알고리즘

2주차(17. 03. 13)

알고리즘 복잡도

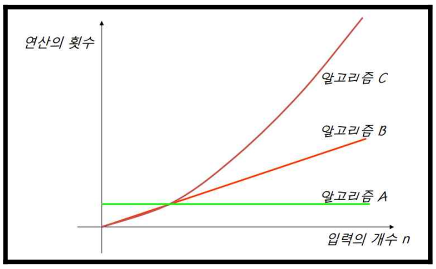
○ **알고리즘** : 컴퓨터로 문제를 풀기 위한 단계적인 절차

* 알고리즘 효율성
  - 시간복잡도(수행시간) : 연산의 수행횟수는 고정된 숫자가 아니라 입력의 개수 n에 대한 함수
    // ex) 연산의 수 = 8 -> 3n+2
  - 공간복잡도(메모리)
* **유한성** : 한정된 수의 단계 후에는 반드시 종료되어야 한다. // 알고리즘과 프로그램의 차이

* **복잡도 분석의 예 (n을 n번 더하는 문제)**

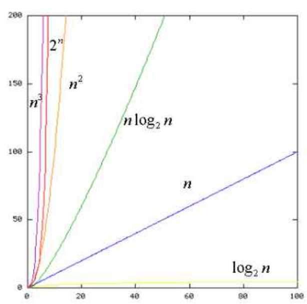
	알고리즘A	알고리즘B	알고리즘C	알고리즘D
코드	sum <- n*n;	sum <- 0; for i <- 1 to n do sum <- sum+n;	sum <- 0; for i <- 1 to n do for i <- 1 to n do sum <- sum+1;	sum <- 0; for i <- 1 to n for j <- 1 to n k <- A[1..n]에서 임의 n/2개 최대값 sum <- sum + k;
대입연산	1	1 + n - 1	1 + (n-1)*(n-1)	n*n*n/2 + 1
덧셈연산		n	n + n*(n-1)	n*n
곱셈연산	1			
나눗셈연산				
return	1	1	1	1
전체연산수	2 + 1(return)	2n + 1	$2n^2$ - 2n + 2 + 1(return)	$n^3/2$ + n^2 + 1 + 1(return)
빅오표기법	O(3) [상수시간대]	O(n)	$O(n^2)$	$O(n^3)$

* **상수시간대** : 입력 개수와 연산의 횟수가 고정되어 있는 것 // 알고리즘A



* **빅오 표기법** : 연산의 횟수를 대략적으로 표기한 것 / 데이터의 값에 따라 수행시간이 달라짐
  - 두 개의 함수 f(n)과 g(n)이 주어졌을 때, 모든 n≥n0에 대하여 |f(n)| ≤ c|g(n)|을 만족하는 2개의 상수 c와 n0가 존재하면 f(n)=O(g(n))이다.
  - 함수의 상한을 표시한다.(최고차항만 표시) // ex) n≥5 이면 2n+1 < 10n 이므로 2n+1 = O(n)
  - 빅오의 데이터 이상의 시간이 걸리지 않는다. // ex) $O(n^2)$

- O(1) : 상수형
- O(logn) : 로그형
- O(n) : 선형
- O(nlogn) : 로그선형
- $O(n^2)$: 2차형
- $O(n^3)$: 3차형
- $O(n^k)$: k차형
- $O(2^n)$: 지수형
- O(n!) : 팩토리얼형



시간복잡도	n					
	1	2	4	8	16	32
1	1	1	1	1	1	1
logn	0	1	2	3	4	5
n	1	2	4	8	16	32
nlogn	0	2	8	24	64	160
n^2	1	4	16	64	256	1024
n^3	1	8	64	512	4096	32768
2^n	2	4	16	256	65536	4294967296
n!	1	2	24	40326	20922789888000	26313×10^{33}

* **빅오메가 표기법 // 점근적 시간 복잡도 : 많은 양의 데이터를 계산**
  - 모든 n≥n0에 대하여 |f(n)| ≥ c|g(n)|을 만족하는 2개의 상수 c와 n0가 존재하면 f(n)=Ω(g(n))이다
  - 빅오메가는 함수의 하한을 표시한다.
  - ex) n≥ 1 이면 2n+1 > n 이므로 n = Ω(n)

* **점근 성능의 효율성**
  - $1 < \log n < n < n^2 < n^2 \log n < n^3 < \ldots < 2^n$

* **연습문제 0 : 코드의 각 명령문의 수행 횟수를 계산하여 시간 복잡도 함수를 계산하시오**

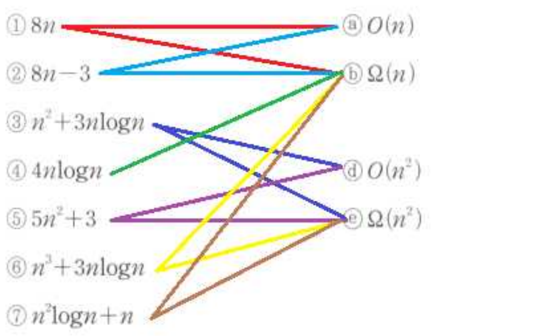
시간 복잡도 구하기	시간 복잡도 구하기2	시간 복잡도 구하기3

int test(int n){
int i;
int total;
 	
