자료구조(Data Structures)

2장. 순환

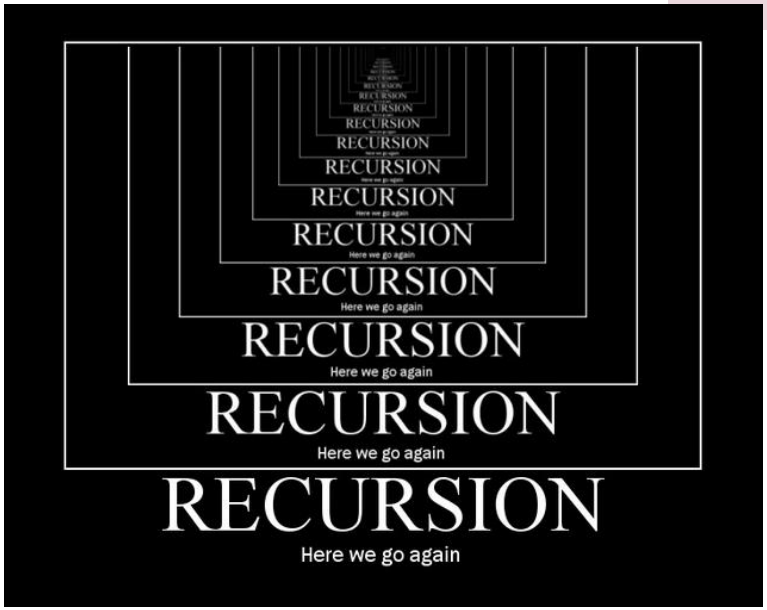
담당 교수 : 조 미경

이번 장에서 학습할 내용

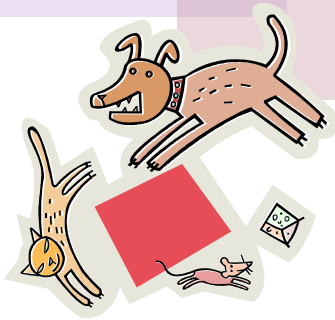
* 순환(재귀)이란?
* 순환알고리즘의 구조 이해
* 순환 호출 사용시 주의점 이해
* 순환 알고리즘이 적용되는 문제들
  - 팩토리얼 예
  - 피보나치 예
  - 하노이탑 예

순환(recursion)이란?

- 알고리즘이나 함수가 수행 도중에 자기 자신을 다시 호출하여 문제를 해결하는 기법
- 정의자체가 순환적으로 되어 있는 경우에 적합한 방법



순환(recursion)의 예



- (예제)
  - 팩토리얼 값 구하기 $n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * (n-1)! & n \geq 1 \end{cases}$
  - 피보나치 수열 $fib(n) = \begin{cases} 0 & if \quad n = 0 \\ 1 & if \quad n = 1 \\ fib(n-2) + fib(n-1) & otherwise \end{cases}$
  - 하노이의 탑 $\text{hanoi}(n) = \begin{cases} 2, & \text{if } n = 1 \\ 2 \times \text{hanoi}(n-1) + 1, & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$
  - 이진탐색

팩토리얼 프로그래밍 #1

- 팩토리얼의 정의

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * (n-1)! & n \geq 1 \end{cases}$$

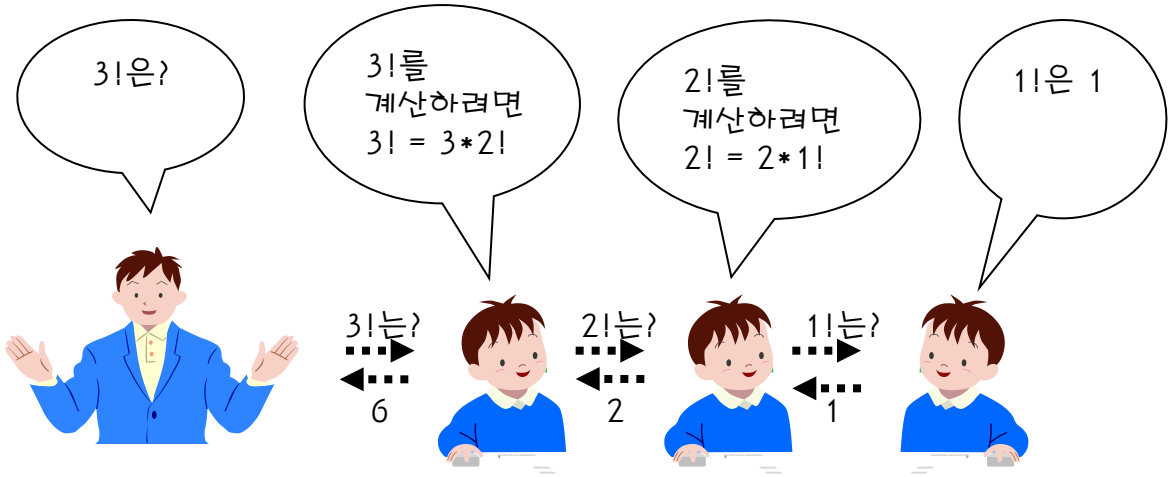
- 팩토리얼 프로그래밍 #1:
  - 위의 정의대로 구현
  - (n-1)! 팩토리얼을 구하는 서브 함수 factorial_n_1를 따로 제작

```
int factorial(int n)
{
    if( n<= 1 ) return(1);
    else return (n * factorial_n_1(n-1) );
}
```

