수치해석 - 기말

곡선 근사와 보간법

□ 곡선접합

* 바이어 슈트라스의 근사정리
  - 어떤 함수의 관계가 있는데, 실제적으로 어떤 함수인지는 잘 모름(참을 모름)
  -> 다항식으로 근사할 수 있다(바이어 슈트라스의 근사정리)
  - 다항식을 구하는 것, 항이 많을수록 오차가 줄어든다. => 일차식 일 경우 직선이므로 오차가 크다.

* 최소제곱 회귀분석
  - 관계를 어떻게 둘 것인가에 따라 식이 나온다.
  - 각 점의 오차들을 다 더해서 오차가 가장 작은 것을 직선의 방정식으로 한다.
  - 해를 모르고, 일차식으로 표현해본다 -> 직선을 그었을 경우, 오차가 가장 작은 선으로 그어본다.
    => 최소 다선법

* 1차식일 때
  - y = a0 + a1x + e // a0 : 절편, a1 : 기울기, e : 오차
  - e = -y+a0+a1x
  - Sr = 모든오차의 합의 제곱 = $(y-a0-a1x)^2$
  - 제곱을 풀면 +인 2차방정식이 나옴
  - 방정식의 값이 제일 밑에 붙는다 => 기울기가 0 (편미분을 취하면 0가 되어야 한다.)

* 2차식 일 때
  - y = a0 + a1x + a2x제곱 + e

○ 미분 -> 순간순간의 변화율

* (xn)' = nxn-1
* 변화율 = f(xi+1) - f(x) / xi+1 - xi
  - 상미분(d로 표현) : 하나의 독립 변수만 보는 것
  - 편미분(∂|δ|△(델타)로 표현) : 여러 개의 변수로 보는 것
  - 도함수 = 미분 계수 = 순간 기울기 = 접선 기울기 = △->∞ 하는 것이 미분

○ 적분 -> 미분 값들의 누적, 현상들의 결과(통틀어서의 결과)

* 부정적분 : 도함수를 적분하였을 경우 C를 모름 f(x) = 2x + 1
  - ∫(2x+1)dx =적분=> x제곱+x+C = F(x)

* 적분 공식 : $Fx^n dx$ = (1/n+1)xn+1승 + C
* 부정적분 공식

* 정적분 : 간격을 극한으로 쪼개서 넓이를 다 더함
  - limn->∞ n∑k=1 $f(x_k)$△x : △x는 밑변, $f(x_k)$는 높이
  - ∫2 0 에 x^2dx => $[1/3x^3+C]2$ => $[1/3*2^3 + C] - [1/3*0^3 + C]$
    => 1/3*8

□ 보간법

○ 보간법

* 보간법 : 점들 사이의 중간 값을 산출할 때 사용
  - 정의역을 넣었을 경우 나오는 치역을 구함 = 함수를 구함
  - 다항식으로 표현하여 함수를 찾아봄
  - 선형 방정식 : 일차식의 결합으로 이루어진 식
    // x : 독립 변수, y : 종속 변수, a : 계수

* 보간법을 구하는 방법 두 가지
  - 라그랑제 보간법 : 점 하나의 식으로 표현(하나의 함수로 표현) : 점이 n개일 때 n차식 함수
  - 뉴턴 보간법 : 점 하나의 식으로 표현(하나의 함수로 표현) : 점이 n개일 때 n차식 함수
  - 레그레이션 보간법
  - 각 점마다 구간을 나누어 표현

* Vandermonde 행렬
  - $f(x) = y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^{n-1}$ 식을 차례대로 행렬에 넣은 것 => 불안 요소가 많음

○ 라그랑제 보간법 : 오차가 많이 일어난다. (불안 요소가 많음)

- $f(x) = y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^{n-1}$ // n+1개의 계수(a)를 찾아야 함
- 연립 방정식을 풀지 않고 다항식을 결정함
  // 연립 방정식을 풀기 위해서는 다른 프로그램이 필요하고, 정확성도 보장할 수 없다.
- 주어진 점들을 해로 보고 구함

- f(x)를 $f(x_i)$로 나눈 식을 $G_i(x)$라 놓음 // 단, 자기자신이 들어간 부분(0인 부분 x_1)을 제외함
- $G_0(x)$부터 $G_i(x)$까지 더해줌
- $g(x) = G_0(x) * f_0 + G_1(x)*f_1 + ... + G_n(x)*f_n$ // 이렇게 하면 원래의 식 $F(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$을 증명
- 상기 g(x)는 0과 n 사이의 모든 i에 대해서 $g(x_i) = f_i$를 만족한다. (g(x)는 모든 $(x_i,f(x_i))$를 지나는 다항식이 된다.