total=1;   // 1번
for(i=1; i<n; I++){
total *=n; // n-2번
}
return n;   // 1번
}
	float sum(float list[], int n){
	float tempsum;
	int i;
	tempsum=0; // 1번
	
	for(i=0;i<n;i++){
	tempsum+=list[i]; // n-1번
	}
	tempsum += 100; // 1번
	tempsum += 200; // 1번
	return tempsum; // 1번
	}
		int test(int n){
		int i,b;
		
		b=1; // 1번
		i=1; // 1번
		while(i <= n)
		i = i*b; // logn 번
		}

1+n-2+1 = n 시간 복잡도 : O(n)번	1 + n-1 + 1 + 1 + 1 = n+3 시간 복잡도 : O(n)번	1+1+logn = logn+2 O(logn)번

* **연습문제**

서로 관계있는 것끼리 연결하라. 하나에 여러 개가 연결될 수도 있다.



입력의 크기가 n일 때 다음 알고리즘의 수행시간은 어떤 함수에 비례하는가?

```
sample (A[ ], n)
{
    sum1 ← 0;                      1
    for i ← 1 to n                 n
        sum1 ← sum1 + A[i];        n
    sum2 ← 0;                      1
    for i ← 1 to n                 n
        for j ← 1 to n             n*n
            sum2 ← sum2 + A[i]*A[j];   n*n
    return sum1 + sum2;            1
}
```

$2n^2 + 3n + 3$

$O(n^2)$

* **최선, 평균, 최악의 경우**

- (예) 순차탐색
- **최선의 경우**: 찾고자 하는 숫자가 맨 앞에 있는 경우
  ∴ O(1)

- **최악의 경우**: 찾고자 하는 숫자가 맨 뒤에 있는 경우
  ∴ O(n)

- **평균적인 경우**: 각 요소들이 균일하게 탐색된다고 가정하면
  (1+2+…+n)/n=(n+1)/2
  ∴ O(n)

순환 (순환(재귀) 알고리즘(함수)) : 자기 자신을 호출하는 함수(매개변수만 달라짐)

* 점화식 : 어떤 함수를 자신보다 더 작은 변수에 대한 함수와의 관계로 표현한 것
// $a_n = a_{n-1} + w$ -> f(n) = n f(n-1) -> f(n) = f(n-1) + f(-2)

○ 점화식 정리

(1) T(n) = T(n-1)+O(1), T(1) = O(1) => T(n) = O(n) //ex) 팩토리얼

(2) T(n) = T(n-1)+O(n), T(1) = O(1) => T(n) = $O(n^2)$

(3) T(n) = T(n/2)+O(1), T(1) = O(1) => T(n) = O(logn)

(4) T(n) = T(n/2)+O(n), T(1) = O(1) => T(n) = O(n) //ex) 가짜 동전 찾기

(5) T(n) = T(n/2)+O(1), T(1) = O(1) => T(n) = O(n)

(6) T(n) = T(n/2)+O(n), T(1) = O(1) => T(n) = O(nlogn) //ex) 병합 정렬 알고리즘

* T(값) 은 다음 함수에 들어가는 데이터의 개수
* O(1) : for문을 사용하지 않을 경우(마지막 return 값이 1일 경우)
* O(n) : for문을 이용하여 데이터 전체를 한 번씩 처리해야할 경우
* $O(n^2)$: for문을 이용하여 데이터 전체를 두 번씩 처리해야할 경우

○ 점화식

* 데이터를 반으로 나누어 계산

(6) 병합정렬 수행시간

- 점화식으로 표현 : T(n) = 2T(n/2) + O(n), T(1) = O(1) / T(n) = O(nlogn)
- T(n) : 데이터의 개수가 n개 일 때, mergeSort 함수의 수행 시간
- T(1) = 1
- $T(n) = 2T(n/2) + n$

$= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2 * n$

$= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2*n = 2^3T(n/2^3) + 3 * n$

…

$= 2^iT(n/2^i) + i*n$ // T(1) = 1을 알기 때문에 $n/2^i$을 1로 만들어야함.

// $n/2^i = 1 \Rightarrow n = 2^i \Rightarrow \log_2 n = \log_2 2^i = k$ // $\log_2$은 2와 나누어진다.

$= n*T(n/n) + \log_2 n * n$

$= n*T(1) + \log_2 n * n$

$= n + n\log n$

(1) 하노이탑 : 기둥 세 개에 원반 옮기기 (작은 것이 큰 것 밑에 오면 안됨) // 2^n-1 번이 경우의 수

- $T(n) = 2 * T(n-1) + O(1)$

$= 2 * (2*T(n-2) +1) + 1$

$= 2 * (2*(2*T(n-3) +1) + 1) + 1$

$= 2^3T(n-3) + 2^2 + 2 + 1$

…

$= \{2^i * T(n-i)\} + \{1 + 2 + \ldots + 2^{i-1}\}$

// n-i = 1 => n = i+1

$= \{2^i * T(i+1-i)\} + \{1 * (2^i-1) / 2-1\}$ //초항(r^n-1) / r-1

$= 2^i * T(1) + (2^i-1)$

$= 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1$

$= 2*2^{n-1} - 1$

$= 2^n - 1$

$= O(2^n)$

(1) **팩토리얼** : 순환 알고리즘은 멈추는 부분과 순환 호출하는 부분으로 나누어진다.

