с шагом $h = 0.2$. Тогда точки на отрезке: $x_0 = 1; x_1 = 1.2; x_2 = 1.4; x_3 = 1.6; x_4 = 1.8; x_5 = 2.0$.

1.3.1 Решение уравнения методом Эйлера

Способ из образца (2)**:**

Приближенные значения $y_1, y_2, \dots, y_5$ решения исходного уравнения в точках $x_1, x_2, \dots, x_5$ вычисляем по формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n, \qquad \Delta y_n = hf(x_n, y_n)$$

в которой $f(x,y) = 3x - \frac{y}{x}$. Результаты вычисления будет заносить в таблицу (Таблица 1 –) следующим образом:

В первой строке при $n = 0$ записываем начальные значения $x_0 = 1.0$, $y_0 = 1.0000$, и по ним вычисляем $f(x_0, y_0) = 2.0000$, а затем $\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0.2 \cdot 2.0000 = 0.4000$. Тогда по формуле выше при $n = 0$ находим $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1.0000 + 0.4000 = 1.4000$.

Во второй строке при $n = 1$ записываем значения $x_1 = 1.2; y_1 = 1.4000$. Используя эти значения, вычислим $f(x_1, y_1) = 2.4333$, затем $\Delta y_1 = 0.2 \cdot 2.4333 = 0.4867$. И по формуле выше при $n = 1$ получаем $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1.4000 + 0.4867 = 1.8867$. При $n = 2,3,4,5$ вычисления ведутся аналогично.

Таблица 1 – Таблица для решения методом Эйлера из образца

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{y_n}$	**Вычисление $\boldsymbol{f(x_n, y_n)}$**		$\boldsymbol{\Delta y_n}$
			$\boldsymbol{\frac{y_n}{x_n}}$	$\boldsymbol{3x_n - \frac{y_n}{x_n}}$	
0	1.0	1.0000	1.0000	2.0000	0.2000
1	1.2	1.4000	1.1667	2.4333	0.4867
2	1.4	1.8867	1.3476	2.8524	0.5705
3	1.6	2.4572	1.5357	3.2643	0.6529

4	1.8	3.1100	1.7278	3.6722	0.7344
5	2.0	3.8445	1.9222	4.0778	0.8156

Однако, как мне показалось, было бы легче сразу использовать общую формулу метода Эйлера (без Δy_n).

Способ «упрощенный»:

Мы начинаем с $x_0 = 1$ и $y_0 = 1$, затем по очереди вычисляем значения $y_1, y_2, \dots, y_5$ используя формулу (1.2.1):

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(3x_n - \frac{y_n}{x_n}\right)$$

Применив это для $x_1, x_2, \dots, x_5$, получаем следующие приближенные значения для y:

$$x_1 = 1.2, \qquad y_1 = 1 + 0.2000 \cdot \left(3 \cdot 1 - \frac{1}{1}\right) = 1.4000$$

$$x_2 = 1.4, \qquad y_2 = 1.4000 + 0.2000 \cdot \left(3 \cdot 1.2000 - \frac{1.4000}{1.2000}\right) = \frac{283}{150} \approx 1.8867$$

И так далее до $x_5 = 2$.

Таблица 2 – Полученные методом Эйлера значения

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{y_n}$
0	1.0	1.0000
1	1.2	1.4000
2	1.4	1.8867
3	1.6	2.4571
4	1.8	3.1100
5	2.0	3.8444

Также стоит отметить, что y_3 и y_5 при решении «упрощенным» способом получились более точные. Такая неточность в первом способе обосновывается введением «ненужного» посредника Δy_n.

1.3.2 Решение уравнения модифицированным методом Эйлера

Аналогично **«упрощенному»** способу, для решения модифицированным методом Эйлера применим соответствующую формулу (1.2.2):

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(3 \cdot \left(x_n + \frac{h}{2} \right) - \frac{y_n + \frac{h}{2} \cdot \left(3x_n - \frac{y_n}{x_n} \right)}{x_n + \frac{h}{2}} \right)$$

Таблица 3 – Полученные модифицированным методом Эйлера значения

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{y_n}$
0	1.0	1.0000
1	1.2	1.4418
2	1.4	1.9631
3	1.6	2.5640
4	1.8	3.2448
5	2.0	4.0054

Решим способом из **образца**:

Приближенные значения $y_1, y_2, \dots, y_5$ решения исходного уравнения в точках $x_1, x_2, \dots, x_5$ вычисляем по формулам

$$x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h}{2}$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$$

$$y_{i+1} = y_n + \Delta y_n, \qquad \Delta y_n = hf\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}} \right),$$

в которых $f(x, y) = 3x - \frac{y}{x}$. Результаты вычислений будем заносить в таблицу (Таблица 4 –). Заполняется она следующим образом.