- f(x)를 일차다항식 P(x)로 볼 때,
- $y = P(x) = ax + b$ - $y_0 = ax_0 + b$ - $y_1 = ax_1 + b$
- $a = y_1 - y_0 / x_1 - x_0$ - $b = y_1 - ax_1 = y_1 - (y_1-y_0/x_1-x_0) *x_1 = x_1y_0 - x_0y_1/x_1-x_0$
- $y = (y_1 - y_0 / x_1 - x_0) *x + x_1y_0 - x_0y_1 / x_1 - x_0$ // ax+b를 풀어서 쓴 것
  $= (x-x_0)y_1 - (x - x_1)y_0 / x_1 - x_0$
- $y_1 = f(x_1)$, $y_0 = f(x_0)$
- $L_0(x) = x - x_1 / x_0 - x_1$ // 부호를 바꾸어 준 것
- $L_1(x) = x - x_0 / x_1 - x_0$
- $y = P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)*f(x_1) = (x - x_1 / x_0 - x_1)*y_0 + (x - x_0 / x_1 - x_0)*y_1$
- $f(x) = y = a0(x-x1)(x-x2)+a1(x-x0)(x-x2)+a2(x-x0)(x-x1)$
- $f(x) = y = y0*((x-x1)(x-x2)/(x0-x1)(x0-x2))+y1((x-x0)(x-x2)/(x1-x0)(x1-x2))+y2((x-x0)(x-x1)/(x2-x0)(x2-x1))$
- $f(x) = y = 2\sum(i=0)y_i\ 2\prod(j=0,\ j!=1)*(x-x_j)/(x_i-x_j)$ // 분모가 0이 되면 안되기 때문에 j != 1 이다.

○ 뉴턴 분할 - 차분 보간다항식 : 한 점으로

* 선형 보간법 : 두 개의 점을 직선으로 연결하는 것 => 따로따로 구하지만 하나의 함수이다.
  - $f(x)-f(x_0)/x-x_0 = f(x_1)-f(x_0)/x_1-x_0$
  - n차 다항식이 맞지만 라그랑제와 다름,
  - 틀을 $f_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$ 로 만듦
    => a_0, a_1, a_2는 데이터 점들을 사용하여 구할 수 있음

  - $x = x_0$ 일 때, $f_2(x = x_0) = f(x_0)$
    => $a_0 = f(x_0)$ 이 된다.
  - $x = x_1$일 때, $f_2(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$
    => $a_1 = f(x_1)-a_0 / x_1 - x_0 = f(x_1) - f(x_0) / x_1 - x_0$

  - 재귀공식을 구하기 위해 함수들 $g(x_0)$, $g(x_1,x_0)$, $g(x_2, x_1, x_0)$, …을 도입한다.
  - 앞의 공식을 구하고, 다음 공식에 대입해주는 형식
    => $g(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) = f[x_1, \dots ,x_n] - f[x_0, \dots , x_{n-1}] / x_n - x_0$
  - 점화식을 재귀함수를 이용하여 구한 것 // 과제 : 라그랑제 보간법 코드로 짜서 출력

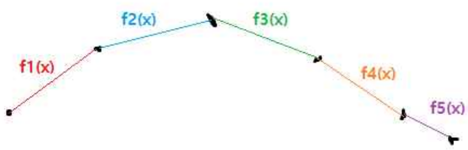
○ 스플라인 보간법 : 점들의 부분집합에서 저차의 다항식을 소구간별로 적용하는 것

* 스플라인 보간법을 구하기 위해 세 가지 조건을 준다.
* 첫 번째 조건 : 시작점과 끝 점에 가정 값을 준다.
* 두 번째 조건 : 끝 $p_0^2(t)$과 $p_1^2(t)$를점과 다음 선의 시작점이 동일하다.
* 세 번째 조건 : 차수가 늘어날 때 마다 미분을 한다. 미분을 하여도 끝 점과 다음 선의 시작점이 같다.

* 함수 f(x)는 다항식 p(x)로 추측할 수 있다. => 슈트라트 정리
* 스플라인은 점과 점사이의 선 하나로만 판별 => 구간법
* 보통 3차식 까지만 사용한다. => 3차식 : 큐빅 스플라인

* 식과 미지수의 개수가 맞지 않아 조건을 주어 개수를 맞춘다.
* 반올림 오차와 튀는(진동) 오차가 없다. 3D Max, 일러스트레이터처럼 벡터 방식을 사용할 때 쓴다.

