МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ.
МЕТОДЫ СИНТЕЗА И ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций
для студентов специальностей 7.080202 и 7.080201

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол № 2 от 06.12.12.

Харьков
НТУ «ХПИ»
2013

Современная теория управления. Методы синтеза и оптимизации систем управления. Конспект лекций для студентов специальностей 7.080202 и 7.080201 / сост. Успенский В.Б., Шипулина Л.В. – Х.: НТУ «ХПИ», 2013. – 136 с.

Составители: В.Б. Успенский
Л.В. Шипулина

Рецензент А.И. Белов

Кафедра Систем и процессов управления

Конспект лекций предназначен для освоения студентами новых методов разработки замкнутых систем автоматического регулирования и управления, которые базируются на концепциях обратных задач динамики. Рассматривается управление стохастическими системами, стохастический принцип максимума, оптимальное по быстродействию управление детерминированными и стохастическими системами, а также основы теории нечетких множеств, нечеткой логики, алгоритм синтеза нечетких систем управления и примеры таких систем.

Lecture notes are intended for mastering the new methods of developing closed systems of automatic regulation and control, which are based on the concepts of inverse problems of dynamics. Considered control of stochastic systems, stochastic maximum principle, optimal control deterministic and stochastic systems, as well as foundations of the theory of fuzzy sets, fuzzy logic algorithm for the synthesis of fuzzy control systems and examples of such systems.

СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ

Конспект лекций предназначен для освоения студентами новых современных методов разработки замкнутых систем автоматического регулирования и управления. В теоретическом и методическом отношении эти методы базируются на концепциях обратных задач динамики в сочетании с минимизацией локальных функционалов, характеризующих энергию движения в окрестности назначенных траекторий. Синтезированные алгоритмы имеют нетрадиционные структуры и придают системам естественные свойства адаптивности – слабой чувствительности к изменению параметров и возмущающим силам.

В разделах 2, 3 формулируется обратная задача динамики. Известна математическая модель движения системы $\dot{x} = f(x,u)$. Задано ее начальное состояние $x(0) = x_0$ и назначена требуемая траектория движения $x(t) = x^*(t)$. Необходимо построить управление $u^*(t,x)$, которое обеспечивает устойчивую реализацию $x(t) \to x^*(t)$. В математическом отношении концепция обратных задач динамики реализуется в форме синтеза алгоритма управления, при котором управляемая система обладает требуемыми динамическими характеристиками.

В разделе 4 описываются новые методы проектирования систем управления. Рассмотрен вычислительный алгоритм дискретного управления, позволяющий осуществить синтез замкнутой системы, движение которой происходит по предписанной программе, без использования модели системы.

В разделе 5 рассмотрен метод управления по старшей производной, дающий возможность построить замкнутую систему, обеспечивающую движение объекта из начальной точки по траектории, близкой к эталонной, задаваемой дифференциальным уравнением, как для стационарных, так и для нестационарных систем.

В разделе 6 приведена система отработки заданного программного движения для систем достаточно высокой сложности. В основу решения этой задачи полагается принцип управления по старшей производной.

В разделе 7 приведены три метода решения задачи терминального управления, которая состоит в переводе вектора состояния системы из начальной точки в назначенную конечную за фиксированное время.

В разделах 8 – 10 рассматривается управление стохастическими системами, стохастический принцип максимума, оптимальное по быстродействию управление детерминированными и стохастическими системами. Делается вывод, что использование детерминированной модели с наблюдателем состояния в условии измерения неполного вектора состояния и случайных возмущений не вполне эффективно, а применение фильтра Калмана дает наилучшую оценку переменных и наименьшее время процесса управления.

Во всех разделах исследуется динамика проектируемых систем, приводятся схемы и результаты математического моделирования.

В разделах 11 – 15 рассматриваются основы теории нечетких множеств, нечеткой логики, алгоритм синтеза нечетких систем управления и примеры таких систем. Указаны преимущества нечетких регуляторов перед традиционными, роль и место нечетких систем в общей теории управления, перспективы дальнейшего развития.

1. ЗАДАЧА СИНТЕЗА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1.1 Общие понятия и определения

Разработка системы управления (СУ) – неотъемлемый этап проектирования современных технических и технологических систем. Благодаря совершенствованию СУ достигаются следующие конкретные выгоды: улучшение качества и потребительских свойств изделия, уменьшение потребления энергии, минимизация материальных затрат, повышение безопасности, сокращение загрязнения окружающей среды и т.д. Особенностью процесса разработки современных СУ является необходимость использования сложного математического аппарата и методов теории управления, теории систем, теории оптимизации.

Целью курса является дальнейшее изучение и систематизация методов синтеза и оптимизации систем управления техническими объектами.

Базой для освоения курса служат классическая теория управления (регулирования) [1-3], теория систем [4], теория дифференциальных уравнений [5], теория оптимизации [6, 7].

Система управления – это совокупность технических устройств, обеспечивающих достижение цели управления.

Целью управления является реализация желаемого поведения объекта управления.

Для достижения цели управляемая система включает в себя:

– объект управления;

– датчики информации о состоянии объекта;

– блок преобразования информации (БПИ), который может быть реализован как в виде аналоговых, так и цифровых устройств, например цифровых вычислительных машин (ЦВМ);

– исполнительные органы.

Перечисленные компоненты образуют замкнутую управляемую систему (рис.1.1)

С учетом приведенной структурной схемы СУ **задача синтеза** распадается на 3 подзадачи:

1. Получение информации о поведении объекта.
2. Разработка **алгоритмов** функционирования блока преобразования информации (БПИ) по информации об объекте.
3. Реализация воздействия на объект в соответствии со сформированным управляющим сигналом.

Под **алгоритмом** управления понимается формализованное правило преобразования информации о состоянии объекта в управляющий сигнал, обеспечивающий достижение цели управления.

Разработка алгоритмов управления, наилучших в смысле некоторого критерия, называется **задачей оптимального синтеза**.

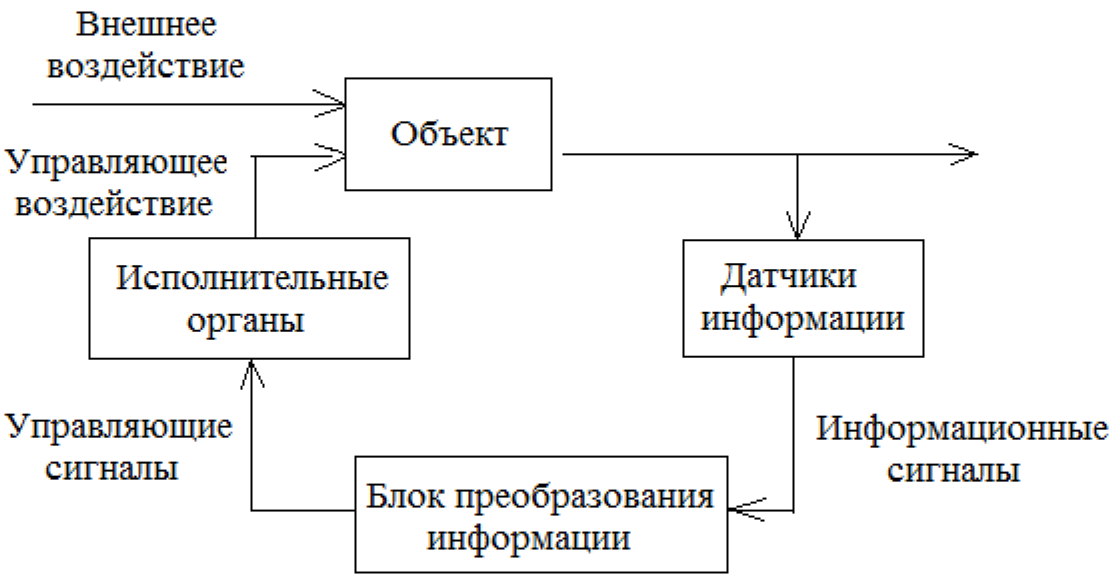


Рисунок 1.1 – Структурная схема системы управления

Предмет изучения – это методы построения алгоритмов управления и их оптимизации.

Первый этап решения задачи синтеза – ее формализация или **построение математической модели** управляемой системы.

Построение математической модели включает следующие этапы:

- выделение подсистем, входящих в систему;
- введение переменных для описания подсистем и их взаимодействия, критериев качества решения;
- установление математических зависимостей между введенными переменными в форме дифференциальных, алгебраических, логических и (или) иных соотношений.

Для описания поведения управляемого объекта и его подсистем вводятся следующие переменные (рис.1.2):

1) входные переменные: управление u, неслучайное внешнее воздействие f и случайное возмущение $\tilde{f}$;
2) выходные переменные y, которые характеризуют «видимое» поведение объекта;

3) переменные состояния x, однозначно определяющие состояние объекта в любой момент времени в зависимости от своих начальных значений и входных переменных;
4) переменные измерения z, определяемые составом и типом датчиков информации, используемых в СУ.

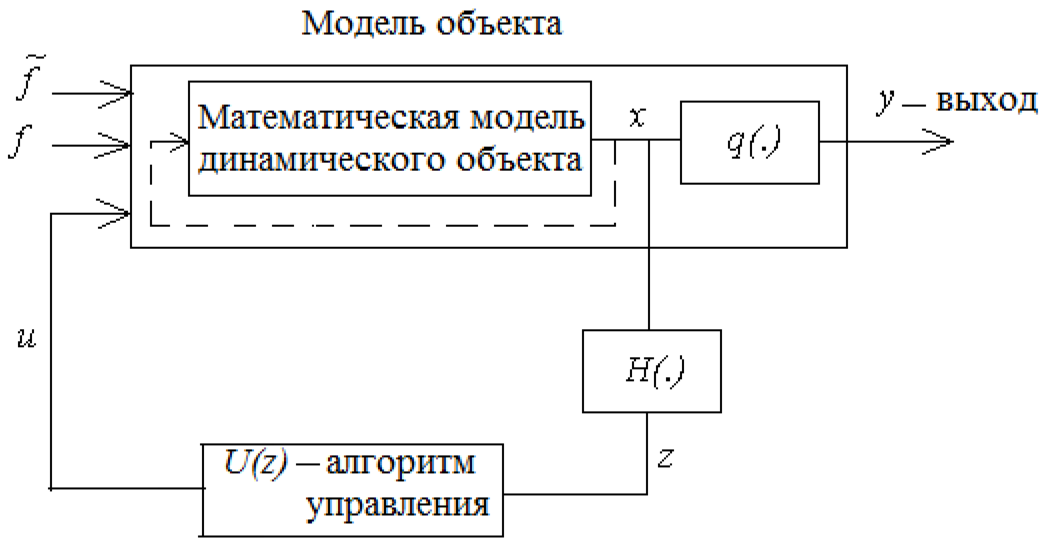


Рисунок 1.2 – Схема системы управления объектом

Соответствующие операторы преобразования $U(.)$, $q(.)$, $H(.)$ необходимо найти.

Следующий этап формализации задачи синтеза – это установление математических зависимостей между введенными переменными. В теории управления используется два способа описания такой зависимости:

1. В терминах «вход – выход»:

$$y = \varphi(f, u, \tilde{f}).$$

2. В терминах переменных состояния (в операторной форме):

$$x = L(f, u, \tilde{f}), \quad y = g(x), \quad z = H(x), \quad u = U(z).$$

Если конкретизировать указанные зависимости, получим математическую модель управляемой системы.

1.2 Классификация моделей

В зависимости от используемых соотношений модели бывают:

1) непрерывные и дискретные;

2) линейные и нелинейные;

3) детерминированные и стохастические;

4) с постоянными и переменными параметрами;

5) с сосредоточенными и распределенными параметрами.

В рамках приведенной классификации рассмотрим примеры:

1. Линейная, детерминированная, непрерывная, с сосредоточенными параметрами, стационарная (с постоянными параметрами) модель типа «вход – выход»:

.

В операторной форме $y(s) = W(s) \cdot u(s)$, где $W(s)$ – передаточная функция.

В форме дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = b_1 u^{(n-1)} + ... + b_m u \,.$$

2. Нелинейная, стохастическая, непрерывная, неавтономная (с явной зависимостью от текущего времени t) модель с использованием переменных состояния

$$\dot{x} = f(x, u, \xi, t);$$

$$z = h\,(x, \nu);$$

$$y = g(x),$$

в которой ξ – входной шум, ν – измерительный шум.

3. Важный частный случай: линейная, непрерывная, стационарная модель

$$\dot{x} = Ax + Bu;$$

$$z = H \cdot x;$$

$$y = g^T \cdot x,$$

в которой A – **матрица системы**, B – **матрица управления**, H – **матрица измерений**, g – вектор-столбец, связывающий переменные состояния и скалярный выход.

Таким образом, с учетом введенной математической модели можно сказать: *задача синтеза системы управления состоит в определении структуры и параметров закона управления* $u = U(z)$, *который обеспечивает перевод вектора состояния из заданного начального положения* $x(t_0) = x_0$ *в требуемое конечное* $x(t_k) = x_k$ *на основании имеющихся измерений* z.

При этом управление $u \in \Omega_u$ ищется в области допустимых управлений, а продолжительность управляемого процесса $T = t_k - t_0$ может быть задана (**задача терминального управления**) или не задана (**задача финитного управления**).

Контрольные вопросы

1. Что такое задача синтеза управления и каковы этапы ее решения?
2. Дать формулировку задачи терминального управления и задачи финитного управления.
3. Привести пример постановки простейшей задачи синтеза в терминах «вход – выход» и терминах переменных состояниях.
4. По каким признакам классифицируются математические модели управляемых систем?

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

2.1 Классификация задач динамики

Прямой задачей динамики называется задача нахождения траектории движения по заданным силам, воздействующим на систему:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}).$$

Задана сила F и начальные условия, требуется найти траекторию $x(t)$.

Обратной задачей называется задача нахождения силы $F(t)$, под действием которой движение происходит по заданному закону $x(t) = x^*(t)$ при заданных начальных условиях.

Если сила $F(t)$ представляет собой управляющую силу, то в математическом отношении содержание обратной задачи динамики составляет синтез алгоритма управления, при котором управляемая система обладает требуемыми динамическими характеристиками [8].

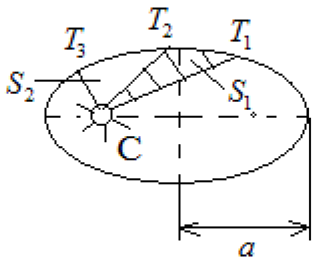
Наиболее общим является определение обратных задач по Суслову Г.К., в соответствии с которым: *под обратной задачей динамики понимается определение сил и моментов по заданным свойствам движения.*

Рассмотрим примеры обратных задач динамики.

I. Исторически первые обратные задачи рассмотрены в аналитической механике; это, например, задача Ньютона: определить силу, под действием которой планеты совершают движение, описываемое тремя законами Кеплера:

1) планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце;

2) движение планет происходит с постоянной секторной скоростью:



$$T_3 - T_2 = T_2 - T_1,\quad S_1 = S_2;$$

3) квадрат времени обращения планет вокруг Солнца пропорционален кубу большой полуоси орбитального эллипса:

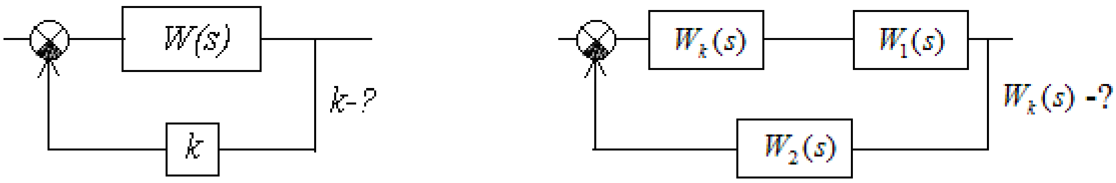
$$T^2 \sim a^3.$$

Решением этой задачи является центральная сила с центром в том фокусе, в котором находится Солнце. При этом сила пропорциональна массе планеты и обратно пропорциональна квадрату расстояния от планеты до Солнца ($F \sim \dfrac{m}{r^2}$).

II. Обратные задачи управления полетом. К ним относятся: задача управления движением точки переменной массы (задача Мещерского); задача управления пространственным движением летательного апарата (ЛА) [9].

III. Обратные задачи, связанные с теорией автоматического регулирования (ТАР). К ним относятся два типа задач:

Задача параметрического синтеза Задача структурного синтеза



Например, классическая задача параметрического синтеза – это задача модального управления, в соответствии с которой для замкнутой системы

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = u,$$
$$u = k_1\dot{x} + k_0 x$$

необходимо найти коэффициенты k_0, k_1 так, чтобы движение осуществлялось в соответствии с эталонной траекторией $x^*(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ (s_1, s_2 - заданные отрицательные параметры).

2.2 Задача управления пространственным движением ЛА

Известно, что ЛА при t_0 находится в точке пространства x_0, y_0, z_0 и имеет скорость $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. Необходимо за заданное время T перевести ЛА в заданную точку x_T, y_T, z_T с заданной скоростью $\dot{x}_T, \dot{y}_T, \dot{z}_T$.

При построении математической модели движения летательного аппарата будем использовать траекторную систему координат x_1, y_1, z_1 [9], показанную на рисунке 2.1. Вектор скорости $\overline{V} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$ в этой системе задается тремя значениями: V – модулем скорости ЛА, θ – углом наклона траектории, ψ – путевым углом. В этих условиях проекции вектора скорости $\overline{V}$ имеют вид:

$$\dot{x} = V \cdot \cos\theta \cdot \cos\psi, \tag{2.1}$$

$$\dot{y} = V \cdot \sin\theta, \tag{2.2}$$

$$\dot{z} = -V \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi \tag{2.3}$$

и представляют собой кинематические уравнения движения.

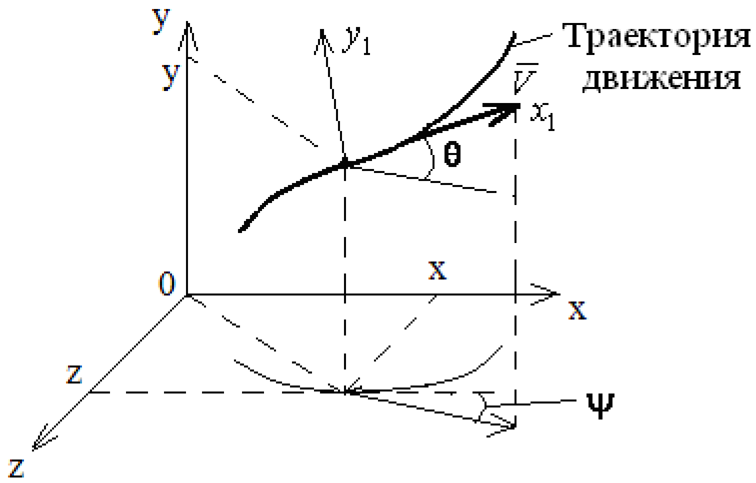


Рисунок 2.1 – Траекторная система координат

Динамические уравнения движения летательного аппарата записываются следующим образом [9]:

$$\dot{V} = g(n_{x_1} - \sin\theta); \tag{2.4}$$

$$\dot{\theta} = \frac{g}{V}(n_{y_1} \cdot \cos\gamma - \cos\theta); \tag{2.5}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{g}{V \cdot \cos\theta} \cdot n_{y_1} \cdot \sin\gamma, \tag{2.6}$$

где γ – ограниченный угол крена, $|\gamma| \le \gamma_{\max}$;

g – ускорение свободного падения;

n_{x_1}, n_{y_1} – тангенциальная и нормальная составляющие перегрузки:

$$n_{x_1} = \frac{1}{mg}(P\cos\alpha - Q_{x_1}), \tag{2.7}$$

$$n_{y_1} = \frac{1}{mg}(P\sin\alpha + Q_{y_1}), \tag{2.8}$$

где m – масса летательного аппарата;

P – регулируемая сила тяги двигателя, причем $P_{\min} \le P \le P_{\max}$;

α – угол атаки из некоторого допустимого диапазона

$$\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max};$$

Q_{x_1} – сила лобового сопротивления;

Q_{y_1} – аэродинамическая подъемная сила.

Управляющими функциями являются $P(t), \alpha(t), \gamma(t)$, которые и необходимо найти из условия достижения ЛА к моменту времени T требуемого пространственного положения.

Решение задачи будем искать с позиции обратной задачи динамики.

Первый этап решения: в качестве эталонной вводится траектория движения, которую назовем номинальной, задаваемая с использованием параметра текущего времени:

$$x^*(t) = a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1;$$
$$y^*(t) = a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2;$$
$$z^*(t) = a_3 t^3 + b_3 t^2 + c_3 t + d_3$$

так, чтобы выполнялись краевые условия (начальные и конечные) по координатам и скорости. Так, например, для краевых условий $x(t)$ составляем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$x^*(0) = x_0 = d_1;$$
$$x^*(T) = a_1T^3 + b_1T^2 + c_1T + d_1 = x_T;$$
$$\dot{x}^*(0) = c_1 = \dot{x}_0;$$
$$\dot{x}^*(T) = 3a_1T^2 + 2b_1T + c_1 = \dot{x}_T,$$

из которой находим a_1, b_1, c_1, d_1.

Аналогично находим коэффициенты номинальной траектории для $y(t)$ и $z(t)$.

На данном этапе решения проявляется достоинство метода обратных задач динамики, а именно: краевые условия задачи управления будут всегда выполнены.

Второй этап решения включает ряд последовательных операций, выполняемых аналитически.

Найдем номинальное значение скорости:

$$V^*(t)=\sqrt{\dot{x}^{*2}(t)+\dot{y}^{*2}(t)+\dot{z}^{*2}(t)}\,. \qquad (2.9)$$

Из формулы (2.2) получаем: $\sin\theta^*(t)=\dfrac{\dot{y}^*(t)}{V^*(t)}$, а затем $\theta^*(t)\in[-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}]$.

Из формул (2.1), (2.3) находим: $\begin{cases}\cos\psi^*(t)=\dfrac{\dot{x}^*(t)}{V^*(t)\cdot\cos\theta^*(t)}\\ \sin\psi^*(t)=-\dfrac{\dot{z}^*(t)}{V^*(t)\cdot\cos\theta^*(t)}\end{cases}$,

а затем, с учетом знака синуса и косинуса, определяем $\psi^*(t)$ в диапазоне $[-\pi;+\pi]$.