- T(n) = T(n-1) + O(1)
  = (T(n-2) + 1) + 1
  = (T(n-3) + 1) + 1 + 1
  …
  = (T(n-k))+k
  // n-k = 1 => n=k+1
  = (T(1+k-k)) + k
  = T(1) + k
  = T(1) + n - 1
  = n

(4) 가짜 동전 찾기 수행시간

- 점화식으로 표현 : T(n) = T(n/2) + O(n), T(1) = O(1) / T(n) = O(n)
- T(n) : 데이터의 개수가 n개 일 때, findFakeCoin(n) 함수의 수행 시간
- T(n) = T(n/2) + n + 1 => T(n/2) + n
  = (T(n/4) + n/2) + n = T(n/4) + n/2 + n
  = (T(n/8) + n/4) + n/2 + n = $T(n/2^3) + n/2^2 + n/2 + n$
  …
  = $T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + \ldots + n/2 + n$ // $n/2^{i-1}$에 2를 곱하면 $n/2^{i-2}$ 가 된다.
  = $T(1) + n * \{1/2^{i-1} + 1/2^{i-2} + \ldots + 1/2 + 1\}$ // 등비수열
  // 공식 : 초항(r^n-1) / r-1
  = $T(1) + n * \{ 1/2^{i-1}(2^i-1) / 2-1 \}$
  = $T(1) + n * \{1/2^{i-1}(2^i-1)\}$ // 2^{i-1} = n/2 가 된다.
  = 1 + n * {2/n(n-1)}
  = 1 + n * {2-2/n}
  = 1 + 2n - 2 => 2n - 1
  = O(n)

(2) 퀵정렬

- T(n) = T(n-1) + n
  = T(n-2) + (n-1) + n
  = T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n
  … // n-k = 1 => k = n-1
  = T(n-k) + (n-k+1) + … + (n-2) + (n-1) + n
  = T(1) + 2 + 3 + … + (n-2) + (n-1) + n
  = 1 + 2 + 3 + … + n
  = n(n+1) / 2 = $1/2\ n^2 + 1/2n$

(2) 이진검색

- T(n) = T(n/2) + c2
  = T(n/4) + c2 + c2
  = $T(n/2^i)$ + I * c2
  … // $n/2^i = 1$ => $n = 2^i$ => i = logn
  = T(1) + I*c2
  = c1 + c2logn
  = O(logn)

정렬

○ 선택 정렬(Selection Sort) : $O(n^2)$

* Max 값을 -1 하면서 하나하나 비교하여 스왑한다.

선택 정렬(Selection Sort)

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
void Swap(int &a, int &b){
        int tmp = a;
        a = b;
        b = tmp;
}

void Selection_Sort(int a[], int max){
        int maxindex;
        for (int i = n - 1; i >= 0; i--){
                maxindex = i;
                for (int j = i - 1; j >= 0; j--){
                        if (a[maxindex] < a[j])
                                maxindex = j;
                }
                Swap(a[i], a[maxindex]);
        }
}
```

```
void main(){
        srand((unsigned)time(NULL));
        int a[10];
        int max=9;

        printf("[ ");
        for (int i = 0; i<10; i++){
                a[i] = rand() % 101;
                printf("%2.d ", a[i]);
        } printf(" ]\n");

        Selection_Sort(a[], max);

        printf("[ ");
        for (int i = 0; i <= max; i++){
                printf("%2.d ", a[i]);
        } printf(" ]\n");
}
```

○ 버블 정렬(bubble sort) : $O(n^2)$

* 근접한 데이터 크기를 비교하여 스왑한다.

버블 정렬(Bubble Sort)

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

void Swap(int &a, int &b){
        int tmp = a;
        a = b;
        b = tmp;
}

void Bubble_Sort(int a[], int max){
        for (int i = max; i > 1; i--){
                for (int j = 0; j < i; j++){
                        if (a[j] >= a[j + 1]){
                                Swap(a[j], a[j + 1]);
                                printf("[ ");
                        }
                }
        }
}
```

```
void main(){
        srand((unsigned)time(NULL));
        int a[10];
        int max=9;

        printf("[ ");
        for (int i = 0; i<10; i++){
                a[i] = rand() % 101;
                printf("%2.d ", a[i]);
        } printf(" ]\n");

        Bubble_Sort(a[], max);

        printf("[ ");
        for (int i = 0; i <= max; i++){
                printf("%2.d ", a[i]);
        } printf(" ]\n");
}
```