  - $S_1(x) = a_1+b_1(x-x_1)$ - $S_2(x) = a_2+b_2(x-x_2)$
  - x 는 주어지는 값 - 구하는 값 : a, b
  - n+1개의 점이 있으면 n개의 구간이 있음
  - 직선의 기울기 $b_i = f_{i+1} - f_i / x_{i+1} - x_i$ 임
  - a : S의 값 - b : f_2-f_1 / x_2-x_1 // $\triangle y$ / $\triangle x$



* 선형 스플라인 : $f(x) = f(x_0) + (f(x_1) - f(x_0) / x_1 - x_0) (x - x_0)$
  - 선형 스플라인을 미분하면 점과 점 사이에 연결이 되지 않는다. // y=a의 식이 나오기 때문

$t_0 = 15, \quad v(t_0) = 362.78$

$t_1 = 20, \quad v(t_1) = 517.35$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0)$$

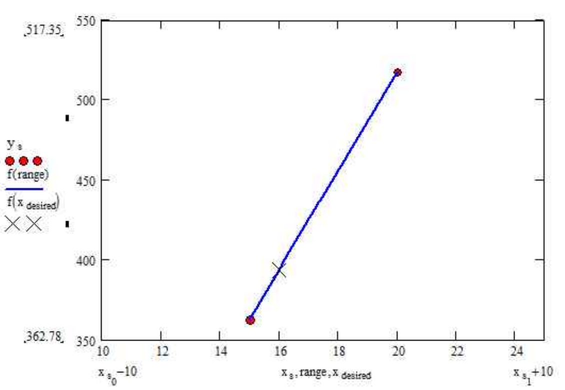
$$= 362.78 + \frac{517.35 - 362.78}{20 - 15}(t - 15)$$

$$v(t) = 362.78 + 30.913(t - 15)$$

At $t = 16$,

$$v(16) = 362.78 + 30.913(16 - 15)$$

$$= 393.7 \text{ m/s}$$



* 2차 스플라인 : 2차식 이상의 스플라인

- n차 도함수가 절점에서 연속이 되기 위해서 적어도 n+1차 스플라인이 사용되어야 한다.
  => 1차식을 미분할 경우 y=a가 되기 때문에 점과 점 사이에 연결이 되지 않는다.

- 3차 다항식이 가장 많이 사용 => 1차와 2차 도함수가 연속
- $a_n x^2 + b_n x + c_n$ 일 경우 3(n-1)개의 미지수를 모름

- 미지수를 줄이기 위해 조건을 준다.
  1. (연속 조건) 함수는 모든 점을 지나야 한다. (시작점과 끝 점에 가정 값을 준다.)
     - (x_2, f_2) 가 $f_1(x)$와 $f_2(x)$에 둘 다 들어가야 함
     - a_n = f_n로 가정하면 f(x) = $f(x)+b_n x+c_n$이기 때문에 2(n-1)의 미지수 만 구하면 된다.

     $f_i(x) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2$ ➜ $a_i = f_i$ (구간의 시작점)

     $\therefore\ s_i(x) = f_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$ ➜ $(n-1)$ 개의 조건

     미지수의 개수가 $2(n-1)$로 줄었음

  2. 인접하는 다항식의 함수 값은 절점에서 같아야한다. (끝 점과 다음 선의 시작점이 동일하다.)

     절점 $(i+1)$에서 $f_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 = f_i + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2$

     $h_i = x_{i+1} - x_i$ 라고 정의하면 $f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = f_{i+1}$ ➜ $(n-1)$ 개의 조건

     더 필요한 조건의 수는 $2(n-1) - (n-1) = n-1$ 이다.

  3. 내부 절점에서 1차도함수는 같아야 한다. (미분을 하여도 끝 점과 다음 선의 시작점이 같다.)
     - $f_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 = f_{i+1} + b_{i+1}(x-x_{i+1}) + c_{i+1}(x-x_{i+1})^2$
       => $b_i + 2c_i(x-x_i) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x-x_{i+1})$
       => x_{i+1}을 대입, $b_i + 2c_i(x_{i+1}-x_i) = b_{i+1}$

     $s_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i)$

     내부 절점 $(i+1)$에서 $b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}$ ➜ $(n-2)$ 개의 조건

     나머지 필요한 조건은 $(n-1) - (n-2) = 1$ 개.

  4. 첫 번째 점에서 2차 도함수를 0이라고 가정한다.

     $c_1 = 0$

     ➜ 이 조건은 최초의 두 점을 직선으로 연결한다는 것을 의미한다.

* 2차 스플라인 연습문제) 주어진 자료를 2차 스플라인으로 접합하고, x = 5에서의 함수 값을 추정하라.

i	x_i	f_i
1	3.0	2.5
2	4.5	1.0
3	7.0	2.5
4	9.0	0.5

// 미분을 하여 1차식으로 만든 후 시작

풀이) 4 개의 데이터 점과 3 개의 구간을 갖는다. ➜ 3(4 – 1) = 9 조건이 있어야 함.