Перейдем к отысканию номинальных или программных управлений. С учетом ранее полученных выражений для скорости и углов для каждого момента времени из формул (2.5), (2.6) вычисляем:

$$\begin{cases}n_{y_1}\cdot\cos\gamma=\dfrac{V^*\cdot\dot{\theta}^*}{g}+\cos\theta^*\\ n_{y_1}\cdot\sin\gamma=-\dfrac{V^*\cdot\dot{\psi}^*}{g}\cdot\cos\theta^*\end{cases}.$$

Учитывая, что из физического смысла для введенного угла крена $\gamma^*\in[-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}]$, находим $\operatorname{tg}\gamma^*=-\dfrac{V^*\cdot\cos\theta^*\cdot\dot{\psi}^*}{V^*\cdot\dot{\theta}^*+g\cdot\cos\theta^*}$ и окончательно $\gamma^*(t)$.

Из формулы (2.4), предварительно продифференцировав (2.9), вычисляем:

$$n_{x_1}=\frac{\dot{V}^*}{g}+\sin\theta^*$$

и из (2.7), (2.8)

$$\operatorname{tg}\alpha^*=\frac{mg\cdot n_{y_1}^*-Q_{y_1}^*}{mg\cdot n_{x_1}^*+Q_{x_1}^*},\qquad \text{а затем } \alpha^*(t),$$

где $Q_{x_1}^*$ – значение силы лобового сопротивления, вычисляемое согласно некоторой модели; $Q_{y_1}^*$ – модельное значение аэродинамической подъемной силы.

Наконец из формулы (2.7) для силы тяги находим:

$$P^*(t) = \frac{mg \cdot n_{x_1}^* + Q_{x_1}^*}{\cos\alpha^*}.$$

Найденные управляющие функции в общем случае могут не удовлетворять ограничениям для P, γ, α, что приведет к тому, что желаемые траектории не будут реализованы.

Одним из способов преодоления такого недостатка является ввод в уравнения для номинальных траекторий: $x^*(t,s,r,q)$, $y^*(t,s,r,q)$, $z^*(t,s,r,q)$ свободных параметров s, r, q, которые подбираются так, чтобы для всех моментов времени удовлетворить заданным ограничениям

$$P_{\min} \le P^*(t,s,r,q) \le P_{\max};$$
$$|\gamma^*(t,s,r,q)| \le \gamma_{\max};$$
$$\alpha_{\min} \le \alpha^*(t,s,r,q) \le \alpha_{\max}.$$

Данный способ также не гарантирует успешности решения задачи. В случае отрицательного результата можно изменить планируемую продолжительность маневра T, сохранив ее в формулах также в виде незаданного параметра.

Таким образом решается задача управления пространственным движением ЛА в форме программного управления. Для построения замкнутой системы, обеспечивающей устойчивую реализацию программного движения, необходимо использовать дополнительные приемы, рассмотренные далее.

Контрольные вопросы

1. Прямая и обратная задача динамики управляемых систем.
2. Задача определения силы, под действием которой планеты совершают движение вокруг Солнца.
3. Обратные задачи, связанные с теорией автоматического регулирования.
4. Задача управления пространственным движением ЛА.

3. ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1 Постановка задачи

Одной из важных задач управления, решаемой с позиций обратных задач динамики, является реализация назначенной траектории движения.

Пусть движение динамической системы подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\dot{x} = f(x,t) + g(u,t), \tag{3.1}$$

где x – n-мерный вектор состояния;

u – m-мерный вектор управления.

Требуется путем выбора $u^*(t)$ найти управляющую силу $g(u,t)$, при которой решением системы (3.1) является назначенная траектория $x(t) = x^*(t)$ при $0 \le t \le T$. Необходимым условием решения задачи является соответствие начальных условий фактической и назначенной траекторий: $x(0) = x^*(0)$.

3.2 Общий ход решения обратной задачи динамики

Подставим $x^*(t)$ в уравнение (3.1) и выразим управляющую функцию:

$$g(u^*, t) = \dot{x}^*(t) - f(x^*, t).$$

Задача нахождения управления $u^*(t)$ может иметь единственное решение, множество решений и не иметь решения вовсе. Рассмотрим некоторые условия, при которых будет тот или иной исход решения.

Достаточным условием единственности решения задачи будет случай, когда **существует обратная функция** g^{-1}**:**

$$u^*(t) = g^{-1}(\dot{x}^*(t) - f(x^*,t)) \tag{3.2}$$

Найденное из (3.2) управление $u^*(t)$ будет программным, а соответствующая система управления – разомкнутой (рис. 3.1):

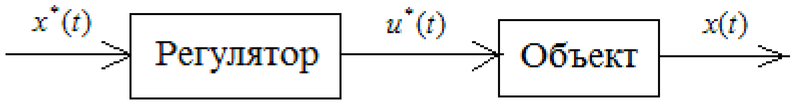


Рисунок 3.1 – Схема разомкнутой системы

В общем случае задачу отыскания управления можно решить с помощью вариационного подхода, а именно: вводится отклонение левой части уравнения (3.1) от правой при подстановке вместо $x(t)$ назначенного решения $x^*(t)$ в виде разности $\Delta(t,u) = \dot{x}^*(t) - f(x^*(t),t) - g(u,t)$ и из минимизации функционала $\min\limits_u \int\limits_0^t \Delta^T(t) \cdot \Delta(t) dt$ находится $u^*(t)$. При этом если точное решение существует и единственно, то при найденном управлении $x(t) = x^*(t)$, если же точного решения не существует, то $x(t)$ и $x^*(t)$ не будут совпадать: $x(t) \approx x^*(t)$.

В случае, если решение задачи не единственное, тогда некоторые компоненты вектора управления задают априори, что приводит к регуляризации задачи, а остальные управляющие переменные находятся из условия реализации назначенной траектории.

Следует отметить, что вопрос существования решения задачи программного управления движением динамических систем не связан с аспектом управляемости. Так, система может быть вполне управляема, но обеспечить ее движение вдоль назначенной траектории может оказаться невозможным. В этой связи можно лишь утверждать, что для не вполне управляемой системы точного решения рассматриваемой задачи не существует.

Косвенным признаком того, что решение рассматриваемой задачи существует или не существует, является соотношение размерности вектора управления и вектора состояния:

1) если размерности $x(t)$ и $u(t)$ совпадают, т.е. $m = n$, то, как правило, решение существует и единственное;

2) если $m > n$, то чаще всего решений бесконечно много;

3) если $m < n$, то, возможно, точного решения не существует.

Данные высказывания не являются ни необходимыми, ни достаточнми условиями существования и единственности решения. Окончательный ответ на вопрос существования и единственности решения требует более глубокого анализа.

3.3 Примеры решения обратной задачи динамики

Пример 1

Пусть движение динамической системы подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\dot{x} = ax + bu \tag{3.3}$$

при начальном условии $x(0) = x_0$ и пусть назначенная траектория имеет вид:

$$x^*(t) = x_0 e^{-ct}, \tag{3.4}$$

где c=const. Тогда по формуле (3.2) найдем

$$u^*(t) = -b^{-1}(c+a)x_0 e^{-ct}. \tag{3.5}$$

Сделаем проверку, подставив найденное $u^*(t)$ по формуле (3.5) в уравнение (3.3):

$$\dot{x} = ax - (a+c)x_0 e^{-ct}. \tag{3.6}$$

Решение уравнения (3.6) $x(t)$ есть сумма решения однородного уравнения $x^0(t)$ и частного решения, соответствующего правой части $x^1(t)$:

$$x^0(t) = C_1 e^{at}, \qquad x^1(t) = Ae^{-ct}.$$

Подставим $x^1(t)$ и $u^*(t)$ в виде (3.5) в уравнение (3.3) и найдем константу A:

$$-cAe^{-ct} - aAe^{-ct} = -(a+c)x_0 e^{-ct},$$

откуда следует $A = x_0$. Тогда

$$x(t) = C_1 e^{at} + x_0 e^{-ct}$$

и из начального условия $x(0) = x_0$ получим значение C_1:

$$x(0) = C_1 + x_0 = x_0,$$

откуда следует $C_1 = 0$. Таким образом

$$x(t) = x_0 e^{-ct} = x^*(t).$$

Пример 2 $(m = n)$

Движение динамической системы подчиняется дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + u_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

при начальных условиях:

$$x_1(0) = 0, \;\; x_1(1) = 1, \;\; x_2(0) = -1, \;\; x_2(1) = 0. \tag{3.8}$$

Назначенное решение, удовлетворяющее краевым условиям (3.8), зададим в виде:

$$x_1^*(t) = t, \;\; x_2^*(t) = t - 1. \tag{3.9}$$

Требуется найти управляющие воздействия $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$ из уравнений (3.7):

$$\begin{aligned} u_1^* &= \dot{x}_1^* + x_1^* = 1 + t, \\ u_2^* &= \dot{x}_2^* - x_1^* + x_2^* = 1 - t + t - 1 = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Проверим полученный результат, подставив найденные $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$ в уравнения (3.7):

$$\dot{x}_1 + x_1 = 1 + t, \tag{3.11}$$

$$\dot{x}_2 + x_2 - x_1 = 0. \tag{3.12}$$

Решение уравнения (3.11) $x_1(t)$ определяем (по аналогии с примером 1) как сумму решения однородного уравнения $x_1^0(t)$ и частного решения, соответствующего правой части $x_1^1(t)$:

$$x_1(t) = x_1^0(t) + x_1^1(t) = C_1 e^{-t} + (a + bt)$$

и из начальных условий (3.8) находим значение констант: $b = 1,\ a = 0,\ C_1 = 0$. Тогда $x_1(t)$ принимает вид: $x_1(t) = t = x_1^*(t)$. Подставив найденное значение $x_1(t)$ в уравнение (3.12), приводим его к виду:

$$\dot{x}_2 + x_2 = t\,,$$

откуда, используя начальные условия (3.8), находим решение:

$$x_2(t) = t - 1 = x_2^*(t)\,.$$

Найденные решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ совпадают с назначенными.

Пример 3 $(m < n)$

Движение динамической системы подчиняется дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u \end{aligned} \tag{3.13}$$

при начальных условиях:

$$x_1(0) = -2, \quad x_2(0) = -1\,. \tag{3.14}$$

Назначенное решение, удовлетворяющее начальным условиям (3.14) имеет вид:

$$x_1^*(t) = t - 2, \;\; x_2^*(t) = t^2 + t - 1 \tag{3.15}$$

Найдем управляющее воздействие $u^*(t)$ по очереди из первого и второго уравнения (3.13):

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \dot{x}_1^* - x_2^* = 2 - t - t^2, \\ u^*(t) &= \dot{x}_2^* - x_1^* = t + 3. \end{aligned}$$

Получили два разных решения для $u^*(t)$, т.е. точное решение задачи не существует. Для отыскания приближенного решения сформулируем вариационную задачу.

Введем переменные отклонения:

$$\Delta_1(t,u) = \dot{x}_1^* - x_2^* - u = 2 - t - t^2 - u, \qquad \Delta_2(t,u) = \dot{x}_2^* - x_1^* - u = t + 3 - u$$

и составим функционал

$$I = \min_u \int_0^T [(2 - t - t^2 - u)^2 + (t + 3 - u)^2\,]dt = \min_u \int_0^T F(t,u)dt\,.$$

Из условия минимизации функционала $\dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{d}{d\,t}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{u}} = 0$ с учетом того, что $\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = 0$, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -2(2 - t - t^2 - u) - 2(t + 3 - u) = 0,$$

откуда находим $u^*(t)$:

$$u^*(t) = \frac{5 - t^2}{2}. \tag{3.16}$$

Проверим полученный результат, подставив $u^*(t)$ по формуле (3.16) в уравнения (3.13):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \frac{5 - t^2}{2}, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \frac{5 - t^2}{2}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Дифференцируем по времени первое уравнение (3.17) $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 - t$ и, подставив вместо $\dot{x}_2$ его значение из второго уравнения (3.17), получим:

$$\ddot{x}_1 - x_1 = \frac{5 - t^2}{2} - t. \tag{3.18}$$

Решение уравнения (3.18) имеет вид:

$$x_1(t) = x_1^0(t) + x_1^1(t) = (C_1 e^t + C_2 e^{-t}) + (At^2 + Bt + C). \tag{3.19}$$

Константы A, B, C частного решения $x_1^1(t)$ найдем, подставив $x_1^1(t)$ в уравнение (3.18): $2A - At^2 - Bt - C = -\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{5}{2}$, откуда следует: $A = \frac{1}{2}, B = 1, C = -\frac{3}{2}$. Таким образом, решение (3.19) имеет вид:

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2}. \tag{3.20}$$

Константы C_1, C_2 найдем из начальных условий (3.14):

$$x_1(0) = C_1 + C_2 - \frac{3}{2} = -2 = x_1^*(0),$$

$$x_2(0) = \dot{x}_1(0) - u(0) = C_1 - C_2 - \frac{3}{2} = -1 = x_2^*(0),$$

откуда получим $C_1 = 0, C_2 = -0{,}5$ и решение системы (3.13) принимает вид:

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2},$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2}.$$

Как видно из полученных функций, решение не совпадает с назначенным (3.15), но, по способу его получения, является максимально близким с точки зрения введенного функционала.

Пример 4 $(m > n)$

Рассмотрим задачу о летательном аппарате, который находится в режиме устойчивого прямолинейного полета, т.е. скорость полета V и угол наклона траектории θ неизменны (рис. 2.1). Требуется осуществить разгон или торможение ЛА путем изменения силы тяги двигателя. При этом с помощью отклонения руля высоты сохранить первоначальное положение угла наклона траектории.

Уравнения движения в отклонениях от установившихся значений имеют вид:

$$\Delta\dot{\nu} + r \cdot \Delta\nu = \Delta p, \qquad (3.21)$$

$$\ddot{\alpha} + a_1 \cdot \dot{\alpha} + a_0 \cdot \alpha + b \cdot \Delta\nu = q \cdot \delta, \qquad (3.22)$$

где $\Delta\nu = V - V_0$ - отклонение скорости от установившегося значения;

α – отклонение угла атаки;

δ – отклонения угла руля высоты;

Δp – относительное приращение силы тяги двигателя;

r, a_1, a_0, b – заданные коэффициенты.

Условие сохранения угла наклона траектории при изменении скорости имеет вид:

$$c \cdot \alpha + d \cdot \Delta\nu = 0. \qquad (3.23)$$

Итак, переменная $\delta^*(t)$ должна быть такой, чтобы в каждый момент времени выполнялось условие (3.23).

Рассмотрим ход решения.

Из условий реализуемости введем априори (назначим) закон изменения приращения силы тяги:

$$\Delta p^* = p_m(1 - e^{-\beta t})$$

и подставим Δp^* в (3.21):

$$\Delta\dot{\nu} + r \cdot \Delta\nu = p_m(1 - e^{-\beta t})\,. \qquad (3.24)$$

Решение уравнения (3.24) складывается из решения однородного уравнения и частного решения, соответствующего правой части:

$$\Delta\nu = \Delta\nu^0 + \Delta\nu^1 = C_1 e^{-rt} + (A + Be^{-\beta t})\,.$$

Подставив частное решение $\Delta\nu^1 = A + Be^{-\beta t}$ в уравнение (3.24), найдем константы A, B:

$$-\beta B e^{-\beta t} + rA + rBe^{-\beta t} = p_m - p_m e^{-\beta t}\,,$$

откуда следует: $$A = \frac{p_m}{r},\ B = \frac{p_m}{\beta - r}\,.$$

Таким образом $$\Delta\nu^* = C_1 e^{-rt} + \frac{p_m}{\beta - r} e^{-\beta t} + \frac{p_m}{r} = C_1 e^{-rt} + C_2 e^{-\beta t} + C_3\,,$$

где $C_2 = \dfrac{p_m}{\beta - r}$, $C_3 = \dfrac{p_m}{r}$.

Из начальных условий найдем константу C_1:

$$\Delta\nu^*\Big|_{\Delta\nu_0 = 0} = C_1 + C_2 + C_3 = 0\,, \text{ откуда} \qquad C_1 = -C_2 - C_3\,.$$

Из (3.23) найдем:

$$\alpha^* = -\frac{d}{c}\Delta\nu^* = -\frac{C_1 d}{c} e^{-rt} - \frac{C_2 d}{c} e^{-\beta t} - \frac{C_3 d}{c} = D_1 e^{-rt} + D_2 e^{-\beta t} + D_3\,.$$

Подставляя в левую часть (3.22) $\alpha^*(t)$, получим:

$$\begin{aligned}\delta^* &= q^{-1}(\ddot{\alpha}^* + a_1 \cdot \dot{\alpha}^* + a_0 \cdot \alpha + b \cdot \Delta v^*) = \\ &= q^{-1}[(r^2 D_1 e^{-rt} + \beta^2 D_2 e^{-\beta t}) + a_1(-rD_1 e^{-rt} - \beta D_2 e^{-\beta t}) + \\ &\quad + a_0(D_1 e^{-rt} + D_2 e^{-\beta t} + D_3) + b(C_1 e^{-rt} + C_2 e^{-\beta t} + C_3)],\end{aligned}$$

или $$\delta^*(t) = Q_1 e^{-rt} + Q_2 e^{-\beta t} + Q_3\,,$$

где Q_1, Q_2, Q_3 – соответствующие константы, выраженные через параметры задачи. Таким образом, полученный программный закон управления рулем высоты $\delta^*(t)$ обеспечивает разгон или торможение ЛА без изменения угла наклона траектории.

Контрольные вопросы

1. Постановка задачи определения программного управления.
2. Общий ход решения обратной задачи динамики. В каких случаях задача имеет решение?
3. Нахождение приближенного решения путем перехода к вариационной задаче.
4. В каком случае часть вектора управления задают априори?

4. РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАННЫХ ПРОГРАММ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Недостатком рассмотренных ранее решений задач управления является то, что управление в них формируется в виде программы, т.е. без учета реализованного значения вектора состояния. Такая стратегия соответствует управлению по разомкнутой схеме и приводит к недопустимо большим ошибкам при наличии параметрических или динамических возмущений. В виду этого ставится задача синтеза **замкнутой** системы, движение которой осуществлялось бы по программно задаваемой эталонной траектории или с учетом программно задаваемых свойств движения. На практике управление в этих условиях реализуется так, что коррекция вектора состояния осуществляется с учетом измерений, получаемых в ходе процесса управления.

4.1 Постановка задачи

Необходимо сформировать $u^*(t,x)$ такое, чтобы реализуемая траектория $x(t)$ совпадала с программно заданной, т.е. $x(t)=x^*(t)$. В этих условиях величину отклонения реализуемой траектории от программно заданной будем называть ошибкой управления. Если в какой-то момент времени ошибка не нулевая: $\delta x(t)=x(t)-x^*(t)\neq 0$, то управление должно обеспечить стремление ошибки к нулю, т.е. $\delta x(t)\to 0$.

4.2 Вычислительный алгоритм дискретного управления

Пусть математическая модель движения системы имеет вид

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{4.1}$$

где x, u – скаляры, а функция $f(x,u)$ дифференцируемая по u. Задано начальное состояние системы $x(0) = x_0$ и назначена требуемая траектория движения $x(t) = x^*(t)$. Необходимо построить управление $u^*(t,x)$, которое обеспечивает устойчивую реализацию $x(t) \to x^*(t)$.

Перейдем от непрерывной модели (4.1) к конечно-разностной по схеме Эйлера. Для этого введем дискретные равноотстоящие моменты времени $t_0, t_1, \ldots t_N$ с интервалом $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, где Δt достаточно малая величина (n=0,1,… $N-1$).

Представив производную $\dot{x}$ в (4.1) по схеме Эйлера $\dot{x} = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}$, получим конечно-разностную модель системы:

$$x_{n+1} = x_n + f_n \cdot \Delta t, \tag{4.2}$$

где $f_n = f(x_n, u_n)$.

Потребуем, чтобы x_{n+1} совпадала с назначенной траекторией $x_{n+1} = x^*_{n+1} = x^*(t_{n+1})$ и зададим u_n в рекуррентном виде $u_n = u_{n-1} + \Delta u_n$, где Δu_n необходимо найти.

Воспользовавшись малостью Δt, представим f_n в виде

$$f_n = f(x_n, u_n) = f(x_{n-1} + \Delta x_n, u_{n-1} + \Delta u_n) \approx$$

$$\approx f(x_{n-1}, u_{n-1}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x_{n-1}\\u_{n-1}}} \cdot \Delta x_n + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x_{n-1}\\u_{n-1}}} \cdot \Delta u_n. \tag{4.3}$$

В дальнейшем вторым слагаемым будем пренебрегать, внося при этом дополнительную методическую ошибку в алгоритм. В большинстве случаев управляемых систем чувствительность функции $f(x,u)$ к переменной x значительно меньше чувствительности к переменной u, т.е. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| << \left|\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|$, поэтому данное упрощение допустимо. Вводя обозначение $f(x_{n-1}, u_{n-1}) = f_{n-1}$, из формулы (4.2) при $t = t_n$ получим $f_{n-1} = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}$. Тогда частная производная $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x_{n-1}\\ u_{n-1}}}$ будет равна:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x_{n-1}\\ u_{n-1}}} = \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{u_{n-1} - u_{n-2}} = \frac{(x_n - x_{n-1}) - (x_{n-1} - x_{n-2})}{\Delta u_{n-1} \cdot \Delta t} = \frac{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}{\Delta u_{n-1} \cdot \Delta t}.$$

Подставив значения f_{n-1} и $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x_{n-1}\\ u_{n-1}}}$ в формулу (4.3), получим:

$$f_n = f_{n-1} + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x_{n-1}\\ u_{n-1}}} \cdot \Delta u_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} + \frac{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}{\Delta u_{n-1} \cdot \Delta t} \cdot \Delta u_n. \qquad (4.4)$$

Подставив (4.4) в (4.2), имеем:

$$x_{n+1} = \overset{*}{x}_{n+1} = x_n + (x_n - x_{n-1}) + \frac{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}{\Delta u_{n-1}} \cdot \Delta u_n,$$

откуда приращение функции управления можно вычислить по формуле:

$$\Delta u_n = \frac{\overset{*}{x}_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}} \cdot \Delta u_{n-1}. \qquad (4.5)$$

Полное управление на n-ном шаге при этом соответствует:

$$u_n = u_{n-1} + \Delta u_n. \qquad (4.6)$$

Отметим, что для реализации данного алгоритма не требуется знания о модели объекта, а именно – знания функциональной зависимости *f*. В этом состоит важное достоинство алгоритма. Управление u_n вычисляется по измеряемым выходным значениям объекта x_{n-2}, x_{n-1}, x_n и обеспечивает (приближенно) реализацию программного значения $\overset{*}{x}_{n+1}$. Теоретическое обоснование сходимости такого алгоритма, т.е. выполнения условия $\delta x(t_n) \to 0$ при $n \to \infty$ вряд ли возможно. Тем не менее, алгоритм проявляет достаточно высокую эффективность, убедиться в которой можно путем компьютерного моделирования в рамках лабораторного практикума.