В первой строке записываем $n = 0, x_0 = 1.0, y_0 = 1.0000$. Вычисляем

$$x_{0+\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{h}{2} = 1.0 + 0.1 = 1.1000; \quad f_0 = f(x_0, y_0) = 2.0000.$$

Далее находим

$$y_{0+\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{hf_0}{2} = 1.0000 + \frac{0.2 \cdot 2.0000}{2} = 1.2000;$$

$$f\left(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0+\frac{1}{2}} \right) = 2.2091, \qquad \Delta y_0 = hf\left(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0+\frac{1}{2}} \right) = 0.4418.$$

Тогда по формуле выше при $n = 0$ имеем

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1.0000 + 0.4418 = 1.4418.$$

Используя этот результат, записываем во второй строке $n = 1, x_1 = 1.2, y_1 = 1.4418$ и последовательно находим

$$x_{1+\frac{1}{2}} = x_1 + \frac{h}{2} = 1.3; \quad f_1 = f(x_1, y_1) = 2.3985;$$

$$y_{1+\frac{1}{2}} = y_1 + \frac{hf_1}{2} = 1.6817; \quad f\left(x_{1+\frac{1}{2}}, y_{1+\frac{1}{2}}\right) = 0.7942;$$

$$\Delta y_1 = hf\left(x_{1+\frac{1}{2}}, y_{1+\frac{1}{2}}\right) = 0.3363$$

Тогда по той же формуле при $n = 1$ имеем

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1.4418 + 0.3363 = 1.7781$$

Заполнение таблицы при $n = 2,3,4,5$ проводится аналогично.

Таблица 4 – Таблица для решения модифицированным методом Эйлера из образца

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{y_n}$	$\boldsymbol{x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h}{2}}$	$\boldsymbol{f_n = f(x_n, y_n)}$	$\boldsymbol{y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{hf_n}{2}}$	$\boldsymbol{\Delta y_n = hf\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}\right)}$
0	1.0	1.0000	1.1000	2.0000	1.2000	0.4418
1	1.2	1.4418	1.3000	2.3985	1.6817	0.5213
2	1.4	1.9631	1.5000	2.7978	2.2429	0.6009
3	1.6	2.5640	1.7000	3.1975	2.8838	0.6807
4	1.8	3.2448	1.9000	3.5973	3.6045	0.7606
5	2.0	4.0054				

1.3.3 Решение уравнения методом Рунге-Кутта

Приближенные значения $y_1, y_2, \dots, y_5$ решения исходного уравнения будем вычислять по формулам (1.2.3), только с учётом:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n,$$

$$\Delta y_n = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где $f(x, y) = 3x - \frac{y}{x}$. Результаты вычислений помещаем в таблицу (Таблица 5 –), заполняя ее в следующем порядке.

При $n = 0$

1. Записываем в первой строке $x_0 = 1.0, y_0 = 1.0000$.
2. Вычисляем $f(x_0, y_0) = 2.0000$; тогда $k_1 = 0.2 \cdot 1.0000 = 0.4000$.
3. Записываем во второй строке $x_0 + \frac{h}{2} = 1.1; y_0 + \frac{k_1}{2} = 1.2000$.

4. Вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 2.2091$; тогда $k_2 = 0.4418$.

5. Записываем в третьей строке $x_0 + \frac{h}{2} = 1.1, y_0 + \frac{k_2}{2} = 1.2209$.

6. Вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 2.1901$; тогда $k_3 = 0.4380$.

7. Записываем в четвертой строке $x_0 + h = 1.2, y_0 + k_3 = 1.4380$.

8. Вычисляем $f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 2.4017$; тогда $k_4 = 0.4803$.

9. В столбце Δy записываем числа $k_1, 2k_2, 2k_3, k_4$.

10. Вычисляем $\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.4400$

11. Получаем $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1.4400$

Значения $x_1 = 1.2, y_1 = 1.4400$ заносим в строку, помеченную индексом $n = 1$, и снова проводим вычисления по формулам выше.

Таблица 5 – Решение методом Рунге-Кутта «вручную»

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{k = hf(x, y)}$	$\Delta \boldsymbol{y}$
0	**1,0**	**1,0000**	0,4000	0,4000
	1,1	1,2000	0,4418	0,8836
	1,1	1,2209	0,4380	0,8760
	1,2	1,4380	0,4803	0,4803
				0,4400
1	**1,2**	**1,4400**	0,4800	0,4800
	1,3	1,6800	0,5215	1,0431
	1,3	1,7008	0,5183	1,0367
	1,4	1,9583	0,5602	0,5602
				0,5200
2	**1,4**	**1,9600**	0,5600	0,5600
	1,5	2,2400	0,6013	1,2027
	1,5	2,2607	0,5986	1,1972
	1,6	2,5586	0,6402	0,6402
				0,6000
3	**1,6**	**2,5600**	0,6400	0,6400
	1,7	2,8800	0,6812	1,3624
	1,7	2,9006	0,6788	1,3575
	1,8	3,2388	0,7201	0,7201

				0,6800
4	**1,8**	**3,2400**	0,7200	0,7200
	1,9	3,6000	0,7611	1,5221
	1,9	3,6205	0,7589	1,5178
	2,0	3,9989	0,8001	0,8001
				0,7600
5	**2,0**	**4,0000**		

Решим уравнение методом Рунге-Кутта в **python** (алгоритм аналогичный).

