Monty Hall en Monty Fall

Jonas Kaerts

26 juni 2016

1 Formulering van de problemen

Je speelt mee in een spelshow en je geraakt tot in de finale. De presentator, Monty Hall, neemt je mee naar drie deuren. Achter één van deze drie deuren staat de hoofdprijs, een auto, op je te wachten. Achter de andere twee deuren staan geiten.

Het klassieke Monty Hall probleem is als volgt: De presentator laat je alvast één van de drie deuren kiezen als voorlopige keuze. Alvorens te zien of je gewonnen hebt, wilt Monty eerst een psychologisch spelletje met je spelen. Hij weet immers achter welke deur de hoofdprijs zit. Eens hij je voorlopige keuze weet, zal hij één van de andere deuren openen. Hij kiest deze tweede deur zó dat hij steeds een deur met een geit laat zien. Op dit moment weet je al van één deur zeker dat deze een geit bevat. Nu geeft Monty je een keuze. Ofwel blijf je bij je eerste keuze, ofwel kan je nog veranderen naar de derde deur die nog onaangeroerd is gebleven. Het probleem bestaat eruit te bepalen of je er voordeel uit haalt om te wisselen naar de derde deur.

Het zal je misschien verbazen dat je er wel degelijk voordeel uit zal halen om te wisselen.

Essentieel in deze uitleg is dat Monty *altijd* en *doelbewust* een deur met een geit opent. Als je deze informatie weglaat uit de vraag krijg je iets dat bekend staat als het Monty Fall probleem. De formulering van het probleem is dan identiek aan zeggen dat Monty per ongeluk tegen een deur valt en deze opent. Achteraf blijkt dat dit niet je gekozen deur is en dat deze deur een geit bevat. We zullen beide problemen oplossen zodat duidelijk wordt dat bij Monty Hall wisselen voordelig is terwijl (verrassend genoeg) bij Monty Fall wisselen niets verandert aan je winstkansen.

2 Het klassieke Monty Hall probleem

2.1 De intuïtieve oplossing

Waarom is wisselen voordelig? Als jij een geit kiest als voorlopige keuze, is Monty verplicht de andere deur met een geit te openen. De derde deur bevat dan de prijs en je haalt er dus voordeel uit om te wisselen. Had je de deur met de auto gekozen, dan had je zowiezo verloren door te wisselen omdat iedere wissel een geit als gevolg heeft.

Als je dus een geit kiest als voorlopige keuze, win je altijd als je wisselt. Kies je de auto, verlies je altijd als je wisselt. Omdat je twee keer zoveel kans hebt om een geit te kiezen dan je kans hebt om de auto te kiezen, heb je er netto voordeel aan om te wisselen. In twee derde van de gevallen zal een wissel winst opleveren.

2.2 De formele oplossing

We lossen het probleem nu kanstheoretisch op. Stel dat je voorlopige keuze rust op deur 1.[1] We stellen nu een kanstabel. We beginnen met een beetje notatie. We noteren de deur met de prijs achter met D en de deur die Monty opent met M. De waarden die D kan aannemen zijn 1, 2 en 3. De waarden die M kan aannemen zijn 2 en 3 omdat Monty nooit de deur opent die jij gekozen hebt. De voorlopige kanstabel ziet er als volgt uit

	$M = 2$	$M = 3$
$D = 1$		
$D = 2$		
$D = 3$		

We gaan nu deze tabel invullen met de verscheidene kansen op de uitkomsten. We beginnen met de eerste rij. In 1/3 van de gevallen zal de prijs achter deur 1 zitten. De kansen op de eerste rij moeten dus optellen tot 1/3. Als de prijs achter deur 1 zit en jij deze deur als voorlopige keuze hebt, kan Monty zowel deur 2 als deur 3 opendoen. Monty verkiest geen deur boven de andere dus zullen beide deuren met evenveel kans gekozen worden. Dit levert ons dat

$$P(D = 1, M = 2) = P(D = 1, M = 3) = \frac{1}{6}.$$

Voor de tweede rij moeten opnieuw alle kansen optellen tot 1/3. Nu mag Monty niet deur 1 (jouw voorlopige keuze) openen en ook niet deur 2 (want daar zit de prijs). Het geval $D = 2$ en $M = 2$ mag dus niet voorvallen zodat

$$P(D = 2, M = 2) = 0 \quad \text{en} \quad P(D = 2, M = 3) = \frac{1}{3}.$$

Als tenslotte de prijs achter deur 3 zit, kunnen we de redenering van daarnet herhalen en vinden we dat

$$P(D = 3, M = 2) = \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad P(D = 3, M = 3) = 0.$$

Dit is dus de volledige kanstabel:

	$M = 2$	$M = 3$
$D = 1$	1/6	1/6
$D = 2$	0	1/3
$D = 3$	1/3	0

Nu zijn we klaar om de centrale vraag te beantwoorden. Is het voordelig om te wisselen van keuze of net niet? Je voorlopige keuze viel op deur 1. Wat als Monty deur 2 opende? Voorwaardelijke kansen leren ons dat

$$P(D = 1 \mid M = 2) = \frac{P(D = 1, M = 2)}{P(M = 2)} = \frac{1/6}{P(M = 2)}.$$

[1] De gevallen waarvoor je kiest voor deur 2 of 3 zijn op een volledig gelijkaardige manier uit te werken.

