De Laplacetransformatie en machtreeksen

Jonas Kaerts

2 juli 2016

1 Een korte herhaling van machtreeksen

Een machtreeks is een oneindige som van de vorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

waarbij de a_n reëele getallen zijn. Complexe getallen zijn ook mogelijk voor de a_n maar voor het gemak werken we hier enkel reëel. De omschakeling naar complexe getallen is rechttoe rechtaan. Deze a_n worden de coëfficiënten van de machtreeks genoemd. Waarin je meestal geïnteresseerd bent, is welke waarde deze som zal aannemen. Omdat de variabele n wordt weggesommeerd, zal de machtreeks alleen maar afhangen van x. Als de reeks convergeert voor bepaalde waarden van x, kunnen we de machtreeks beschouwen als een functie. We schrijven

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

waarbij de gelijkheid opgaat voor de waarden van x waarvoor de bijhorende reeks convergeert. Deze uitdrukking is alles wat we nodig hebben maar we gaan hem toch lichtjes herschrijven om het vervolg iets duidelijker te maken. De coëfficiënten a_n vormen een rij getallen. Een rij is in principe niets meer dan een functie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$ want aan ieder natuurlijk getal koppelen we een reëel getal. Dit verband illustreren we door in plaats van a_n de notatie $a(n)$ te gebruiken. We bekomen dus

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) x^n.$$

Het voordeel van deze schrijfwijze is dat ze toont dat een machtreeks niets meer is dan een manier om aan een rij $a(n)$ een functie $A(x)$ te koppelen. We hebben dus een correspondentie

$$a(n) \rightsquigarrow A(x).$$

Het is dit mechanisme dat we willen veralgemenen naar het continue geval. Voor we deze stap maken, geef ik nog twee eenvoudige voorbeelden mee.

Ten eerste nemen we $a(n) = 1$ voor iedere n. Wat is $A(x)$? Wel, we kunnen $A(x)$ schrijven als

$$A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

en dit kunnen we op compactere wijze schrijven als

$$A(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Dit is het foute antwoord. Het probleem met dit functievoorschrift is dat het alleen maar klopt voor die waarden van x waarvoor de oneindige som convergeert. Dit is equivalent met te zeggen dat het functievoorschrift enkel klopt indien $-1 < x < 1$. Het volledige correcte antwoord bestaat uit het voorschrift $A(x) = \frac{1}{1-x}$ samen met de opmerking dat x strikt tussen -1 en 1 moet liggen. Waarnaar convergeert de reeks als x niet in dit gebied ligt? Dat is simpel. De reeks convergeert dan helemaal niet.

Een tweede voorbeeld dan. Stel dat $a(n) = \frac{1}{n!}$. Wat is $A(x)$? In dit geval is $A(x)$ gelijk aan

$$A(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x.$$

In dit geval moeten we verder niets specifiëren aangezien de reeks voor iedere x zal convergeren.

Samenvattend hebben we dus

$$\begin{aligned} a(n) &\rightsquigarrow A(x) \\ 1 &\rightsquigarrow \frac{1}{1-x}, \quad \text{als } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{n!} &\rightsquigarrow e^x. \end{aligned}$$

2 Van discreet naar continu

In de vorige sectie gingen we van een functie $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ naar een functie $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nu willen we verder gaan. We zoeken een continu analogon voor het vorige mechanisme. Kunnen we een manier vinden om aan een functie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ een tweede functie $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te koppelen? We bouwen deze constructie op analoog aan de machtreeksen.

We vertrekken van de uitdrukking

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n.$$

De eerste stap wordt om de discreten variabele n te vervangen door een continue variabele t. De variabele n nam de waarden $0, 1, 2, \ldots$ aan dus zal de nieuwe variabele t ieder positief reëel getal als waarde kunnen aannemen. Nu we t gebruiken, kunnen we de som niet meer behouden. We hebben te veel waarden om op te tellen. We lossen dit op door de som te vervangen door het concept dat het dichtst aanleunt bij optelling over alle reële getallen, namelijk de integraal. Dit levert ons

$$A(x) = \int_0^{\infty} a(t)x^t \mathrm{d}t.$$

We kunnen opnieuw schrijven dat de integraal een functie is van x omdat de variabele t verdwijnt bij het uitrekenen van de integraal. De symbolen A en a die de functies moeten voorstellen, staan er alleen omdat we deze hebben overgeërfd van de machtreeksen. Als we met reële functies werken, is het gebruikelijker om met F en f te werken. Laten we dit hier dan ook doen. We verkrijgen nu de (voorlopige) integraal

$$F(x) = \int_0^\infty f(t)x^t \mathrm{d}t.$$

Deze integraal is conceptueel mooi maar om in de praktijk ermee berekeningen uit te voeren, is hij nogal log. Laten we even kijken naar de factor x^t onder de integraal. Laat je niet vangen, we integreren hier naar t en niet naar x. De integraal heeft dus minder weg van het integreren van x^3 maar lijkt eerder op het integreren van 3^t. We zijn hier dus onder andere bezig met het integreren van een exponentiële functie. Op het moment dat we exponentiële functies afleiden of integreren, is het best-case scenario dat het grondtal gelijk is aan e. Dit levert de eenvoudigste berekeningen op. Het feit dat we hier met een x te maken hebben, kan alleen maar voor last zorgen. Om de integraal dus iets properder te maken, gebruiken we de identiteit $x = e^{\ln x}$. Dankzij deze aanpassing vinden we de integraal

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^\infty f(t) \left(e^{\ln x}\right)^t \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{t \ln x} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Laten we nog een kleine aanpassing maken. Als we in het achterhoofd houden dat we uiteindelijk deze integraal willen gaan berekenen, kunnen we best even kijken naar het convergentiegedrag van deze integraal op oneindig. Als x groter is dan 1, zal het exponentiëel stuk in de integraal steeds groter en groter worden naarmate t zal stijgen. Dit maakt het zeer onwaarschijnlijk dat de integraal zou convergeren. Een goede voorwaarde die we kunnen stellen is dat $0 < x < 1$. Wat wilt dit zeggen voor de integrand? Als x strikt tussen 0 en 1 ligt, zal $\ln x$ alle negatieve waarden kunnen aannemen. Als variabele beschouwd, zal $\ln x$ dus alle waarden strikt kleiner dan nul kunnen aannemen. Omdat niemand veel zin heeft om $\ln x$ als variabele te gebruiken, voeren we een nieuwe variabele s in door de definitie

$$s = -\ln x.$$

Nu zal s altijd strikt positief zijn. De integrand kunnen we hiermee herschrijven in termen van s maar ook de functie $F(x)$ kan nu aangpast worden. Technisch gezien is nu

$$F(x) = F(e^{-s})$$

maar aangezien het onhandig is om te spreken van een functie van e^{-s} maken we licht misbruik van notatie en noemen we F een functie van s.

Welke invloed hebben al deze strikt cosmetische ingrepen op de integraal? Als we alles samengooien, vinden we

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} \mathrm{d}t$$

en hierin herkennen we $F(s)$ als de Laplacegetransformeerde van $f(t)$.