수치해석

□ 수치해석 이론

○ 모델화

* 모델화 : 대상물 -> 시스템(구조, 성질) //ex) 펜이 떨어지면 작용하는 큰틀의 성질(중력 등)
  - 방정식을 세우는 등의 작업

* 입력(환경) -> 시스템 -> 출력(대상물)
  - 독립변수 : 자기 자신 이외에 대처할 수 없는 것.
  - 종속변수 : 어떻게 변하는지 보는 것
  - ex) y(종속변수) = ax(독립변수) // x의 값에 따라 y의 값이 바뀜

○ 수치해석

* 수치해석 : 예측을 함 -> 제어함
* 공학적 문제 해석
  - 물리적인 시스템의 모든 중요한 특성을 표현하는 수학적 모델 개발
  - 공학 : 기존에 없는 새로운 것을 만들어 냄 (인공물)
    // 과학 : 기존에 존재하는 것을 쪼개서 파악
  - 지배방정식 : 현상을 가장 근접하게 잘 표현함(지배함)
    - 물리적인 법칙들(평형방적식, 뉴턴의 운동방정식, 질량보존과 에너지 보존의 법칙)을 적용
    - 연립선형, 비선형 대수 방정식, 초월함수 방정식, 상미분, 편미분방정식, 적분, 미분등
    // 부력 : 인간이 가장 먼저 발견한 힘 (아르키메데스)
    // F = ma는 프랑스의 (나이프니치)가 만들어 낸 공식
    // 모멘트 : 각각의 작용하는 힘에 대해서 무게중심이 다르기 때문에 회전력이 생김 (오일러)
    // 구심성 신경계 : 몸안에서 신경을 통하여 신호를 내보내는 것
    // 원심성 신경계 : 외부에서 충격을 받아 몸 안으로 신호를 보내는 것
  - 해의 해석

* 회전과 이동
  - 회전 (오일러) : 위치는 이동하지 않았지만 자세가 바뀌는 것
    // 오일러, 토르크 방정식
    // 모터, 기어
  - 이동 (뉴턴) : 위치가 바뀌는 것 // 변이적 기능 / 병진 운동
  - 프리덤(degree of freedom / DOF) : 3차원(x, y, z)에서의 회전과 이동을 다룬 것
    // 6자유도 : 아무것도 하지 않았을 때 할 수 있는 행동 6가지(이동3, 회전3)

* 강체
  - 강체(고체) : 고체에는 분자원자가 고정되어 있다. // 수치해석은 강체를 다룬다.
  - 유체(액체) : 압축할 수 없다.
  - 유체(기체) : 질량을 계산할 수가 없다. / 압력으로 압축이 가능하다.
    // 응력 : 견뎌내는 것

* 시뮬레이션 : 얼마나 정확하게 표현할 것인지 나타내는 것

* 벡터 : 어떤 관점에서 볼 것인지의 기준이 있어야함
  - 기준 (좌표)이 있어야 방향을 정할 수 있다.
  - 변환(선형변환) : 기준 틀이 틀릴 경우 한 좌표계로 맞추어주는 것(어느 기준에 맞출지를 정하는 것)
    // ex) 10cm 자와 10mm의 자를 잴 때 10cm를 100mm로 바꾼다.
  - 오일러의 회전 좌표계 : 회전의 기준을 정해놓은 좌표계

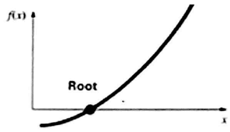
○ 수학적 기초지식

* 수치해석 : 컴퓨터에 방정식을 그대로 쓰면 이해할 수가 없음 => 컴퓨터가 알 수 있게 식을 바꾸어 줌
* 점화식 : 방정식

(a) 방정식의 근 : single nonlinear eqn을 만족하는 변수 or 매개변수의 값을 구하는 것

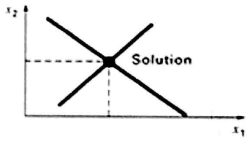
- 방정식이 하나 있을 경우 사용

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



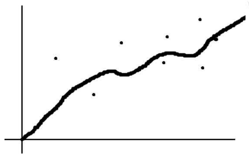
(b) 연립 선형 대수 방정식

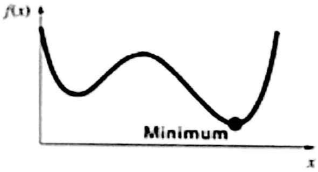
- 여러 방정식들을 동시에 만족하는 변수 값들을 구함 -> (a)와 유사 하지만 방정식이 여러개
- 구조해석, 전기회로, 유체 네트워크 -> 대규모 시스템의 수학적 모델링