팩토리얼 프로그래밍 #2

- 팩토리얼 프로그래밍 #2:
  - (n-1)! 팩토리얼을 현재 작성중인 함수를 다시 호출하여 계산(순환 호출)

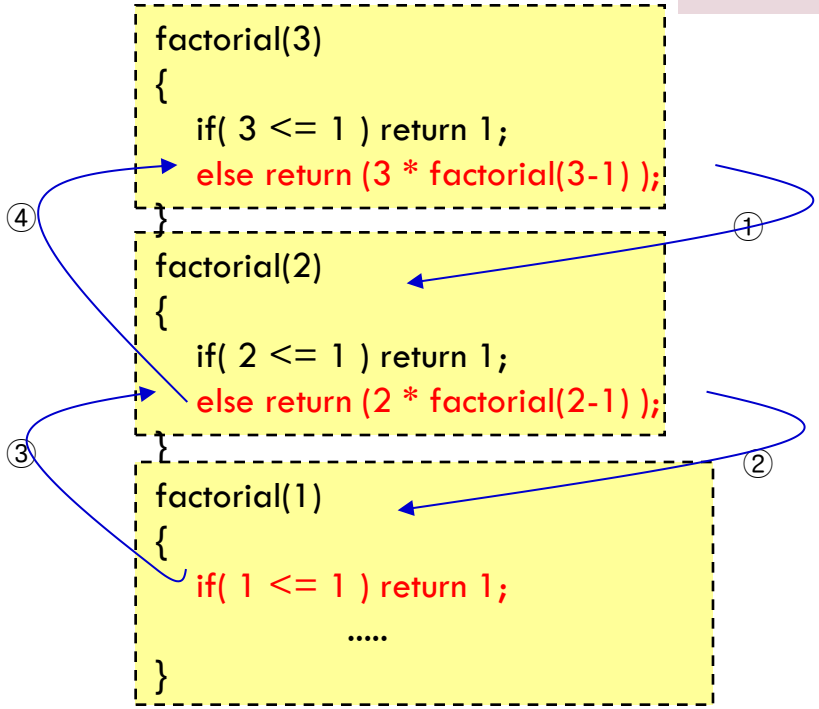
```
int factorial(int n)
{
    if( n <= 1 ) return(1);
    else return (n * factorial(n-1) );
}
```