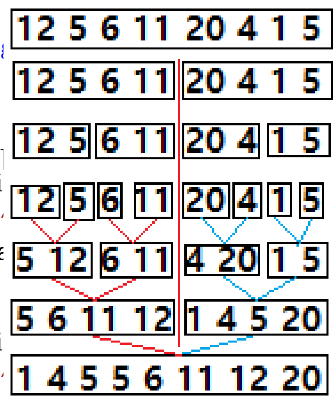
○ 병합 정렬(merge sort) : $O(n\log n)$

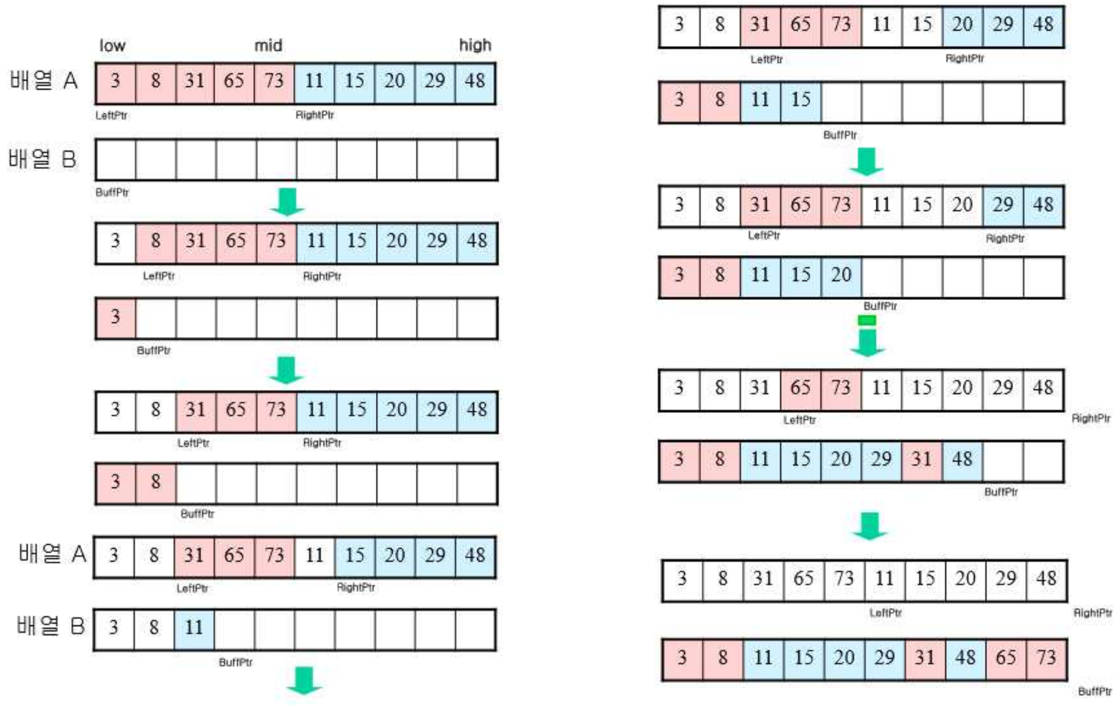
* 재귀함수 사용 / Row와 High 가 같아지면 데이터가 하나이므로 종료

병렬 정렬(Merge Sort)

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

#define N 9

void Merge(int A[], int low, int mid, int high){
        int B[N+1];
        int LeftPtr, RightPtr, BufPtr;

        LeftPtr = low; RightPtr = mid + 1; BufPtr = low;
        while (LeftPtr <= mid && RightPtr <= high){
                if (A[LeftPtr] < A[RightPtr])
                        B[BufPtr++] = A[LeftPtr++];
                else B[BufPtr++] = A[RightPtr++];
        }
        if (LeftPtr > mid)
                for (int i = RightPtr; i <= high; i++)
                        B[BufPtr++] = A[i];
        else
                for (int i = LeftPtr; i <= mid; i++)
                        B[BufPtr++] = A[i];

// 합병이 끝나면 함수가 끝나기 때문에 넣어줘야한다.
        for (int i = low; i <= high; i++)
                A[i] = B[i];
}
```

```
void MergeSort(int A[], int low, int high){
        int mid;
        if (low < high){
                mid = (low + high) / 2;
                MergeSort(A, low, mid);
                MergeSort(A, mid+1, high);
                Merge(A, low, mid, high);
        }
}

void main(){
        srand((unsi
        int a[10];

        printf("[ ");
        for (int i =
                a[i]
                pri
        } printf(" ] 