Контрольные вопросы

1. Недостаток программного управления.

2. Постановка задачи управления с возможностью коррекции вектора состояния.

3. Вычислительный алгоритм дискретного управления.

4. Преимущества алгоритма дискретного управления по сравнению с программным управлением.

5. Каким образом следует вычислять Δu_n в первые два момента дискретного времени, учитывая отсутствие значений переменной x_{n-2}, x_{n-1} при $n < 2$?

5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассматривается два специальных метода организации замкнутой системы управления, реализующей программное движение.

Первый основан на принципе управления по отклонению фактического значения старшей производной выходной переменной системы от ее эталонного значения. В рамках этого метода с высокой точностью решается задача воспроизведения эталонной траектории движения, заданной в виде порождающего дифференциального уравнения того же порядка, что и управляемая система.

Второй метод предназначен для согласования динамики двух управляемых переменных, требуемые программные значения которых заданы в виде функции от одного параметра, например, текущего времени. Метод основан на регулировании скорости изменения задающего параметра. При появлении рассогласования между значениями управляемых переменных скорость изменения задающего параметра уменьшается, темп изменения программных значений замедляется, и так до тех пор, пока не восстановится требуемое согласование.

5.1 Метод управления по старшей производной

Постановка задачи. Пусть динамика управляемой системы с одним входом описывается дифференциальным уравнением

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, u). \tag{5.1}$$

Необходимо синтезировать закон управления в виде функции от текущих значений переменной x и ее производных, который обеспечит движение системы (5.1), эквивалентное движению эталонной системы с порождающим дифференциальным уравнением того же порядка:

$$x^{*(n)} = f^{*}(x^{*}, \dot{x}^{*}, \ldots, x^{*(n-1)}). \tag{5.2}$$

В основу решения задачи полагается принцип управления по старшей производной, в соответствии с которым

$$u = k\int \Delta x^{(n)} dt, \tag{5.3}$$

где k – положительный коэффициент; $\Delta x^{(n)} = x_{ф}^{*(n)} - x^{(n)}$ – невязка (разность между требуемым и фактическим значением) старшей производной, причем требуемое значение вычисляется с учетом эталонной модели (5.2), но по текущим фактическим значениям переменной x и ее производным:

$$x_{ф}^{*(n)} = f^{*}(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}). \tag{5.4}$$

Эффективность управления (5.3) для решения сформулированной задачи продемонстрируем на примере линейной нестационарной (с переменными коэффициентами) системы

$$\dddot{x} + a_1(t)\ddot{x} + a_2(t)\dot{x} + a_3(t)x = u,$$

для которой нужно обеспечить поведение, подобное движению эталонной системы с заданными постоянными коэффициентами

$$\dddot{x}^{*} + b_1\ddot{x}^{*} + b_2\dot{x}^{*} + b_3x^{*} = g_0, \tag{5.5}$$

где g_0=const.

С учетом (5.3), (5.4) замкнутая система описывается уравнением:

$$\dddot{x} + a_1(t)\ddot{x} + a_2(t)\dot{x} + a_3(t)x = k\int (g_0 - b_1\ddot{x} - b_2\dot{x} - b_3x - \dddot{x})dt.$$

Продифференцируем уравнение по t и разделим на k. После переноса слагаемых в левую часть уравнения получим:

$$\frac{1}{k}x^4+\left(\frac{a_1}{k}+1\right)\dddot{x}+\left(\frac{\dot{a}_1+a_2}{k}+b_1\right)\ddot{x}+\left(\frac{\dot{a}_2+a_3}{k}+b_2\right)\dot{x}+\left(\frac{\dot{a}_3}{k}+b_3\right)x=g_0 \quad (5.6)$$

Очевидно, что если $k\to\infty$, то уравнение (5.6) становится эквивалентным уравнению эталонной системы (5.5), а, значит, динамика исходной системы становится подобной поведению эталонной системы.

Структурная схема замкнутой системы, соответствующая принципу управления по старшей производной, изображена на рисунке 5.1.

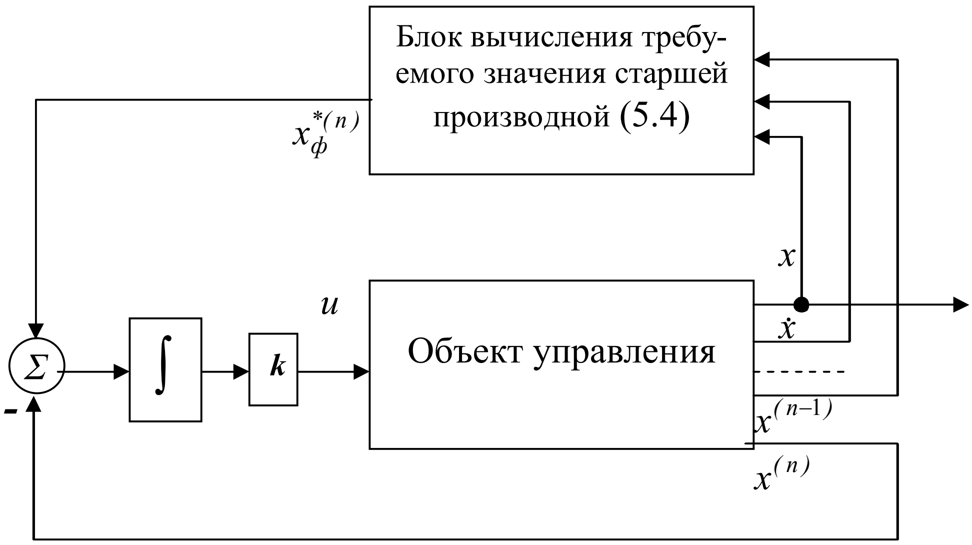


Рисунок 5.1 − Реализация принципа управления по старшей производной

Для линейных систем использование закона управления в виде (5.3) приводит к повышению порядка астатизма системы. Из теории автоматического регулирования известно, что в сочетании с увеличением коэффициента усиления оба эти мероприятия приводят к повышению точности системы, т.е. к уменьшению установившейся ошибки регулирования. Дополнительно к сказанному при $k\to\infty$ система обладает замечательными свойствами: ее динамические характеристики полностью совпадают с динамическими характеристиками эталонной модели и остаются неизменными при изменении параметров управляемого объекта. Однако реализация таких свойств требует увеличения ресурса системы управления, а именно, расширения диапазона допустимых управляющих воздействий, поскольку в этом случае $|u|$ неограниченно возрастает. На практике, учитывая ограниченность реальных исполнительных устройств, выбор k осуществляется на условиях компромисса между точностными требованиями и возможностями управляющей системы.

Таким образом, построение алгоритма управления в рассматриваемой задаче выполняется в такой последовательности:

а) формируется эталонная модель типа (5.2), динамические характеристики которой соответствуют требованиям технического задания на проектирование автоматической системы (порядок эталонной модели должен быть не ниже порядка модели управляемого объекта (5.1); кроме того, система и эталонная модель должны иметь одинаковый порядок астатизма);

б) для заданной структуры модели управляемого объекта и принятой структуры эталонной модели выписывается закон управления (5.3), в соответствии с которым вычисляется управляющая функция и расчетные соотношения (5.4) для вычисления требуемых значений старшей производной выходной переменной эталонной системы.

Указанные две процедуры составляют основу методики синтеза алгоритмов управления для динамических систем произвольного (конечного) порядка.

5.2 Принцип регулирования хода часов

Данный метод построения замкнутых систем управления рассмотрим на примере задачи набора высоты летательным аппаратом (ЛА).

Постановка задачи

При увеличении высоты полета, сопровождаемого уменьшением плотности воздуха, для сохранения требуемого значения подъемной силы необходимо увеличивать скорость движения ЛА относительно воздуха. При этом в некоторых случаях изменение высоты и скорости полета удобно задавать в параметрическом виде, как программную функцию текущего времени. Таким образом, в процессе набора высоты ЛА необходимо реализовать некоторую параметрическую зависимость между высотой и скоростью:

$$\begin{matrix} H^* = H(t) \\ V^* = V(t) \end{matrix}.$$

Эти зависимости подобраны так, что в идеальных условиях достаточно управлять высотой H, а значение скорости V будет соответствовать заданному автоматически (рис. 5.2).

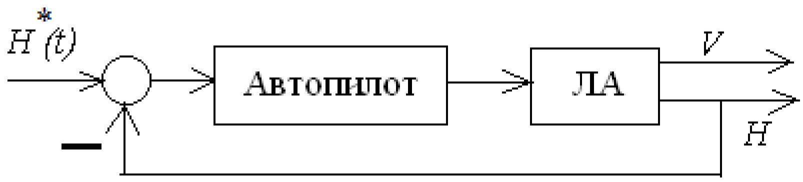


Рисунок 5.2 – Идеальная схема управления

В реальных условиях этого не будет и поэтому следует реализовать автопилот по схеме рисунка 5.3.

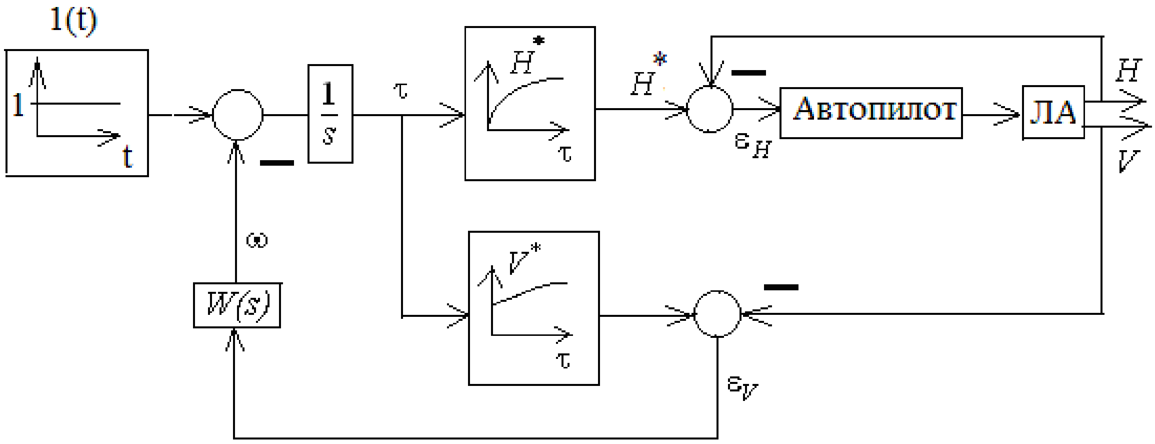


Рисунок 5.3 – Схема управления по принципу регулирования хода часов

На рисунке 5.3 приняты следующие обозначения:

τ – так называемое местное время;

$\varepsilon_H = H^* - H$ – ошибка по высоте;

$\varepsilon_V = V^* - V$ – ошибка по скорости;

$W(s)$ – корректирующее звено такое, что $\omega = W(s)\cdot\varepsilon_V$ удовлетворяет неравенству $0 \le \omega \le 1$, причем чем больше ε_V, тем ω ближе к 1. Если $\omega > 0$, то $\tau = \int(1-\omega)dt$ – местное время, в соответствии с которым вырабатывается зависимость высоты $H^*(\tau)$ и скорости $V^*(\tau)$. Если $\varepsilon_V = 0$, то $\omega = 0$ и $\tau = t$, где t − текущее объективное время. Если в некоторый момент времени $\varepsilon_V \neq 0$, то $\omega \neq 0$ и $\dot{\tau} < 1$. С этого момента изменение местного времени замедлится, вплоть до остановки, и с этого момента оно станет меньше объективного времени $\tau < t$ (рис.5.4). Темп выполнения программы набора высоты при этом снизится, давая возможность уменьшиться ошибке реализации программной скорости. При достижении нулевой ошибки скорости $\varepsilon_V = 0$ темп изменения местного времени восстановится $\dot{\tau} = 1$.

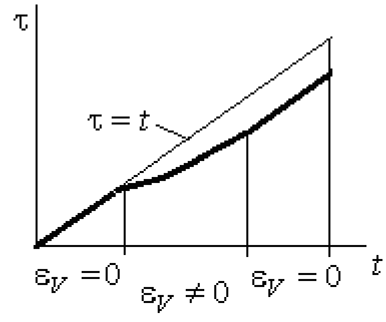


Рисунок 5.4 − Изменение местного времени

Поскольку данный принцип управления связан с регулированием хода местного времени, определяющим темп выполнения предписанной программы, он называется принципом регулирования хода часов. Данный принцип применим для целого класса задач управления, в которых необходимо синхронизировать выполнение программы изменения для двух и более управляемых переменных, физически связанных друг с другом, при этом фактически управляя объектом по отклонению только одной управляемой переменной. В данном примере фактическое управление ЛА осуществляется автопилотом по измерениям высоты.

Рассмотренные методы позволяют получить схемные решения обратной задачи динамики в специфических постановках.

Контрольные вопросы

1. Каким образом формируется управление системой с использованием старшей производной?

2. Каким требованиям должна удовлетворять эталонная модель?

3. Обосновать адаптивные свойства управления по принципу использования старшей производной при изменении параметров системы.

4. Сравнить идеальную и реальную схемы управления набором высоты ЛА. Описать работу системы по принципу регулирования хода часов.

6. СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ПРОГРАММНЫМ ДВИЖЕНИЕМ СИСТЕМЫ

Рассматривается задача структурного синтеза систем, реализующих движение в соответствии с некоторой дифференциальной программой. В основу решения этой задачи полагается принцип управления по старшей производной. В соответствии с этим принципом из эталонной модели вычисляется требуемое значение старшей производной, которое затем подставляется в исходное уравнение, т.е. в модель объекта.

Пусть модель объекта описывается уравнением

$$\dddot{x} + f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = u\,, \tag{6.1}$$

где x, u – выходная переменная и управляющая функция. Требуется найти такой закон управления в форме синтеза $u(x, \dot{x}, \ddot{x})$, который обеспечит изменение переменной $x(t)$ эквивалентное решению дифференциального уравнения

$$\dddot{x}^* + \alpha_2 \ddot{x}^* + \alpha_1 \dot{x}^* + \alpha_0 x^* = \beta g(t)\,, \tag{6.2}$$

где $g(t)$ – некоторая известная функция времени (может быть нулевой); β, α_i $(i = 0,1,2)$ – заданные параметры.

Уравнение (6.2) называется эталонной моделью. Эталонные модели вводятся из следующих соображений:

1) устойчивости: $\lim\limits_{t\to\infty} x^*(t) = 0$ при $g \equiv 0$; 2) качества переходного процесса (длительность, перерегулирование, характер).

6.1 Принцип построения управления

Из эталонной модели находится требуемое значение старшей производной:

$$\dddot{x}^* = \beta g(t) - \alpha_2 \ddot{x} - \alpha_1 \dot{x} - \alpha_0 x .$$

Подставим это выражение в уравнение (6.1) и решим его относительно управления u:

$$u = \beta g(t) - \alpha_2 \ddot{x} - \alpha_1 \dot{x} - \alpha_0 x + \tilde{f}(x, \dot{x}, \ddot{x}) , \qquad (6.3)$$

где $\tilde{f}(x, \dot{x}, \ddot{x})$ − модель объекта, соответствующая нашему знанию о нем, т.е. модельное значение функции $f(x, \dot{x}, \ddot{x})$. Если мы знаем точно модель объекта, то $\tilde{f} = f$.

Проверим, действительно ли управление u по (6.3) является решением уравнения (6.1). Для этого подставим (6.3) в (6.1):

$$\dddot{x} + f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \beta g(t) - \alpha_2 \ddot{x} - \alpha_1 \dot{x} - \alpha_0 x + \tilde{f}(x, \dot{x}, \ddot{x}) ,$$

или

$$\dddot{x} + \alpha_2 \ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = \beta g(t) + \Delta f , \qquad (6.4)$$

где $\Delta f = \tilde{f}(x, \dot{x}, \ddot{x}) - f(x, \dot{x}, \ddot{x})$.

Уравнение (6.4) − это уравнение замкнутой системы и если Δf достаточно мало или равно нулю, то полученное уравнение совпадает с эталонной моделью, т.е. $x(t) \approx x^*(t)$. Структурная схема замкнутой системы (в обозначениях пакета VisSim [10]), представлена на рис. 6.1.

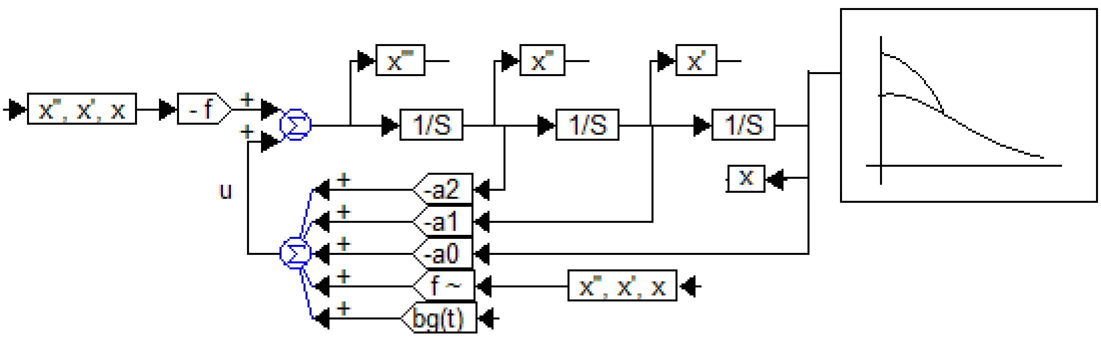


Рисунок 6.1 − Структурная схема замкнутой системы

Аналогично решается задача и в случае, когда управление u входит нелинейно

$$\dddot{x} = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, u) .$$

В этом случае, если существует обратная функция, то

$$u = f^{-1}(\ddot{x}^*, x, \dot{x}, \ddot{x}).$$

6.2 Система отработки заданий, являющихся функциями времени

Рассмотрим движение материальной точки в плоскости (рис. 6.2), описываемое уравнениями

$$m\ddot{x}_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1) + u_1, \qquad (6.5)$$

$$m\ddot{x}_2 = f_2(x_2, \dot{x}_2) + u_2, \qquad (6.6)$$

где m − масса;

f_1, f_2 − проекции равнодействующей силы, прикладываемой со стороны среды;

u_1, u_2 − независимые управляющие функции.

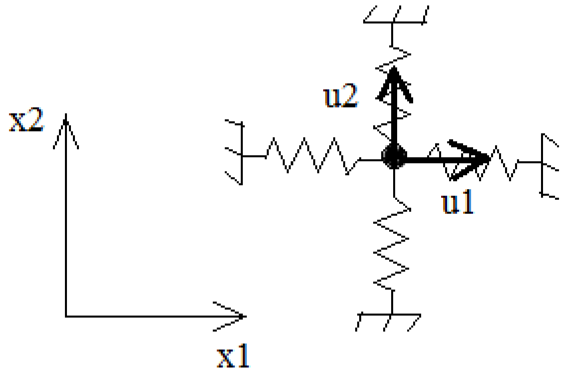


Рисунок 6.2 − Движение материальной точки в плоскости

Требуется найти управление, при котором движение точки происходит таким образом, что скорость ее меняется по некоторому заданному закону и при этом координата x_2 также меняется определенным образом:

$$\nu(t) = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \nu^*(t); \qquad (6.7)$$

$$x_2(t) = x_2^*(t). \qquad (6.8)$$

Первым этапом решения задачи является составление эталонных моделей. С этой целью зададим невязки δ_1 и δ_2, т.е. ошибки выполнения условий (6.7) и (6.8) соответственно, в виде:

$$\delta_1(t) = \nu(t) - \nu^*(t) = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} - \nu^*(t),$$
$$\delta_2(t) = x_2(t) - x_2^*(t)$$
и сформулируем задачу следующим образом: необходимо с помощью управлений обеспечить, чтобы $\lim\limits_{t\to\infty}\delta_1(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\delta_2(t) = 0$.

Для того чтобы переменная $\delta_1(t)$ стремилась к нулю, потребуем, чтобы она менялась в соответствии с эталонной моделью, отвечающей условиям устойчивости:
$$\dot{\delta}_1 + \alpha\delta_1 = 0, \tag{6.9}$$
где $\alpha > 0$. Решение уравнения (6.9) имеет вид $\delta_1(t) = \delta_{10} \cdot e^{-\alpha t}$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty}\delta_1(t) = 0$.

Для переменной δ_2 вводим уравнение 2-го порядка:
$$\ddot{\delta}_2 + \beta_1\dot{\delta}_2 + \beta_0\delta_2 = 0. \tag{6.10}$$

Для выполнения условия $\lim\limits_{t\to\infty}\delta_2(t) = 0$ необходимо, чтобы корни характеристического уравнения $s^2 + \beta_1 s + \beta_0 = 0$ имели отрицательные действительные части $\operatorname{Re} s_{1,2} < 0$. Выбрав из соображений технической целесообразности корни s_1 и s_2, находим коэффициенты β_1 и β_0:
$$\beta_1 = -(s_1 + s_2), \quad \beta_0 = s_1 \cdot s_2.$$
Далее, с учетом задания невязок дифференцируем $\delta_1(t)$ и получаем
$$\dot{\delta}_1 = \dot{\nu} - \dot{\nu}^* = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} - \dot{\nu}^* = \frac{\dot{x}_1 \cdot \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 \cdot \ddot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} - \dot{\nu}^* = \frac{\dot{x}_1 \cdot \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 \cdot \ddot{x}_2}{\nu} - \dot{\nu}^*.$$
Подставляя в уравнение (6.9) выражения для $\dot{\delta}_1$ и δ_1, получим:
$$\frac{\dot{x}_1 \cdot \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 \cdot \ddot{x}_2}{\nu} - \dot{\nu}^* + \alpha(\nu - \nu^*) = 0,$$
откуда следует, что
$$\dot{x}_1 \cdot \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 \cdot \ddot{x}_2 = \nu \cdot \dot{\nu}^* - \alpha\nu(\nu - \nu^*). \tag{6.11}$$
Аналогичную процедуру используем для $\delta_2(t) = x_2(t) - x_2^*(t)$. После нахождения выражений для $\dot{\delta}_2$ и $\ddot{\delta}_2$:

$$\dot\delta_2 = \dot x_2 - \dot x_2^*, \qquad \ddot\delta_2 = \ddot x_2 - \ddot x_2^*$$

и подстановки их в уравнение (6.10), получим выражение для требуемого значения второй производной переменной x_2:

$$\ddot x_2 = \ddot x_2^* - \beta_1(\dot x_2 - \dot x_2^*) - \beta_0(x_2 - x_2^*) \overset{\Delta}{=} F_2(x_2, \dot x_2). \qquad (6.12)$$

Правая часть этого выражения для компактности обозначена, как $F_2(x_2, \dot x_2)$ с указанием в скобках фактических переменных, по которым она вычисляется. Располагая $\ddot x_2$, из (6.11) несложно получить выражение для требуемого значения второй производной $\ddot x_1$:

$$\ddot x_1 = \frac{1}{\dot x_1}[\nu \cdot \nu^* - \alpha\nu(\nu - \nu^*) - \dot x_2 F_2(x_2, \dot x_2)] \overset{\Delta}{=} F_1(\dot x_1, x_2, \dot x_2). \qquad (6.13)$$

Здесь также использовано обозначение $F_1(\dot x_1, x_2, \dot x_2)$ для компактности.