조건 (연속방정식)과 (c_1 = 0)를 적용하면 ➜ (4 – 1) + 1 = 4 개의 조건이 만족함.

i = 1에서 3에 대해 조건 (절점에서의 함수값)를 적용하면 4 – 1 = 3 개의 조건이 만족함.

$$f_1 + b_1 h_1 = f_2$$

$$f_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 = f_3$$

$$f_3 + b_3 h_3 + c_3 h_3^2 = f_4$$

조건 (내부 절점에서의 도함수값) ➜ 3 – 1 = 2 개의 조건이 만족함.

$$b_1 = b_2$$

$$b_2 + 2c_2 h_2 = b_3$$

필요한 함수와 구간 폭의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1 &= 2.5 & h_1 &= 4.5 - 3.0 = 1.5 \\ f_2 &= 1.0 & h_2 &= 7.0 - 4.5 = 2.5 \\ f_3 &= 2.5 & h_3 &= 9.0 - 7.0 = 2.0 \\ f_4 &= 0.5 \end{aligned}$$

// 행렬 표현 시 Ax = B 식으로 나타냄

행렬로 표시하면

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 6.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} b_1 &= -1 \\ b_2 &= -1 \\ b_3 &= 2.2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} c_2 &= 0.64 \\ c_3 &= -1.6 \end{aligned}$$

// 행렬 시 b를 남기고 오른쪽으로 이항한다.

그러므로

$$s_1(x) = 2.5 - (x-3)$$

$$s_2(x) = 1.0 - (x-4.5) + 0.64(x-4.5)^2$$

$$s_3(x) = 2.5 + 2.2(x-7.0) - 1.6(x-7.0)^2$$

$$s_2(x) = 1.0 - (5-4.5) + 0.64(5-4.5)^2$$

□ 곡선 보간법

○ Ferguson Curve

* 곡선을 자유자재로 만들 수는 있으나 보간하는 식이 급격히 변화한다.
* 곡선 양 끝점에서의 위치와 접선벡터로 정의

* 3차 Ferguson 의 매개변수 형 표현
  - $0 <= u <= 1$

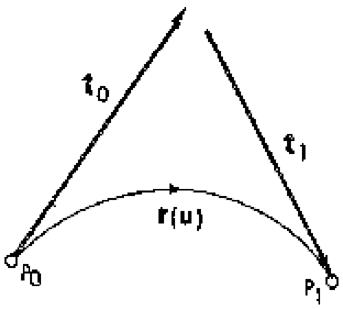
$x(u) = a_{0x} + a_{1x}u + a_{2x}u^2 + a_{3x}u^3$

$y(u) = a_{0y} + a_{1y}u + a_{2y}u^2 + a_{3y}u^3$

$z(u) = a_{0z} + a_{1z}u + a_{2z}u^2 + a_{3z}u^3$

$$=> \begin{matrix} x(u) \\ y(u) = \\ z(u) \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{0x} & a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{0y} & a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} \\ a_{0z} & a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$$

* Ferguson 곡선의 벡터 표현
  - $R(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3$
  - $R'(u) = a_1 + a_2u + a_3u^2$



* 12개의 미지수를 풀기 위해 4개의 조건벡터가 필요
  - $r(0) = P_0 = a_0$ // 단위 곡선의 시작점
  - $r(1) = P_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ // 단위 곡선의 끝 점
  - $r'(0) = t_0 = a_1$ // 시작점의 접선 벡터(기울기)
  - $r'(1) = t_1 = a_1 + a_2 + a_3$ // 끝 점의 접선 벡터(기울기)

  - $a_0 = r(0)$
  - $a_1 = r'(0)$
  - $a_2 = -3r(0) + 3r(1) - 2r'(0) - r'(1)$
  - $a_3 = 2r(0) - 2r(1) + 2r'(0) + r'(1)$

  // 대입하여 도출
  - $a_2 + a_3 = P_1 - P_0 - t_0$ => A
  - $2a_2 + 3a_3 = t_1 - t_0$ => B

  => $P_1 = P_0 + t_0 + a_2 + a_3$

  $t_1 = t_0 + 2a_2 + 3a_3$

  - $A = a_2 + a_3$
  - $B = 2a_2 + 3a_3$ // ((B)식) - ((A)식 * 2)

