수치해석 - 기말

곡선 근사와 보간법

□ 곡선접합

* 바이어 슈트라스의 근사정리
  - 어떤 함수의 관계가 있는데, 실제적으로 어떤 함수인지는 잘 모름(참을 모름)
  -> 다항식으로 근사할 수 있다(바이어 슈트라스의 근사정리)
  - 다항식을 구하는 것, 항이 많을수록 오차가 줄어든다. => 일차식 일 경우 직선이므로 오차가 크다.

* 최소제곱 회귀분석
  - 관계를 어떻게 둘 것인가에 따라 식이 나온다.
  - 각 점의 오차들을 다 더해서 오차가 가장 작은 것을 직선의 방정식으로 한다.
  - 해를 모르고, 일차식으로 표현해본다 -> 직선을 그었을 경우, 오차가 가장 작은 선으로 그어본다.
    => 최소 다선법

* 1차식일 때
  - y = a0 + a1x + e // a0 : 절편, a1 : 기울기, e : 오차
  - e = -y+a0+a1x
  - Sr = 모든오차의 합의 제곱 = $(y-a0-a1x)^2$
  - 제곱을 풀면 +인 2차방정식이 나옴
  - 방정식의 값이 제일 밑에 붙는다 => 기울기가 0 (편미분을 취하면 0가 되어야 한다.)

* 2차식 일 때
  - y = a0 + a1x + a2x제곱 + e

○ 미분 -> 순간순간의 변화율

* (xn)' = nxn-1
* 변화율 = f(xi+1) - f(x) / xi+1 - xi
  - 상미분(d로 표현) : 하나의 독립 변수만 보는 것
  - 편미분(∂ㅣδㅣ△(델타)로 표현) : 여러 개의 변수로 보는 것
  - 도함수 = 미분 계수 = 순간 기울기 = 접선 기울기 = △->∞ 하는 것이 미분

○ 적분 -> 미분 값들의 누적, 현상들의 결과(통틀어서의 결과)

* 부정적분 : 도함수를 적분하였을 경우 C를 모름 f(x) = 2x + 1
  - ∫(2x+1)dx =적분=> x제곱+x+C = F(x)

* 적분 공식 : $Fx^n dx$ = (1/n+1)xn+1승 + C
* 부정적분 공식

* 정적분 : 간격을 극한으로 쪼개서 넓이를 다 더함
  - limn->∞ n∑k=1 $f(x_k)$△x : △x는 밑변, $f(x_k)$는 높이
  - ∫2 0 에 x^2dx => $[1/3x^3+C]2$ => $[1/3*2^3 + C] - [1/3*0^3 + C]$
    => 1/3*8

□ 보간법

○ 보간법

* 보간법 : 점들 사이의 중간 값을 산출할 때 사용
  - 정의역을 넣었을 경우 나오는 치역을 구함 = 함수를 구함
  - 다항식으로 표현하여 함수를 찾아봄
  - 선형 방정식 : 일차식의 결합으로 이루어진 식
    // x : 독립 변수, y : 종속 변수, a : 계수

* 보간법을 구하는 방법 두 가지
  - 라그랑제 보간법 : 점 하나의 식으로 표현(하나의 함수로 표현) : 점이 n개일 때 n차식 함수
  - 뉴턴 보간법 : 점 하나의 식으로 표현(하나의 함수로 표현) : 점이 n개일 때 n차식 함수
  - 레그레이션 보간법
  - 각 점마다 구간을 나누어 표현

* Vandermonde 행렬
  - $f(x) = y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^{n-1}$ 식을 차례대로 행렬에 넣은 것 => 불안 요소가 많음

○ 라그랑제 보간법 : 오차가 많이 일어난다. (불안 요소가 많음)

- $f(x) = y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^{n-1}$ // n+1개의 계수(a)를 찾아야 함
- 연립 방정식을 풀지 않고 다항식을 결정함
  // 연립 방정식을 풀기 위해서는 다른 프로그램이 필요하고, 정확성도 보장할 수 없다.
- 주어진 점들을 해로 보고 구함

- f(x)를 $f(x_i)$로 나눈 식을 $G_i(x)$라 놓음 // 단, 자기자신이 들어간 부분(0인 부분 x_1)을 제외함
- $G_0(x)$부터 $G_i(x)$까지 더해줌
- $g(x) = G_0(x) * f_0 + G_1(x)*f_1 + \ldots + G_n(x)*f_n$ // 이렇게 하면 원래의 식 $F(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$을 증명
- 상기 g(x)는 0과 n 사이의 모든 i에 대해서 $g(x_i) = f_i$를 만족한다. (g(x)는 모든 $(x_i,f(x_i))$)를 지나는 다항식이 된다.