Таким образом, подставив найденные требуемые значения старших производных (6.12) и (6.13) в уравнения (6.5) и (6.6), окончательно найдем управления:

$$u_1 = mF_1(\dot x_1, x_2, \dot x_2) - f_1(x_1, \dot x_1) = \Phi_1(x_1, \dot x_1, x_2, \dot x_2),$$
$$u_2 = mF_2(x_2, \dot x_2) - f_2(x_2, \dot x_2) = \Phi_2(x_2, \dot x_2).$$

Замкнутая система, соответствующая полученному алгоритму управления, приведена на рисунке 6.3.

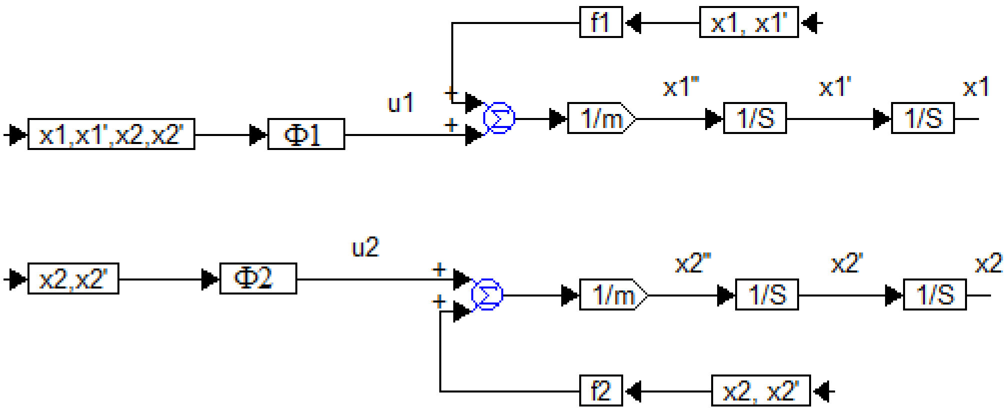


Рисунок 6.3 − Структурная схема замкнутой системы

6.3 Воспроизведение заданных траекторий

Рассмотрим задачу реализации назначенной траектории движения и покажем, что ее решение аналогично рассмотренному выше.

Пусть уравнения движения точки имеют вид:

$$\ddot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + u_1, \tag{6.14}$$

$$\ddot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + u_2. \tag{6.15}$$

Требуется найти такие управляющие функции u_1 и u_2, чтобы точка имела постоянную скорость

$$\nu = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \nu_0 = \text{const}$$

и двигалась по заданной траектории

$$\psi(x_1, x_2) = 0.$$

Запишем невязки δ_1 и δ_2, т.е. ошибки выполнения заданных условий:

$$\delta_1(t) \overset{\Delta}{=} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \nu_0^2,$$

$$\delta_2(t) \overset{\Delta}{=} \psi\,(x_1, x_2).$$

Необходимо с помощью управлений обеспечить, чтобы $\lim\limits_{t\to\infty} \delta_1(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \delta_2(t) = 0$.

Для переменной $\delta_1(t)$ введем эталонную модель

$$\dot{\delta}_1 + \alpha\delta_1 = 0, \tag{6.16}$$

где $\alpha > 0$ вводится таким образом, чтобы выполнялось условие $\lim\limits_{t\to\infty} \delta_1(t) = 0$. Решение уравнения (6.16) имеет вид $\delta_1(t) = \delta_{10} \cdot e^{-\alpha t}$.

Чтобы получить выражение для второй (старшей) производной переменных x_1, x_2 эталонную модель для $\delta_2(t)$ зададим в виде уравнения 2-го порядка

$$\ddot{\delta}_2 + \beta_1\dot{\delta}_2 + \beta_0\delta_2 = 0. \tag{6.17}$$

Параметры β_0, β_1 задаются так, чтобы корни характеристического уравнения $s^2 + \beta_1 s + \beta_0 = 0$ имели отрицательные действительные части $\operatorname{Re} s_{1,2} < 0$.

Найдем значение $\dot{\delta}_1(t) = 2\dot{x}_1 \cdot \ddot{x}_1 + 2\dot{x}_2 \cdot \ddot{x}_2$ и преобразуем уравнение (6.16), подставив в него $\dot{\delta}_1$ и δ_1:

$$2\dot{x}_1 \cdot \ddot{x}_1 + 2\dot{x}_2 \cdot \ddot{x}_2 + \alpha(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \nu_0^2) = 0. \tag{6.18}$$

Используя выражение $\delta_2(t)=\psi(x_1,x_2)$, найдем $\dot{\delta}_2$ и $\ddot{\delta}_2$:

$$\dot{\delta}_2=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\dot{x}_2,$$

$$\ddot{\delta}_2=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\ddot{x}_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\ddot{x}_2+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\dot{x}_1^2+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\dot{x}_2^2+2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1 x_2}\dot{x}_1\dot{x}_2.$$

Введя обозначения:

$$c_1=\frac{\partial\psi}{\partial x_1},\ c_2=\frac{\partial\psi}{\partial x_2},\ c_{11}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2},\ c_{22}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2},\ c_{12}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1 x_2},$$

представим $\ddot{\delta}_2$ в виде $\ddot{\delta}_2=c_1\ddot{x}_1+c_2\ddot{x}_2+c_{11}\dot{x}_1^2+c_{22}\dot{x}_2^2+2c_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2$.

Далее, подставив δ_2, $\dot{\delta}_2$ и $\ddot{\delta}_2$ в уравнение (6.17), окончательно получим уравнение относительно вторых производных $\ddot{x}_1,\ddot{x}_2$:

$$c_1\ddot{x}_1+c_2\ddot{x}_2+c_{11}\dot{x}_1^2+c_{22}\dot{x}_2^2+2c_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2+\beta_1(c_1\dot{x}_1+c_2\dot{x}_2)+\beta_0\psi(x_i)=0. \quad (6.19)$$

Рассматривая теперь уравнения (6.18) и (6.19), как систему, выразим производные $\ddot{x}_1$ и $\ddot{x}_2$:

$$\ddot{x}_1=F_1(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2),$$
$$\ddot{x}_2=F_2(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2),$$

а затем с учетом (6.14), (6.15) и управляющие функции:

$$u_1=F_1(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)-f_1(x_1,x_2)\overset{\Delta}{=}\Phi_1(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2),$$
$$u_2=F_2(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)-f_2(x_1,x_2)\overset{\Delta}{=}\Phi_2(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2).$$

Таким образом, задача синтеза управления для реализации движения по заданной траектории решена. Структурная схема замкнутой системы для данного решения аналогична рассмотренной выше.

Контрольные вопросы

1. Какие требования предъявляются к эталонным моделям?
2. Принцип построения управления по эталонной модели.
3. Как строится структурная схема замкнутой системы?
4. Как решается задача в случае, когда управление входит нелинейно?

5. Как осуществляется система отработки заданий, являющихся функциями времени?

6. Как находится управление при воспроизведении заданных траекторий?

7. ЗАДАЧА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Задача терминального управления является одной из наиболее сложных задач в теории автоматического управления и состоит в переводе вектора состояния из начальной точки в заданную конечную за фиксированное время. В то же время метод обратных задач динамики позволяет получить достаточно эффективное ее решение с помощью сравнительно простых процедур.

Рассмотрим следующую задачу управления движением материального тела:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, u), \tag{7.1}$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{T,\, u} \left\{\begin{aligned} x(T) &= x_T \\ \dot{x}(T) &= \dot{x}_T \end{aligned}\right., \tag{7.2}$$

где m − масса;

F − равнодействующая сила;

u − управляющая функция;

T − фиксированное время.

Рассмотрим **три метода решения** этой задачи.

Необходимо найти управляющую функцию, обеспечивающую в силу (7.1) выполнение краевых условий (7.2). При этом, если управление находится в виде $u^*(t)$, то оно называется программным и соответствует разомкнутой схеме управления. Если в результате решения определяется закон в виде $u(x, \dot{x}, t)$, то говорят, что управление синтезируется по текущим измерениям вектора состояния, а соответствующая схема является замкнутой.

Далее рассмотрим оба варианта решения.

7.1 Метод программного управления

Введем в качестве эталонной программно заданную траекторию, соединяющую начальную и конечную точки, в виде функции времени:

$$x^*(t) = at^3 + bt^2 + ct + d\,, \tag{7.3}$$

где a, b, c, d − неизвестные параметры.

В общем случае вид зависимости управляемой переменной от времени может быть произвольным. Единственным требованием к таким функциям является дифференцируемость и выполнение с их помощью всех краевых условий. Последнее обычно обеспечивается введением необходимого числа параметров и ортогональностью соответствующих слагаемых функции. С учетом сказанного введение в качестве эталонной траектории именно степенного полинома времени можно обосновать тем фактом, что движение по такой траектории соответствует минимуму функционала $\int_0^T \ddot{x}^2(t)dt$, который часто можно связать с энергетическими затратами на управление. Для отыскания параметров a, b, c, d воспользуемся краевыми условиями (7.2):

$$x^*(0) = d = x_0;$$

$$\dot{x}^*(0) = c = \dot{x}_0;$$

$$x^*(T) = aT^3 + bT^2 + cT + d = x_T;$$

$$\dot{x}^*(T) = 3aT^2 + 2bT + c = \dot{x}_T,$$

из которых находим:

$$b = \frac{1}{T^2}\left[3(x_T - x_0 - \dot{x}_0 T) - T(\dot{x}_T - \dot{x}_0)\right];$$

$$a = \frac{1}{T^3}\left[T(\dot{x}_T - \dot{x}_0) - 2(x_T - x_0 - \dot{x}_0 T)\right]; \tag{7.4}$$

$$c = \dot{x}_0; \qquad d = x_0.$$

Используя теперь найденные параметры a, b, c, d и формулы (7.1), (7.3), можно вычислить программное изменение $\dot{x}^*(t)$, $\ddot{x}^*(t)$ и управления $u^*(t)$:

$$u^*(t) = F^{-1}(\ddot{x}^*(t), \dot{x}^*(t), x^*(t)) \tag{7.5}$$

Найденное таким образом управление формируется в виде программы, т.е. без учета реализованного значения вектора состояния. Такая схема управления практически мало пригодна, поскольку приводит к значительным ошибкам в условиях параметрических и динамических возмущений, неизбежно присутствующих в реальных условиях.

7.2 Синтез по конечному состоянию

Указанного выше недостатка лишены методы синтеза управления по измерениям текущего значения вектора состояния. Рассмотрим вначале синтез по конечному состоянию.

Идея метода состоит в следующем: в каждый текущий момент времени t текущее состояние $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ принимается в качестве начального и заново решается задача перехода в конечную точку за время $T-t$ (рис. 7.1).

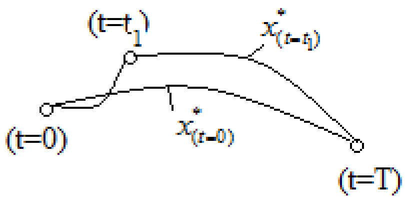


Рисунок 7.1 − Синтез по конечному состоянию

При этом в каждый момент времени t коэффициенты a_1, b_1, c_1, d_1 находятся по формулам, аналогичным (7.4), но в которых в качестве начальных используются текущие значения вектора состояния, а в качестве планируемой продолжительности решения – оставшееся время $(T-t)$:

$$\begin{gathered} d_1 = x;\ \ c_1 = \dot{x};\ \ b_1 = [3(x_T - x - \dot{x}(T-t)) - (T-t)(\dot{x}_T - \dot{x})]/(T-t)^2; \\ a_1 = [(T-t)(\dot{x}_T - \dot{x}) - 2(x_T - x - \dot{x}(T-t))]/(T-t)^3. \end{gathered} \tag{7.6}$$

Управление $u(t)$ с учетом того, что текущий момент принимается за начальный, рассчитывается по формуле (7.5) при $t=0$:

$$u = F^{-1}(\ddot{x}^*(0), \dot{x}^*(0), x^*(0)).$$

Главный недостаток этого метода состоит в том, что величина $T-t \to 0$ и это приводит к увеличению ошибок как в вычислениях по

(7.6), так и управления. Кроме того, этот факт способствует возрастанию по величине требуемого управления по мере приближения к конечной точке, что тоже является недостатком. Для того чтобы устранить такую ограниченность метода, можно рекомендовать при приближении к конечной точке на малом оставшемся интервале времени разомкнуть систему, переходя на реализацию программного управления.

7.3 Синтез по методу преследования ведущей точки

Упомянутой выше ограниченности метода синтеза по конечному состоянию лишен метод преследования ведущей точки.

Задача преследования ведущей точки состоит в переводе системы из текущей точки за время Δt в прогнозируемую точку, лежащую на исходной программной траектории (рис. 7.2).

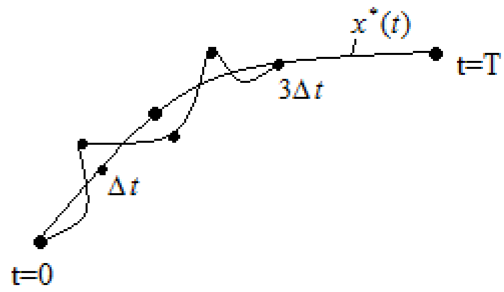


Рисунок 7.2 − Задача преследования ведущей точки

При этом решается задача:

$$\left.\begin{matrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\Delta t} \left\{\begin{matrix} x^*(t+\Delta t) \\ \dot{x}^*(t+\Delta t) \end{matrix}\right.,$$

где Δt − глубина прогноза, которая обеспечивает близость реализуемой траектории движения к эталонной, построенной по формулам (7.4), (7.3). Этим же и обеспечивается выполнение конечных условий исходной задачи, поскольку эталонная траектория проходит через них по правилу построения. С другой стороны, использование текущих фактических значений вектора состояния гарантирует высокую точность управления в условиях возмущений.

Метод реализуется в условиях непрерывного и дискретного времени.

Основные соотношения данного метода, найденные аналогично (7.6), имеют вид:

$$a_2 = \frac{1}{\Delta t^3}\left[\Delta t(\dot{x}^*(t+\Delta t) - \dot{x}) - 2(x^*(t+\Delta t) - x - \dot{x}\cdot\Delta t)\right];$$

$$b_2 = \frac{1}{\Delta t^2}\left[3(x^*(t+\Delta t) - x - \dot{x}\cdot\Delta t) - \Delta t(\dot{x}^*(t+\Delta t) - \dot{x})\right];$$

$$c_2 = \dot{x}; \qquad d_2 = x.$$

При этом в законе управления (7.5) момент времени t принимается равным нулю

$$u = F^{-1}(\ddot{x}^*(0), \dot{x}^*(0), x^*(0)).$$

Таким образом, рассмотренные методы синтеза основаны на перевычислении параметров программного движения a_2, b_2, c_2, d_2, которое осуществляется в каждый момент времени с учетом измерений фактических значений вектора состояния. Такая стратегия соответствует замкнутой схеме управления и обеспечивает высокую точность приведения системы в требуемую конечную точку как при нулевых, так и при значительных возмущениях.

Пример 1

Рассмотрим следующую задачу управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - u \end{cases}, \tag{7.7}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1(0) = x_{10} = 0 \\ x_2(0) = x_{20} = 1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{T=1c} \begin{cases} x_1(T) = x_{1T} = 1 \\ x_2(T) = x_{2T} = 0 \end{cases} \tag{7.8}$$

и решим ее тремя рассмотренными выше методами.

1) Метод программного управления

Вводится номинальная траектория:

$$x_1^*(t) = a^* t^3 + b^* t^2 + c^* t + d^*.$$

Из первого уравнения (7.7) получим программную траекторию $x_2^*(t)$:

$$x_2^*(t)=\dot{x}_1^*(t)-x_1^*(t)=3a^*t^2+2b^*t+c^*-a^*t^3-b^*t^2-c^*t-d^*.$$

Из второго уравнения (7.7) получим программное управление:

$$u^*(t)=x_1^*(t)-\dot{x}_2^*(t)=a^*t^3+b^*t^2+c^*t+d^*-6a^*t-2b^*+3a^*t^2+2b^*t+c^*=$$
$$=a^*t^3+(b^*+3a^*)t^2+(c^*-6a^*+2b^*)t+d^*-2b^*+c^* \qquad (7.9)$$

Из краевых условий (7.8) найдем a^*,b^*,c^*,d^*:

$$x_1^*(0)=d^*=x_{10};$$
$$x_2^*(0)=c^*-d^*=x_{20}\Rightarrow c^*=x_{20}+x_{10};$$
$$x_1^*(T)=a^*T^3+b^*T^2+c^*T+d^*=x_{1T};$$
$$x_2^*(T)=-a^*T^3+(3a^*-b^*)T^2+(2b^*-c^*)T+c^*-d^*=x_{2T}.$$

Последние два уравнения разрешим относительно a^*,b^*:

$$\begin{aligned}&a^*T^3+b^*T^2=x_{1T}-x_{10}-(x_{10}+x_{20})T\overset{\Delta}{=}\sigma_1,\\&(3T^2-T^3)a^*+(2T-T^2)b^*=x_{2T}-x_{20}-2x_{10}+(x_{10}+x_{20})T\overset{\Delta}{=}\sigma_2.\end{aligned} \qquad (7.10)$$

Из уравнений (7.10) находим a^*, b^*:

$$a^*=\frac{(2-T)\sigma_1-T\sigma_2}{-T^3}, \qquad b^*=\frac{(3-T)\sigma_1-T\sigma_2}{T^2}. \qquad 7.11)$$

С учетом подстановки краевых условий (7.8) получим:

$$\sigma_1=0, \qquad \sigma_2=0,$$
$$a^*=0, \quad b^*=0, \quad c^*=1, \quad d^*=0.$$

Найдем программные траектории $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ и управление $u^*(t)$:

$$x_1^*(t)=t, \qquad x_2^*(t)=1-t, \qquad u^*(t)=t+1.$$

2*) Синтез по конечному состоянию.*

В законе управления $u(t,x,\dot{x})$ (7.9) момент времени t принимается нулевым: $u=d_1+c_1-2b_1$,

где d_1,c_1,b_1 находятся по формулам (7.6), (7.10), (7.11):

$$a_1=\frac{(2-(T-t))\sigma_1^{(1)}-(T-t)\sigma_2^{(1)}}{-(T-t)^3}; \quad b_1=\frac{(3-(T-t))\sigma_1^{(1)}-(T-t)\sigma_2^{(1)}}{(T-t)^2};$$

$$c_1 = x_1 + x_2; \qquad d_1 = x_1,$$

где $\sigma_1^{(1)} = x_{1T} - x_1 - (x_1 + x_2)(T - t)$,

$\sigma_2^{(1)} = x_{2T} - x_2 - 2x_1 + (x_1 + x_2)(T - t)$.

3) Синтез по методу преследования ведущей точки

В законе управления $u(t, x, \dot{x})$ (7.9) момент времени t принимается нулевым $\qquad u = d_2 + c_2 - 2b_2$

и d_2, c_2, b_2 находятся по формулам, аналогичным (7.10), (7.11):

$$a_2 = \frac{(2 - \Delta t)\sigma_1^{(2)} - \Delta t\,\sigma_2^{(2)}}{-\Delta t^3}; \qquad b_2 = \frac{(3 - \Delta t)\sigma_1^{(2)} - \Delta t \sigma_2^{(2)}}{\Delta t^2}; \qquad (7.12)$$

$$c_2 = x_1 + x_2; \qquad d_2 = x_1,$$

где $\sigma_1^{(2)} = -x_1 - (x_1 + x_2)\Delta t + x_1^*(t + \Delta t)$,

$\sigma_2^{(2)} = -x_2 + (x_1 + x_2)\Delta t - 2x_1 + x_2^*(t + \Delta t)$.

Программное движение определяется следующими зависимостями:

$$x_1^*(t + \Delta t) = a^*(t + \Delta t)^3 + b^*(t + \Delta t)^2 + c^*(t + \Delta t) + d^*;$$

$$x_2^*(t + \Delta t) = 3a^*(t + \Delta t)^2 + 2b^*(t + \Delta t) + c^* - a^*(t + \Delta t)^3 - $$
$$- b^*(t + \Delta t)^2 - c^*(t + \Delta t) - d^*.$$

Пример 2

Рассмотрим управляемый объект

$$\ddot{x} + \omega^2 x = u$$

и представим его в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + u \end{cases}. \qquad (7.13)$$

Задача состоит в отыскании управления, обеспечивающего реализацию краевых условий

$$\left.\begin{matrix} x_1(0) = x_{10} = 1 \\ x_2(0) = x_{20} = 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{T = 1c} \begin{cases} x_1(T) = x_{1T} = 0 \\ x_2(T) = x_{2T} = 0 \end{cases}. \qquad (7.14)$$

1) Метод программного управления

Вводится номинальная траектория:

$$x_1^*(t) = a^* t^3 + b^* t^2 + c^* t + d^*,$$

$$x_2^*(t) = \dot{x}_1^*(t) = 3a^* t^2 + 2b^* t + c^*$$

и из второго уравнения (7.13) получим программное управление:

$$u^*(t) = \dot{x}_2^*(t) + \omega^2 x_1^*(t) = 6a^* t + 2b^* + \omega^2 (a^* t^3 + b^* t^2 + c^* t + d^*). \quad (7.15)$$

Из краевых условий (7.14) найдем a^*, b^*, c^*, d^*:

$$\begin{aligned} &x_1^*(0) = d^* = x_{10}; \\ &x_2^*(0) = c^* = x_{20}; \\ &x_1^*(T) = a^* T^3 + b^* T^2 + c^* T + d^* = x_{1T}; \\ &x_2^*(T) = 3a^* T^2 + 2b^* T + c^* = x_{2T}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Последние два уравнения разрешим относительно a^*, b^*:

$$a^* T^3 + b^* T^2 = x_{1T} - x_{10} - x_{20} T \overset{\Delta}{=} \sigma_1;$$

$$3a^* T^2 + 2b^* T = x_{2T} - x_{20} \overset{\Delta}{=} \sigma_2.$$

Из этих уравнений находим a^*, b^*:

$$\begin{aligned} a^* &= \frac{1}{T^3}(-2\sigma_1 + T\sigma_2); \\ b^* &= \frac{1}{T^2}(3\sigma_1 - T\sigma_2). \end{aligned} \quad (7.17)$$

С учетом подстановки краевых условий (7.14) получим:

$$\sigma_1 = -1, \qquad \sigma_2 = 0,$$

$$a^* = 2, \quad b^* = -3, \quad c^* = 0, \quad d^* = 1.$$

Найдем программные траектории $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ и управление $u^*(t)$:

$$x_1^*(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \qquad x_2^*(t) = 6t^2 - 6t,$$

$$u^*(t) = 12t - 6 + \omega^2 (2t^3 - 3t^2 + 1).$$

2*) Синтез по конечному состоянию*

В законе управления $u(t,x,\dot{x})$ (7.15) момент времени t принимается нулевым $u = 2b_1 + \omega^2 d_1$

и b_1, d_1 находятся по формулам, аналогичным (7.16), (7.17):

$$d_1 = x_1, \qquad b_1 = \frac{1}{(T-t)^2}(3\sigma_1^{(1)} - (T-t)\sigma_2^{(1)}),$$

где $\sigma_1^{(1)} = x_{1T} - x_2(T-t) - x_1$, $\sigma_2^{(1)} = x_{2T} - x_2$, $x_{1T} = 0$, $x_{2T} = 0$.