Листинг 1 – Метод Рунге-Кутта

```
for n in range(n_steps):
    x_values[n + 1] = x_values[n] + h
    k1 = h * (3 * x_values[n] - y_runge_kutta[n] / x_values[n])
    k2 = h * (3 * (x_values[n] + h / 2) - (y_runge_kutta[n] + k1 / 2) /
            (x_values[n] + h / 2))
    k3 = h * (3 * (x_values[n] + h / 2) - (y_runge_kutta[n] + k2 / 2) /
            (x_values[n] + h / 2))
    k4 = h * (3 * (x_values[n] + h) - (y_runge_kutta[n] + k3) / (x_values[n]
            + h))
    y_runge_kutta[n + 1] = y_runge_kutta[n] + (1 / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3
            + k4)
```

Таблица 6 – Полученные методом Рунге-Кутта значения (python)

n	x_n	y_n
0	1.0	1.0000
1	1.2	1.4400
2	1.4	1.9600
3	1.6	2.5600
4	1.8	3.2400
5	2.0	4.0000

1.4 Аналитическое решение заданного уравнения

Представим исходное дифференциальное уравнение в следующем виде:

$$-3x + y' + \frac{y}{x} = 0$$

Это неоднородное уравнение. Делаем замену переменных: $y = uv, y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} - 3x = 0$$

$$u\left(\frac{v}{x}+v'\right)+u'v-3x=0$$

Выберем v такую, чтобы выполнялись:

$$\begin{cases} u\left(\frac{v}{x}+v'\right)=0 \\ u'v-3x=0 \end{cases}$$

Приравниваем $u = 0$:

$$\frac{v}{x}+v'=0$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$$

$$\ln v=-\ln x$$

$$v=\frac{1}{x}$$

Зная v найдем u:

$$\frac{u'}{x}-3x=0$$

$$u'=3x^2$$

$$u=x^3+C$$

Обратная замена: $y = uv$

$$y=\frac{x^3+C}{x}=x^2+\frac{C}{x}$$

Задача Коши: $y(1) = 1$

$$1=1+\frac{C}{1}$$

$$C=0$$

Тогда имеем точное решение:

$$\boldsymbol{y=x^2}$$

Проверка:

$$y'=2x$$

$$2x=3x-\frac{x^2}{x}$$

$$2x=2x$$

$$0=0$$

1.5 Сравнение точного решения и приближенных решений

Сравним точное решение с приближенными значениями в точке $x = 2$.

Абсолютная погрешность: $\Delta_y = y_{\text{прибл.}} - y_{\text{точное}}$

Относительная погрешность: $\varepsilon = \frac{\Delta_y}{y_{\text{точное}}} \cdot 100\%$

Таблица 7 – Сравнение точного решения и приближенных значений

Решение	$\boldsymbol{x = 1.2}$	$\boldsymbol{x = 1.4}$	$\boldsymbol{x = 1.6}$	$\boldsymbol{x = 1.8}$	$\boldsymbol{x = 2.0}$	**В точке $\boldsymbol{x = 2.0}$**	
						Абсолют. погрешн.	**Относит. погрешн.**
Точное	1.4400	1.9600	2.5600	3.2400	4.0000	-	-
Метод Эйлера	1.4400	1.8867	2.4571	3.1100	3.8444	0.1556	3.8889%
Модиф. метод Эйлера	1.4418	1.9631	2.5640	3.2448	4.0054	0.0054	0.1339%
Метод Рунге-Кутта	1.4400	1.9600	2.5600	3.2400	4.0000	0.0000	0.0%