  => $a_2 = 3A-B$

  => $a_3 = B-2A$

  => $A = P_1 - P_0 - t_0$

  => $B = t_1 - t_0$

3A = 3P1 - 3P0 - 3t0
+ -B = -t1 + t0

=> a2 = 3P1 - 3P0 - t1 - 2t0

$$\Rightarrow r(u) = P_0 + t_0u + [3(P_1 - P_0) - 2t_0 - t_1]u^2 + [2(P_0 - P_1) + t_0 + t_1]u^3$$

$$= (1 - 3u^2 + 2u^3)P_0 + (3u^2 - 2u^3)P_1 + (u - 2u^2 + u^3)t_0 + (-u^2 + u^3)t_1$$

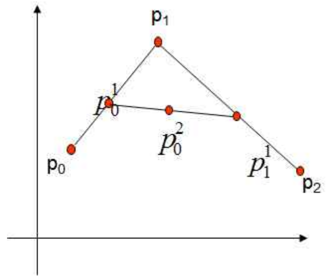
$$\Rightarrow r(u) = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ t_0 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

[1×4] [4×4] [4×1]

= [1×1]

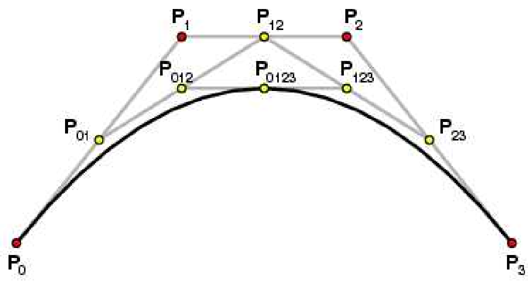
○ Bezier Curve

* 곡선 양 끝점의 위치와 양 끝점에서의 접선 벡터를 간접적으로 정의하기 위한 두 점을 사용하여 정의
* 두 점은 보통 곡선 위의 점이 아님



* 직선의 매개변수 식을 도입
* 매개변수 t를 이용하여 점과 점 사이의 선을 구하고, 선과 선 사이의 선을 구함
  - $p_0^1(t) = (1 - t)p_0 + t*p_1$

* p_0->p_1 선과 p_1->p_2 선을 잇는 선 $p_0^2(t)$
  - $p_0^2(t) = (1 - t)p_0^1(t) + t*p_1^1(t)$
    $= (1 - t)\{ (1 - t)p_0 + t*p_1 \} + t * \{ (1 - t)p_1 + t*p_2 \}$
    $= (1 - t)^2*P_0 + 2(1 - t)t*p_1 + t^2*p_2$



* p_1->p_2 선과 p_2->p_3 선을 잇는 선 $p_1^2(t)$
  - $p_1^2(t) = (1 - t)p_1^1(t) + t*p_2^1(t)$
    $= (1 - t)\{ (1 - t)p_1 + t*p_2 \} + t * \{ (1 - t)p_2 + t*p_3 \}$
    $= (1 - t)^2*P_1 + 2(1 - t)t*p_2 + t^2*p_3$

* $p_0^2(t)$과 $p_1^2(t)$를 잇는 선
  - $p_0^3(t) = (1 - t)p_0^2(t) + t*p_1^2(t)$ // $p_0^2(t)$과 $p_1^2(t)$를 대입
    $= (1 - t)*\{ (1 - t)^2p_0 + 2(1 - t)t*p_1 + t^2*p_2 \} + t * \{ (1 - t)^2p_1 + 2(1 - t)t*p_2 + t^2*p_3 \}$

* Bezier Curve 점화식

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{(n-1)!\,i!} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$$

○ B-Spline Curve

* 곡선 양 끝점에 정확히 매칭 하는 것이 아니라 대략적으로 끝 점을 정의

수치적분

□ 수치적분

○ 적분

* 변화(결과)의 량을 보는 것

* 원시 함수
  - 미분을 한 함수를 원래의 함수로 돌리는 것

○ 부정적분

* 부정적분 : 원시 함수로 돌릴 때, 마지막의 계수를 정할 수 없는 것(계수를 C로 사용)
  // ex) $f(x) = x^2+x+3$ => $f'(x) = 2x+1$ => $f(x) = x^2+x+c$
  - 부정 적분 공식 : $\int x^n dx = ((1/n+1) * x^{n+1}) + c$
    => $\int f(x)dx = f(x) + c$
    // ex) $\int (x^4 + x^2)dx = (1/5 * x^{3-1}) + c$

○ 정적분

* 정적분 : 구간을 사각형으로 잘게 쪼개어 넓이를 전부 더함
  - 부정적분과 적분하는 식은 같음
  - 정적분 공식 : $\int x^n dx = ((1/n+1) * x^{n+1}) + c$
    => $\int f(x)dx = [f(b) - f(a)]$ => $(f(b) + c) - (f(a) + c) = f(b) - f(a)$