3) Синтез по методу преследования ведущей точки

В законе управления $u(t,x,\dot{x})$ (7.15) момент времени t принимается нулевым $u = 2b_2 + \omega^2 d_2$

и b_2, d_2 находятся по формулам, аналогичным (7.16), (7.17):

$$d_2 = x_1, \qquad b_2 = \frac{1}{\Delta t^2}(3\sigma_1^{(2)} - \Delta t \cdot \sigma_2^{(2)}),$$

где $\sigma_1^{(2)} = x_1^* - x_2 \cdot \Delta t - x_1$, $\sigma_2^{(2)} = x_2^* - x_2$.

Программное движение определяется следующими зависимостями:

$$x_1^*(t+\Delta t) = a^*(t+\Delta t)^3 + b^*(t+\Delta t)^2 + c^*(t+\Delta t) + d^*,$$

$$x_2^*(t+\Delta t) = 3a^*(t+\Delta t)^2 + 2b^*(t+\Delta t) + c^*.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулировать задачу терминального управления.
2. Описать метод программного управления, указать его недостатки.
3. Привести расчет параметров программной траектории.
4. В чем состоит синтез по конечному состоянию? Указать его недостатки.
5. Как находятся коэффициенты траектории при синтезе по конечному состоянию?
6. В чем состоит синтез по методу преследования ведущей точки? Преимущества метода.

7. Как рассчитывается управление и коэффициенты траектории при синтезе по методу преследования ведущей точки?

8. Выписать уравнение замкнутой системы при синтезе управления по конечному состоянию. Охарактеризовать возможность его решения.

9. Выписать уравнение замкнутой системы при синтезе управления по методу преследования ведущей точки. Охарактеризовать возможность его решения.

8. УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Система называется стохастической, если в ее математической модели учитываются случайные воздействия и случайные помехи измерений. Такие модели являются более адекватными реальным условиям функционирования систем автоматического управления, чем детерминированные модели. Поэтому их использование при проектировании систем управления способствует повышению точности управления, увеличению быстродействия и снижению энергозатрат.

Как известно, синтез управления, или вычисление требуемого значения управляющей переменной, осуществляется по текущим измерениям вектора состояния объекта. В условиях стохастических систем измерения, как и сам динамический процесс, содержат случайную составляющую или, другими словами, шум. Использование зашумленного измерения в алгоритме управления может оказаться не эффективным, поэтому возникает проблема получения неслучайной оценки измеряемой переменной, наилучшей в некотором смысле. Такая оценка далее используется для вычисления требуемого управления. Кроме того, на практике непосредственному измерению доступны всегда только часть переменных состояния или их комбинации. Поэтому, дополнительно к сглаживанию измерений, возникает проблема получения оценки не измеряемых переменных по имеющимся данным системы. В современных системах управления обе упомянутые задачи – получение неслучайной оценки и восстановление не измеряемых переменных, решается с помощью алгоритма фильтра Калмана и его модификаций [11].

Способ и условия получения уравнений фильтра Калмана, его свойства, достоинства и недостатки изучаются в теории оценивания и фильтрации [12]. Здесь кратко остановимся только на алгоритмических аспектах реализации фильтра, необходимых для решения задач синтеза управления стохастическими системами.

8.1 Фильтр Калмана

Рассмотрим случайный процесс, порождаемый следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + V(t),$$

где $x(t)$ − n-мерный вектор состояния;

$u(t)$ − m-мерный вектор управления;

$A\ (n \times n)$, $B\ (n \times m)$ − матрицы системы и управления;

$V(t)$ − n-мерный векторный белый шум (*входной шум*), описывающий случайные динамические возмущения, компоненты которого имеют нормальное распределение с нулевым средним, и ковариационную матрицу $M[V(t)V^T(t)] = G \cdot \delta(t)$, где G - положительно определенная диагональная матрица интенсивности компонент вектора V, $\delta(t)$ − δ-функция.

Вектор $x(t)$ непосредственно измерению не доступен, а измерением служит вектор $z(t)$, связанным с $x(t)$ зависимостью

$$z(t) = C \cdot x(t) + N(t),$$

где $C\ (k \times n)$ − матрица измерений;

$N(t)$ − k-мерная помеха (*измерительный шум*), представляющая собой векторный белый шум с нулевым средним, матрицей интенсивности Q и нормальным распределением для каждой компоненты.

Для компактного описания характеристик введенных шумов удобно использовать двухместную запись

$$V = \{0;\ G\}, \qquad N = \{0;\ Q\},$$

где на первом месте указывается среднее значение, на втором – матрица интенсивности.

Задача оптимального оценивания состоит в том, чтобы по имеющимся измерениям $z(t)$ получить неслучайную оценку вектора состояния $\hat{x}(t)$, такую, для которой апостериорная дисперсия $D_z[\varepsilon(t)]$ ошибки оценивания $\varepsilon(t) \overset{\Delta}{=} x(t) - \hat{x}(t)$ будет минимальной.

Такая задача при выполнении условия наблюдаемости вектора x по измерениям z наилучшим образом решается с помощью алгоритма фильтра Калмана.

Полученная с помощью фильтра оптимальная оценка вектора состояния далее используется в законе управления. Таким образом, структурная схема замкнутой стохастической системы управления может быть представлена в таком виде, как на рисунке 8.1.

Схема построена в обозначениях, принятых в пакете VisSim [10], где $V(t)$ − входной шум или возмущение, а $N(t)$ − измерительный шум или помеха.

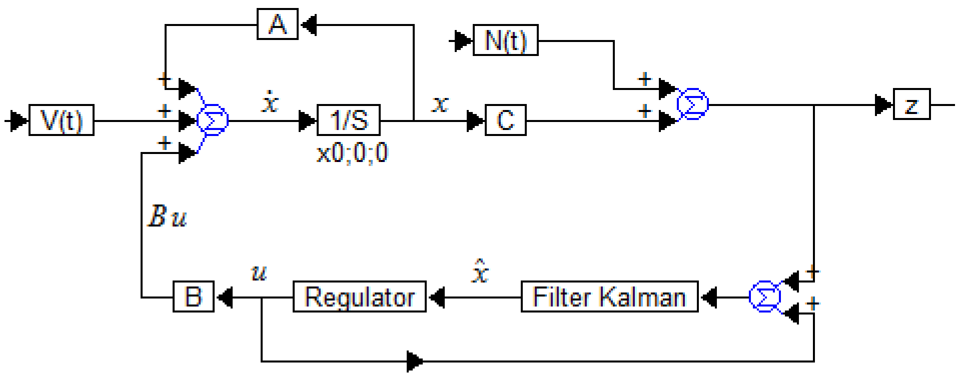


Рисунок 8.1 − Структурная схема замкнутой стохастической системы управления

8.2 Алгоритм фильтра Калмана

Рассмотрим подробнее алгоритм фильтра Калмана.

Пусть известно математическое ожидание вектора начальных условий $\hat{x}(t_0) = M[x(t_0)] = m_{x_0}$, принимаемое в качестве начального значения оценки вектора состояния, и известно начальное значение ковариационной матрицы ошибок оценивания $(n \times n)$: $P_0 = P(t_0) = M[(x(t_0) - m_{x_0})(x(t_0) - m_{x_0})^T]$.

Тогда алгоритм получения наилучшей неслучайной динамической оценки $\hat{x}(t)$ случайного вектора $x(t)$ представляет собой рекуррентную процедуру решения уравнения

$$\dot{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u + K(z - C \cdot \hat{x}), \qquad (8.1)$$

в котором $K = P(t) \cdot C^T \cdot Q^{-1}$ – вычисляемая матрица коэффициентов усиления $(n \times k)$;

$(z - C\hat{x})$ – так называемый вектор невязок $(k \times 1)$;

$P(t)$ – ковариационная симметрическая положительно определенная матрица ошибок, вычисляемая с помощью численных процедур из дифференциального уравнения Риккати:

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T Q^{-1} CP + G \qquad (8.2)$$

при начальных условиях:

$$P(t_0) = P_0.$$

Таким образом, практическая реализация алгоритма фильтра Калмана включает численное интегрирование векторного и матричного дифференциальных уравнений (8.1) и (8.2) соответственно.

Структурная схема получения решений указанных уравнений в обозначениям VisSim приведена на рис.8.2 и 8.3.

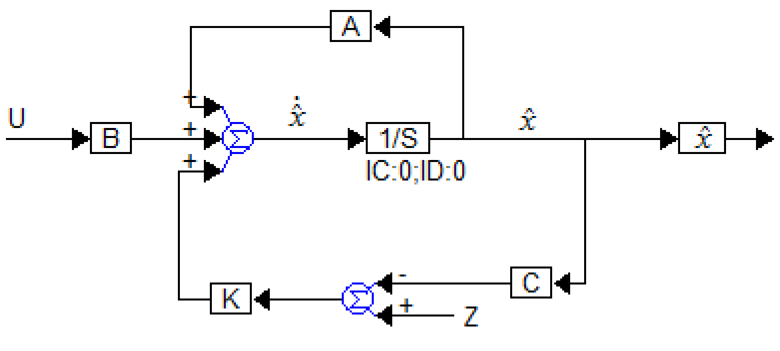


Рисунок 8.2 – Структурная схема решения уравнения (8.1)

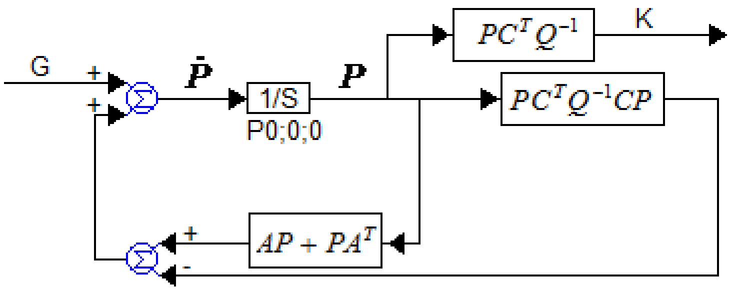


Рисунок 8.3 − Структурная схема решения уравнения (8.2)

Отметим некоторые особенности алгоритма. Блок вычисления $P(t)$, или так называемый ковариационный блок фильтра, имеет особенность когда $Q = 0$. Таким образом, алгоритм фильтра становится неработоспособным для детерминированной модели измерений. И второе, если изменение переменной $x(t)$ обусловлено только случайным воздействием $\dot{x} = \xi$ (случай стационарного процесса), то алгоритм фильтра Калмана, по сути, превращается в метод наименьших квадратов.

Задание на практике адекватных значений параметров фильтра m_{x_0}, P_0, Q, G является непростой задачей. Между тем от их значений существенно зависит эффективность оценивания, проявляемая, в частности, в скорости сходимости оценки к истинному значению. Для оптимизации процесса оценивания в этих условиях приходится подбирать значения перечисленных параметров или проводить так называемую настройку фильтра. В некоторых случаях можно воспользоваться эмпирическими данными, обработанными с помощью статистических методов. Так, для нахождения m_{x_0} проводится ряд измерений x, а затем они усредняются по формуле:

$$m_{x_0} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} x_i \,.$$

Определение начального значения ковариационной матрицы P_0 можно связать с погрешностью измерительного устройства (обычно нормируемой), с помощью которого проводится измерение начального состояния. Так, например, если предельно допустимая погрешность измерительного устройства равна $\pm a$, то в качестве дисперсии начальной ошибки оценивания (соответствующего диагонального элемента матрицы P_0) можно принять $\frac{a^2}{9}$ при гипотезе о нормальном распределении ошибки, либо $\frac{a^2}{3}$ при равномерном распределении и т.д.

Оценка матрицы интенсивности входного шума G строится на основе эвристических знаний о внешнем возмущении. Интенсивность измерительного шума Q можно получить экспериментально, еще на этапе проектирования системы управления. Так, предполагая шум центрированным, в условиях стационарного эталонного состояния системы можно получить:

$$Q = \frac{1}{(L-1)} \sum_{i=1}^{L} (z_i - C \cdot \hat{x}_Э)^2 ,$$

где $z_i = z(t_i)$ – измерения, полученные в момент времени t_i, $i = 1,2,...L$; $\hat{x}_Э$ – эталонное значение вектора состояния, полагаемое точно известным.

8.3 Постановка задачи управления стохастической системой

Задача состоит в определении алгоритма управления, обеспечивающего оптимальное протекание процесса с учетом случайных возмущений и помех.

Пусть движение системы описывается уравнением:

$$\dot{x} = f(x, u, V, t)$$

при начальном условии

$$x(t_0) = \{m_{x_0}, P_0\}.$$

Измерением является

$$z = C \cdot x(t) + N(t),$$

где $V = \{0; G\}$ – векторный гауссов белый входной шум;

$N = \{0; Q\}$ – векторный гауссов белый измерительный шум.

Необходимо найти вектор-функцию

$$u(z(\tau), 0 \le \tau \le t) \in \Omega_u$$

из области допустимых управлений Ω_u, обеспечивающую оптимальное в некотором смысле протекание процессов в рассматриваемой системе.

Для того чтобы данная задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы система была вполне управляемой.

Проблема управляемости для детерминированных систем достаточно хорошо изучена. Так для линейных систем известен критерий Калмана, в соответствие с которым система будет вполне управляемой тогда и только тогда, когда $\mathrm{rang}\left[B \quad A^T B \quad (A^T)^2 B \quad \ldots \quad (A^T)^{n-1} B\right] = n$, где n – порядок системы.

Для стохастической же системы само определение управляемости, как возможности перевести систему в произвольно заданное состояние за конечное время, не имеет смысла. Это связано с тем, что вектор состояния стохастической системы – случайная величина. По этой причине даже при одном и том же наборе управлений, используемом в различных реализациях, система будет приходить в различное состояние. Совокупность таких состояний, или ансамбль реализаций, можно количественно охарактеризовать только с использованием статистических характеристик. Таким образом, в условиях стохастических систем невозможно, в принципе, воспроизвести одну и ту же траекторию движения в нескольких реализациях.

С учетом сказанного определение управляемости для стохастических систем формулируется специальным образом.

Управляемость для стохастических систем

Пусть $x^*(t)$ – требуемая траектория движения (детерминированная) и $x(t)$ – реализуемая случайным образом траектория. Введем ошибку $\varepsilon(t) \overset{\Delta}{=} x(t) - x^*(t)$ реализации требуемой траектории. Так как $\varepsilon(t)$ – случайная величина, то для ее характеристики воспользуемся понятием «математическое ожидание», а поскольку процесс управления предполагает использование измерений, то будем говорить об условном математическом ожидании.

Пусть $R_\varepsilon(t) = M[(x(t) - x^*(t)) \cdot (x(t) - x^*(t))^T / z(\tau), 0 \le \tau \le t]$ − апостериорная ковариационная матрица ошибок.

Если матрица $R_\varepsilon(t)$ такова, что ее след (сумма диагональных элементов) остается ограниченным при $t \to \infty$ и при этом $M_z[\varepsilon] = 0$, то ограниченным остается и модуль центрированных ошибок $|\,\varepsilon(t)\,|$, а система называется стохастически управляемой.

Геометрически управляемость для стохастической системы означает, что реализуемая траектория будет оставаться в ограниченной окрестности требуемой траектории движения при любом, сколь угодно большом времени t (рис.8.4). Введенные обозначения: x^* − требуемая траектория, x – реализуемая траектория движения.

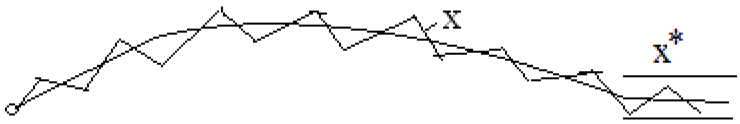


Рисунок 8.4 − Иллюстрация к управляемости в стохастической системе

Критерий оптимальности управления

В задаче оптимального управления важную роль играет функционал, с помощью которого характеризуется качество управляемого процесса и минимизация которого является условием оптимальности управления.

Для стохастических систем задание функционала качества, так же, как и категория управляемости, имеет некоторую особенность по сравнению с детерминированным случаем. Действительно, пусть $F(x^*, x, u)$ – это некоторый функционал, характеризующий качество управления в стохастической системе. Поскольку $x(t)$ – случайная в каждый момент времени величина, порождаемая дифференциальным уравнением $\dot{x} = f(x, u, V, t)$, то F – тоже случайная величина. Это означает, что при одном и том же управлении и краевых условиях значение функционала каждый раз будет иным. В этом случае минимизация функционала по управлению не имеет смысла вследствие невоспроизводимости его значения. В виду этого для использования в задачах оптимизации следует перейти к неслучайному функционалу $\hat{F}$, максимально близкому к функционалу F, причем близость будем характеризовать величиной дисперсии, т.е. будем искать $\hat{F}$ из условия минимума дисперсии:

$$\min_{\hat{F}} D[F-\hat{F}] = \min_{\hat{F}} M[(F-\hat{F})^2].$$

Поскольку в задаче управления присутствуют два источника шума: $V(t)$ – входной и $N(t)$ – измерительный, причем их влияние на динамический процесс и процесс оценивания существенно различное, то операцию взятия математического ожидания (в дальнейшем будем называть операцией *осреднения*) будем проводить в два этапа:

$$M[(F-\hat{F})^2] = M[M[(F-\hat{F})^2 / z(\tau), \quad t_0 \le \tau \le t_k]],$$

где $M[(F-\hat{F})^2 / z(\tau)] = M_z[(F-\hat{F})^2]$ – условное математическое ожидание. Вложенное осреднение таким образом осуществляется для входного шума в условиях заданного набора измерений, а внешнее осреднение – для измерительного шума.

Выполним преобразования: $M_z[(F-\hat{F})^2] = M_z[F^2 - 2F\hat{F} + \hat{F}^2] =$

$$= M_z[F^2] - M_z[2F\hat{F}] + M_z[\hat{F}^2] = M_z[F^2] - 2\hat{F}M_z[F] + \hat{F}^2 \pm (M_z[F])^2 =$$

$$= M_z[F^2] - (M_z[F])^2 + (-M_z[F] + \hat{F})^2.$$

Полученное выражение следует минимизировать путем выбора $\hat{F}$. Очевидно, что искомый минимум достигается тогда, когда

$$\min_{\hat{F}} (M_z[F] - \hat{F})^2 = 0, \quad \text{или} \qquad \hat{F} = M_z[F].$$

Данный критерий будем называть условным, при этом $F^* = M[\hat{F}]$ – безусловным (абсолютным) функционалом.

При отыскании оптимального управления стохастической системой будем в дальнейшем использовать $\hat{F}$, как наиболее отвечающий условиям решения задачи.

Основные виды функционалов

Рассмотрим основные, практически значимые виды стохастических функционалов. Они подобны тем, которые используются для оптимизации управления в детерминированных системах.

1. *Функционал быстродействия*

$$F = T = t_k - t_0,$$

где t_k – время достижения конечной точки. При решении задачи оптимизации необходимо провести осреднение:

$$\hat{F} = \hat{T} = M_z[T].$$

2. *Квадратичный функционал*

$$F = \frac{1}{2} x^T(t_k)\, S\, x(t_k) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k} (x^T(t) T x(t) + u^T(t) D u(t))\, dt,$$

где S, T, D – положительно определенные, симметрические матрицы соответствующих размерностей.

3. *Функционал терминального вида*, характерный для задач оптимизации терминальной точности:

$$F = \Phi(x(t_k)),$$

где $\Phi(\cdot)$ – некоторая ограниченная снизу функция.

Задача минимизации такого функционала называется задачей управления конечным состоянием системы.

Следует подчеркнуть, что любой из представленных выше функционалов за счет введения дополнительной переменной x_{n+1} может быть преобразован в функционал терминального вида:

$$F = x_{n+1}(t_k),$$

а исходная задача управления – к задаче управления конечным состоянием системы. Этот факт является важным с точки зрения обобщения теоретического решения различных задач путем рассмотрения одной задачи управления конечным состоянием.

Действительно, для функционала быстродействия дополнительная переменная вводится, как $x_{n+1}(t) \overset{\Delta}{=} \int_{t_0}^{t} 1 \cdot d\tau$, причем $\dot{x}_{n+1} = 1$, начальное условие $x_{n+1}(t_0) = 0$, функционал $F = T = x_{n+1}(t_k)$. Для квадратичного функционала $\dot{x}_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x^T\, T\, x + u^T\, D u\right)$, начальное условие $x_{n+1}(t_0) = \frac{1}{2} x^T(t_k) S\, x(t_k)$, функционал $F = x_{n+1}(t_k)$. Для функционала терминального вида дифференциальное уравнение $\dot{x}_{n+1} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \dot{x}\right)$, начальное условие $x_{n+1}(t_0) = 0$, функционал $F = x_{n+1}(t_k)$.

Контрольные вопросы

1. Фильтр Калмана, условие эффективного решения задачи оценивания.
2. Пример постановки задачи оценивания.
3. Алгоритм фильтра Калмана.
4. Постановка задачи управления стохастической системой.
5. Управляемость для стохастических систем.
6. Критерий оптимальности управления.
7. Типы функционалов.
8. Преобразование функционалов в функционал терминального вида.

9. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Стохастический принцип максимума является одним из методов решения задачи оптимального управления стохастической системой. У этого метода много общего с принципом максимума, применяемым для детерминированных систем. А главное его отличие состоит в том, что основные соотношения метода формулируются для осредненных переменных (фазовых и сопряженных), получить значения которых можно путем калмановской фильтрации. При этом естественным образом реализуется обратная связь по измерениям вектора состояния, которые используются в алгоритме фильтра.

9.1 Принцип максимума

Рассматривается задача оптимального управления стохастической системой, сформулированная в разделе 8.3 и дополненная функционалом $F(x,u,x^*,t_0,t_k)$, характеризующим качество управляемого процесса.

Приведем задачу общего вида к задаче управления конечным состоянием.

Вводится дополнительная переменная

$$x_{n+1}(t) \overset{\Delta}{=} F(x,u,x^*,t_0,t),$$

для которой можно записать дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{dF}{dt} \overset{\Delta}{=} f_{n+1}(x,u,V,t)$$

и начальное условие $x_{n+1}(t_0) = F(x,u,x^*,t_0,t_0)$. Тогда функционал задачи можно представить в виде

$$\Phi = x_{n+1}(t_k).$$

Расширенный вектор состояния с учетом дополнительной переменной имеет размерность $n+1$.

Вводится стохастическая функция Гамильтона H

$$H(x,\psi,u,v,t) \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i \cdot f_i(x,u,V,t),$$

в которой $\psi_i(t)$ – сопряженные переменные, удовлетворяющие уравнениям $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n+1}$ и условиям трансверсальности $\psi_i(t_k) = 0$, $i = \overline{1,n}$; $\psi_{n+1}(t_k) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}} = -1$.

С учетом последнего имеем $\psi_{n+1}(t) \equiv -1$.

В этих условиях имеет место следующее утверждение (формулировка принципа максимума):

для оптимальных $u^*(t)$ *и* $\hat{x}^*(t)$ *функционал* $\hat{\Phi} = M_z[\Phi]$ *принимает минимальное значение, а функция* $\hat{H}(\hat{\psi}, \hat{x}, u, t) = M_z[H(\psi, x, u, V, t)]$ − *максимальное значение, т.е.* $\hat{H}(\hat{\psi}, \hat{x}^*, u^*, t) = \max\limits_{u \in \Omega_u} \hat{H}(\hat{\psi}, \hat{x}, u, t)$*, при этом*

$$\dot{\hat{\psi}}_i = -M_z\left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\right], \quad \text{где} \;\; \hat{\psi}_i \overset{\Delta}{=} M_z[\psi_i],$$

$$\dot{\hat{x}}_i = M_z\left[\frac{\partial H}{\partial \psi_i}\right] = M_z\left[f_i(x, u, V, t)\right], \quad \text{где} \;\; \hat{x}_i = M_z[x_i], \; i = \overline{1, n+1},$$

$$\hat{x}(t_0) = m_{x_0},$$

$$\hat{\psi}_i(t_k) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \qquad \hat{\psi}_{n+1}(t_k) = -1.$$

Данное утверждение в общем случае является необходимым условием оптимальности. Для линейных задач с квадратичным функционалом, в частности, оно является и достаточным условием.

Отличие решения задачи оптимального управления стохастической системой от аналогичной задачи для детерминированной модели состоит в том, что, помимо оптимального закона управления, необходимо получить также осредненные переменные $\hat{\psi}(t)$ и $\hat{x}(t)$, т.е. неслучайные оценки случайных переменных $\psi(t)$ и $x(t)$. Последняя задача может быть решена с помощью алгоритма фильтрации.

Таким образом, решение задачи оптимального управления стохастической системы состоит из решения задачи фильтрации и решения задачи оптимального управления. **Для линейных систем эти задачи могут решаться независимо.**

9.2 Задача управления конечным состоянием

На примере задачи управления конечным состоянием системы покажем, как применяется стохастический принцип максимума и как используется аппарат фильтрации.

Движение системы описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u,$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

с начальными условиями $x(0)=\{m_{x_0}, P_0\}$, ограничением на управление $|u| \le u_{\max}$ и $t \in [0,T]$. Измерением является скалярная переменная $z = x_1 + N$, где $N=\{0; Q\}$ – скалярная помеха измерения. Найти управление, минимизирующее функционал $F = x_1^2(T)$.

Преобразуем функционал к требуемому виду. Введем дополнительную переменную:

$$x_3(t) \overset{\Delta}{=} x_1^2(t),$$

тогда

$$\dot{x}_3 = 2x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u), \quad x_3(0) = x_1^2(0) \quad \text{и} \quad \Phi = x_3(T) \to \min .$$

Ближайший неслучайный функционал имеет вид $\hat{\Phi} = M_z[\Phi] = \hat{x}_3(T)$.

Составим стохастическую функцию Гамильтона:

$$H = \psi_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u) + \psi_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + \psi_3 \cdot 2x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u),$$

в которой сопряженные переменные удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{\psi}_1 = -a_{11}\psi_1 - a_{21}\psi_2 - 2\psi_3(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u) - 2\psi_3 a_{11}x_1,$$
$$\dot{\psi}_2 = -a_{12}\psi_1 - a_{22}\psi_2 - 2a_{12}x_1\psi_3,$$
$$\dot{\psi}_3 = 0$$

при краевых условиях: $\psi_1(T)=0$, $\psi_2(T)=0$, $\psi_3(T)=-1$, полученных из условий трансверсальности.

В соответствии с принципом максимума решим задачу $\max\limits_{|u| \le u_{\max}} \hat{H}$:

$$\max_{|u| \le u_{\max}} \hat{H} \Rightarrow \max_{|u| \le u_{\max}} M_z\left[\psi_1 u - 2x_1 u\right] = \max_{|u| \le u_{\max}} (\hat{\psi}_1 - 2\hat{x}_1)u,$$

откуда следует

$$u^* = u_{\max} \cdot sign(\hat{\psi}_1 - 2\hat{x}_1).$$

Таким образом, с учетом оптимального управления задача свелась к краевой задаче вида:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u_{\max} sign(\hat{\psi}_1 - 2\hat{x}_1),$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$
$$\dot{\psi}_1 = -a_{11}\psi_1 - a_{21}\psi_2 + 4a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2u_{\max} sign(\hat{\psi}_1 - 2\hat{x}_1),$$
$$\dot{\psi}_2 = -a_{12}\psi_1 - a_{22}\psi_2 + 2a_{12}x_1$$

при условиях $x(0)=\{m_{x_0},P_0\}$, $\psi_1(T)=\psi_2(T)=0$.

Проводя осреднение дифференциальных уравнений и используя фильтр Калмана для получения оценки фазовых переменных, получим детерминированную краевую задачу

$$\begin{aligned}
&\dot{\hat{x}}_1 = a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 + u_{\max} sign(\hat{\psi}_1 - 2\hat{x}_1) + k_1(z-\hat{x}_1),\\
&\dot{\hat{x}}_2 = a_{21}\hat{x}_1 + a_{22}\hat{x}_2 + k_2(z-\hat{x}_1),\\
&\dot{\hat{\psi}}_1 = -a_{11}\hat{\psi}_1 - a_{21}\hat{\psi}_2 + 4a_{11}\hat{x}_1 + 2a_{12}\hat{x}_2 + 2u_{\max} sign(\hat{\psi}_1 - 2\hat{x}_1),\\
&\dot{\hat{\psi}}_2 = -a_{12}\hat{\psi}_1 - a_{22}\hat{\psi}_2 + 2a_{12}\hat{x}_1
\end{aligned}, \qquad (9.1)$$

с условиями $\hat{x}(0)=m_{x_0}$, $\hat{\psi}_1(T)=\hat{\psi}_2(T)=0$.

В задаче (9.1) коэффициенты усиления фильтра вычисляются по формуле $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = P(t)\cdot C^T \cdot Q^{-1} = P(t)\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot \frac{1}{Q}$, а симметрическая матрица $P(t)$, $t\in[0,T]$, вычисляется интегрированием матричного уравнения:

$$\begin{aligned}
&\dot{P} = AP + PA^T - PC^TQ^{-1}CP + G = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot P + P\cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} - \frac{1}{Q}P\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot P
\end{aligned}$$

из начального значения $P(0)=P_0$. Участвующее в правой части системы измерение $z(t)$ считаются известной функцией времени.

Итак, для того, чтобы получить окончательное решение задачи оптимального управления, необходимо решить краевую задачу (9.1), в результате чего будут получены зависимости $\hat{\psi}(t)$, $\hat{x}^*(t)$ и $u^*(t)=u_{\max}\cdot sign(\hat{\psi}_1(t)-2\hat{x}_1^*(t))$. Дальнейшее решение возможно только численно.

Следует отметить, что на практике воспользоваться полученным решением можно только в ограниченной степени. Очевидно, что программное управление для стохастических систем прикладного смысла не имеет. Именно поэтому задача управления стохастической системой формулировалась, как задача **синтеза** управления по текущим измерениям. В этой связи основная значимость полученных выше результатов состоит в том, что в ходе решения определяется структура оптимального закона. В ряде случаев этого оказывается достаточно для построения замкнутой схемы оптимального управления стохастической системой.

Пример

Движение системы описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 + v_1,$$

$$\dot{x}_2 = u + v_2,$$

или

$$\dot{x} = Ax + Bu + V,$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, управление $|u| \le 1$.

Измерением является переменная $z = x_1 + N$, или $z = Cx + N$, где $C = (1 \quad 0)$.

Функционал $F = x_1^2(T) \to \min$, $N = \{0; q\}$ – измерительный белый шум, $q = 0.01$; $V = \{0; G\}$ – двумерный векторный входной белый шум с нулевым средним и матрицей интенсивности $G = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$. Начальные значения $m_{x_{01}} = 1$, $m_{x_{02}} = 1$, $P(0) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Необходимо синтезировать управление, обеспечивающее оптимальное протекание процесса с учетом случайных возмущений и помех.

Решение

Введем дополнительную переменную:

$$\dot{x}_3 = 2x_1(x_2 + \nu_1).$$

С учетом того, что $\psi_3(t) = -1$, запишем функцию Гамильтона:

$$H = \psi_1(x_2 + \nu_1) + \psi_2(u + \nu_2) - 2x_1(x_2 + \nu_1).$$

Сопряженные переменные задаются уравнениями:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 2x_2,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 + 2x_1$$

и условиями $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$.

Решаем задачу $\max\limits_{|u|\le 1} \hat{H} \Rightarrow \max\limits_{|u|\le 1} \hat{\psi}_2 u \Rightarrow u^* = 1 \cdot sign\hat{\psi}_2$.

Уравнения фильтра и осредненные уравнения сопряженных переменных образуют краевую задачу

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1(z - \hat{x}_1),$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = sign\hat{\psi}_2 + k_2(z - \hat{x}_1),$$

$$\dot{\hat{\psi}}_1 = 2\hat{x}_2,$$

$$\dot{\hat{\psi}}_2 = -\hat{\psi}_1 + 2\hat{x}_1,$$

$$\hat{x}_1(0) = 1,\ \hat{x}_2(0) = 1,\ \hat{\psi}_1(T) = 0,\ \hat{\psi}_2(T) = 0,$$

в которой $K = PC^T Q^{-1}$, или

$$K(t) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{q} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_{11}(t)}{q} \\ \dfrac{p_{21}(t)}{q} \end{pmatrix},$$

а элементы $p_{11}(t), p_{21}(t)$ вычисляются из уравнения:

$$\dot{P} = AP + PA^T - KCP + G,$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{p_{11}}{q} \\ \dfrac{p_{21}}{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}. \qquad (9.2)$$

Напомним, что матрица $P(t)$ симметрическая, поэтому $p_{21}(t) = p_{12}(t)$.

Уравнение (9.2) в скалярном виде:

$$\dot{p}_{11} = p_{21} + p_{12} - \frac{(p_{11})^2}{q} + 0.1;$$

$$\dot{p}_{12} = p_{22} - \frac{p_{11}p_{21}}{q};$$

$$\dot{p}_{22} = -\frac{p_{21}p_{12}}{q} + 0.2;$$

$$p_{21} = p_{12},$$

причем $p_{11}(0) = 0,1$; $p_{12}(0) = 0$; $p_{21}(0) = 0$; $p_{22}(0) = 0,1$.

Дальнейшее решение возможно только численно.

Контрольные вопросы:

1. Стохастический принцип максимума и его отличие от аналогичного принципа для детерминированных систем.
2. Задача управления конечным состоянием.
3. Пример.

10. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Рассматривается синтез оптимального по быстродействию управления для детерминированной и стохастической системы при полном и неполном измерении вектора состояния. Демонстрируются отличия в решении такой задачи для различных случаев.

10.1. Детерминированная система с управлением по полному вектору состояния

Пусть движение материальной системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned} \qquad (10.1)$$

а измерениями являются $y_1(t) = x_1(t)$, $y_2(t) = x_2(t)$,

или в виде векторно-матричной формы [1-3]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \qquad (10.2)$$

где $\quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Задано начальное и конечное состояние системы:

$$x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 3, \quad x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0.$$

При ограниченном по модулю управлении $|u| \le 1$ требуется обеспечить оптимальное быстродействие, т.е. минимальное время перехода T из начального в конечное состояние.

Для решения такой задачи управление синтезируется в виде [6, 7]:

$$u^*(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, \ \textit{если} \ \{x_1, x_2\} \in \varepsilon^- \\ +1, \ \textit{если} \ \{x_1, x_2\} \in \varepsilon^+, \end{cases} \qquad (10.3)$$

где

$$\varepsilon^- : \{x_1, x_2\} \begin{cases} x_1 \ge -x_2^2/2, \ \textit{при} \ x_2 > 0 \\ x_1 > x_2^2/2, \ \ \textit{при} \ x_2 \le 0 \end{cases} ; \varepsilon^+ : \{x_1, x_2\} \begin{cases} x_1 < -x_2^2/2, \ \textit{при} \ x_2 > 0 \\ x_1 \le x_2^2/2, \ \ \textit{при} \ x_2 \le 0 \end{cases}$$

Зависимость (10.3) можно представить в компактной форме

$$u^* = -\left[sign(\hat{x}_1 + sign\, x_2 \cdot 0.5\hat{x}_2^2)\right],$$

при этом $\quad \hat{x}_1 = y_1, \ \hat{x}_2 = y_2.$

Используя компьютерное моделирование, можно получить переходной процесс, изменение управляющей функции и исследовать влияние случайных и детерминированных возмущений [13].

10.2 Система с измерением неполного вектора состояния

В большинстве практических случаев измерению доступны только некоторые компоненты вектора состояния $x(t)$ или их комбинации. Таким образом, размерность вектора измерений $y = Cx$ обычно меньше n – размерности вектора состояния.

В то же время, для достижения оптимального качества необходимо в законе управления использовать информацию обо всем векторе состояния или, хотя бы, приближенную его оценку.

Известно [12], что для получения такой оценки для *вполне наблюдаемой* системы можно использовать так называемое *наблюдающее устройство* (или наблюдатель), представляющее собой рекуррентный алгоритм и использующий всю доступную информацию о системе, а именно управление u, измерение $y = Cx$ и матрицы системы A, B (рис.10.1).

Уравнение наблюдателя представляется в виде [1-3, 12]:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t), \tag{10.4}$$

где $\hat{x}(t)$ – оценка вектора состояния системы $x(t)$, а матрица коэффициентов усиления наблюдателя K должна быть выбрана таким образом, чтобы наблюдатель был устойчивым даже при неустойчивом объекте, и чтобы качество процесса нахождения оценки было приемлемым. Этого легко добиться, используя метод *модального управления* [12], т.е. с помощью задания желаемого расположения корней характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение наблюдателя (10.4) имеет вид:

$$\det\left[A - KC - sI\right] = 0 \tag{10.5}$$

или
$$\begin{vmatrix} -k_1 - s & 1 \\ -k_2 & -s \end{vmatrix} = s^2 + k_1 s + k_2 = (s - s_1)(s - s_2) = 0. \tag{10.6}$$

Задав значения корней s_1 и s_2, можно рассчитать коэффициенты k_1 и k_2:
$$k_1 = -(s_1 + s_2), \quad k_2 = s_1 s_2.$$

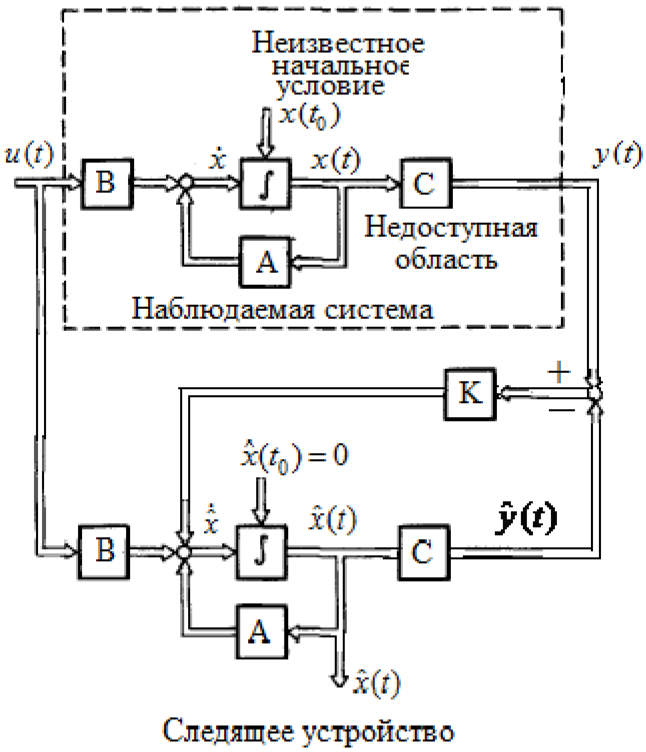


Рисунок 10.1 – Наблюдаемая система и следящее устройство

Используя математическое моделирование можно исследовать влияние случайных возмущений на управление системы [13].

10.3. Стохастическая система с измерением неполного вектора состояния

Необходимо синтезировать управление, обеспечивающее оптимальное протекание процесса с учетом случайных возмущений и помех.

Движение системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u + \nu, \end{aligned} \qquad (10.7)$$

где $\nu = \{0; g\}$ – входной белый шум, $g > 0$ – скаляр;

$\begin{cases} x(0) = \{m_{x0},\ P_0\}, \\ x(T) = (0;\ 0) \end{cases}$ – краевые условия;

P_0 – ковариационная матрица (2х2);

$|u| \le 1$ – ограничение на управление.

Измерением является переменная $z = x_1 + N$, где $N = \{0; q\}$ – выходной шум.

Задача состоит в том, чтобы время перехода из начального состояния в конечное было минимальным $\min\limits_{|u| \le 1} T$, где $T = \int\limits_0^T 1 \cdot dt$.

Для решения задачи необходимо использовать стохастический принцип максимума и фильтр Калмана [11,12].
Составим функцию Гамильтона:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 (u + v) - 1.$$

Сопряженные переменные ψ_i удовлетворяют уравнениям, образующим детерминированную модель:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1,$$

поэтому для осредненных переменных можно записать:

$$\hat{\psi}_1(t) = C_1, \qquad \hat{\psi}_2(t) = -C_1 t + C_2. \tag{10.8}$$

Решая задачу

$$\max_{|u| \le 1} \hat{H} \Rightarrow \max_{|u| \le 1} M_z[\psi_2 \cdot u] = \max_{|u| \le 1} (\hat{\psi}_2 \cdot u) = |\hat{\psi}_2|,$$

имеем для оптимального управления $u^* = 1 \cdot sign \hat{\psi}_2$.

Поскольку $\hat{\psi}_2(t)$ – это линейная функция времени согласно (10.8), то u^* изменит свой знак не более одного раза.

Будем искать решение в форме синтеза, т.е. $u^*(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.

Подобно детерминированному случаю, оптимальное управление u^* задается в виде $u^* = -\left[sign(\hat{x}_1 + sign\, x_2 \cdot 0.5\hat{x}_2^2)\right]$.

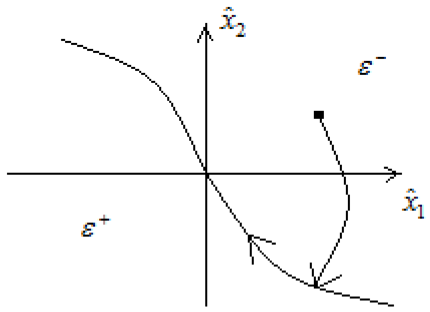


Рисунок 10.1 − Линия переключения оптимального управления и фазовая траектория перехода из начальной точки в конечную

Оценки $\hat{x}_1(t)$ и $\hat{x}_2(t)$ получают на основе фильтра Калмана:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu^* + K(z - C\hat{x}),$$
$$K = PC^T Q^{-1},$$
$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T Q^{-1} CP + G,$$

где K − матрица усиления, P − матрица ковариации ошибки оценивания, $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ − матрица интенсивности входного шума.

Для рассматриваемого конкретного случая имеем

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1(z - \hat{x}_1),$$
$$\dot{\hat{x}}_2 = u^* + k_2(z - \hat{x}_1).$$

Коэффициенты k_1, k_2 находятся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot q^{-1}; \qquad k_1 = \frac{p_{11}}{q}; \qquad k_2 = \frac{p_{12}}{q}.$$

Для вычисления $p_{11}(t), p_{12}(t)$ нужно из начального условия $P(0) = P_0$ проинтегрировать уравнение

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{12} & \dot{p}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{q} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

или в скалярном виде

$$\dot{p}_{11} = 2p_{12} - \frac{p_{11}^2}{q};$$

$$\dot{p}_{12} = p_{22} - \frac{p_{11}p_{12}}{q};$$

$$\dot{p}_{22} = -\frac{p_{12}^2}{q} + g.$$

Структурная схема замкнутой системы оптимального по быстродействию управления стохастической системой изображена на рис.10.2.