1.6 Графическое представление результатов

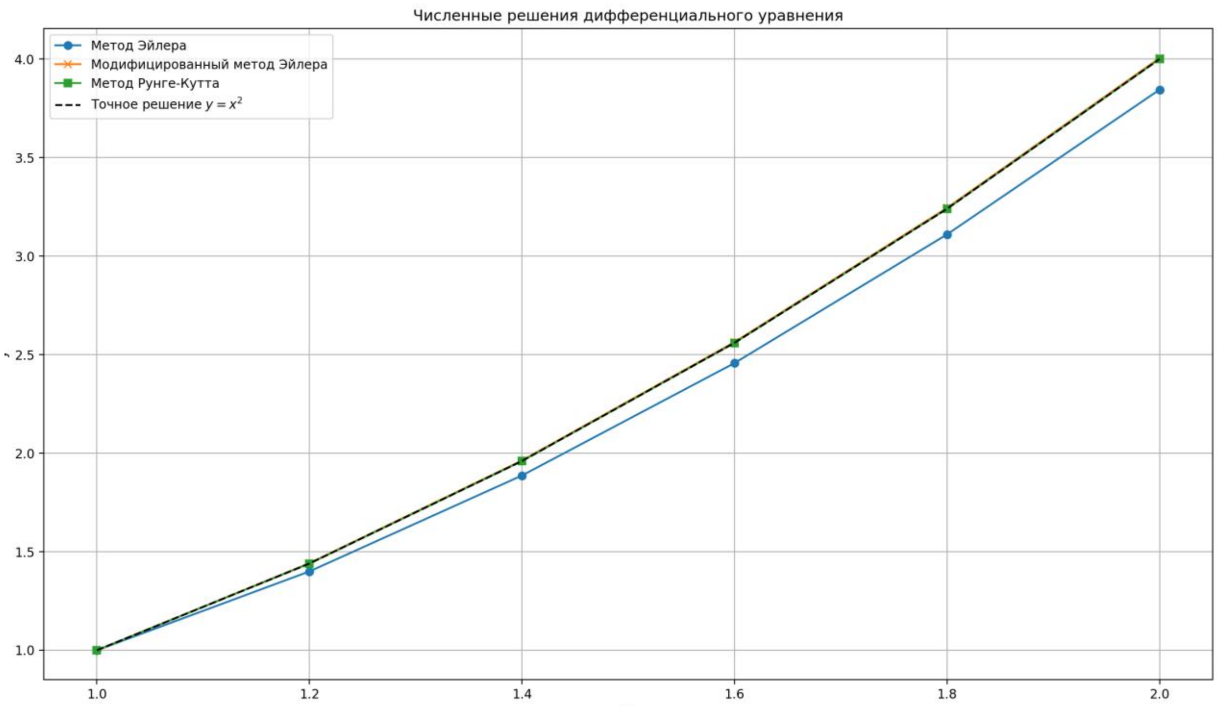

Рисунок 1 – Представление результатов на графике

1.7 Выводы

Метод Эйлера показал наибольшую погрешность среди трех методов. Абсолютная погрешность в конечной точке $x = 2$ составила 0.1556, а относительная погрешность — 3.8889%. Это объясняется тем, что метод Эйлера является простым, но не очень точным, особенно при большом шаге.

Модифицированный метод Эйлера значительно улучшил точность по сравнению с методом Эйлера. Абсолютная погрешность составила всего 0.0054, а относительная — 0.1339%. Этот метод учитывает информацию о значении функции на промежуточном шаге, что позволяет уменьшить ошибку.

Метод Рунге-Кутта оказался наиболее точным, с нулевыми абсолютной и относительной погрешностями для заданных параметров. Это ожидаемо, так как метод Рунге-Кутта четвертого порядка учитывает промежуточные значения наклона, обеспечивая высокую точность.

2 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.1 Задание

Методом Рунге-Кутта проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' = -16y + \sin x\,, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -2$$

на отрезке $[0; 0.3]$ с шагом $h = 0.1$. Найти аналитическое решение $y = y(x)$ заданного уравнения и сравнить значения точного и приближенного решений в точках $x_1 = 0.1$; $x_2 = 0.2$; $x_3 = 0.3$. Все вычисления вести с шестью десятичными знаками.

2.2 Теория

Используемые формулы: (1.2.3) и (1.3.3).

Так же нам понадобится рассмотреть систему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z), \end{cases}$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Приближенные значения $y_i \approx y(x_i), z_i \approx z(x_i)$ вычисляются последовательно по формулам:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \\ z_{i+1} = z_i + \Delta z_i, \end{cases} \quad i = \overline{0, n-1}$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right),$$

$$\Delta z_i = \frac{1}{6}\left(l_1^{(i)} + 2l_2^{(i)} + 2l_3^{(i)} + l_4^{(i)}\right),$$

$$K_1^{(i)} = hf_1(x_i, y_i, z_i),$$

$$l_1^{(i)} = hf_2(x_i, y_i, z_i),$$

$$K_2^{(i)} = hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$l_2^{(i)} = hf_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$K_3^{(i)} = hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$l_3^{(i)} = hf_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$K_4^{(i)} = hf_1\left(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}\right),$$

$$l_4^{(i)} = hf_2\left(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}\right).$$

2.3 Решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта.