        MergeSort(a

        printf("[ ");
        for (int i =
                pri
        } printf(" ] 
}
```





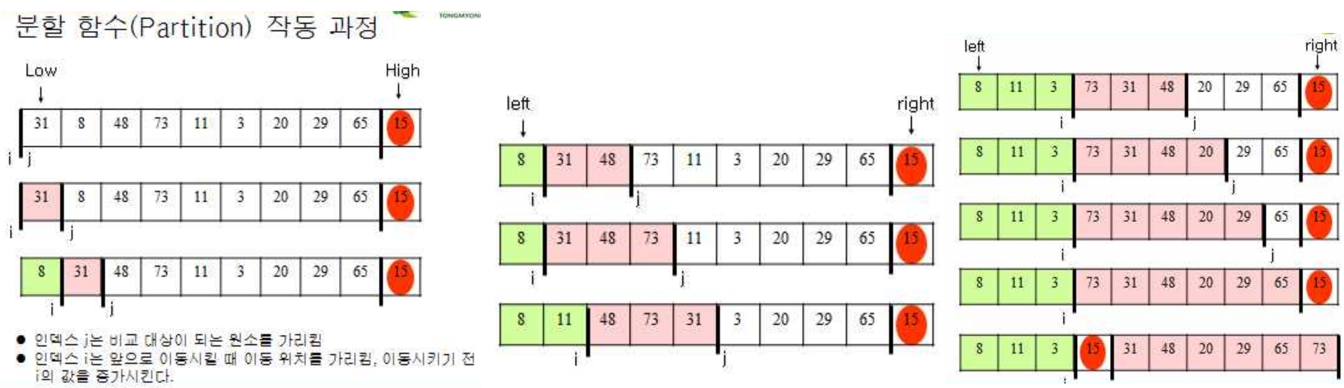
○ 퀵 정렬(Quick sort) : O()

* 재귀함수 사용 / Row와 High 가 같아지면 데이터가 하나이므로 종료

병렬 정렬(Merge Sort)

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

#define N 9

void Swap(int &a, int &b){
	int tmp = a;
	a = b;
	b = tmp;
}

int Partition(int A[], int low, int high){
	int base = A[high];
	int i = low;

	for (int j = low; j < high; j++)
	if (A[j] <= base)
		Swap(A[i++], A[j]);

	Swap(A[i], A[high]);
	return i;
}
```

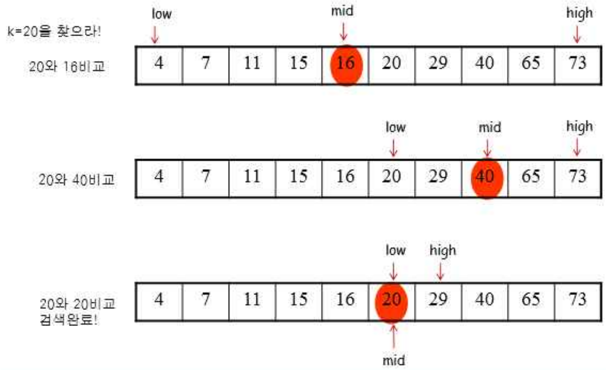
```
void QuickSort(int A[], int low, int high){
	int mid;
	if (low < high){
		mid = Partition(A, low, high);
		QuickSort(A, low, mid-1);
		QuickSort(A, mid + 1, high);
	}
}

void main(){
	srand((unsigned)time(NULL));
	int a[10];

	printf("[ ");
	for (int i = 0; i<10; i++){
		a[i] = rand() % 100;
		printf("%2.d ", a[i]);
	} printf(" ] / [START]\n\n");

	QuickSort(a, 0, N);

	printf("[ ");
	for (int i = 0; i <= N; i++){
		printf("%2.d ", a[i]);
	} printf(" ] / [END]\n");
}
```



검색 트리

○ 이진 검색

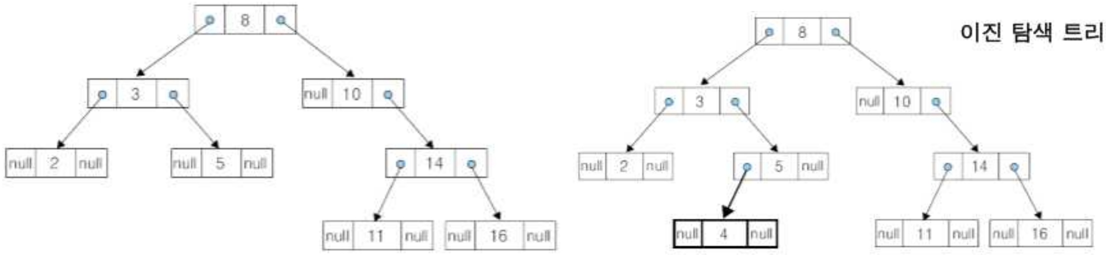
* 정렬된 자료의 탐색에 적절
* 데이터는 배열에 저장되어 있어야 함
* 검색 시작 시 가운데 값부터 찾음



○ 이진 검색 트리 - 삽입

* 시간 복잡도 : 최악의 경우 O(n) / 평균 O(logn)

이진 탐색 트리에 원소 4를 삽입결과



(1) 이진 탐색 트리의 연결 표현_삽입 전

(2) 이진 탐색 트리의 연결 표현_삽입 후

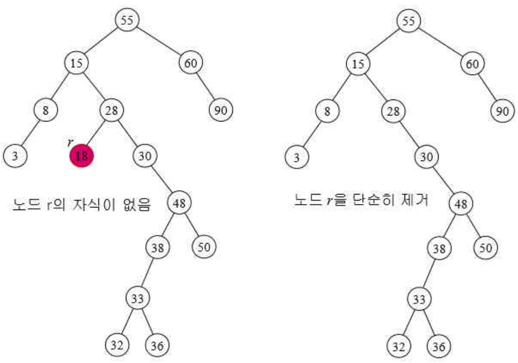
이진 검색 트리 - 삽입

```
treeNode* treeInsert(treeNode* t, int x)
{
    treeNode *tmp;
    if (t == NULL) {
        tmp = (treeNode*)malloc(sizeof(treeNode));
        // tmp: 새 노드 할당
        tmp->data = x;
        tmp->left = tmp->right = NULL;
        return tmp;
    }
    if (x <  t->data) {
        t->left = treeInsert( t->left, x);
        return t;
    }
    else if (x >  t->data) {
        t->right = treeInsert( t->right, x);
        return t;
    }
    else {
        printf("이미 같은 키가 있습니다. \n");
        return t;
    }
}
```