- f(x)를 일차다항식 P(x)로 볼 때,
- $y = P(x) = ax + b$ - $y_0 = ax_0 + b$ - $y_1 = ax_1 + b$
- $a = y_1 - y_0 / x_1 - x_0$ - $b = y_1 - ax_1 = y_1 - (y_1-y_0/x_1-x_0) *x_1 = x_1y_0 - x_0y_1/x_1-x_0$
- $y = (y_1 - y_0 / x_1 - x_0) *x + x_1y_0 - x_0y_1 / x_1 - x_0$ // ax+b를 풀어서 쓴 것
  $= (x-x_0)y_1 - (x - x_1)y_0 / x_1 - x_0$
- $y_1 = f(x_1)$, $y_0 = f(x_0)$
- $L_0(x) = x - x_1 / x_0 - x_1$ // 부호를 바꾸어 준 것
- $L_1(x) = x - x_0 / x_1 - x_0$
- $y = P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)*f(x_1) = (x - x_1 / x_0 - x_1)*y_0 + (x - x_0 / x_1 - x_0)*y_1$
- $f(x) = y = a0(x-x1)(x-x2)+a1(x-x0)(x-x2)+a2(x-x0)(x-x1)$
- $f(x) = y = y0*((x-x1)(x-x2)/(x0-x1)(x0-x2))+y1((x-x0)(x-x2)/(x1-x0)(x1-x2))+y2((x-x0)(x-x1)/(x2-x0)(x2-x1))$
- $f(x) = y = 2\sum(i=0)y_i\ 2\prod(j=0,\ j!=1)*(x-x_j)/(x_i-x_j)$ // 분모가 0이 되면 안되기 때문에 j != 1 이다.

○ 뉴턴 분할 - 차분 보간다항식 : 한 점으로

* 선형 보간법 : 두 개의 점을 직선으로 연결하는 것 => 따로따로 구하지만 하나의 함수이다.
  - $f(x)-f(x_0)/x-x_0 = f(x_1)-f(x_0)/x_1-x_0$
  - n차 다항식이 맞지만 라그랑제와 다름,
  - 틀을 $f_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$ 로 만듦
    => a_0, a_1, a_2는 데이터 점들을 사용하여 구할 수 있음

  - $x = x_0$ 일 때, $f_2(x = x_0) = f(x_0)$
    => $a_0 = f(x_0)$ 이 된다.
  - $x = x_1$일 때, $f_2(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$
    => $a_1 = f(x_1)-a_0 / x_1 - x_0 = f(x_1) - f(x_0) / x_1 - x_0$

  - 재귀공식을 구하기 위해 함수들 $g(x_0)$, $g(x_1,x_0)$, $g(x_2, x_1, x_0)$, ...을 도입한다.
  - 앞의 공식을 구하고, 다음 공식에 대입해주는 형식
    => $g(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0) = f[x_1, \ldots ,x_n] - f[x_0, \ldots , x_{n-1}] / x_n - x_0$
  - 점화식을 재귀함수를 이용하여 구한 것 // 과제 : 라그랑제 보간법 코드로 짜서 출력

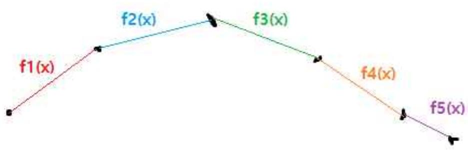
○ 스플라인 보간법 : 점들의 부분집합에서 저차의 다항식을 소구간별로 적용하는 것

* 스플라인 보간법을 구하기 위해 세 가지 조건을 준다.
* 첫 번째 조건 : 시작점과 끝 점에 가정 값을 준다.
* 두 번째 조건 : 끝 점과 다음 선의 시작점이 동일하다.
* 세 번째 조건 : 차수가 늘어날 때 마다 미분을 한다. 미분을 하여도 끝 점과 다음 선의 시작점이 같다.

* 함수 f(x)는 다항식 p(x)로 추측할 수 있다. => 슈트라트 정리
* 스플라인은 점과 점사이의 선 하나로만 판별 => 구간법
* 보통 3차식 까지만 사용한다. => 3차식 : 큐빅 스플라인

* 식과 미지수의 개수가 맞지 않아 조건을 주어 개수를 맞춘다.
* 반올림 오차와 튀는(진동) 오차가 없다. 3D Max, 일러스트레이터처럼 벡터 방식을 사용할 때 쓴다.