С помощью подстановки $y' = z, y'' = z'$ заменим исходное дифференциальное уравнения системой уравнений:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -16y + \sin x \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 1, z(0) = -2$. Таким образом,

$$f_1(x, y, z) = z,$$

$$f_2(x, y, z) = -16y + \sin x.$$

Шагом интегрирования $h = 0.1$ разобьём отрезок $[0; 0.3]$ на три равных части точками $x_0 = 0; x_1 = 0.1; x_2 = 0.2; x_3 = 0.3$. Для вычисления приближенных значений y_1, y_2, y_3 и z_1, z_2, z_3 решения системы воспользуемся формулами (2.2). Результаты вычислений будем помещать в таблицу (Таблица 8 –). Заполнение таблицы ведется в следующем порядке. При n (в (2.2) обозначенный как i) $= 0$:

1. Записываем в первой строке $x_0 = 0, y_0 = 1, z_0 = -2$.
2. Вычисляем

$$f_1(x_0, y_0, z_0) = z_0 = -2,$$

$$f_2(x_0, y_0, z_0) = -16y_0 + \sin x_0 = -16,$$

тогда

$$k_1 = 0.1 \cdot (-2) = -0.2; \quad l_1 = 0.1 \cdot (-16) = -1.6.$$

3. Записываем во второй строке

$$x_0 + \frac{h}{2} = 0.05; \quad y_0 + \frac{k_1}{2} = 0.9; \quad z_0 + \frac{l_1}{2} = -2.8.$$

4. Вычисляем

$$f_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right) = -2.8;$$

$$f_2\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right) = -14.350021;$$

тогда

$$k_2 = 0.1 \cdot (-2.8) = -0.28; \quad l_2 = 0.1 \cdot (-14.35002) = -1.435002.$$

5. Записываем в третьей строке

$$x_0 + \frac{h}{2} = 0.05; \quad y_0 + \frac{k_2}{2} = 0.86; \quad z_0 + \frac{l_2}{2} = -2.717501.$$

6. Вычисляем

$$f_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right) = -2.717501;$$

$$f_2\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right) = -13.710021;$$

тогда

$$k_3 = 0.1 \cdot (-2.717501) = -0.27175; \quad l_3 = 0.1 \cdot (-13.71002) = -1.371002.$$

7. Записываем в четвертой строке

$$x_0 + h = 0.1; \quad y_0 + k_3 = 0.72825; \quad z_0 + l_3 = -3.371002.$$

8. Вычисляем

$$f_1(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3) = -3.371002;$$

$$f_2(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3) = -11.552165;$$

тогда

$$k_4 = 0.1 \cdot (-3.371002) = -0.3371; \quad l_4 = 0.1 \cdot (-11.55217) = -1.155216.$$

9. В столбцы Δy и Δz записываем числа равные $k_1, 2k_2, 2k_3, k_4$ и $l_1, 2l_2, 2l_3, l_4$ соответственно

Таблица 8 – Решение методом Рунге-Кутта

n	x	y	z	k	l	Δy	Δz
0	**0**	**1,000000**	-2.000000	-0.200000	-1.600000	-0.200000	-1.600000
	0.05	0.900000	-2.800000	-0.280000	-1.435002	-0.560000	-2.870004
	0.05	0.860000	-2.717501	-0.271750	-1.371002	-0.543500	-2.742004
	0.1	0.728250	-3.371002	-0.337100	-1.155216	-0.337100	-1.155216
						-0,273433	-1,394537
1	**0,1**	**0,726567**	-3,394537	-0,339454	-1,152523	-0,339454	-1,152523
	0,15	0,556840	-3,970799	-0,397080	-0,876000	-0,794160	-1,751999
	0,15	0,528027	-3,832537	-0,383254	-0,829899	-0,766507	-1,659798
	0,2	0,343313	-4,224436	-0,422444	-0,529434	-0,422444	-0,529434
						-0,387094	-0,848959
2	**0,2**	**0,339472**	-4,243496	-0,424350	-0,523289	-0,424350	-0,523289
	0,25	0,127298	-4,505141	-0,450514	-0,178936	-0,901028	-0,357872
	0,25	0,114215	-4,332964	-0,433296	-0,158004	-0,866593	-0,316009

	0,3	-0,093824	-4,401501	-0,440150	0,179670	-0,440150	0,179670
						-0,438687	-0,169583
3	**0,3**	**-0,099214**					

10. Вычислим

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \frac{1}{6} \cdot (-1.6406) = -0.273433;$$

$$\Delta z_0 = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) = \frac{1}{6} \cdot (-8.367225) = -1.394537.$$

11. Получаем

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0.726567,$$

$$z_1 = z_0 + \Delta z_0 = -3.394537.$$

Значения $x_1 = 0.1; y_1 =; z_1 =$ заносим в строку, помеченную индексом $n = 1$, и снова проводим вычисления по формулам (2.2). В результате этих вычислений получаем следующую таблицу (Таблица 9 –) приближенных значений решения системы:

Таблица 9 – Таблица приближенных значений решения системы

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{y_n}$	$\boldsymbol{z_n}$
1	0,1	0,726567	-3,394537
2	0,2	0,339472	-4,243496
3	0,3	-0,099214	-4,413080