순환호출순서

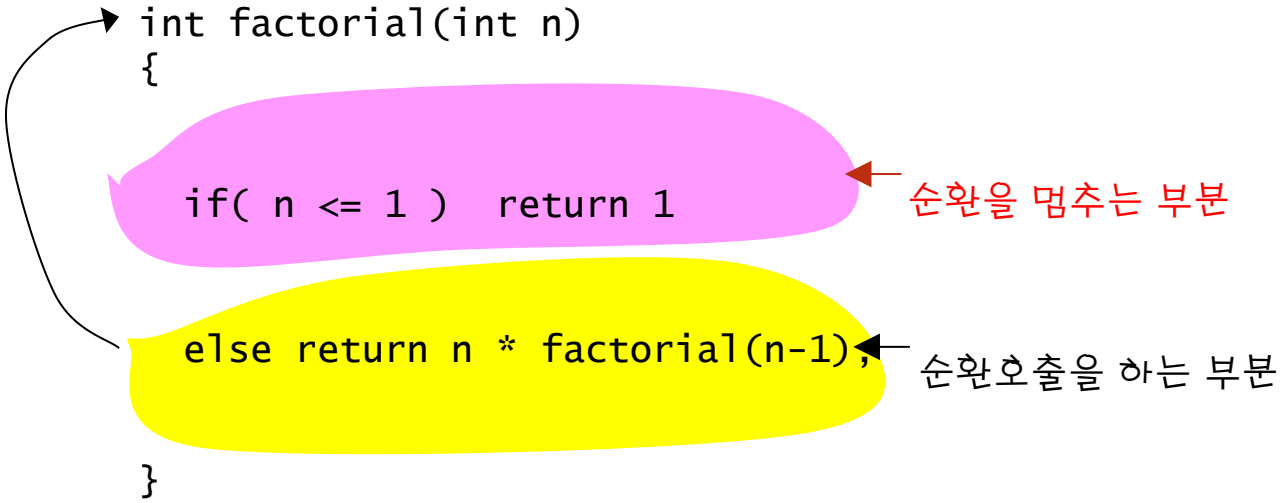
- 팩토리얼 함수의 호출 순서

factorial(3) = 3 * factorial(2)
= 3 * 2 * factorial(1)
= 3 * 2 * 1
= 6



순환 알고리즘의 구조

- 순환 알고리즘은 다음과 같은 부분들을 포함한다.
  - 순환 호출을 하는 부분
  - 순환 호출을 멈추는 부분

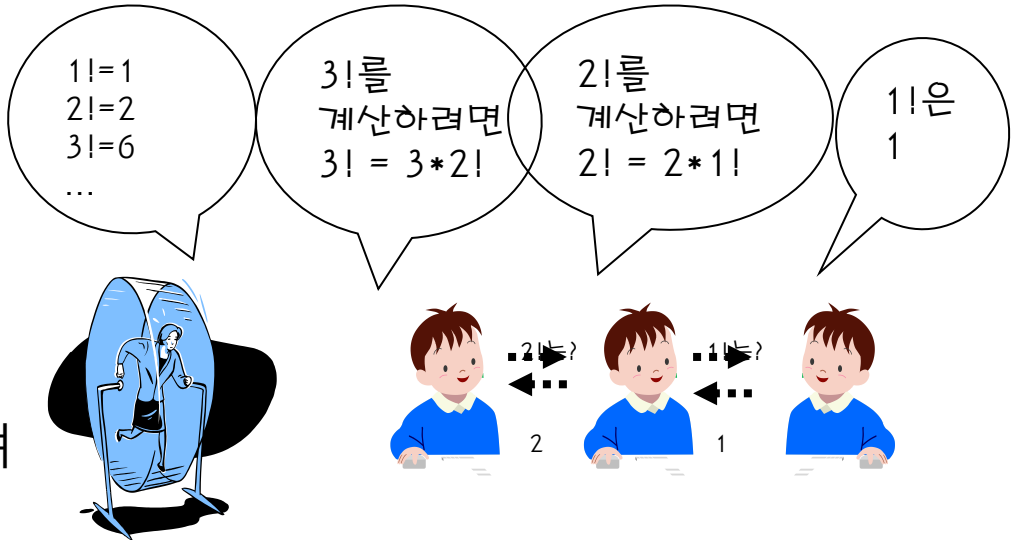


- 만약 순환 호출을 멈추는 부분이 없다면?.
  - 시스템 오류가 발생할 때까지 무한정 호출하게 된다.

순환 <-> 반복

- 컴퓨터에서의 되풀이
  - 순환(recursion): 순환 호출 이용
  - 반복(iteration): for나 while을 이용한 반복
- 대부분의 순환은 반복으로 바꾸어 작성할 수 있다.

- 순환
  - 순환적인 문제에서는 자연스러운 방법
  - 함수 호출의 오버헤드
- 반복
  - 수행속도가 빠르다.
  - 순환적인 문제에 대해서는 프로그램 작성이 아주 어려울 수도 있다.



팩토리얼의 반복적 구현

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ n * (n-1) * (n-2) * \cdots * 1 & n \geq 2 \end{cases}$$

```
int factorial_iter(int n)
{
    int k, v=1;
    for(k=n; k>0; k--)
        v = v*k;
    return(v);
}
```

거듭제곱 값 프로그래밍 #1

- 순환적인 방법이 반복적인 방법보다 더 효율적인 예
- 숫자 x의 n제곱 값을 구하는 문제: x^n
- 반복적인 방법

```
double slow_power(double x, int n)
{
   int i;
  double r = 1.0;
   for(i=0; i<n; i++)
        r = r * x;
   return(r);
}
```

거듭제곱 값 프로그래밍 #2

- 순환적인 방법

```
power(x, n)

if n=0
        then return 1;
else if n이 짝수
        then
          return power(x^2, n/2);
else if n이 홀수
        then
          return x*power(x^2, (n-1)/2);
```

즉 n이 짝수이면 다음과 같이 계산하는 것이다.

