# 알고리즘

2주차(17. 03. 13)

## 알고리즘 복잡도

○ **알고리즘** : 컴퓨터로 문제를 풀기 위한 단계적인 절차

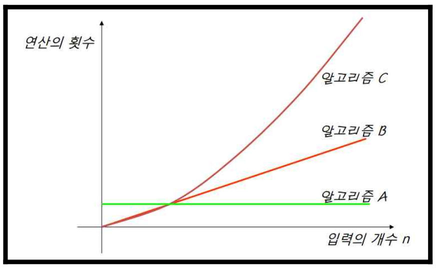
* **알고리즘 효율성**
- 시간복잡도(수행시간) : 연산의 수행횟수는 고정된 숫자가 아니라 입력의 개수 n에 대한 함수
  // ex) 연산의 수 = 8 -> 3n+2
- 공간복잡도(메모리)

* **유한성** : 한정된 수의 단계 후에는 반드시 종료되어야 한다. // 알고리즘과 프로그램의 차이

* **복잡도 분석의 예 (n을 n번 더하는 문제)**

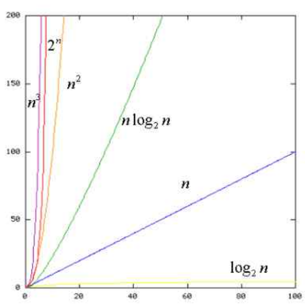
| | 알고리즘A | 알고리즘B | 알고리즘C | 알고리즘D |
|---|---|---|---|---|
| 코드 | sum <- n*n; | sum <- 0;<br>for i <- 1 to n do<br>sum <- sum+n; | sum <- 0;<br>for i <- 1 to n do<br>for i <- 1 to n do<br>sum <- sum+1; | sum <- 0;<br>for i <- 1 to n<br>for j <- 1 to n<br>k <- A[1..n]에서<br>임의 n/2개 최대값<br>sum <- sum + k; |
| 대입연산 | 1 | 1 + n - 1 | 1 + (n-1)*(n-1) | n*n*n/2 + 1 |
| 덧셈연산 | | n | n + n*(n-1) | n*n |
| 곱셈연산 | 1 | | | |
| 나눗셈연산 | | | | |
| return | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 전체연산수 | 2 + 1(return) | 2n + 1 | $2n^2$ - 2n + 2<br>+ 1(return) | $n^3/2$ + $n^2$ + 1<br>+ 1(return) |
| 빅오표기법 | O(3)<br>[상수시간대] | O(n) | $O(n^2)$ | $O(n^3)$ |

* **상수시간대** : 입력 개수와 연산의 횟수가 고정되어 있는 것 // 알고리즘A




* **빅오 표기법** : 연산의 횟수를 대략적으로 표기한 것 / 데이터의 값에 따라 수행시간이 달라짐
- 두 개의 함수 f(n)과 g(n)이 주어졌을 때, 모든 $n \geq n0$에 대하여 $|f(n)| \leq c|g(n)|$을 만족하는 2개의 상수 c와 n0가 존재하면 f(n)=O(g(n))이다.
- 함수의 상한을 표시한다.(최고차항만 표시) // ex) $n \geq 5$ 이면 2n+1 < 10n 이므로 2n+1 = O(n)
- 빅오의 데이터 이상의 시간이 걸리지 않는다. // ex) $O(n^2)$

- O(1) : 상수형
- O(logn) : 로그형
- O(n) : 선형
- O(nlogn) : 로그선형
- $O(n^2)$ : 2차형
- $O(n^3)$ : 3차형
- $O(n^k)$ : k차형
- $O(2^n)$ : 지수형
- O(n!) : 팩토리얼형




| 시간복잡도 | n | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| logn | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| n | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| nlogn | 0 | 2 | 8 | 24 | 64 | 160 |
| $n^2$ | 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 |
| $n^3$ | 1 | 8 | 64 | 512 | 4096 | 32768 |
| $2^n$ | 2 | 4 | 16 | 256 | 65536 | 4294967296 |
| n! | 1 | 2 | 24 | 40326 | 20922789888000 | $26313 \times 10^{33}$ |

### * 빅오메가 표기법 // 점근적 시간 복잡도 : 많은 양의 데이터를 계산

- 모든 $n \geq n0$에 대하여 $|f(n)| \geq c|g(n)|$을 만족하는 2개의 상수 c와 n0가 존재하면 $f(n)=\Omega(g(n))$이다
- 빅오메가는 함수의 하한을 표시한다.
- ex) $n \geq 1$ 이면 $2n+1 > n$ 이므로 $n = \Omega(n)$

### * 점근 성능의 효율성

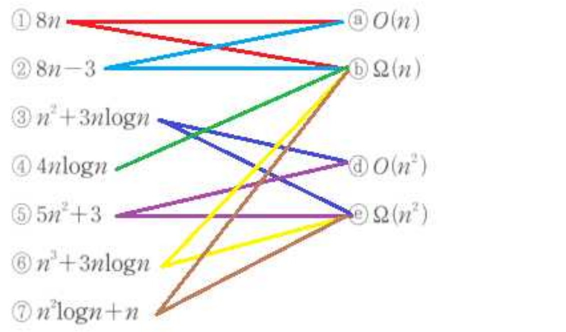
- $1 < \log n < n < n^2 < n^2 \log n < n^3 < \dots < 2^n$