* 정적분 구하는 방식
  - a = 0, b = 0
  - n : 쪼갠 수

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \qquad x_k = a + k\Delta x = \frac{2k}{n}$$
$$f(x_k) = x_k^{\,2} = \left(\frac{2k}{n}\right)^2 = \frac{4k^2}{n^2}$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{n^2}\cdot\frac{2}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$n\sum_{k=1} k^2 = n(n+1)(2n+1) / 6$ 가 됨

=> $8/n^3 * (n *(2n^2 + 3n + 1)) / 6$
   $= 8/n^3 * (2/6*n^3 + 3/6*n^2 + 1/6*n)$
   $= 8/3 + 4/n + 3/3n^2$ => $n \to \infty$ 이기 때문에 8/3만 남음
   $= 8/3$

* $n\sum i=0$ 은 for(int i=0; i<n; i++)문과 같다.
* 구분구적법

○ 직사각형 적분법

* 점과 점사이를 1차식(직선)으로 연결한 것
* $y_i * (x_j - x_i)$
  - a부터 b까지 직사각형 넓이를 전부 더해줌

○ 사다리꼴 적분법

* 사다리꼴 넓이 공식 : (밑변 + 윗변) * 높이 / 2
* $(y_i + y_j) * (x_j - x_i) / 2$
  - a부터 b까지 사다리꼴 넓이를 전부 더해줌
* P1 P2를 지정하고, P1을 직선 함수를 구하여 구간 적분(정적분)
  => $P1(x) = a_0+a_1x$ =적분=> $C + a_0x + a_1x^2 * 1/2$

○ Simpson 적분법

* 점을 연결시키는 고차 다항식을 이용하여 각 점 사이 넓이를 다 더함
  - 2차식 : Simpson 1/3 공식
  - 3차식 : Simpson 3/8 공식

* 점 사이의 넓이 = 다항식을 적분한 값
  - ex) $1 + x + x^2 + x^3$ =적분=> $C + x + x^2/2 + x^3/3$ => 이 값들을 점들마다 다 구함

* 2차식::Simpson 1/3 공식
  - 1/3 공식인 이유는 $x/3\ (\ 2ax^2 + 6c\ )$이기 때문
  - 점 P1, P2, P3를 지정하고, P1의 2차 함수를 구하여 구간 적분(정적분)

    => $p(x) = ax^2 + bx + c$

    => 1차 적분 :: $1/3 * ax^3 + 1/2 * bx^2 + cx$

    => 2차 적분 :: $[1/3 * ax^3 + 1/2 * bx^2 + cx] - [1/3 * a(-x)^3 + 1/2 * b(-x)^2 + c(-x)]$

    $= 1/3 * ax^3 + 1/3 * ax^3 + 2cx$

    $= 1/3\ (\ 2ax^3 + 6cx)$

    $= x/3\ (\ 2ax^2 + 6c\ )$

    => h로 바꿀 때, $h/3\ (\ 2ah^2 + 6c\ )$
  - 점 세 개를 사용 => 식이 3개가 되므로 2차 다항식의 계수들을 구할 수 있다. (-h, 0, h를 대입)

    => $x_0 = -h,\ x_1 = 0,\ x_2 = h$를 대입

    => $f(x_0) = f(-h) = ah^2 - bh + c$

    => $f(x_1) = f(0) = c$

    => $f(x_2) = f(h) = ah^2 + bh + c$

    => $f(x_0) + f(x_2) = 2ah^2 + 2c$

    $f(x_0) + f(x_2) + 4*f(x_1) = 2ah^2 + 2c + 4c$

    $= 2ah^2 + 6c$

    => 2차 적분 값 :: $h/3\ (\ 2ah^2 + 6c\ )$

    $= h/3\ (\ f(x_0)+f(x_2)+4*f(x_1)\ )$

  - ex) $n=4,\ h=0.2,\ f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ (두 개의 2h * 2를 한 번에 더함)

    => $h/3 * [\ (y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4)\ ]$

    $= h/3 * [\ (y_0+y_4) + 4(y_1+y_3) + 2y_2\ ]$

* 3차식::Simpson 3/8 공식
  - 3/8 공식인 이유는 $3h/8\ (\ y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\ )$ 이기 때문
  - 점 P1, P2, P3, P4를 지정하고, P1의 3차 함수를 구하여 구간 적분(정적분)
  - 점 네 개를 사용 => 식이 4개가 되므로 3차 다항식의 계수들을 구할 수 있다.