(c) 최적화(Optimization) : given fn의 독립변수 값들의 최선 or 최적값 결정

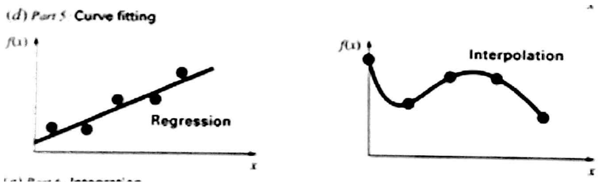
- 최적화 = 최대값, 최소값을 찾는 것 // 오차를 줄이는 과정
- 식은 없고 결과만 있는 것
- 오차를 줄이는 것 (부호의 오차를 줄이기 위해 제곱을 함) =>
- 기울기가 0이다. => 2차방정식에서 E = (y − t)²을 할 경우 E가 0일 때 오차가 제일 낮다.
- ex) $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 의 3차방적식이 있다고 쳤을 경우 가장 만족하는 a, b, c, d를 찾아냄





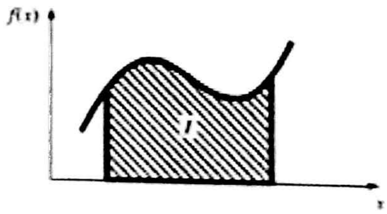
(d) 곡선접합(Curve Fitting)

- 실험 data를 해석하는 경우
- Data의 일반적 경향 -> 하나의 곡선 유도
- (c)최적화와 같은 개념



(e) 적분 (결과 값)

- 곡선 아래 부분의 면적
- 기묘한 형상의 물체 중심, 각각의 측정 값 + 전체 값 -> 응용
- 미분방정식의 해
- 결과 값의 양의 크기가 얼마인지를 나타냄 = 변화량
- 독립변수가 변화해서 나온 결과의 값

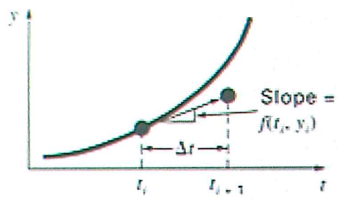


(e) 미분 (예측)

- 미분 : 독립변수에 변화에 따라 종속변수가 변하는 정도 (예측)
  // 변화율이 0 : 변화가 없다
  // 얼마나 기울기가 기울여져있는지에 따라 변화량이 달라진다.
- 운동 방정식을 2차 미분 방정식이라 부름

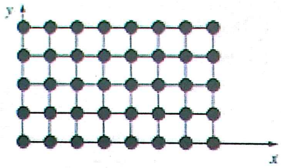
(f) 상미분방정식(ODE) : f(t, y), u=u(x)

- 많은 물리법칙 -> 어떤 양의 크기(X), 양의 변화율(O)
- 인구예측모델, 낙하하는 물체의 가속도
- 초기조건 문제, 경계조건 문제
- 종속변수가 하나
- ex) 시간에 따른 가속도의 변화



(f) 편미분방정식(PDE) : u=u(x, y, t)

- 2개 이상의 독립변수 (종속변수가 하나가 아님)
- 가열된 판의 온도 분포
  - 유한 차분법
  - 유한 요소법
- 속도의 차에 의해 소용돌이가 생김 (한사람이 문에 잡고 있을 경우 다른 사람의 속도에 제한이 생김)
- ex) 온도 조절이 가능한 시계를 들고 있을 경우 눈 산에서 내려갈 때
  => 시간에 따른 온도의 변화와 위치의 변화

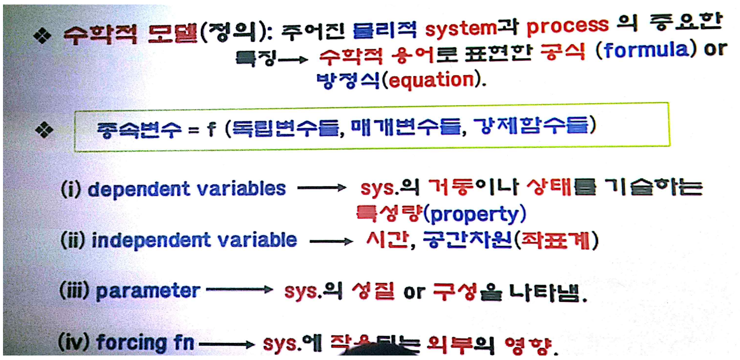


□ 비판적 사고력과 논리적 사고력

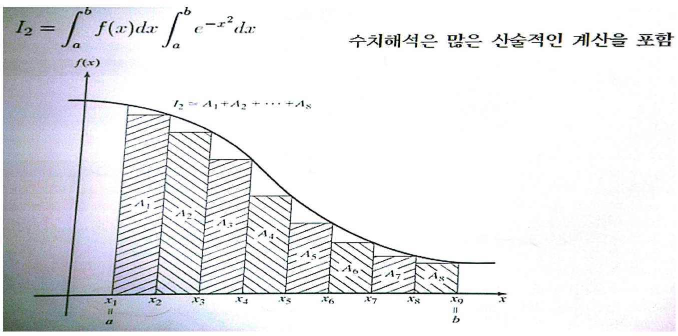
* 비판적 사고
* 논리적 사고 :