### * 연습문제 0 : 코드의 각 명령문의 수행 횟수를 계산하여 시간 복잡도 함수를 계산하시오

| 시간 복잡도 구하기 | 시간 복잡도 구하기2 | 시간 복잡도 구하기3 |
|---|---|---|
| int test(int n){<br>    int i;<br>    int total;<br><br>    total=1;    // 1번<br>    for(i=1; i<n; I++){<br>        total *=n; // n-2번<br>    }<br>    return n;    // 1번<br>} | float sum(float list[], int n){<br>    float tempsum;<br>    int i;<br>    tempsum=0; // 1번<br><br>    for(i=0;i<n;i++){<br>        tempsum+=list[i]; // n-1번<br>    }<br>    tempsum += 100; // 1번<br>    tempsum += 200; // 1번<br>    return tempsum; // 1번<br>} | int test(int n){<br>    int i,b;<br><br>    b=1;    // 1번<br>    i=1;    // 1번<br>    while(i <= n)<br>        i = i*b;    // logn 번<br>} |
| 1+n-2+1 = n<br>시간 복잡도 : O(n)번 | 1 + n-1 + 1 + 1 + 1 = n+3<br>시간 복잡도 : O(n)번 | 1+1+logn = logn+2<br>O(logn)번 |

### * 연습문제

서로 관계있는 것끼리 연결하라. 하나에 여러 개가 연결될 수도 있다.




입력의 크기가 $n$일 때 다음 알고리즘의 수행시간은 어떤 함수에 비례하는가?

```
sample(A[], n)
{
    sum1 ← 0;                        1
    for i ← 1 to n                   n
        sum1 ← sum1 + A[i];          n
    sum2 ← 0;                        1
    for i ← 1 to n                   n
        for j ← 1 to n               n*n
            sum2 ← sum2 + A[i]*A[j]; n*n
    return sum1 + sum2;              1
}
```

$2n^2 + 3n + 3$

$O(n^2)$

### * 최선, 평균, 최악의 경우

- (예) 순차탐색
- **최선의 경우**: 찾고자 하는 숫자가 맨 앞에 있는 경우
  ∴ O(1)


- **최악의 경우**: 찾고자 하는 숫자가 맨 뒤에 있는 경우
  ∴ O(n)


- **평균적인 경우**: 각 요소들이 균일하게 탐색된다고 가정하면
  $(1+2+\dots+n)/n=(n+1)/2$
  ∴ O(n)

3주차(17. 03. 20)

**순환 (순환(재귀) 알고리즘(함수))** : 자기 자신을 호출하는 함수(매개변수만 달라짐)

* 점화식 : 어떤 함수를 자신보다 더 작은 변수에 대한 함수와의 관계로 표현한 것

// $a_n = a_{n-1} + w$ -> $f(n) = n\,f(n-1)$ -> $f(n) = f(n-1) + f(-2)$

## ○ 점화식 정리

(1) $T(n) = T(n-1)+O(1)$, $T(1) = O(1)$ => $T(n) = O(n)$ //ex) 팩토리얼

(2) $T(n) = T(n-1)+O(n)$, $T(1) = O(1)$ => $T(n) = O(n^2)$

(3) $T(n) = T(n/2)+O(1)$, $T(1) = O(1)$ => $T(n) = O(\log n)$

(4) $T(n) = T(n/2)+O(n)$, $T(1) = O(1)$ => $T(n) = O(n)$ //ex) 가짜 동전 찾기

(5) $T(n) = T(n/2)+O(1)$, $T(1) = O(1)$ => $T(n) = O(n)$

(6) $T(n) = T(n/2)+O(n)$, $T(1) = O(1)$ => $T(n) = O(n\log n)$ //ex) 병합 정렬 알고리즘

* T(값) 은 다음 함수에 들어가는 데이터의 개수
* O(1) : for문을 사용하지 않을 경우(마지막 return 값이 1일 경우)
* O(n) : for문을 이용하여 데이터 전체를 한 번씩 처리해야할 경우
* $O(n^2)$ : for문을 이용하여 데이터 전체를 두 번씩 처리해야할 경우

## ○ 병합 정렬(merge sort) 알고리즘

* 데이터를 반으로 나누어 계산

(6) 병합정렬 수행시간

- 점화식으로 표현 : $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$, $T(1) = O(1)$ / $T(n) = O(n\log n)$
- T(n) : 데이터의 개수가 n개 일 때, mergeSort 함수의 수행 시간
- $T(1) = 1$
- $T(n) = 2T(n/2) + n$

$= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2 * n$

$= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2*n = 2^3T(n/2^3) + 3 * n$

…

$= 2^iT(n/2^i) + i*n$ // $T(1) = 1$을 알기 때문에 $n/2^i$을 1로 만들어야함.

// $n/2^i = 1$ => $n = 2^i$ => $\log_2 n = \log_2 2^i = k$ // $\log_2$은 2와 나누어진다.