  - $S_1(x) = a_1+b_1(x-x_1)$ - $S_2(x) = a_2+b_2(x-x_2)$
  - x 는 주어지는 값 - 구하는 값 : a, b
  - n+1개의 점이 있으면 n개의 구간이 있음
  - 직선의 기울기 $b_i = f_{i+1} - f_i / x_{i+1} - x_i$ 임
  - a : S의 값 - b : f2-f1 / x2-x1 // △y / △x



* 선형 스플라인 : $f(x) = f(x_0) + (f(x_1) - f(x_0) / x_1 - x_0) (x - x_0)$
  - 선형 스플라인을 미분하면 점과 점 사이에 연결이 되지 않는다. // y=a의 식이 나오기 때문

$t_0 = 15, \quad v(t_0) = 362.78$

$t_1 = 20, \quad v(t_1) = 517.35$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0)$$

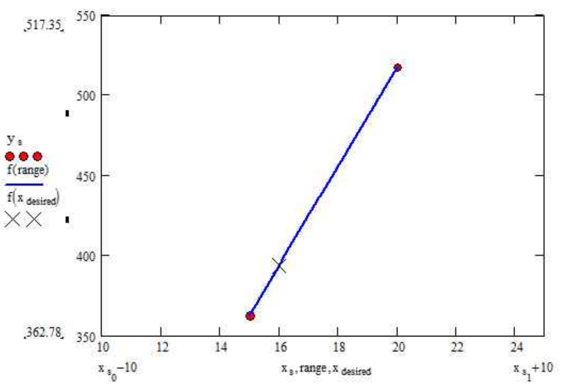
$$= 362.78 + \frac{517.35 - 362.78}{20 - 15}(t - 15)$$

$$v(t) = 362.78 + 30.913(t - 15)$$

At $t = 16$,

$$v(16) = 362.78 + 30.913(16 - 15)$$

$$= 393.7 \text{ m/s}$$



* 2차 스플라인 : 2차식 이상의 스플라인

- n차 도함수가 절점에서 연속이 되기 위해서 적어도 n+1차 스플라인이 사용되어야 한다.
  => 1차식을 미분할 경우 y=a가 되기 때문에 점과 점 사이에 연결이 되지 않는다.

- 3차 다항식이 가장 많이 사용 => 1차와 2차 도함수가 연속
- $a_n x^2 + b_n x + c_n$ 일 경우 3(n-1)개의 미지수를 모름

- 미지수를 줄이기 위해 조건을 준다.
  1. (연속 조건) 함수는 모든 점을 지나야 한다. (시작점과 끝 점에 가정 값을 준다.)
     - (x_2, f_2) 가 $f_1(x)$와 $f_2(x)$에 둘 다 들어가야 함
     - $a_n = f_n$로 가정하면 $f(x) = f(x)+b_n x+c_n$이기 때문에 2(n-1)의 미지수 만 구하면 된다.

     $f_i(x) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2$ ➜ $a_i = f_i$ (구간의 시작점)

     $\therefore\ s_i(x) = f_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$ ➜ $(n-1)$ 개의 조건

     미지수의 개수가 $2(n-1)$로 줄었음

  2. 인접하는 다항식의 함수 값은 절점에서 같아야한다. (끝 점과 다음 선의 시작점이 동일하다.)

     절점 $(i+1)$에서 $f_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 = f_i + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2$

     $h_i = x_{i+1} - x_i$ 라고 정의하면 $f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = f_{i+1}$ ➜ $(n-1)$ 개의 조건

     더 필요한 조건의 수는 $2(n-1) - (n-1) = n-1$ 이다.

  3. 내부 절점에서 1차도함수는 같아야 한다. (미분을 하여도 끝 점과 다음 선의 시작점이 같다.)
     - $f_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 = f_{i+1} + b_{i+1}(x - x_{i+1}) + c_{i+1}(x - x_{i+1})^2$
       => $b_i + 2c_i(x - x_i) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_{i+1})$
       => x_{i+1}을 대입, $b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) = b_{i+1}$

     $s_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i)$

     내부 절점 $(i+1)$에서 $b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}$ ➜ $(n-2)$ 개의 조건

     나머지 필요한 조건은 $(n-1) - (n-2) = 1$ 개.