2.4 Аналитическое решение дифференциального уравнения

Перепишем:

$$y'' + 16y = sinx$$

$$\lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 4i, \qquad k = 1$$

$$\tilde{y} = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$$

Кратность $s = 0$ для правой части уравнения $\sin x$, тогда:

$$y_0 = A\cos x + B\sin x$$

$$y_0'' = -A\cos x - B\sin x$$

Подставим в исходное уравнения:

$$-A\cos x - B\sin x + 16(A\cos x + B\sin x) = \sin x$$

$$15A\cos x + 15B\sin x = sinx$$

Приравняем коэффициенты подобных слагаемых:

$$\begin{cases} 15A = 0 \\ 15B = 1 \end{cases} => \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{15} \end{cases}$$

$$y_0 = \frac{\sin x}{15}$$

$$y = \tilde{y} + y_0 = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x + \frac{\sin x}{15}$$

Задача Коши $y(0) = 1,\ y'(0) = -2$:

$$\begin{cases} y = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x + \dfrac{\sin x}{15} \\ y' = 4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x + \dfrac{\cos x}{15} \end{cases}, \quad \text{при } y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \text{ имеем:}$$

$$\begin{cases} 1 = C_2 \\ -2 = 4C_1 + \dfrac{1}{15} \end{cases} => \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = -\dfrac{31}{60} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{31}{60} \sin 4x + \cos 4x + \frac{\sin x}{15}}$$

Проверка:

$$y' = -\frac{31}{60} \cos 4x \cdot 4 - 4 \sin 4x + \frac{\cos x}{15}$$

$$y'' = \frac{1}{15}(-31(-\sin 4x \cdot 4) - \sin x) - 4 \cos 4x \cdot 4 = \frac{124 \sin 4x - \sin x}{15} - 16 \cos 4x$$

$$\frac{124 \sin 4x - \sin x}{15} - 16 \cos 4x + 16\left(-\frac{31}{60} \sin 4x + \cos 4x + \frac{\sin x}{15}\right) = sinx$$

$$\frac{124 \sin 4x - \sin x}{15} - \frac{124 \sin 4x}{15} + \frac{16 \sin x}{15} = sinx$$

$$\frac{-\sin x + 16 \sin x}{15} = sinx$$

$$\sin x = \sin x$$

$$0 = 0$$

2.5 Сравнение значений точного и приближенного решений

Таблица 10 – Сравнение значений точного и приближенного решений

x_n	**Метод Рунге-Кутта** y_n	**Точное решение** $y(x_n)$	**Абсолютная погрешность** $\lvert y_n - y(x_n) \rvert$	**Относительная погрешность** $\dfrac{\lvert y_n - y(x_n) \rvert}{y(x_n)}$
$x_0 = 0$	1.000000	1.000000	-	-

$\boldsymbol{x_1} \\ = \mathbf{0.1}$	0.726567	0.726517	$49.5 \cdot 10^{-6}$	0.006816%
$\boldsymbol{x_2} \\ = \mathbf{0.2}$	0.339472	0.339317	$155 \cdot 10^{-6}$	0.045720%
$\boldsymbol{x_3} \\ = \mathbf{0.3}$	-0.099214	-0.099494	$280 \cdot 10^{-6}$	0.281536%