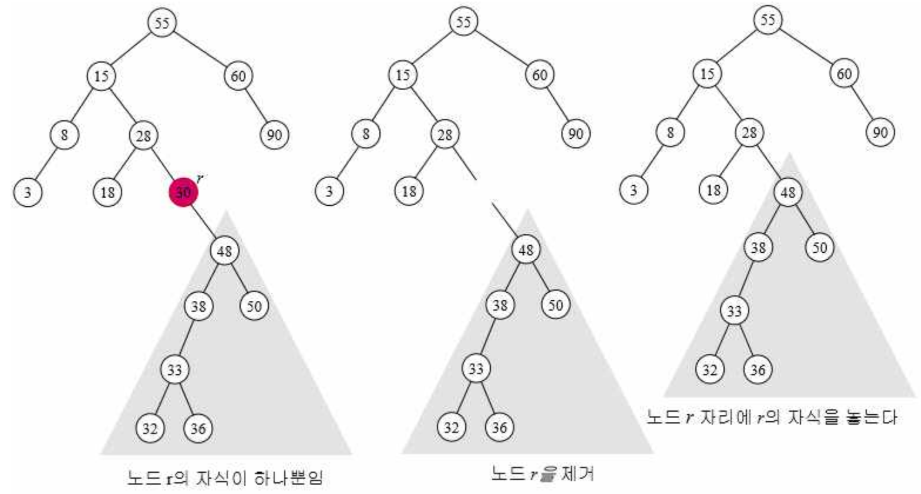
```
// 10개의 랜덤 값을 생성하여 이진 검색 트리에 삽입
for( int i = 0 ; i < 10 ; i++ ) {
    data = rand()%100 + 1;
    root = treeInsert( root, data );
}
```

○ 이진 검색 트리 - 삭제

* 삭제할 노드가 단말 노드인 경우 (자식이 없는 경우) : 바로 삭제

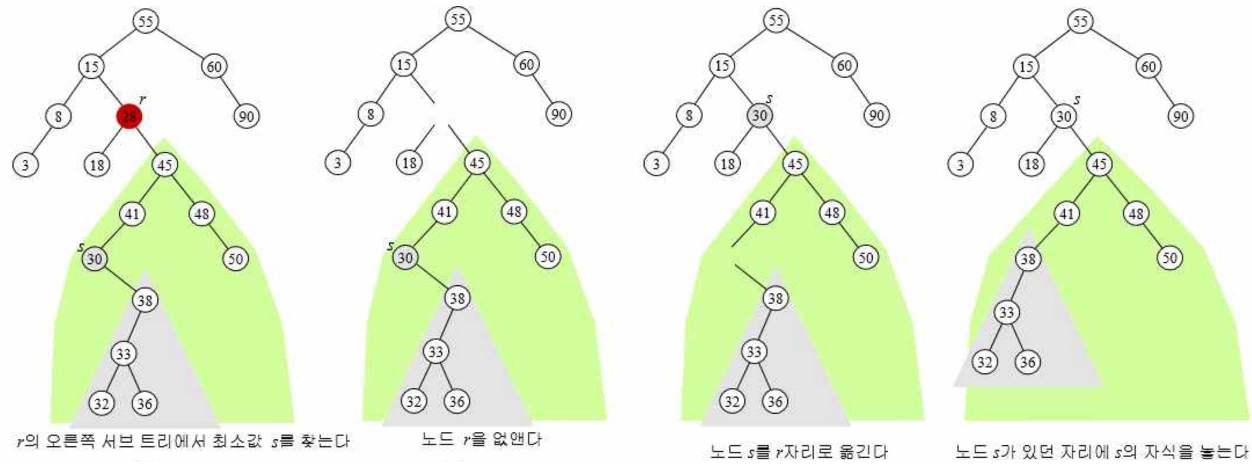


* 삭제할 노드가 하나의 자식 노드를 가진 경우 : 자식 노드를 삭제할 노드 자리에 놓음



* 삭제할 노드가 두 개의 자식노드를 가진 2가지 경우

  - 왼쪽 자식에서 제일 큰 값을 찾아낸다.
  - 오른쪽 자식에서 제일 작은 값을 찾아낸다.
  - while을 돌려 자식 노드가 NULL이 될 때까지 찾아낸다.