○ Taylor 급수 적분법

* 극한에서 나온 개념
* 어떤 점의 함수 값과 도함수 값으로 다른 점의 값을 예측
* 오일러 미분법(차분)에서 추가된 것
  - 오일러 미분 :: $f(x+\triangle x) = f(x) + (\triangle x)/1! * \partial f/\partial x$

    $= df(x)/dx = (\ f(x+\triangle x) - f(x)\ )\ /\ \triangle x$
* 공식
  - $f(x+\triangle x) = f(x) + (\triangle x)*\partial f/\partial x + (\triangle x)^2/2!*\partial^2 f/\partial^2 x + (\triangle x)^3/3!*\partial^3 f/\partial^3 x + \ldots$

// 지배 방정식 : 어떤 물체에 작용하여 영향을 주는 제일 큰 힘
// 뉴턴 => 위치의 변화를 주는 것을 F라고 함
// 브라움 => 모든 물질은 진동한다. -> 온도가 있는 모든 물질은 진동한다.
// 아이슈타인 => 에너지로 적용, 상대성이론

수치미분

□ 미분 방정식

○ 운동 방정식

* 오일러 운동 방정식 :: 회전과 회전 축
* 뉴턴의 운동 방정식 :: 상하좌우 (병진운동)
* 파동 방정식 ::
* Logistic equation :: dx/dt = (a - bx) * x

○ 상미분 (ODE)

* 리지드 바디(강체)를 다룰 때 사용 :: 시간을 넣어 위치를 계산
* 하나의 독립변수(t)에 의해서 구성된 종속함수
  - m = 아주 작은 질량들을 더한 총 질량
  - f(x) = $\sum_{i=1}^{n}(m * d^2x/dt^2)$
        = for (int i=0; i<n; i++) m[i] * a * dt;

* 선형화 : sin을 잘게 쪼개면 직선운동을 한다고 봄 :: sin∂를 ∂로 봄

○ 편미분 (PDE)

* 유체를 다룰 때 사용 :: 시간, 공간 등 다양한 형태로 독립변수를 넣을 수 있다
* 두 개 이상의 독립변수로 구성된 종속함수

○ 테일러(Taylor) 급수 다항식

* 테일러 급수의 특징
  - 절단 오차가 발생
  - 오차를 줄이려면 구간 h = x - x_0를 작게 한다
  - x_0 = 0이면 맥클로우린 전개이다

* y' = f(x, y), $y(x_0) = y_0$

* 알고 있는 위치(x_0)에서 h만큼 떨어진 곳의 위치(x_0+h)를 구함
  - 기울기 만 알고 있다 :: 진행 방향을 알 수 있다.
  - 2차 미분(변화의 변화)하면 진행 방향이 바뀜 :: n차까지 계속 미분(변화의 변화의 변화)을 다 더함

* $y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + h2^2/2!*y''(x_0) + \ldots + h^{n-1} / (n-1)! * y^{(n-1)}(x_0) + E_n$
* 오일러 급수 : $y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0)$ 까지 구한 것

* 예제) 3차 테일러 다항식을 쓴 미분 방정식 : $y' = 1/2 * (1+x)*y^2$, y(0) = 1 에 대한 y(0.1)의 근사 값을 구하라
  :: $y'(x) = f(x, y) = 1/2*(1+x)*y^2$

  :: $y''(x) = f'(x, y) = (1/2*(1+x)*y^2)'$ // y^2을 y*y로 봄 :: $(y^2)' = A'B+AB' = y'y+yy' = 2yy'$
  $= 1/2y^2 + (1/2*(1+x)*2*y*y')$
  $= 1/2y^2 + ((1+x)(1/2*2yy'))$
  $= 1/2y^2 + (1+x)*yy'$

  :: $y'''(x) = f''(x, y) = 2yy' + (1+x)((y')^2 + yy'')$

○ 오일러(Euler) 급수 다항식

* 제 1차 도함수 항 이후를 절단하여 오차로 봄
* 충분히 작은 소구간을 선택
  - $h = x_{i+1} - x_i$

* 반드시 초기 값을 설정한다.
  - $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

* 등간격 h를 가진 x의 값, x_0, x_1, ..., x_n 에 대한 y의 값, $y(x_1)$, $y(x_2)$, ... , $y(x_n)$의 근사 값을 구함

* Taylor 급수의 1차(계) 미분까지 구함
  - $y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0)$ 까지 구한 것
  - $y(x_1) \sim y(x_0) + hf(x_0, y_0)$

* 예제) Euler를 이용하여 dv / dt = 1/m * F(x, v, t), dx / dt = v 값 구하기
  - h의 값 = F의 값 :: 0.1 = 5, 0.2 = 4, 0.3 = 3

  :: $V(t_0 + h) = V_0 + h/1! * 1/m*F$

  :: $V(t_1) = V(0.1 + 0.1)$
  $= V0 + 0.1/1! * 1/1 * 5$
  $= V0 + 0.5$

* 예제) Euler 법을 사용하여 $y' = 1/2*(1 + x)y^2$, $y(0) = 1$에서 $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$의 근사 값 구하기