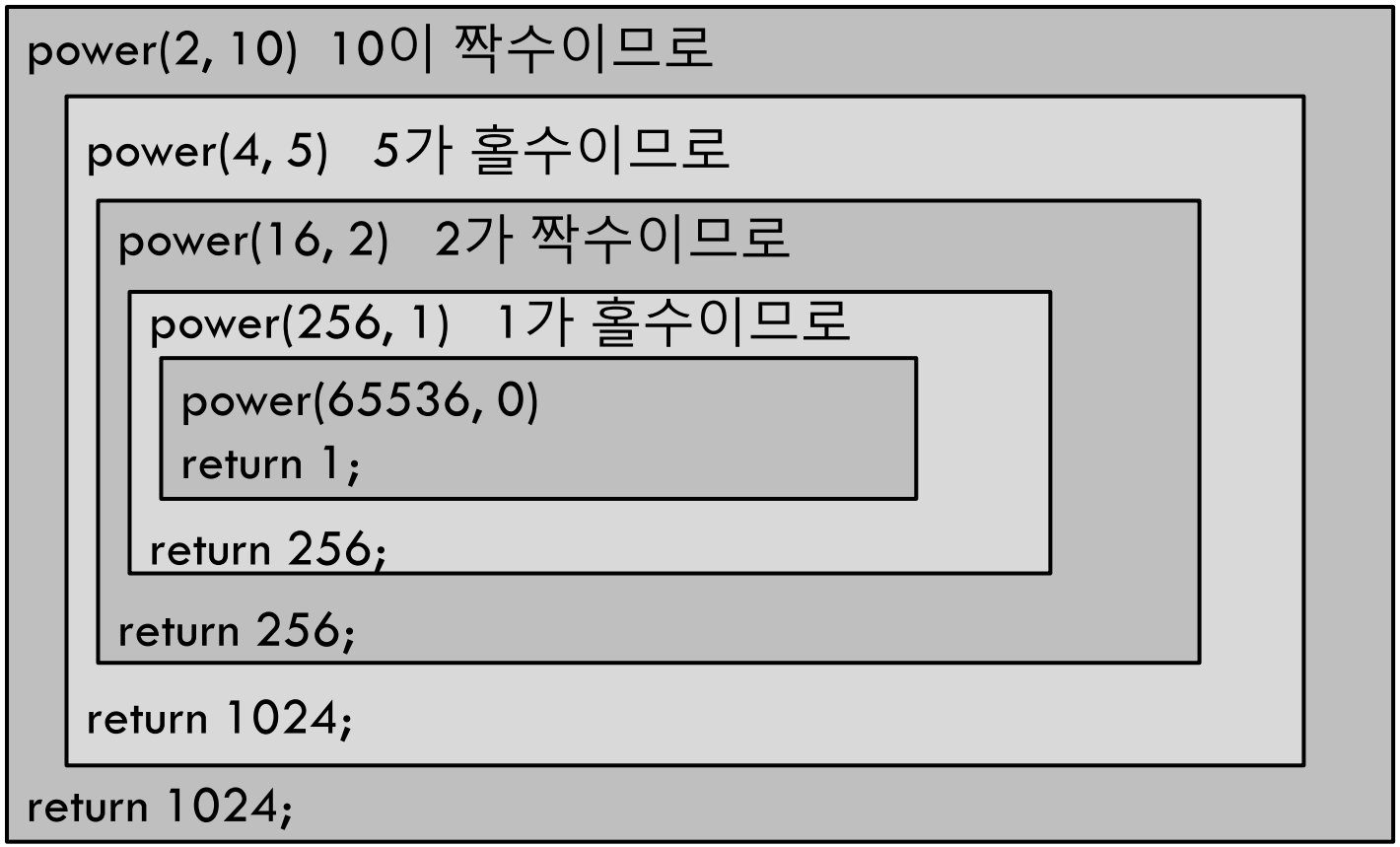
$$\begin{aligned} \text{power}(x, n) &= \text{power}(x^2, n / 2) \\ &= (x^2)^{n/2} \\ &= x^{2(n/2)} \\ &= x^n \end{aligned}$$

만약 n이 홀수이면 다음과 같이 계산하는 것이다.

$$\begin{aligned} \text{power}(x, n) &= x \cdot \text{power}(x^2, (n-1) / 2) \\ &= x \cdot (x^2)^{(n-1)/2} \\ &= x \cdot x^{n-1} \\ &= x^n \end{aligned}$$