이진 검색 트리 - 삭제

```
// r : 트리의 루트 노드
// del : 삭제하고자하는 노드
// parent : r의 부모 노드

void treeDelete(treeNode**t, treeNode*del, treeNode*parent) {
    if (del == *t)  *t = deleteNode(*t);      // r이 루트 노드인 경우
    else if (del == parent->left)             // r이 루트가 아닌 경우
        parent->left = deleteNode(del);       // r이 p의 왼쪽 자식
    else parent->right = deleteNode(del);    // r이 p의 오른쪽 자식
}

treeNode* deleteNode( treeNode* del)  {
    if ( del->left ==NULL && del->right==NULL) return NULL;
    else if (del->left == NULL && del->right != NULL) return del->right;
    else if (del->left != NULL && del->right == NULL ) return del->left;
    else {
        treeNode *s=del->right;
        treeNode* p;
        while (s->left != NULL ){
            p = s;
            s = s->left;
        }
        del->data = s->data;
        if (s == del->right)  del->right  = s->right;
        else p->left = s->right;
        return del;
    }
}
```

해시 테이블

○ 해시 테이블

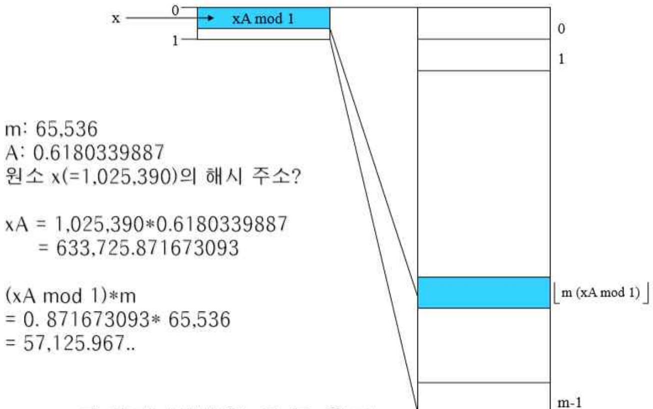
* 시간 복잡도 : O(1)
* 나누기 방법 : h(x) = x mod m // 시험에 나옴
  - mod : 나머지 연산 / x : 키 / m : 테이블의 사이즈(소수여야 한다)
  - ex) h(15) = 15 % 13 = 2 => 2의 위치에 데이터가 있으면 맞는 값
  - ex) h(29) = 29 % 13 = 3 => 3의 위치에 데이터가 있으면 맞는 값

입력: 25, 13, 16, 15, 7

0	13
1	
2	15
3	16
4	
5	
6	
7	7
8	
9	
10	
11	
12	25

해시 함수 h(x) = x mod 13

* 곱하기 방법 : h(x) = (x A mod 1) * m
  - A : 0 < A < 1 인 상수 // m은 굳이 소수일 필요 없음

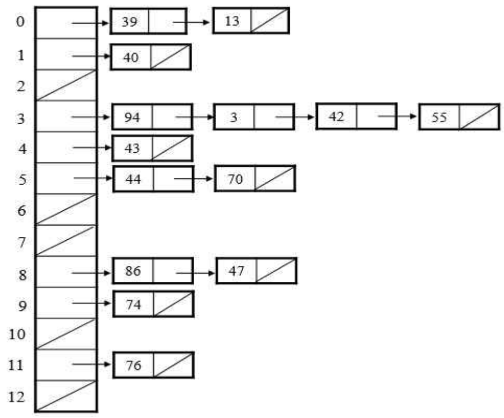


곱하기 방법의 작동 원리

1. 1을 나머지 연산을 해주면 소수점만 남음
2. 소수점만 남은 것에 m(65,536)을 곱하여줌
3. 나머지연산으로 소수점을 없애 줌

○ 연쇄법

* 같은 주소로 해싱되는 원소를 모두 하나의 연결리스트로 관리
* 추가적인 연결 리스트가 필요
* 장점 : 삭제가 용이 => 리스트 주소를 삭제
* 단점 : 포인터 저장을 위한 기억 공간이 필요, 기억 장소는 동적 할당

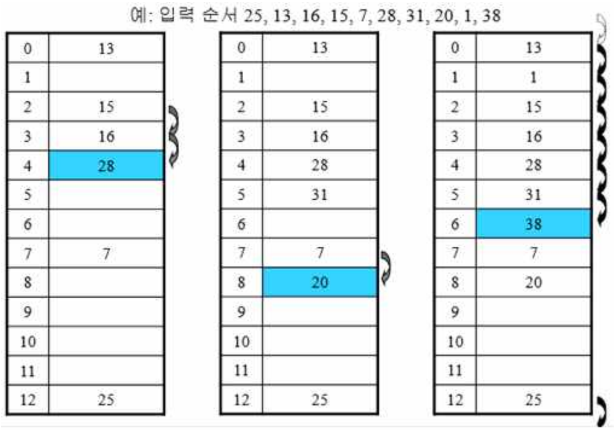


○ 개방 주소법

* 충돌이 일어나더라도 어떻게든 주어진 테이블 공간에서 해결하는 방법
* 추가적인 공간이 필요하지 않음
* 해시 값을 만드는 세가지 방법
  - 선형 조사　　　- 이차원 조사　　　- 이중 해싱