  4. 첫 번째 점에서 2차 도함수를 0이라고 가정한다.

     $c_1 = 0$

     ➜ 이 조건은 최초의 두 점을 직선으로 연결한다는 것을 의미한다.

* 2차 스플라인 연습문제) 주어진 자료를 2차 스플라인으로 접합하고, x = 5에서의 함수 값을 추정하라.

i	x_i	f_i
1	3.0	2.5
2	4.5	1.0
3	7.0	2.5
4	9.0	0.5

// 미분을 하여 1차식으로 만든 후 시작

풀이) 4 개의 데이터 점과 3 개의 구간을 갖는다. ➜ 3(4 – 1) = 9 조건이 있어야 함.

조건 (연속방정식)과 (c_1 = 0)를 적용하면 ➜ (4 – 1) + 1 = 4 개의 조건이 만족함.

i = 1에서 3에 대해 조건 (절점에서의 함수값)를 적용하면 4 – 1 = 3 개의 조건이 만족함.

$$f_1 + b_1 h_1 = f_2$$

$$f_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 = f_3$$

$$f_3 + b_3 h_3 + c_3 h_3^2 = f_4$$

조건 (내부 절점에서의 도함수값) ➜ 3 – 1 = 2 개의 조건이 만족함.

$$b_1 = b_2$$

$$b_2 + 2c_2 h_2 = b_3$$

필요한 함수와 구간 폭의 값은 다음과 같다.

$$f_1 = 2.5 \qquad h_1 = 4.5 - 3.0 = 1.5$$
$$f_2 = 1.0 \qquad h_2 = 7.0 - 4.5 = 2.5$$
$$f_3 = 2.5 \qquad h_3 = 9.0 - 7.0 = 2.0$$
$$f_4 = 0.5$$

// 행렬 표현 시 Ax = B 식으로 나타냄

행렬로 표시하면

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 6.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} b_1 = -1 \\ b_2 = -1 \\ b_3 = 2.2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c_2 = 0.64 \\ c_3 = -1.6 \end{matrix}$$

// 행렬 시 b를 남기고 오른쪽으로 이항한다.

그러므로

$$s_1(x) = 2.5 - (x-3)$$
$$s_2(x) = 1.0 - (x-4.5) + 0.64(x-4.5)^2$$
$$s_3(x) = 2.5 + 2.2(x-7.0) - 1.6(x-7.0)^2$$

$$s_2(x) = 1.0 - (5-4.5) + 0.64(5-4.5)^2$$

□ 곡선 보간법

○ Ferguson Curve

* 곡선을 자유자재로 만들 수는 있으나 보간하는 식이 급격히 변화한다.
* 곡선 양 끝점에서의 위치와 접선벡터로 정의

* 3차 Ferguson 의 매개변수 형 표현
  - $0 <= u <= 1$

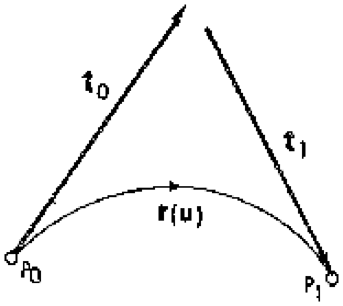
    $x(u) = a_{0x} + a_{1x}u + a_{2x}u^2 + a_{3x}u^3$

    $y(u) = a_{0y} + a_{1y}u + a_{2y}u^2 + a_{3y}u^3$

    $z(u) = a_{0z} + a_{1z}u + a_{2z}u^2 + a_{3z}u^3$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x(u) \\ y(u) = \\ z(u) \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{0x} & a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{0y} & a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} \\ a_{0z} & a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$$

* Ferguson 곡선의 벡터 표현
  - $R(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3$
  - $R'(u) = a_1 + a_2u + a_3u^2$



* 12개의 미지수를 풀기 위해 4개의 조건벡터가 필요
  - $r(0) = P_0 = a_0$ // 단위 곡선의 시작점
  - $r(1) = P_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ // 단위 곡선의 끝 점
  - $r'(0) = t_0 = a_1$ // 시작점의 접선 벡터(기울기)
  - $r'(1) = t_1 = a_1 + a_2 + a_3$ // 끝 점의 접선 벡터(기울기)

  - $a_0 = r(0)$
  - $a_1 = r'(0)$
  - $a_2 = -3r(0) + 3r(1) - 2r'(0) - r'(1)$
  - $a_3 = 2r(0) - 2r(1) + 2r'(0) + r'(1)$