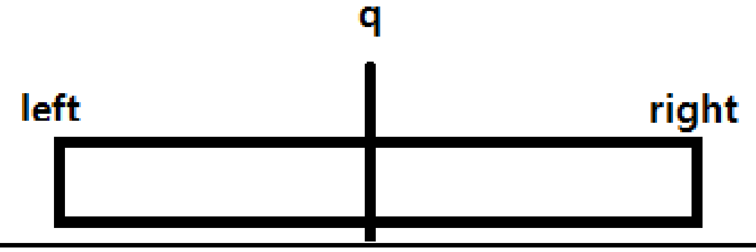
$= n*T(n/n) + \log_2 n * n$

$= n*T(1) + \log_2 n * n$

$= n+n\log n$

**병합정렬 코드**

```
mergeSort(A[ ], left, right) {
    if (left < right) then
    {
        q ← (left+right)/2; -------------- ① 중간 지점 계산
        mergeSort(A, left, q); ------------ ② 전반부 정렬
        mergeSort(A, q+1, right); ------- ③ 후반부 정렬
        merge(A, left, q, right); --------- ④ 병합
    }
}
```



(4) 가짜 동전 찾기 수행시간

- 점화식으로 표현 : T(n) = T(n/2) + O(n), T(1) = O(1) / T(n) = O(n)
- T(n) : 데이터의 개수가 n개 일 때, findFakeCoin(n) 함수의 수행 시간
- $T(n) = T(n/2) + n + 1 \Rightarrow T(n/2) + n$

$= (T(n/4) + n/2) + n = T(n/4) + n/2 + n$

$= (T(n/8) + n/4) + n/2 + n = T(n/2^3) + n/2^2 + n/2 + n$

…

$= T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + \dots + n/2 + n$ // $n/2^{i-1}$에 2를 곱하면 $n/2^{i-2}$ 가 된다.

$= T(1) + n * \{1/2^{i-1} + 1/2^{i-2} + \dots + 1/2 + 1\}$ // 공비수열

// 공식 : 초항$(r^n-1)$ / r-1

$= T(1) + n * \{ 1/2^{i-1}(2^i-1) / 2-1 \}$

$= T(1) + n * \{1/2^{i-1}(2^i-1)\}$ // $2^{i-1}$ = n/2 가 된다.

$= 1 + n * \{2/n(n-1)\}$

$= 1 + n * \{2-2/n\}$

$= 1 + 2n - 2 \Rightarrow 2n - 1$

$= O(n)$

(1) 팩토리얼

- $T(n) = T(n-1) + O(1)$

$= (T(n-2) + 1) + 1$

$= (T(n-3) + 1) + 1 + 1$

…

$= (T(n-k))+k$

// $n-k = 1 \Rightarrow n=k+1$

$= (T(1+k-k)) + k$

$= T(1) + k$

$= T(1) + n - 1$

$= n$

(1) 하노이탑

- $T(n) = 2 * T(n-1) + O(1)$

$= 2 * (2*T(n-2) +1) + 1$

$= 2 * (2*(2*T(n-3) +1) + 1) + 1$

$= 2^3T(n-3) +2^2 + 2 + 1$

…

$= \{2^i * T(n-i)\} + \{1 + 2 + \dots + 2^{i-1}\}$

// $n-i = 1 \Rightarrow n = i+1$

$= \{2^i * T(i+1-i)\} + \{1 * (2^i-1) / 2-1\}$ //초항$(r^n-1)$ / r-1

$= 2^i * T(1) + (2^i-1)$

$= 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1$

$= 2*2^{n-1} - 1$

$= 2^n - 1$

$= O(2^n)$

* **팩토리얼** : 순환 알고리즘은 멈추는 부분과 순환 호출하는 부분으로 나누어진다.

**팩토리얼 코드**

```
int factorial(int n){
    if(n<=1) return 1; // 멈추는 부분
    else return (n*factorial(n-1)); // 순환 호출하는 부분
}
```

* **하노이 탑** : 기둥 세 개에 원반 옮기기 (작은 것이 큰 것 밑에 오면 안됨) **// $2^n$-1 번이 경우의 수**
  - 공식 : hanoi(n) = 2 * hanoi(n-1) + 1, if n>=2
  - ex) hanoi(10) = hanoi(9)*2 = (hanoi(8)*2)*2 = ... 1이 될 때 까지

**하노이탑 코드**

```
#include <stdio.h>

void hanoi(int n, char from, char tmp, char to)
{
    if (n == 1)
        printf("원판 1을 %c 에서 %c으로 옮긴다.\n", from, to);
    else {
        hanoi(n - 1, from, to, tmp);
        printf("원판 %d을 %c에서 %c으로 옮긴다.\n", n, from, to);
        hanoi(n - 1, tmp, from, to);
    }
}
```

```
main()
{
    char from, to, tmp;
    int n;

    from = 'a'; to = 'c'; tmp = 'b';

    printf("원반 개수 입력");
    scanf("%d", &n);

    hanoi(n, from, tmp, to);
}
```