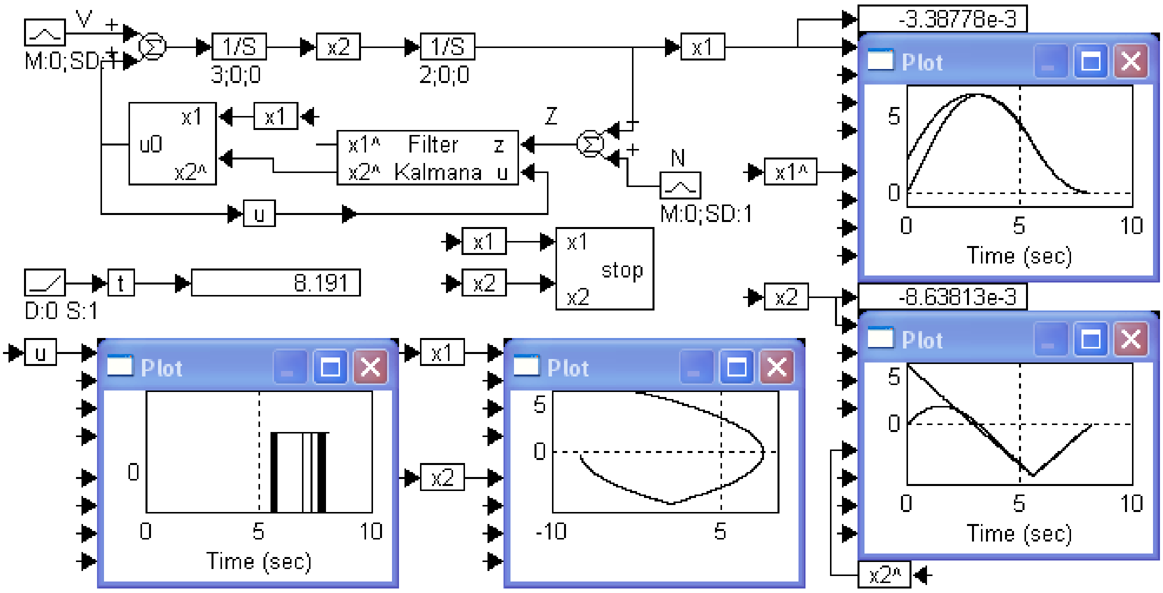


Рисунок 10.2 – Структурная схема замкнутой системы оптимального по быстродействию управления стохастической системой

Сравнивая результаты моделирования системы с фильтром Калмана и системы с наблюдающим устройством, можно сделать следующие выводы:

1. Использование детерминированной модели с наблюдателем состояния в условии измерения неполного вектора состояния и случайных возмущений недостаточно эффективно.

2. Применение фильтра Калмана в условиях возмущений и помех дает наилучшую оценку переменных и наименьшее время быстродействия.

Контрольные вопросы

1. Детерминированная система с управлением по полному вектору

состояния. Решение задачи оптимального быстродействия.

2. Детерминированная система с измерением неполного вектора состояния. Использование наблюдающего устройства.

3. Наблюдаемость линейной системы. Критерий наблюдаемости.

4. Что такое модальное управление? Постановка задачи.

5. Структурная схема решения задачи оптимального по быстродействию управления стохастической системой.

11. НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА И НЕЧЕТКИЕ СИСТЕМЫ В СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

11.1 Общие понятия и историческая справка

В современной теории управления, помимо традиционных направлений, основанных на строгой математической формализации, получили развитие и успешное применение эвристические подходы, строгая доказательность которых отсутствует, но демонстрирующие достаточно высокую эффективность на практике.

Одним из таких подходов является использование **нечеткой логики** и **процедуры нечеткого вывода** при описании и решении задач управления. Данный подход основан на специфическом формальном представлении человеческих знаний об объекте и, главное, эмпирическом опыте решения задач управления, обобщенном экспертом в понятиях «лучше», «хуже», «чаще», «реже» и его представлениях об «оптимальности» процесса управления.

Об особенностях и возможностях такого подхода можно сказать следующее. Несмотря на многообещающий термин «нечеткий вывод» ничего «чудесного» или не предсказуемого процедура получения закона управления не содержит. Более того, сама процедура нечеткого вывода может быть сформулирована в виде «четкого» алгоритма вычисления управляющего воздействия. Его особенностью, отличающей от классических линейных регуляторов, будет более сложная структура, нелинейный характер зависимости выходной переменной от входной, многократный повтор в алгоритме операций максимизации и минимизации и т.п. Следует заметить, что такой алгоритм управления почти естественным образом получается с привлечением аппарата нечеткой логики, тогда как традиционными методами он вряд ли может быть получен. Таким образом, описать и охарактеризовать классическими средствами теории управления алгоритм «нечеткого вывода» достаточно просто, но получить его на основе традиционных методов – невозможно. В этом – уникальность использования нечеткой логики в построении систем управления.

Продолжая говорить о преимуществах данного подхода, нельзя не отметить следующий факт. Процесс улучшения или совершенствования разрабатываемой системы управления – обязательный этап ее создания. Рассмотрим, чем различаются процессы усовершенствования, выполняемые на основе классических методов теории управления и на основе процедуры нечеткого вывода. В первом случае необходимо провести более глубокое исследование объекта, уточнить модель, после чего внести структурные или параметрические изменения в систему. Проведение данных мероприятий невозможно без привлечения специалистов в области систем управления. Во втором случае для повышения эффективности работы системы управления часто оказывается достаточным увеличить число термов в лингвистических переменных и соответственно расширить базу правил нечеткого вывода. Основную или содержательную часть такой работы выполняет эксперт – специалист-эксплуатационщик разрабатываемой системы, причем на удобном для него терминологическом языке. Таким образом, уже на этапе проектирования «нечетких систем» управления роль заказчика становится главной, а сам процесс проектирования приобретает более дружественный интерфейс для конечного пользователя разработки.

Многие современные задачи управления не могут быть решены классическими методами из-за очень большой сложности математических моделей, их описывающих [14]. Как видно из рисунка 11.1, классические методы управления хорошо работают при полностью детерминированном объекте управления и детерминированной среде.

Для систем с неполной информацией и высокой сложностью объекта управления оптимальными являются нечеткие методы управления.

Рисунок 11.1 – Области применения современных технологий управления

В правом верхнем углу рисунка приведена еще одна современная технология управления – с применением искусственных нейронных сетей.

Методологически построение «нечетких систем» управления базируется на теории нечетких множеств и нечеткой логики.

Математическая теория нечетких множеств (fuzzy sets) и нечеткой логики (fuzzy logic) – это обобщение классической теории множеств и формальной логики [15]. Данные понятия были впервые предложены американским ученым Лотфи Заде в 1965 году. Основной причиной появления новой теории стало наличие нечетких и приближенных рассуждений при описании человеком процессов, систем, объектов.

Принято выделять три этапа развития нечетких систем:

1) конец 60-х - начало 70-х годов – развитие теоретического аппарата нечетких множеств (Л. Заде, Э. Мамдани, Беллман);

2) 70-е - 80-е годы – первые практические работы в области нечеткого управления сложными техническими объектами (парогенератор с не-

четким управлением). Появление экспертных систем, построенных на нечеткой логике (медицина, экономика), разработка нечетких контроллеров;

3) конец 80-х и до настоящего времени – появление пакетов программ для построения нечетких экспертных систем. Они применяются в автомобильной, аэрокосмической и транспортной промышленности, в области изделий бытовой техники, в сфере финансов, анализа и принятия управленческих решений и многих других.

Переломным моментом в признании практической ценности нечеткой логики явилось доказательство в конце 80-х Бартоломеем Коско теоремы FAT (Fuzzy Approximation Theorem), в соответствии с которой **любая математическая система может быть сколь угодно точно аппроксимирована системой, основанной на нечеткой логике**. Другими словами, с помощью естественно-языковых высказываний «Если-то» с последующей их формализацией средствами теории нечетких множеств, можно сколь угодно точно отразить произвольную взаимосвязь «входы-выходы» без использования аппарата дифференциального и интегрального исчислений, традиционно применяемых в управлении.

В настоящее время количество успешных фаззи-применений исчисляется тысячами. Интуитивная простота нечеткой логики, как методологии разрешения проблем, гарантирует ее успешное использование во встроенных системах контроля и анализа информации. При этом происходит подключение человеческой интуиции и опыта оператора-эксперта.

Нечеткая логика в некотором смысле близка к классической – Булевой, логике, а также к теории вероятностей, но отличается от той и другой в положительную сторону.

Характеристика «нечеткости» – так называемая степень принадлежности (базовое понятие), получаемая в результате «не вполне точных измерений», во многом аналогична функции распределения в теории вероятностей, но свободна от присущих последней недостатков: малое количество пригодных к анализу функций распределения, необходимость их принудительной нормализации, трудность обоснования адекватности математической абстракции для описания поведения фактических величин. В пределе, при возрастании точности, нечеткая логика приходит к классической с двузначной функцией принадлежности. По сравнению с вероятностным методом, нечеткий метод позволяет резко сократить объем производимых вычислений, что, в свою очередь, приводит к увеличению быстродействия нечетких систем.

Смещение центра исследований нечетких систем в сторону практических применений привело к постановке целого ряда проблем, в частности [16]:

- новые архитектуры компьютеров для нечетких вычислений;
- элементная база нечетких компьютеров и контроллеров;
- инструментальные средства разработки;
- инженерные методы расчета и разработки нечетких систем управления, и т.п.

Недостатками нечетких систем являются:

- отсутствие стандартной методики конструирования нечетких систем;
- невозможность математического анализа нечетких систем существующими методами;
- применение нечеткого подхода по сравнению с вероятностным не приводит к повышению точности вычислений.

11.2 Математический аппарат нечеткой логики

В узком смысле нечеткая логика – это логическое исчисление, являющееся расширением многозначной логики.

Она включает в себя понятия нечеткого множества, операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, нечеткой и лингвистической переменной.

Применения нечеткой логики: теория приближенных рассуждений, нечеткие алгоритмы обучения, нечеткое математическое программирование, задачи нечеткого контроля и управления.

Кратко рассмотрим основные понятия нечеткой логики.

Характеристикой нечеткого множества C выступает функция принадлежности (Membership Function): $MF_C(x)$ – степень принадлежности элемента x нечеткому множеству C.

Нечетким множеством С называется множество упорядоченных пар вида С={$MF_C(x)/x$}, $MF_C(x) \in [0,1]$. Значение $MF_C(x)$=0 означает отсутствие принадлежности к множеству, 1 – полную принадлежность.

Проиллюстрируем это на простом примере. Формализуем неточное определение "горячий чай".

В качестве x (область рассуждений) будет выступать шкала температуры в градусах Цельсия. Очевидно, что она изменяется от 0 до 100 градусов. Нечеткое множество для понятия "горячий чай" может выглядеть следующим образом:

C={0/0; 0/10; 0/20; 0,15/30; 0,30/40; 0,60/50; 0,80/60; 0,90/70; 1/80; 1/90; 1/100}.

Так, чай с температурой $60^\circ C$ принадлежит к множеству "Горячий" со степенью принадлежности 0,80. Для одного человека чай при температуре $60^\circ C$ может оказаться горячим, для другого – не слишком горячим. Именно в этом и проявляется нечеткость задания соответствующего множества.

Основные логические операции

Пересечение двух нечетких множеств (нечеткое "И"): $A \cap B$.

Пересечением двух нечетких множеств A, B с функцией принадлежности $MF_A(x)$ и $MF_B(x)$ соответственно является нечеткое множество AB с функцией принадлежности

$$MF_{AB}(x) = \min(MF_A(x), MF_B(x)).$$

Объединение ("ИЛИ"): $A \cup B$.

Объединением двух нечетких множеств A, B с функцией принадлежности $MF_A(x)$ и $MF_B(x)$ соответственно является нечеткое множество AB с функцией принадлежности

$$MF_{AB}(x) = \max(MF_A(x), MF_B(x)).$$

Дополнение (отрицание): $\overline{A}$.

Дополнением нечеткого множества A с функцией принадлежности $MF_A(x)$ является нечеткое множество $\overline{A}$ с функцией принадлежности

$$MF_{\overline{A}}(x) = 1 - MF_A(x).$$

Пример

Пусть «горячий чай» – множество
A={0/0; 0/10; 0/20; 0,15/30; 0,30/40; 0,60/50; 0,80/60; 0,90/70; 1/80; 1/90; 1/100};
«горячий суп» – множество
B={0/0; 0/10; 0/20; 0/30; 0,1/40; 0,6/50; 1/60; … 1/100}.
Найдем пересечение и объединение указанных множеств.
Пересечение: «горячий обед» = «горячий чай» и «горячий суп»
$A \cap B$={0/0; 0/10; 0/20; 0/30; 0,1/40; 0,60/50; 0,80/60; 0,90/70; 1/80;… 1/100}.
Объединение: «не холодный обед» = «горячий чай» или «горячий суп»
$A \cup B$={0/0; 0/10; 0/20; 0,15/30; 0,30/40; 0,60/50; 1/60; … 1/100}.

В теории нечетких множеств разработан общий подход к выполнению операторов пересечения, объединения и дополнения, реализованный в так называемых **треугольных нормах (t-нормах) и конормах (t-конормах)**. Приведенные выше реализации операций пересечения и объединения – наиболее распространенные случаи t-нормы и t-конормы.

Нечеткая и лингвистическая переменные

Нечеткая переменная описывается набором (*N,X,A*), где *N* – это название переменной, *X* – универсальное множество (область рассуждений), *A* – нечеткое множество на *X*.
Лингвистической переменной могут быть нечеткие переменные, т.е. лингвистическая переменная находится на более высоком уровне, чем нечеткая переменная.

Каждая лингвистическая переменная состоит из:

- названия;
- множества своих значений (базовое терм-множество T). Элементы T – названия нечетких переменных;
- универсальное множество X;

- синтаксические правила G, по которому генерируются новые термы с применением слов естественного или формального языка;
- семантического правила P, которое каждому значению лингвистической переменной ставит в соответствие нечеткое подмножество множества X.

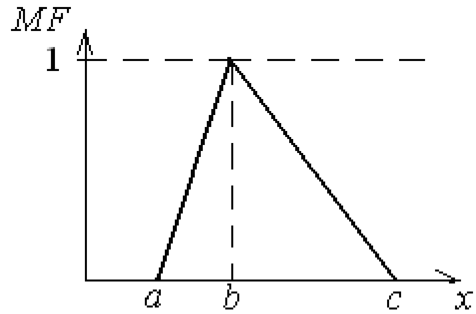
Пример: «цена акции». Базовое терм-множество «низкая»; «умеренная»; «высокая». Область рассуждений X=[100; 200] единиц. Осталось определить P.

Способы задания функций принадлежности

Существует свыше десятка типовых форм кривых для задания функций принадлежности. Наибольшее распространение получили: треугольная, трапецеидальная и гауссова функции принадлежности.

Треугольная функция принадлежности определяется тройкой чисел (a,b,c), и ее значение в точке x вычисляется согласно выражению:

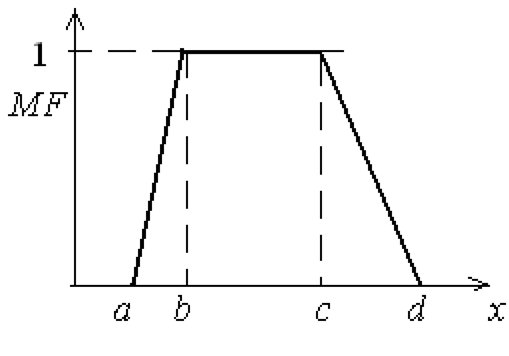
$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{b-x}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1 - \dfrac{x-b}{c-b}, & b \le x \le c \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$



При (b-a)=(c-b) имеем случай симметричной треугольной функции принадлежности, которая может быть однозначно задана двумя параметрами из тройки (a,b,c).

Аналогично для задания **трапецеидальной функции принадлежности** необходима четверка чисел (a,b,c,d):

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{b-x}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ 1 - \dfrac{x-c}{d-c}, & c \le x \le d \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

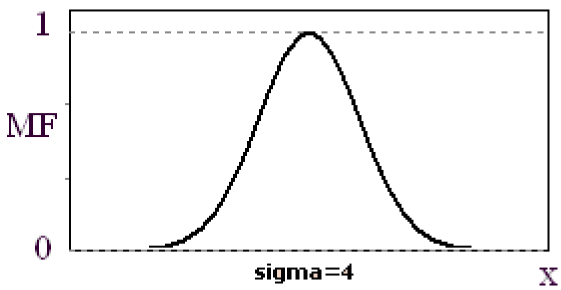


При (b-a)=(d-c) трапецеидальная функция принадлежности принимает симметричный вид.

Функция принадлежности гауссова типа описывается формулой

$$MF(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right]$$

и оперирует двумя параметрами. Параметр c обозначает центр нечеткого множества, а параметр σ (sigma) отвечает за крутизну функции.



Совокупность функций принадлежности для каждого терма из базового терм-множества T обычно изображаются вместе на одном графике.

На рисунке 11.2 приведен пример описанной выше лингвистической переменной "Цена акции", на рисунке 11.3 – формализация неточного понятия "Возраст человека". Так, для человека 48 лет степень принадлежности к множеству "Молодой" равна 0, "Средний" – 0,47, "Выше среднего" – 0,20.

Количество термов в лингвистической переменной редко превышает 7.

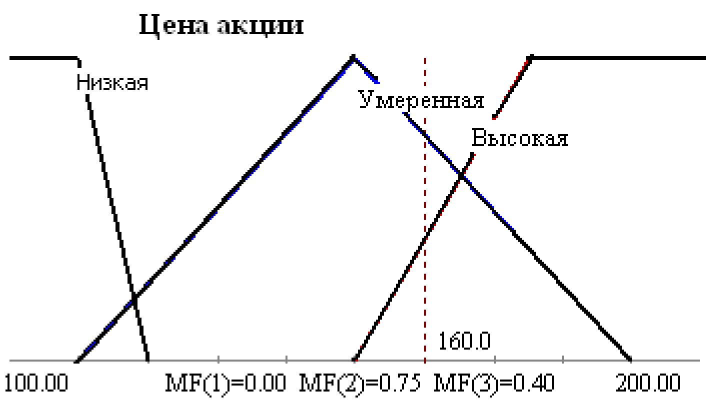


Рисунок 11.2 – Описание лингвистической переменной "Цена акции"

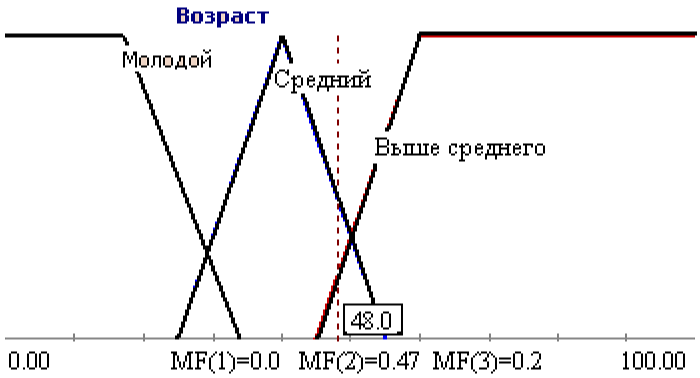


Рисунок 11.3 – Описание лингвистической переменной "Возраст"

11.3 Нечеткий логический вывод

Основой для проведения операции нечеткого логического вывода является база правил, содержащая нечеткие высказывания в форме "Если-то" и функции принадлежности для соответствующих лингвистических термов. При этом должны соблюдаться следующие условия:

1. Существует хотя бы одно правило для каждого лингвистического терма выходной переменной.
2. Для любого терма входной переменной имеется хотя бы одно правило, в котором этот терм используется в качестве предпосылки (левая часть правила).

В противном случае имеет место неполная база нечетких правил. Пусть в базе правил имеется m правил вида:

R_1: ЕСЛИ x_1 это A_{11} … И … x_n это A_{1n}, ТО y это B_1;

R_i: ЕСЛИ x_1 это A_{i1} … И … x_n это A_{in}, ТО y это B_i;

R_m: ЕСЛИ x_1 это A_{m1} … И … x_n это A_{mn}, ТО y это B_m,

где x_k, k=1…n – входные переменные; y – выходная переменная; A_{ik} – заданные нечеткие множества с функциями принадлежности.

Пример: если "дистанция" = средняя и "угол" = малый, то "мощность"=средняя.

Результатом нечеткого вывода является четкое значение переменной y^* на основе заданных четких значений x_k, k=1...n.

В общем случае механизм логического вывода включает четыре этапа: введение нечеткости (фазификация), нечеткий вывод, композиция и приведение к четкости, или дефазификация (рисунок 11.4).

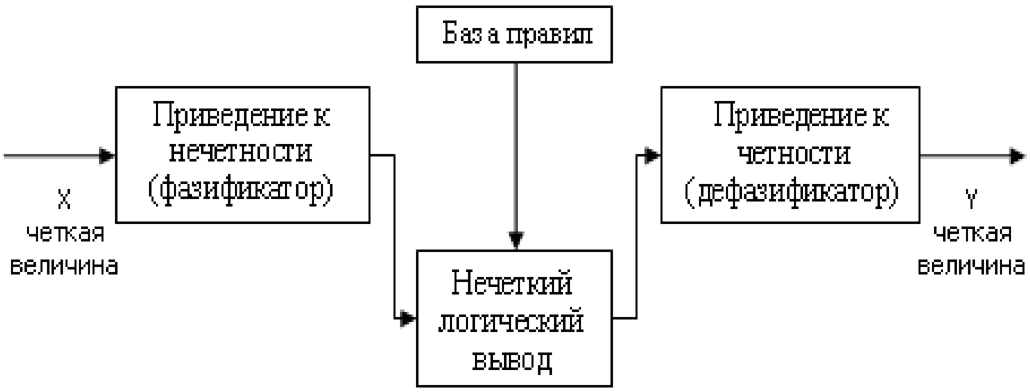


Рисунок 11.4 – Система нечеткого логического вывода

Алгоритмы нечеткого вывода различаются главным образом видом используемых правил, логических операций и разновидностью метода дефазификации. Разработаны модели нечеткого вывода Мамдани, Сугено, Ларсена, Цукамото.

Рассмотрим подробнее нечеткий вывод на примере механизма Мамдани (Mamdani). Это наиболее распространенный способ логического вывода в нечетких системах. В нем используется минимаксная композиция нечетких множеств. Рисунок 11.5 графически показывает процесс нечеткого вывода по Мамдани для двух входных переменных и двух нечетких правил R_1 и R_2.

Будем считать, что правила содержат только логическую операцию *«И»*. Данный механизм включает в себя следующую последовательность действий.

1. Процедура фазификации: определяются степени истинности, т.е. значения функций принадлежности для левых частей каждого правила (предпосылок). Для базы правил с *m* правилами обозначим степени истинности как $A_i(x_k)$, $i = 1...m$, $k = 1...n$.

2. Нечеткий вывод. Сначала определяются уровни "отсечения" для левой части каждого из правил: $alfa_i = \min_k (A_i(x_k))$.