거듭제곱 값 프로그래밍 #2

- 2^{10}을 계산하는 과정



거듭제곱 값 프로그래밍 #3

- 순환적인 방법

```
double power(double x, int n)
{
        if( n==0 ) return 1;
        else if ( (n%2)==0 )
                return power(x*x, n/2);
        else return x*power(x*x, (n-1)/2);
}
```

거듭제곱 값 프로그래밍 분석

- 순환적인 방법의 시간 복잡도
  - 만약 n이 2의 제곱이라고 가정하면 다음과 같이 문제의 크기가 줄어든다.

$$2^n \rightarrow 2^{n-1} \rightarrow \cdots 2^2 \rightarrow 2^1 \rightarrow 2^0$$

- 반복적인 방법과 순환적인 방법의 비교

	반복적인 함수 slow_power	순환적인 함수 power
시간복잡도	O(n)	O(logn)
실제수행속도	7.17초	0.47초

피보나치 수열의 계산 #1

- 순환 호출을 사용하면 비효율적인 예
- 피보나치 수열

  0,1,1,2,3,5,8,13,21,...

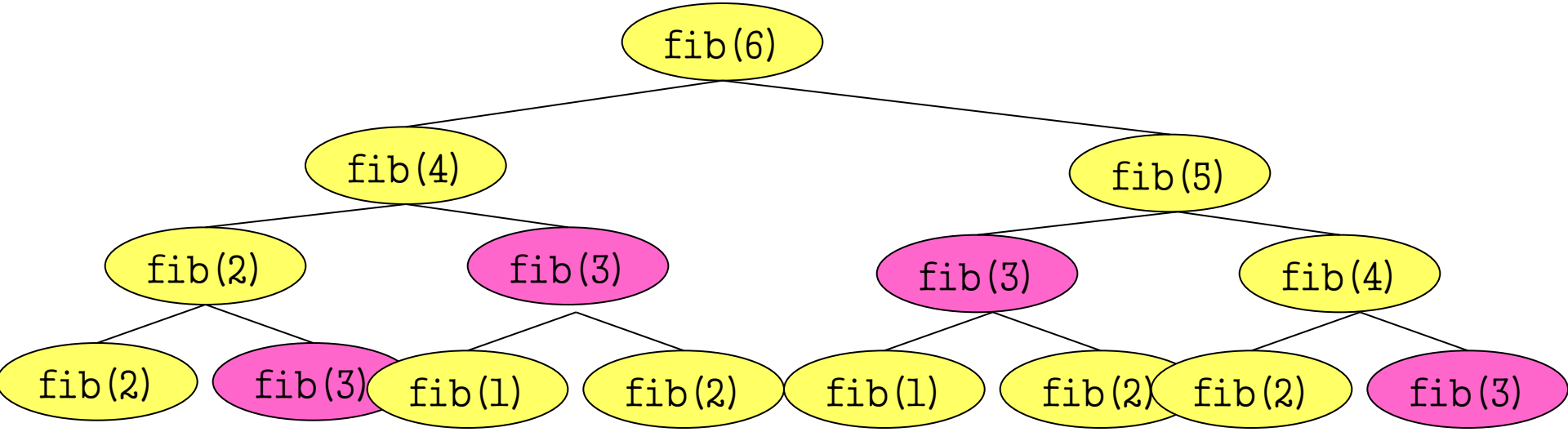
$$fib(n)\begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ fib(n-2) + fib(n-1) & otherwise \end{cases}$$

- 순환적인 구현

```
int fib(int n)
{
    if( n==0 ) return 0;
    if( n==1 ) return 1;
    return (fib(n-1) + fib(n-2));
}
```

피보나치 수열의 계산 #2

- 순환 호출을 사용했을 경우의 비효율성
  - 같은 항이 중복해서 계산됨
  - 예를 들어 fib(6)을 호출하게 되면 fib(3)이 4번이나 중복되어서 계산됨
  - 이러한 현상은 n이 커지면 더 심해짐



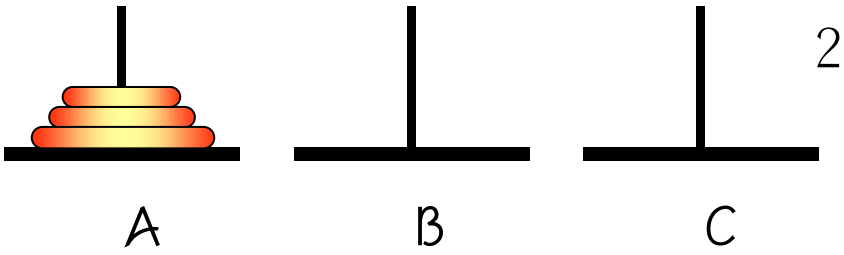
피보나치 수열의 반복구현

- 반복 구조를 사용한 구현

```
fib_iter(int n)
{
        if( n < 2 ) return n;
        else {
                int i, tmp, current=1, last=0;
                for(i=2;i<=n;i++){
                        tmp = current;
                        current = current + last;
                        last = tmp;
                }
                return current;
        }
}
```