2.6 Графическое представление результатов

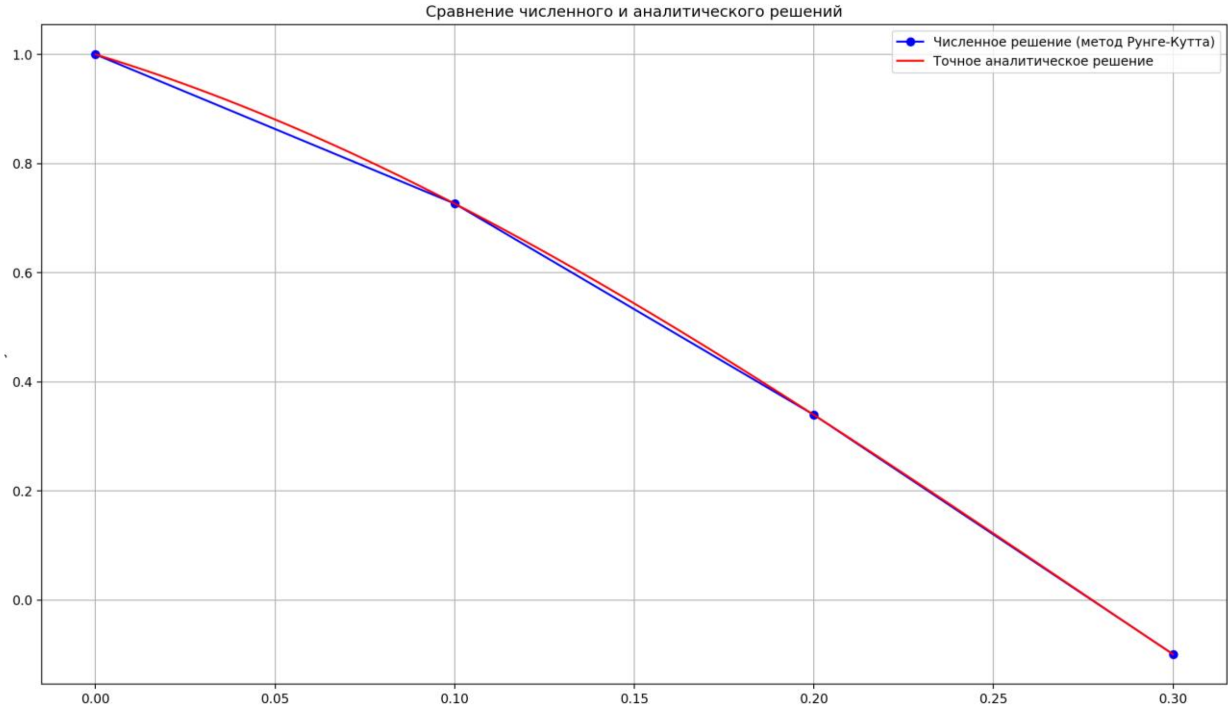

Рисунок 1 – Представление результата на графике

2.7 Выводы

В результате численного интегрирования методом Рунге-Кутта второго порядка абсолютная и относительная погрешности оказались минимальными ($< 0.5\%$), что подтверждает высокую точность метода при выбранном шаге $h = 0.1$. Графическое представление результатов демонстрирует хорошее совпадение численного и аналитического решений. То есть метод Рунге-Кутта применим для решения таких задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе расчетно-графических работ были использованы три численных метода для решения дифференциального уравнения:

- Метод Эйлера показал наибольшие погрешности из-за своей простоты.
- Модифицированный метод Эйлера дал более точные результаты, учитывая промежуточные значения.
- Метод Рунге-Кутты продемонстрировал наименьшие погрешности и является наиболее точным.
- Также при выполнении расчётов для второго уравнения методом Рунге-Кутта второго порядка абсолютная и относительная погрешности оказались минимальными.

Итого, выбор численного метода зависит от требований к точности и сложности задачи. Методы Эйлера и модифицированного Эйлера могут быть полезны для предварительных расчётов, тогда как метод Рунге-Кутта рекомендуется для задач, требующих высокой точности. Полученные результаты подтверждены графическими представлениями, демонстрирующими хорошее соответствие численных и аналитических решений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Типовой расчет по дифференциальным уравнениям – О.И. Брагина, Т.Ф. Панкратова, А.И. Попов, И.Ю. Попов, А.В. Рябова
2. Численное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка – ИрГУПС Кафедра «Высшая математика»
3. Численное интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка – ИрГУПС Кафедра «Высшая математика»

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг А.1 – Программа на python для численного интегрирования дифференциального уравнения первого порядка и вывода графика

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Заданные параметры
h = 0.2
x0, y0, x_end = 1, 1, 2
x_values = np.arange(x0, x_end + h / 2, h)
n_steps = len(x_values)
y_exact = x_values ** 2  # Точное решение y = x^2

def f(x, y):
    return 3 * x - y / x

def euler_method(x_values, y0):
    y = np.zeros_like(x_values)
    y[0] = y0
    for i in range(1, len(x_values)):
        y[i] = y[i - 1] + h * f(x_values[i - 1], y[i - 1])
    return y

def modified_euler_method(x_values, y0):
    y = np.zeros_like(x_values)
    y[0] = y0
    for i in range(1, len(x_values)):
        y_mid = y[i - 1] + h / 2 * f(x_values[i - 1], y[i - 1])
        x_mid = x_values[i - 1] + h / 2
        y[i] = y[i - 1] + h * f(x_mid, y_mid)
    return y

def runge_kutta_method(x_values, y0):
    y = np.zeros_like(x_values)
    y[0] = y0
    for i in range(1, len(x_values)):
        k1 = h * f(x_values[i - 1], y[i - 1])
        k2 = h * f(x_values[i - 1] + h / 2, y[i - 1] + k1 / 2)
        k3 = h * f(x_values[i - 1] + h / 2, y[i - 1] + k2 / 2)
        k4 = h * f(x_values[i - 1] + h, y[i - 1] + k3)
        y[i] = y[i - 1] + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
    return y

y_euler = euler_method(x_values, y0)
y_modified_euler = modified_euler_method(x_values, y0)
y_runge_kutta = runge_kutta_method(x_values, y0)

abs_errors_euler = np.abs(y_euler - y_exact)
rel_errors_euler = abs_errors_euler / y_exact * 100

abs_errors_modified_euler = np.abs(y_modified_euler - y_exact)
rel_errors_modified_euler = abs_errors_modified_euler / y_exact * 100

abs_errors_runge_kutta = np.abs(y_runge_kutta - y_exact)
rel_errors_runge_kutta = abs_errors_runge_kutta / y_exact * 100

print(f"\n{'x':>10} {'y (Euler)':>15} {'y (Modified Euler)':>25} {'y (Runge-
Kutta)':>20} {'y (Exact)':>15}")
```