○ 수학적 모델링과 공학문제

* 종속변수(출력 값) = f(독립변수들, 매개변수들, 강제함수들)
  - 결과 값
  - sys.의 거동이나 상태를 기술하는 특성량
* 독립변수 : 입력 값
  - 시간, 공간차원(좌표계)
* 매개변수 : sys.의 설질 or 구성
* 강제함수 : sys.에 작용되는 외부의 영향



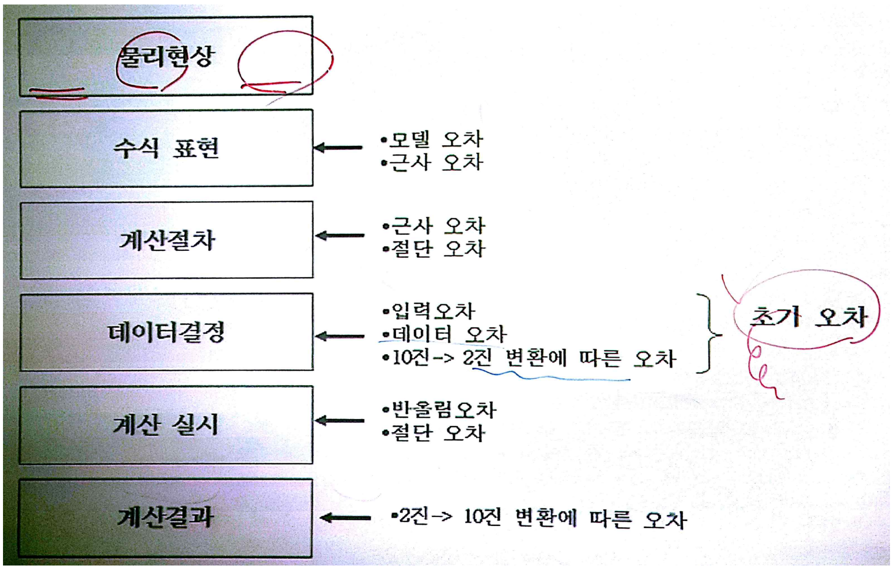
* 해석해 : 손으로 푼 방적식
* 수치해 : 수학적 문제를 재 공식화 하는 것
* 수치해석 : 수학적 문제를 반복적으로 계산
  - 오차를 줄이기 위해 잘게 쪼갠다. => 계산량이 많아진다.
  -> ex) 하트의 면적 구하기 // 몬테카를로 적분
  => 동적을 면적만큼 놓고 잰다 / 오차발생
  => 오차를 줄이기 위해 더 작은 동전을 사용한다.
* 수치해석 반복 계산의 종료조건 : 오차 범위 안에 들어왔을 경우 종료



○ 오차

* 허용오차 : 얼마만큼 오차를 허용할 것인지 결정
* 참 값을 모르기 때문에 현재 값을 참 값으로 정의함
  -> 이전 값(근사 값)과 비교를 함 => 오차
* 유효숫자 : 0의 숫자를 포함하지 않는 숫자 // 유효숫자 사이의 0은 포함
  -ex) 0.00001845 일 때, 모두 4개의 유효숫자를 가짐
  -ex) 0. 00180045 일 때, 모두 6개의 유효숫자를 가짐

* 오차의 원인
  * 수학적 모델에서의 오차
  * 실수
  * 입력의 오차
  * 기계 오차
  * 수학적인 처리와 관련된 절단 오차
* 수치 계산에 있어서의 오차



* 전파오차 : 입력데이터의 오차 때문에 과정의 결과에 나타나는 오차
  - 입력한 오차가 다음 결과에도 영향을 미침
  - 반복을 하면 할수록 오차가 커짐

* 테일러 급수 // 극한으로 미분의 미분으로 나열함
  - 어떤 점의 함수 값 -> 함수값 & 그의 도함수 값으로 다른 점의 값을 예측
  - x의 좌표에서 미분한 값에 미분한 값...을 다 더하면 Δx 값과 같다
  - $f(x+\Delta x) = f(x)+(\Delta x)*\partial f/\partial x$ .. 뒤에 것을 다 버리면
    => $(f(x+\Delta x) - f(x)) / (\Delta x) = \partial f/\partial x$(미분) 가 된다.
    * 각각의 미분한 값에 미분 계수 값을 곱하여 다 더해줌
    * 현재값에서 기울기만 봄

○ 비선형방정식의 해

* 선형과 비선형방정식의 해 :
  - 선형 : 식과 값이 일대일 대응
  - 비선형 : 식과 값이 일대일 대응이 아님 => 값이 두 개 이상일 수 있음
* 구간법 : y = f(x)라는 함수가 있을 경우, 양 변이 0일 경우로 바꾼다.
  => y = 0, f(x) = 0 => y가 0일 경우는 x축 상에 있는 경우.
  => 그래프에서 x축에 걸리는 값이 해이다.
  => 두 점 f(x1)*f(x2)를 할 경우, 둘의 부호가 다르면(-) 그 사이에 해가 존재한다.