하노이 탑 문제

- 반복적으로 구현하기 매우 어렵지만 순환적으로는 간단히 해결할 수 있는 문제
- 문제는 막대 A에 쌓여있는 원판 n개를 막대 C로 옮기는 것이다. 단 다음의 조건을 지켜야 한다.
  - 한 번에 하나의 원판만 이동할 수 있다
  - 맨 위에 있는 원판만 이동할 수 있다
  - 크기가 작은 원판 위에 큰 원판이 쌓일 수 없다.
  - 중간의 막대를 임시적으로 이용할 수 있으나 앞의 조건들을 지켜야 한다.

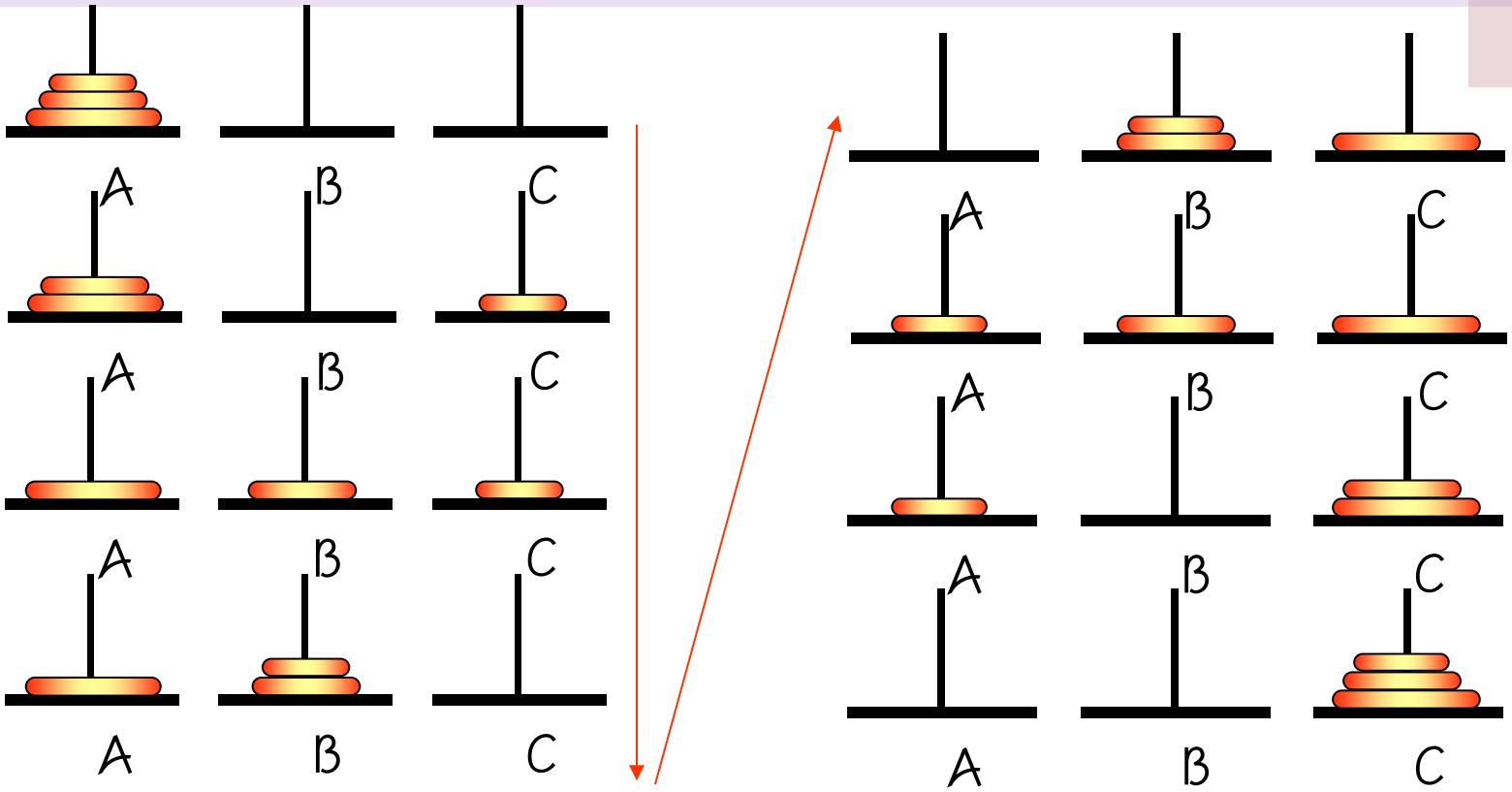


$2^n - 1$번의 원반 이동

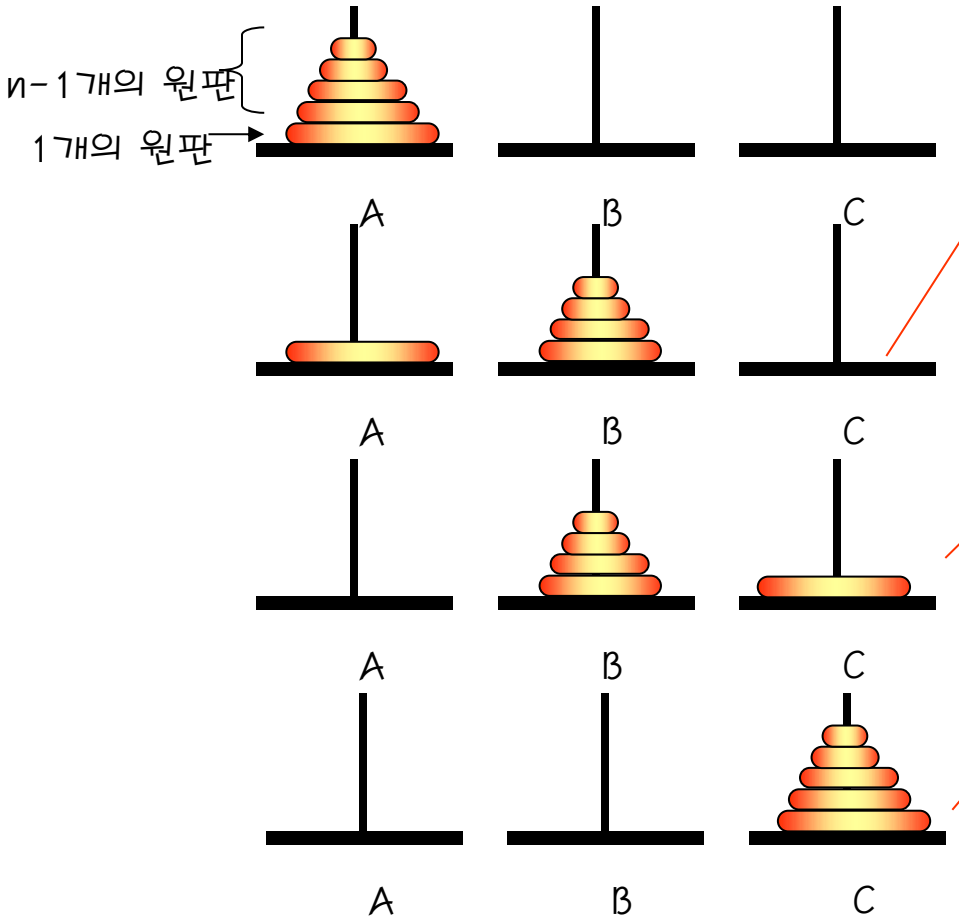
하노이 탑 문제

- 하노이 탑 문제 풀이 과정
  - 원반의 개수가 4개 일 때

n=3인 경우의 해답



일반적인 경우에는?



C를 임시버퍼로 사용하여 A에 쌓여있는 n-1개의 원판을 B로 옮긴다.

A의 가장 큰 원판을 C로 옮긴다.

A를 임시버퍼로 사용하여 B에 쌓여있는 n-1개의 원판을 C로 옮긴다.

남아있는 문제는?

- 자 그러면 어떻게 n-1개의 원판을 A에서 B로, 또 B에서 C로 이동하는가?
- **(힌트) 우리의 원래 문제가 n개의 원판을 A에서 C로 옮기는 것임을 기억하라.**
- 따라서 지금 작성하고 있는 함수의 파라미터를 n-1로 바꾸어 순환 호출하면 된다.

남아있는 문제는?