* 선형 조사

- 만약 충돌이 일어나면 다음 인덱스에 넣어준다
- 군집된 배열에 취약하다
- $h_i(x) = (h(x) + i) \bmod m$
- ex) $h_i(x) = (h(x) + i) \bmod 13$

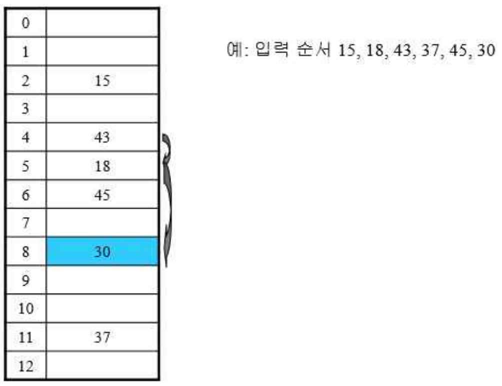


0	13	13	13
1			1
2	15	15	15
3	16	16	16
4	28	28	28
5		31	31
6			38
7	7	7	7
8		20	20
9			
10			
11			
12	25	25	25

=> 28인 경우 13나머지 연산하면 2가 되기에 충돌이 일어난다. => 다음 인덱스를 다시 비교

* 이차원 조사

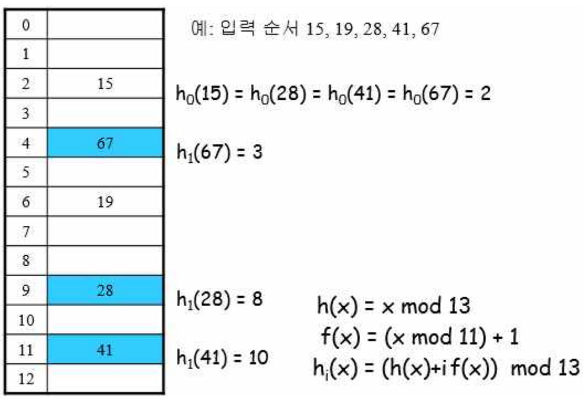
- 2차 군집된 배열에 취약하다
- $h_i(x) = (h(x) + c_1 i^2 + c_2 i) \bmod m$
- ex) $h_i(x) = (h(x) + i^2) \bmod 13$



0	
1	
2	15
3	
4	43
5	18
6	45
7	
8	30
9	
10	
11	37
12	

* 이중 해싱

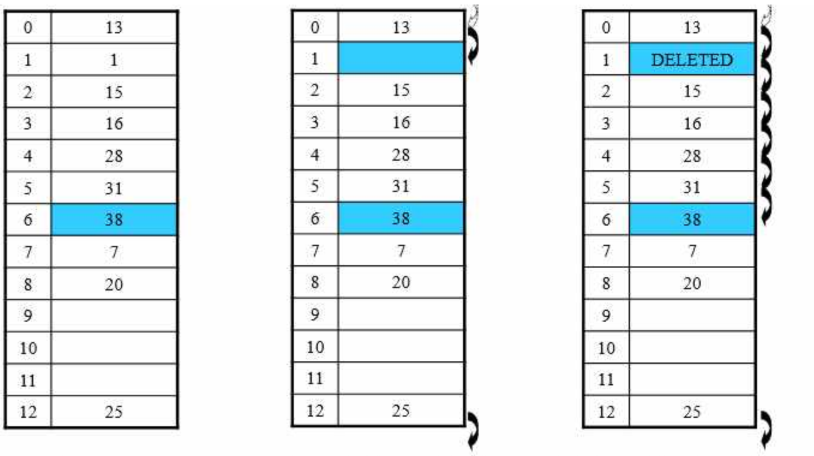
- $h_i(x) = (h(x) + i * f(x)) \bmod m$



0	
1	
2	15
3	
4	67
5	
6	19
7	
8	
9	28
10	
11	41
12	

* 개방 주소법의 키 삭제

- 탐사 순서가 끊어지지 않게 '삭제 표시'를 해야함



(a) 원소 1 삭제 (b) 38 검색, 문제발생 (c) 표식을 해두면 문제없다

○ 해시테이블 정리

① 해시 테이블은 상수시간에 검색, 삽입, 삭제가 가능한 검색 알고리즘이다.

② 해시 테이블에서 저장 위치를 계산하는 것을 해시 함 수라고 한다.

③ 해시 함수를 만드는 대표적인 두 가지 방법은 나누기 방법과 곱하기 방법이다.

④ 좋은 해시 함수는 충돌이 적게 발생하는 함수이다.

⑤ 충동 해결방법은 크게 연쇄법과 개방주소법이 있다.

⑥ 적재율이 0.5이하이면 해시테이블의 검색 성능은 상수 시간을 유지한다.

○ 해시 테이블 예제

* 크기가 13인 해시 테이블, 해시 함수 h(x) = x mod 13
* 충돌은 선형조사 사용 => hi(x) = (h(x) + i) mod m
* 원소 10, 20, 30, 40, 33, 46, 50, 60

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	40			30			20	33	46	10	50	60