Hoe vinden we $P(M = 2)$? Dit kunnen we berekenen door in de eerste kolom van de tabel alle kansen op te tellen. Uiteindelijk vinden we dat

$$P(D = 1 \mid M = 2) = \frac{1/6}{1/6 + 0 + 1/3} = \frac{1}{3}.$$

Je hebt dus maar een kans van $1/3$ om te winnen als je bij je oorspronkelijke keuze blijft. Wat als je gewisseld had naar deur 3? Nu vinden we dat

$$P(D = 3 \mid M = 2) = \frac{P(D = 3, M = 2)}{P(M = 2)} = \frac{1/3}{1/6 + 0 + 1/3} = \frac{2}{3}.$$

Inderdaad, als je wisselt naar deur 3 heb je tweemaal zoveel kans om te winnen. Het verschil tussen de twee uitkomsten komt doordat bij de kans op $D = 1$ de kans verdeeld moet worden tussen $M = 2$ en $M = 3$. Bij de andere deuren is dit niet het geval.

Wat als Monty deur 3 had geopend? Je kan al verwachten dat de berekeningen niet anders zullen verlopen. Inderdaad, we vinden eerst dat

$$P(D = 1 \mid M = 3) = \frac{P(D = 1, M = 3)}{P(M = 3)} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3 + 0} = \frac{1}{3}$$

voor deur 1 en

$$P(D = 2 \mid M = 3) = \frac{P(D = 2, M = 3)}{P(M = 3)} = \frac{1/3}{1/6 + 1/3 + 0} = \frac{2}{3}$$

voor deur 2. Wisselen is dus altijd voordeliger.

3 Het Monty Fall probleem

Nu kijken we naar het Monty Fall probleem. Het grote verschil hier is dat Monty per ongeluk een deur opent die achteraf een geit blijkt te zijn en die toevallig niet dezelfde deur is als degene die je op het oog had. We hebben nu een andere kanstabel. Stel opnieuw dat je voorlopige keuze valt op deur 1. Voor D (de prijsdeur) hebben we opnieuw drie mogelijkheden, nl. $D = 1$, $D = 2$ en $D = 3$. Voor M zijn deze keer echter drie mogelijkheden (Monty duwt per ongeluk een willekeurige deur open). De voorlopige kanstabel is dus nu van volgende vorm.

	$M = 1$	$M = 2$	$M = 3$
$D = 1$			
$D = 2$			
$D = 3$			

De invulling loopt deze keer ook lichtjes anders als daarnet. Opnieuw heeft de prijs evenveel kans om achter iedere deur te zitten dus de kansen in iedere rij moeten tot $1/3$ optellen. Omdat Monty willekeurig een deur openduwt, moeten alle kolommen er hetzelfde uitzien. De enige manier waarop dit mogelijk is, is als de tabel volgende vorm heeft.

	$M = 1$	$M = 2$	$M = 3$
$D = 1$	1/9	1/9	1/9
$D = 2$	1/9	1/9	1/9
$D = 3$	1/9	1/9	1/9

Hier gebeurt het grote verschil al met het klassieke Monty Hall probleem. Omdat Monty geen achterliggende agenda heeft, is het perfect mogelijk dat hij een prijsdeur openduwt of jouw voorlopige keuze. We weten alleen dat het in jouw deelname niet gebeurd is.

We hebben nu wel nog niet alle informatie gebruikt. Monty heeft ten eerste een andere deur geopend dan degene die jij op het oog had (namelijk deur 1). Dit wilt zeggen dat we alle mogelijkheden met $M = 1$ moeten schrappen. Hierdoor tellen wel niet meer alle kansen op tot 1. Dit lossen we op door de overgebleven kansen te schalen met een gepaste factor. Dit heeft het volgende resultaat.

	$M = 1$	$M = 2$	$M = 3$
$D = 1$	$\times$	$1/6$	$1/6$
$D = 2$	$\times$	$1/6$	$1/6$
$D = 3$	$\times$	$1/6$	$1/6$

Vervolgens heeft Monty ook nog eens een deur geopend met een geit achter. Dit wilt zeggen dat we de gevallen waarbij $D = 2$ en $M = 2$ en waarbij $D = 3$ en $M = 3$ ook moeten weggooien. Hierbij zullen we opnieuw alle andere kansen schalen zodat de totale kans gelijk blijft aan 1. Omdat we met vier even waarschijnlijke gevallen overblijven, zal iedere kans gelijk aan $1/4$ worden. De kanstabel wordt nu de volgende.

	$M = 1$	$M = 2$	$M = 3$
$D = 1$	$\times$	$1/4$	$1/4$
$D = 2$	$\times$	$\times$	$1/4$
$D = 3$	$\times$	$1/4$	$\times$

Nu kunnen we opnieuw berekenen of het voordelig is om te wisselen. Uit de uniformiteit van de tabel kan je al verwachten dat er niet veel voordeel te halen valt uit een eventuele wissel maar laten we de berekening expliciet maken. Stel zoals vorige keer dat Monty deur 2 opende. De kans op winst als je bij je eerste keuze blijft is

$$P(D = 1 \mid M = 2) = \frac{P(D = 1, M = 2)}{P(M = 2)} = \frac{1/4}{1/4 + 1/4} = \frac{1}{2}.$$

Er is dus geen voordeel meer om te wisselen. Ter controle kijken we toch nog eens naar wat er gebeurt als je wisselt. Dan krijg je als kans

$$P(D = 3 \mid M = 2) = \frac{P(D = 3, M = 2)}{P(M = 2)} = \frac{1/4}{1/4 + 1/4} = \frac{1}{2}.$$

Niets verrassend dus.

Had Monty deur 3 geopend, dan bekwamen we de kansen

$$P(D = 1 \mid M = 3) = \frac{P(D = 1, M = 3)}{P(M = 3)} = \frac{1/4}{1/4 + 1/4} = \frac{1}{2}$$

en

$$P(D = 2 \mid M = 3) = \frac{P(D = 2, M = 3)}{P(M = 3)} = \frac{1/4}{1/4 + 1/4} = \frac{1}{2}.$$