  :: $y(x_0) = 1$
  :: $y(x_0+h) = y(x_0) + hy'$
  $= y(x_0) + h * (1/2*(1 + x)y^2)$

  :: $y(0.1) = 1 + 0.1 * (1/2 * (1 + 0.1) * 1)$
  $= 1 + 0.1 * 0.55$
  $= 1.055$

  :: $y(0.2) = 1 + 0.2 * (1/2 * (1 + 0.2) * 1)$
  $= 1 + 0.2 * 0.6$
  $= 1.18$

  :: $y(0.3) = 1 + 0.3 * (1/2 * (1 + 0.3) * 1)$
  $= 1 + 0.3 * 0.65$
  $= 1.195$

○ 수정 오일러(Heun) 급수 다항식

* 오일러 공식에 사다리꼴 공식을 사용하여 해를 찾음
* Taylor 급수의 2차(계) 미분까지 구함

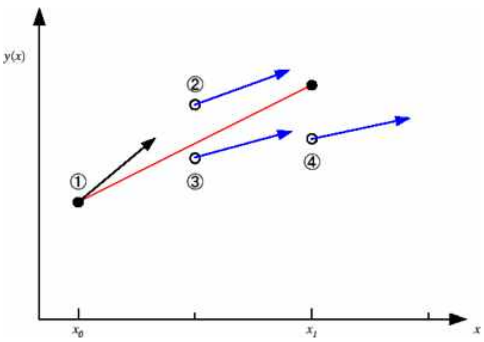
* $y_1 \sim y_0 + h*f(x_0, y_0)$을 구한 후 수정 Euler법을 적용

* $y1 \sim Y1 = y0 + h/2 * [f(x0, y0) + f(x1, y0 + h*f(x0, y0))] - h^3/12*y^{(3)}$ // $- h^3/12*y^{(3)}$은 오차

○ 룬게쿠타(Runge-Kutta) 급수 다항식

* Taylor 급수의 4차(계) 미분까지 사용 => 5차식까지의 오차효과
* 미분에 h값을 계속 곱한 것임 // 실제 테일러의 1차식으로만 구함
* h로 가기 전에 h/2 스텝을 한 번 더 봄 :: 총 4개의 기울기
  - 시작 기울기 :: $k_1 = h*f(x_n, y_n)$
  - 중간의 기울기 :: $k_2 = h*f(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$
  - 중간의 수정한 기울기 :: $k_3 = h*f(x_n + h/2, y_n + k_2/2)$
  - 다음 h의 기울기 :: $k_4 = h*f(x_n + h, y_n + k_3)$

  => 다음 점 $y_{n+1} = y_n + 1/6 * (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$



* 예제) 4차의 Runge-Kutta 방법을 써서 미분 방정식 $\frac{dy}{dx} = y,\quad y(0) = 1$ 에서 y(0.1), y(0.2)의 근사 값을 구하라

:: y(0.1) ≈ Y_1 구하기

$$k_1 = hf(x_0, Y_0) = 0.1 \times Y_0 = 0.1$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(x_0 + \frac{h}{2}, Y_0 + \frac{k_1}{2}) \\ &= 0.1 \times (1 + \frac{0.1}{2}) \\ &= 0.105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= hf(x_0 + \frac{h}{2}, Y_0 + \frac{k_2}{2}) \\ &= 0.1 \times (1 + \frac{0.105}{2}) \\ &= 0.10525 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= hf(x_0 + h, Y_0 + k_3) \\ &= 0.1 \times (1 + 0.10525) \\ &= 0.110525 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ Y_1 &= Y_0 + \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6} \\ &= 1 + \frac{0.1 + 2 \times 0.105 + 2 \times 0.10525 + 0.11052}{6} \\ &= 1.10517 \end{aligned}$$

:: y(0.2) ≈ Y_2 구하기

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_1, Y_1) = 0.1 \times Y_1 \\ &= 0.1 \times 1.10517 \\ &= 0.110517 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(x_1 + \frac{h}{2}, Y_1 + \frac{k_1}{2}) \\ &= 0.1 \times (1.10517 + \frac{0.110517}{2}) \\ &= 0.1160428 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= hf(x_1 + \frac{h}{2}, Y_1 + \frac{k_2}{2}) \\ &= 0.1 \times (1.10517 + \frac{0.1160428}{2}) \\ &= 0.1163191 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= hf(x_1 + h, Y_1 + k_3) \\ &= 0.1 \times (1.10517 + 0.1163191) \\ &= 0.1221489 \end{aligned}$$

$$\therefore\ Y_2 = Y_1 + \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

$$= 1.22140167.$$