```
for i, x in enumerate(x_values):
    print(f"{x:>10.1f} {y_euler[i]:>15.4f} {y_modified_euler[i]:>25.4f} 
{y_runge_kutta[i]:>20.4f} {y_exact[i]:>15.4f}")

print(f"\n{'x':>10} {'Abs(Euler)':>20} {'Rel(Euler)':>20}, % "
      f"{'Abs(Modified Euler)':>30} {'Rel(Modified Euler)':>30}, % "
      f"{'Abs(Runge-Kutta)':>25} {'Rel(Runge-Kutta)':>25}, %")
for i, x in enumerate(x_values):
    print(f"{x:>10.1f} {abs_errors_euler[i]:>20.4f} 
{rel_errors_euler[i]:>20.4f} "
          f"{abs_errors_modified_euler[i]:>30.4f} 
{rel_errors_modified_euler[i]:>30.4f} "
          f"{abs_errors_runge_kutta[i]:>25.4f} 
{rel_errors_runge_kutta[i]:>25.4f}")

plt.plot(x_values, y_euler, label='Метод Эйлера', marker='o')
plt.plot(x_values, y_modified_euler, label='Модифицированный метод Эйлера', 
marker='x')
plt.plot(x_values, y_runge_kutta, label='Метод Рунге-Кутта', marker='s')
plt.plot(x_values, y_exact, label='Точное решение $y = x^2$', linestyle='--', 
color='black')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Численные решения дифференциального уравнения')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Листинг А.2 – Программа на python для численного интегрирования дифференциального уравнения второго порядка и вывода графика

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

h = 0.1
x0 = 0
y0 = 1
z0 = -2
steps = 3  # Количество шагов: от 0 до 0.3 с шагом h

def f1(x, y, z):
    return z

def f2(x, y, z):
    return -16 * y + np.sin(x)

def runge_kutta_system(x0, y0, z0, h, steps):
    x_values = [x0]
    y_values = [y0]
    z_values = [z0]

    for _ in range(steps):
        x = x_values[-1]
        y = y_values[-1]
        z = z_values[-1]

        K1 = h * f1(x, y, z)
        L1 = h * f2(x, y, z)

        K2 = h * f1(x + h / 2, y + K1 / 2, z + L1 / 2)
        L2 = h * f2(x + h / 2, y + K1 / 2, z + L1 / 2)
```

```
        K3 = h * f1(x + h / 2, y + K2 / 2, z + L2 / 2)
        L3 = h * f2(x + h / 2, y + K2 / 2, z + L2 / 2)

        K4 = h * f1(x + h, y + K3, z + L3)
        L4 = h * f2(x + h, y + K3, z + L3)

        y_next = y + (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4) / 6
        z_next = z + (L1 + 2 * L2 + 2 * L3 + L4) / 6
        x_next = x + h

        x_values.append(x_next)
        y_values.append(y_next)
        z_values.append(z_next)

    return x_values, y_values

def analytical_solution(x):
    return (-31 / 60) * np.sin(4 * x) + np.cos(4 * x) + (np.sin(x) / 15)

x_vals, y_vals = runge_kutta_system(x0, y0, z0, h, steps)

y_exact_vals = [analytical_solution(x) for x in x_vals]

absolute_errors = [abs(y_num - y_exact) for y_num, y_exact in zip(y_vals,
y_exact_vals)]
relative_errors = [abs_err / abs(y_exact) if y_exact != 0 else 0 for abs_err,
y_exact in zip(absolute_errors, y_exact_vals)]

print(f"{'x_n':<10}{'Метод Рунге-Кутта (y_n)':<30}{'Точное решение
(y(x_n))':<30}{'Абсолютная погрешность':<30}{'Относительная
погрешность':<30}")
print("-" * 130)
for x, y_num, y_exact, abs_err, rel_err in zip(x_vals, y_vals, y_exact_vals,
absolute_errors, relative_errors):

print(f"{x:<10.6f}{y_num:<30.6f}{y_exact:<30.6f}{abs_err:<30.8f}{rel_err:<30.
8f}")

x_analytical = np.linspace(0, 0.3, 100)
y_analytical = analytical_solution(x_analytical)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x_vals, y_vals, 'o-', label="Численное решение (метод Рунге-Кутта)",
color='blue')
plt.plot(x_analytical, y_analytical, label="Точное аналитическое решение",
color='red')
plt.title("Сравнение численного и аналитического решений")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```