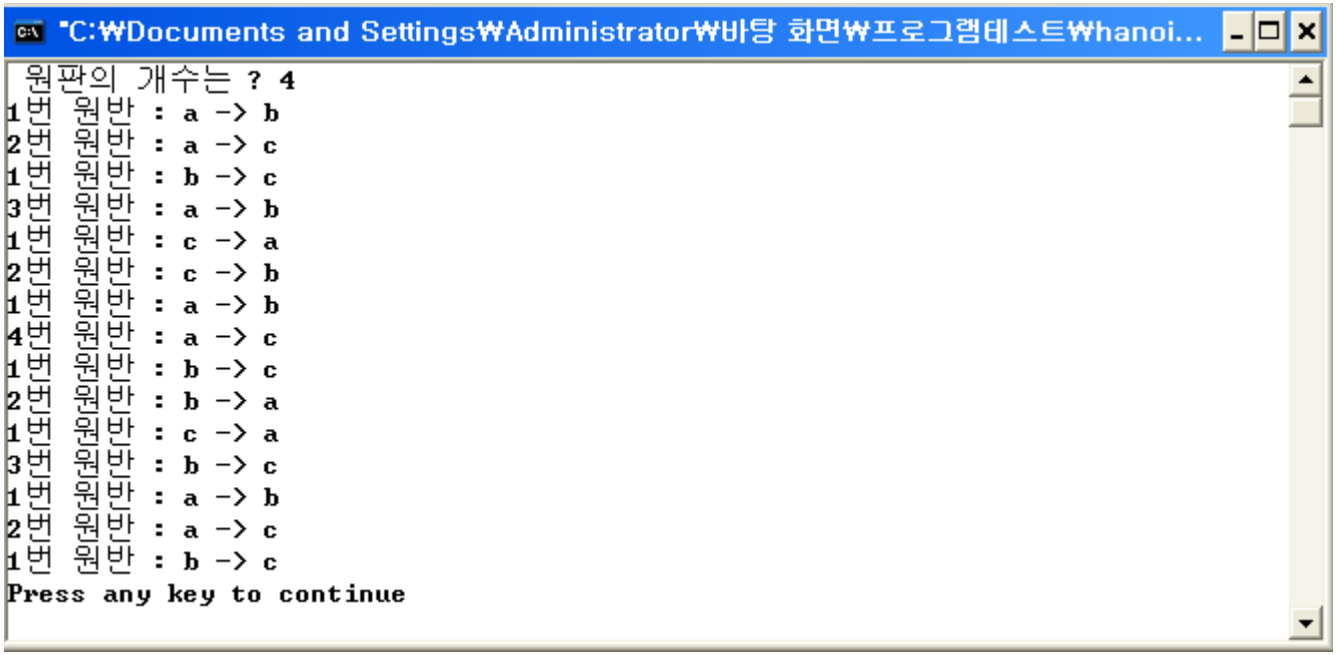
```
// 막대 from에 쌓여있는 n개의 원판을 막대 tmp를 사용하여
// 막대 to로  옮긴다.
void hanoi_tower(int n, char from, char tmp, char to)
{
   if (n==1){
      from에서 to로 원판을 옮긴다.
   }
   else{
      hanoi_tower(n-1, from, to, tmp);
      from에 있는 한 개의 원판을 to로 옮긴다.
      hanoi_tower(n-1, tmp, from, to);
   }
}
```

하노이탑 최종 프로그램

- n-1개의 원판을 A에서 B로 옮기고 n번째 원판을 A에서 C로 옮긴 다음, n-1개의 원판을 B에서 C로 옮기면 된다.

```
#include <stdio.h>
void hanoi_tower(int n, char from, char tmp, char to)
{
  if( n==1 ) printf("원판 1을 %c 에서 %c으로 옮긴다.\n",from,to);
    else {
            hanoi_tower(n-1, from, to, tmp);
            printf("원판 %d을 %c에서 %c으로 옮긴다.\n",n, from, to);
            hanoi_tower(n-1, tmp, from, to);
  }
}
main()
{
    hanoi_tower(4, 'A', 'B', 'C');
}
```

하노이 탑 수행 결과



- 4개의 원반에 대해 이동이 이루어짐 ($2^4-1 = 15$회 이동)
- a, b, c는 기둥 이름

연습문제 1

- 다음 함수를 recursive(5)로 호출 했을 때, 화면에 출력되는 내용과 반환 값을 구하라.

```
void recursive( int n)
{
    if( n != 1 ) recursive( n-1 );
    printf("%d\n", n );
}
```

연습문제 2

- 다음을 계산하는 순환적인 프로그램을 작성하라.
  - 1+2+3+ · · · · · · · · · + n
  - 1+1/2+1/3+ · · · · · · · · · + 1/n