

러셀의 역설은 영국의 수학자 B.러셀이 1901년에 발견한 집합론의 패러독스이다.  
 모든 집합들의 집합 S가 있을 때, S가 그 집합 안에 들어가는가를 말하는 것인데,  
 이 말이 모순이 된다하여 러셀의 역설이 탄생되었다.

$S = \{A \mid A \neq A, A \text{는 집합}\}$ 이라 정의하면

$S = S$ 이면 집합 S 자체가 조건  $A \neq A$ 를 만족해야 하므로  $S \neq S$ 이며,

$S \neq S$ 이면 집합 S 자체가 조건  $A \neq A$ 를 만족하지 않아야 하므로  $S = S$ 이다.

즉,  $S = S$ 이면  $S \neq S$ 이고,  $S \neq S$ 이면  $S = S$ 가 되어  $S = S!$ 이 되는 모순이 발생한다.

모든 것을 막는 방패가 모든 창을 막을 수 있고, 모든 것을 뚫는 창이 모든 방패를 뚫을 수 있게 되는 것처럼 말이다.

이에 아르바함 프랑켈과 스콜렘, 폰 노이만 등의 수학자들은 러셀의 역설을 방지하기 위해 규칙을 정하였고, 이 때 만들어진 것이 ZFC공리계(체르멜로 프란켈 공리계)이다.

ZFC공리계는 1차 논리를 기반으로 하는 1차 집합론이며, 등호 밖에 하나의 이항 관계만을 가진다는 조건이다.

ZFC공리계에는 큰 틀로는 '집합의 기본 성질'과 '집합의 구성', '무한 공리와 선택 공리'로 나뉜다.

집합의 기본 성질에는 확장 공리와 정칙성 공리가 있으며,

집합의 구성에는 분류 공리꼴, 치환 공리꼴, 쪽의 공리, 합집합 공리, 멱집합 공리가 있고, 무한 공리와 선택 공리로 총 9가지의 성질을 가진다.

그 중 러셀의 역설을 방지할 수 있는 성질은 2.정칙성의 공리 항목이다.

정칙성 공리란 공집합이 아닌 모든 집합은 자신과 서로소인 원소를 포함하고, 스스로를 원소로 포함하는 집합이나, 스스로를 원소를 원소로 포함하는 집합 등은 존재할 수 없다. 라 정의한다.

2. 정칙성 공리(영어: axiom of regularity) 혹은 기초공리(영어: axiom of foundation): 공집합이 아닌 모든 집합은 자신과 서로소인 원소를 포함한다. 이에 따라, 스스로를 원소로 포함하는 집합이나, 스스로를 원소의 원소로 포함하는 집합 등은 존재할 수 없다.

$$\forall x[\exists y(y \in x) \implies \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in y \wedge z \in x))]$$