  // 대입하여 도출
  - $a_2 + a_3 = P_1 - P_0 - t_0$ => A
  - $2a_2 + 3a_3 = t_1 - t_0$ => B

    => $P_1 = P_0 + t_0 + a_2 + a_3$

    $t_1 = t_0 + 2a_2 + 3a_3$

  - $A = a_2 + a_3$
  - $B = 2a_2 + 3a_3$ // ((B)식) - ((A)식 * 2)

    => $a_2 = 3A-B$

    => $a_3 = B-2A$

    => $A = P_1 - P_0 - t_0$

    => $B = t_1 - t_0$

```
   3A = 3P1 - 3P0 - 3t0
+  -B = -t1 + t0
--------------------------------
=> a2 = 3P1 - 3P0 - t1 - 2t0
```

$$\Rightarrow r(u) = P_0 + t_0u + [3(P_1 - P_0) - 2t_0 - t_1]u^2 + [2(P_0 - P_1) + t_0 + t_1]u^3$$

$$= (1 - 3u^2 + 2u^3)P_0 + (3u^2 - 2u^3)P_1 + (u - 2u^2 + u^3)t_0 + (-u^2 + u^3)t_1$$

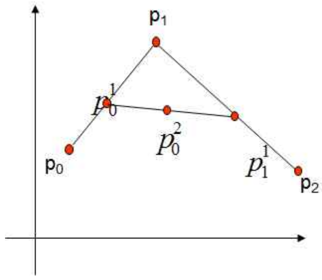
$$\Rightarrow r(u) = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ t_0 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

[1×4] [4×4] [4×1]

= [1×1]

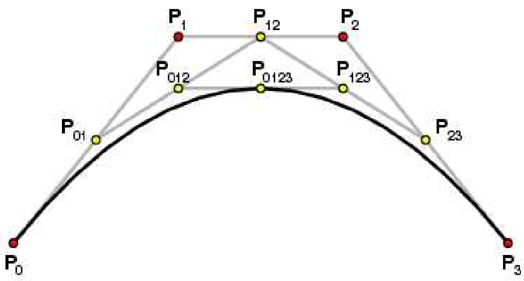
○ Bezier Curve

* 곡선 양 끝점의 위치와 양 끝점에서의 접선 벡터를 간접적으로 정의하기 위한 두 점을 사용하여 정의
* 두 점은 보통 곡선 위의 점이 아님



* 직선의 매개변수 식을 도입
* 매개변수 t를 이용하여 점과 점 사이의 선을 구하고, 선과 선 사이의 선을 구함
  - $p_0^1(t) = (1 - t)p_0 + t*p_1$

* p_0->p_1 선과 p_1->p_2 선을 잇는 선 $p_0^2(t)$
  - $p_0^2(t) = (1 - t)p_0^1(t) + t*p_1^1(t)$
    $= (1 - t)\{ (1 - t)p_0 + t*p_1 \} + t * \{ (1 - t)p_1 + t*p_2 \}$
    $= (1 - t)^2*P_0 + 2(1 - t)t*p_1 + t^2*p_2$



* p_1->p_2 선과 p_2->p_3 선을 잇는 선 $p_1^2(t)$
  - $p_1^2(t) = (1 - t)p_1^1(t) + t*p_2^1(t)$
    $= (1 - t)\{ (1 - t)p_1 + t*p_2 \} + t * \{ (1 - t)p_2 + t*p_3 \}$
    $= (1 - t)^2*P_1 + 2(1 - t)t*p_2 + t^2*p_3$

* $p_0^2(t)$과 $p_1^2(t)$를 잇는 선
  - $p_0^3(t) = (1 - t)p_0^2(t) + t*p_1^2(t)$ // $p_0^2(t)$과 $p_1^2(t)$를 대입
    $= (1 - t)*\{ (1 - t)^2p_0 + 2(1 - t)t*p_1 + t^2*p_2 \} + t * \{ (1 - t)^2p_1 + 2(1 - t)t*p_2 + t^2*p_3 \}$

* Bezier Curve 점화식

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{(n-1)!\,i!} t^i (1-t)^{n-i}$$
$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$$

○ B-Spline Curve

* 곡선 양 끝점에 정확히 매칭 하는 것이 아니라 대략적으로 끝 점을 정의

*
  -

○

*
  -

○

*
  -