Далее находятся "усеченные" функции принадлежности:

$$B_i^*(y) = \min(alfa_i, B_i(y)).$$

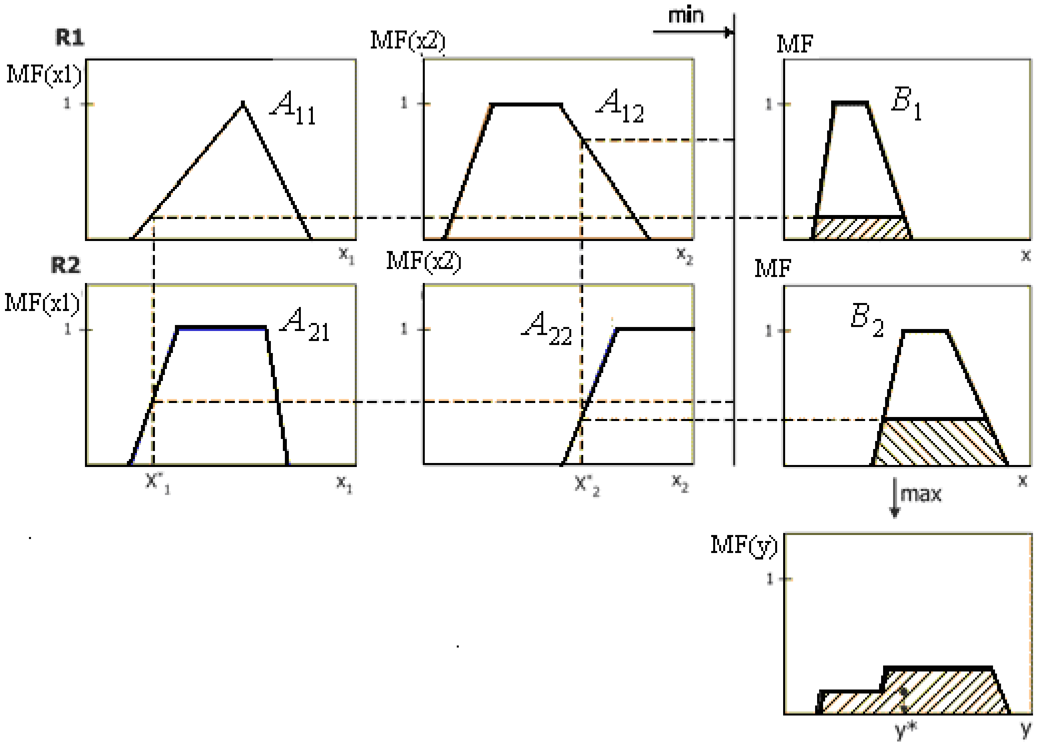


Рисунок 11.5 – Схема нечеткого вывода по Мамдани

3. Композиция, или объединение полученных усеченных функций, для чего используется максимальная композиция нечетких множеств:

$$MF(y) = \max_i (B_i^*(y)),$$

где $MF(y)$ – функция принадлежности итогового нечеткого множества.
4. Дефазификация, или приведение к четкости. Существует несколько методов дефазификации. Например, метод среднего центра, или центроидный метод:

$$y^* = center\{MF(y)\}.$$

Геометрический смысл такого значения – центр тяжести для кривой $MF(y)$.

11.4 Интеграция нечеткой логики с другими направлениями искусственного интеллекта

В результате объединения нескольких технологий искусственного интеллекта появился специальный термин – "мягкие вычисления" (soft computing), который ввел Л. Заде в 1994 году. В настоящее время мягкие вычисления объединяют такие области как нечеткая логика, искусственные нейронные сети, вероятностные рассуждения и эволюционные алгоритмы. Они дополняют друг друга и используются в различных комбинациях для создания гибридных интеллектуальных систем.

Ниже приводятся примеры объединений нечеткой логики с иными технологиями искусственного интеллекта.

– Нечеткие нейронные сети (НС)

Нечеткие нейронные сети (fuzzy-neural networks) осуществляют выводы на основе аппарата нечеткой логики, однако параметры функций принадлежности настраиваются с использованием алгоритмов обучения НС. Поэтому для подбора параметров таких сетей применим метод обратного распространения ошибки, изначально предложенный для обучения многослойного персептрона. Для этого модуль нечеткого управления представляется в форме многослойной сети. Нечеткая нейронная сеть как правило состоит из четырех слоев: слоя фазификации входных переменных, слоя агрегирования значений активации условия, слоя агрегирования нечетких правил и выходного слоя [17, 18].

– Адаптивные нечеткие системы

Классические нечеткие системы обладают тем недостатком, что для формулирования правил и функций принадлежности необходимо привлекать экспертов той или иной предметной области, что не всегда удается обеспечить. Адаптивные нечеткие системы (adaptive fuzzy systems) решают эту проблему. В таких системах подбор параметров нечеткой системы производится в процессе обучения на экспериментальных данных. Алгоритмы обучения адаптивных нечетких систем относительно трудоемки и сложны по сравнению с алгоритмами обучения нейронных сетей, и, как правило, состоят из двух стадий:
1. Генерация лингвистических правил. 2. Корректировка функций принадлежности. Первая задача относится к задаче переборного типа, вторая – к оптимизации в непрерывных пространствах. При этом возникает определенное противоречие: для генерации нечетких правил необходи-

мы функции принадлежности, а для проведения нечеткого вывода – правила. Кроме того, при автоматической генерации нечетких правил необходимо обеспечить их полноту и непротиворечивость.

Значительная часть методов обучения нечетких систем использует генетические алгоритмы. В англоязычной литературе этому соответствует специальный термин – Genetic Fuzzy Systems.

– Нечеткие запросы

Нечеткие запросы к базам данных (fuzzy queries) – перспективное направление в современных системах обработки информации. Данный инструмент дает возможность формулировать запросы на естественном языке, например: "Вывести список недорогих предложений о съеме жилья близко к центру города", что невозможно при использовании стандартного механизма запросов. Для этой цели разработана нечеткая реляционная алгебра и специальные расширения языков SQL для нечетких запросов.

– Нечеткая кластеризация

Нечеткие методы кластеризации позволяют одному и тому же объекту принадлежать одновременно нескольким кластерам, но с различной степенью. Нечеткая кластеризация во многих ситуациях более "естественна", чем четкая, например, для объектов, расположенных на границе кластеров.

Список можно продолжить и дальше: нечеткие деревья решений, нечеткие сети Петри, нечеткая ассоциативная память, нечеткие самоорганизующиеся карты и другие гибридные методы.

Достижения нечетких систем

1. После выхода доклада Заде фирма из Дании (1973г.) применила принцип для усовершенствования систем управления сложным производным процессом и получила прибыль.

2. Пример: надо разработать систему управления длинномерным грузовиком, способную автоматически загонять его в узкий гараж из произвольной начальной точки [19].

Сложность классического решения: необходимо построить математическую модель движения грузовика в зависимости от управляющих воздействий. Это достаточно сложная задача механики.

Нечеткий подход: 3 параметра – скорость, ориентация авто и расстояние до гаража.
Система нечетких правил типа:

«Если до гаража достаточно далеко, скорость невелика, а нос смотрит влево – возьми правее». В пакете CubiCalc понадобились описать 12 ситуаций и 35 нечетких правил.

Основной принцип: решение сложной и громоздкой задачи вычисления точных воздействий подменяется более простой и гибкой стратегией адаптивного «подруливания».

3. Оборонный пример (США) – «задача о собаке, догоняющей кота». В роли кота выступала межконтинентальная ракета противника, а в роли собаки – мобильная зенитная ракета, слишком легкая для установки на нее громоздкой традиционной системы управления.

4. Основные работы в промышленности – Япония (Mitsubishi): автоматические прокатные станы, склады, бытовая техника, стиральные машины.

5. Экспертная система, особенно в финансовой сфере.

Автоматизация игры на рынке ценных бумаг. На этапе тестирования система предсказала «черный понедельник» на токийской бирже в 1988 году.

6. Бизнес-анализ, потребители – банкиры-финансисты; специалисты в области политического и экономического анализа.

7. Реализация методов нечеткой логики в пакетах прикладных программ: FuziCalc – самый известный пакет; FuzzyTECH – разработка кода для нечеткого контроллера.

Сегодня элементы нечеткой логики можно найти в десятках промышленных изделий – от систем управления электропоездами и боевыми вертолетами до пылесосов и стиральных машин. Без применения нечеткой логики немыслимы современные ситуационные центры руководителей западных стран, в которых принимаются ключевые политические решения и моделируются всевозможные кризисные ситуации.

Контрольные вопросы

1. Области применения современных технологий управления.
2. Этапы развития нечетких систем. Теорема FAT.
3. Элементы математического аппарата нечеткой логики: нечеткое множество, основные логические операции, нечеткие и лингвистические переменные.
4. Способы задания функции принадлежности.
5. Нечеткий логический вывод: основные этапы и алгоритмы. Пример.
6. Составить пример задачи управления и описать ее решение, как нечеткой системы.
7. Интеграция нечеткой логики с другими направлениями искусственного интеллекта
8. Достижения нечетких систем.
9. Пример: система управления длинномерным грузовиком. Сформулировать нечеткое правило, содержащее нечеткое высказывание в форме "Если-то".

12. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА

12.1 Основные определения

Теория нечетких множеств представляет собой обобщение следующих направлений классической математики [20]:

- многозначной логики, которая указала на возможности перехода от двух к произвольному числу значений истинности и поставила проблему оперирования понятиями с изменяющимся содержанием;
- теории вероятностей, которая, породив большое количество

различных способов статистической обработки экспериментальных данных, открыла пути определения и интерпретации функции принадлежности;

- дискретной математики, которая предложила инструмент для построения моделей многомерных и многоуровневых систем, удобный при решении практических задач.

Подход к формализации понятия нечеткого множества состоит в обобщении понятия принадлежности.

Пусть U – так называемое универсальное множество, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в данном классе задач, например множество всех целых чисел, множество всех гладких функций и т. д. Характеристическая функция множества $A \subseteq U$ – это функция μ_A, значения которой указывают, является ли $x \in U$ элементом множества A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \in A, \\ 0, & \textit{если } x \notin A. \end{cases}$$

Особенностью этой функции является бинарный характер ее значений.

В теории нечетких множеств характеристическая функция становится не бинарной, она может принимать любые значения на отрезке $[0,1]$ и называется *функцией принадлежности*, а ее значение $\mu_A(x)$ – *степенью принадлежности* элемента x нечетному множеству A.

Более строго, *нечетким множеством* A называется совокупность пар

$$A = \{< x, \mu_A(x) > | x \in U\},$$

где $\mu_A(x)$ – функция принадлежности, т. е. $\mu_A : U \to [0,1]$.

Пусть, например,

$$U = \{a, b, c, d, e\},$$

$$A = \{< a, 0 >, < b, 0{,}1 >, < c, 0{,}5 >, < d, 0{,}9 >, < e, 1 >\}.$$

Будем говорить, что элемент a не принадлежит множеству A, элемент b принадлежит ему в малой степени, элемент c более или менее принадлежит, элемент d принадлежит в значительной степени, e является элементом множества A.

Пример 1. Пусть U есть множество действительных чисел. Нечеткое множество A, обозначающее множество чисел, близких к 10 (рис.12.1), можно задать следующей функцией принадлежности:

$$\mu_A(x) = (1+|x-10|^m)^{-1},$$

где $m \in N$.

Показатель степени m выбирается в зависимости от степени близости к 10. Например, для описания множества чисел, очень близких к 10, можно положить m = 4; для множества чисел, не очень далеких от 10, m = 1.

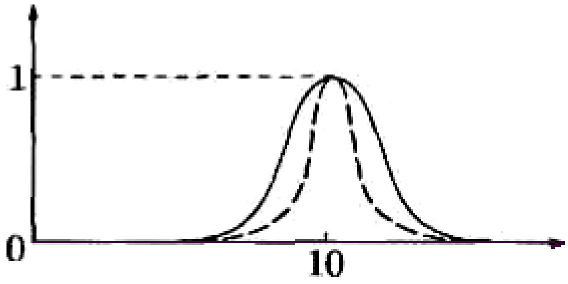


Рисунок 12.1

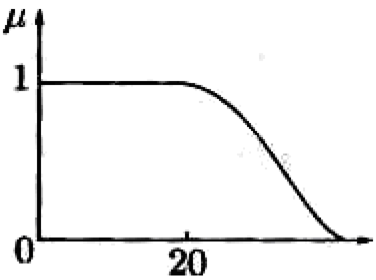


Рисунок 12.2

Пример 2. Лингвистическая переменная «возраст» может принимать следующие значения: «очень молодой», «молодой», «среднего возраста», «старый», «очень старый» и др. Каждому значению лингвистической переменной соответствует определенное нечеткое множество со своей функцией принадлежности. Так, лингвистическому значению «молодой» может соответствовать функция принадлежности, изображенная на рис.12.2.

Над нечеткими множествами можно производить различные операции, при этом необходимо определить их так, чтобы в частном случае, когда множество является четким, операции переходили в обычные операции теории множеств, то есть операции над нечеткими множествами должны обобщать соответствующие операции над обычными множествами. При этом обобщение может быть реализовано различными способами, из-за чего какой-либо операции над обычными множествами может соответствовать несколько операций в теории нечетких множеств.

Для определения пересечения и объединения нечетких множеств наибольшей популярностью пользуются следующие три группы операций:

1. Максиминные

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\qquad \mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}.$$

2. Алгебраические

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x),\qquad \mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\mu_B(x).$$

3. Ограниченные

$$\mu_{A\cup B}(x)=\min\{1,\mu_A(x)+\mu_B(x)\},$$
$$\mu_{A\cap B}(x)=\max\{0,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1\}.$$

Дополнение нечеткого множества во всех трех случаях определяется одинаково: $\mu_{\overline{A}}(x)=1-\mu_A(x)$.

Пример. Пусть A – нечеткое множество «от 5 до 8» (рис. 12.3,а) и B – нечеткое множество «около 4» (рис. 12.3,б), заданные своими функциями принадлежности:

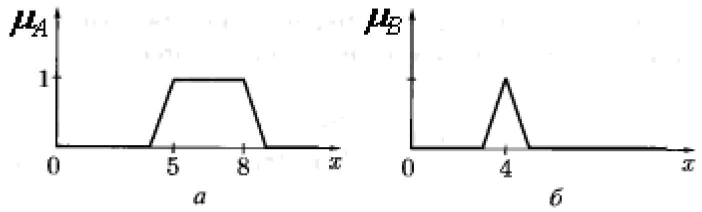


Рисунок 12.3

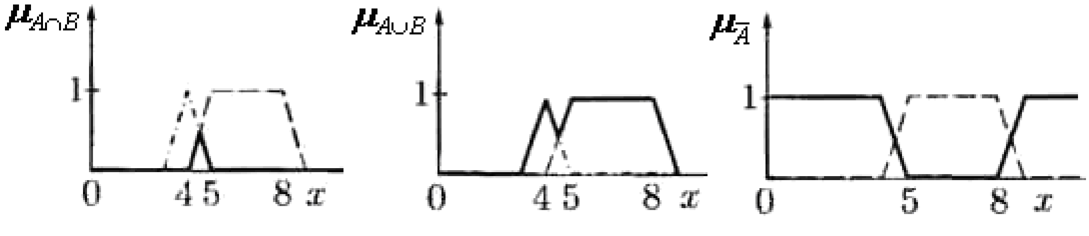


Рисунок 12.4 − Максиминные операции для множеств

Тогда, используя максиминные операции, получим множества, изображенные на рис. 12.4.

Заметим, что при максиминном и алгебраическом определении операций не будуг выполняться законы противоречия и исключения третьего $A \cap A \neq \varnothing$, $A \cup \overline{A} \neq U$, а в случае ограниченных операций не будут выполняться свойства идемпотентности $A \cup A \neq A$, $A \cap A \neq A$ и дистрибутивности:

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cap (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Можно показать, что при любом построении операций объединения и пересечения в теории нечетких множеств приходится отбрасывать либо законы противоречия и исключения третьего, либо законы идемпотентности и дистрибутивности.

Носителем нечеткого множества A называется четкое множество $\underline{A}$ таких точек в U, для которых величина $\mu_A(x)$ положительна, т. е.

$$\underline{A} = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

Высотой нечеткого множества A называется величина $\sup\limits_U \mu_A(x)$.

Нечеткое множество A называется *нормальным,* если $\sup\limits_U \mu_A(x) = 1$. В противном случае оно называется *субнормальным.*

Нечеткое множество называется *пустым,* если $\forall x \in U \ (\mu_A(x) = 0)$. Оно единственное в данном U.

Непустое субнормальное нечеткое множество можно привести к нормальному (нормализовать) по формуле

$$\mu'_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_U \mu_A(x)}.$$

Множеством уровня α (α*-срезом*) нечеткого множества A называется четкое подмножество универсального множества U, определяемое по формуле

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad где \ \alpha \in [0,1].$$

Множество строгого уровня определяется в виде $A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) > \alpha\}$. В частности, носителем нечеткого множества является множество элементов, для которых $\mu_A(x) > 0$. Понятие множества уровня является расширением понятия интервала. Оно представляет собой объединение не более чем счетного числа интервалов. Соответственно, алгебра интервалов есть частный случай алгебры множеств уровня.

Точка перехода нечеткого множества *A* – это такой элемент $x \in U$, для которого $\mu_A(x) = 0,5$.

Четкое множество A,* ближайшее к нечеткому множеству *A,* определяется следующим образом:

$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad \mu_A(x) < 0,5; \\ 1, & \textit{если} \quad \mu_A(x) > 0,5; \\ 0 \textit{ или } 1, & \textit{в противном случае}. \end{cases}$$

Нечеткое множество *A* в пространстве $U=R^n$ называется *выпуклым* нечетким множеством тогда и только тогда, если его функция принадлежности выпукла, т.е. для каждой пары точек x и y из U функция принадлежности удовлетворяет неравенству:

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}, \quad \textit{для любого } \lambda \in [0, 1].$$

Принцип обобщения

Принцип обобщения как одна из основных идей теории нечетких множеств носит эвристический характер и позволяет расширить область определения исходного отображения φ на класс нечетких множеств. Пусть $\varphi : U \to V$ – заданное отображение, и A – нечеткое множество, заданное в U. Тогда *образ* нечеткого множества A при отображении φ есть нечеткое множество B, заданное в V с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x).$$

Область значений функций принадлежности может быть различной.

12.2 Нечеткие операторы

Важным вопросом использования нечетких множеств в прикладных задачах является построение соответствующих операторов агрегирования нечеткой информации. В теории нечетких множеств имеется возможность применять различные операции объединения, пересечения и дополнения множеств в зависимости от контекста и ситуации. Основные бинарные операции над нечеткими множествами были описаны выше. Однако можно показать, что для любых нечетких множеств операторы $F = \min$ и $G = \max$ являются единственно возможными операторами пересечения и объединения при выполнении следующих свойств:

1. Коммутативность

$$F(\mu_A, \mu_B) = F(\mu_B, \mu_A); \quad G(\mu_A, \mu_B) = G(\mu_B, \mu_A).$$

2. Ассоциативность

$$F(\mu_A, F(\mu_B, \mu_C)) = F(F(\mu_A, \mu_B), \mu_C),$$
$$G(\mu_A, G(\mu_B, \mu_C)) = G(G(\mu_A, \mu_B), \mu_C).$$

3. Дистрибутивность

$$F(\mu_A, G(\mu_B, \mu_C)) = G(F(\mu_A, \mu_B), F(\mu_A, \mu_C)),$$
$$G(\mu_A, F(\mu_B, \mu_C)) = F(G(\mu_A, \mu_B), G(\mu_A, \mu_C)).$$

4.Монотонность

$$\mu_A \le \mu_C; \; \mu_B \le \mu_D \Rightarrow F(\mu_A, \mu_B) \le F(\mu_C, \mu_D); \; G(\mu_A, \mu_B) \le G(\mu_C, \mu_D).$$
$$\mu_A < \mu_B \Rightarrow F(\mu_A, \mu_A) < F(\mu_B, \mu_B); \; G(\mu_A, \mu_A) < G(\mu_B, \mu_B).$$
$$F(1, 1) = 1; \quad G(0, 0) = 0.$$
$$F(\mu_A, \mu_B) \le \min\{\mu_A, \mu_B\}; \quad G(\mu_A, \mu_B) \ge \max\{\mu_A, \mu_B\}.$$

Очевидно, что жесткие, поточечно однозначные операторы недостаточно полно отражают смысл многозначных лингвистических преобразований термов лингвистических переменных. Поэтому большой практический интерес представляет построение обобщенных нечетких операторов, т.е. параметризованных операторов пересечения, объединения, дополнения и др. Общий подход к целенаправленному формированию нечетких операторов пересечения и объединения заключается в их определении в классе **треугольных норм и конорм.**

Определение. *Треугольной нормой* (сокращенно t-нормой) называется двухместная действительная функция $T:[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Ограниченность $\quad T(0, 0) = 0, \; T(\mu_A, 1) = T(1, \mu_A) = \mu_A.$

2. Монотонность $\mu_A \le \mu_C,\ \mu_B \le \mu_D \Rightarrow T(\mu_A, \mu_B) \le T(\mu_C, \mu_D)$.

3. Коммутативность $T(\mu_A, \mu_B) = T(\mu_B, \mu_A)$.

4. Ассоциативность $T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C)) = T(T(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$.

Примерами треугольных норм являются следующие операторы:

$$T_{\min}(\mu_A, \mu_B) = \min\{\mu_A, \mu_B\},$$

$$T_p(\mu_A, \mu_B) = \mu_A \cdot \mu_B,$$

$$T_{\max}(\mu_A, \mu_B) = \max\{0, \mu_A + \mu_B - 1\},$$

$$T_\omega(\mu_A, \mu_B) = \begin{cases} \mu_A, & \textit{если } \mu_B = 1, \\ \mu_B, & \textit{если } \mu_A = 1, \\ 0 & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение. *Треугольной конормой* (сокращенно t-конормой) называется двухместная действительная функция $\perp : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

5. Ограниченность $\perp(1, 1) = 1,\ \perp(\mu_A, 0) = \perp(0, \mu_A) = \mu_A$.

6. Монотонность $\mu_A \ge \mu_C,\ \mu_B \ge \mu_D \Rightarrow \perp(\mu_A, \mu_B) \ge \perp(\mu_C, \mu_D)$.

7. Коммутативность $\perp(\mu_A, \mu_B) = \perp(\mu_B, \mu_A)$.

8. Ассоциативность $\perp(\mu_A, \perp(\mu_B, \mu_C)) = \perp(\perp(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$.

Примерами треугольных конорм являются следующие операторы:

$$\perp_{\max}(\mu_A, \mu_B) = \max\{\mu_A, \mu_B\},$$

$$\perp_p(\mu_A, \mu_B) = \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B,$$

$$\perp_{\min}(\mu_A, \mu_B) = \min\{1, \mu_A + \mu_B\},$$

$$\perp_\omega(\mu_A, \mu_B) = \begin{cases} \mu_A, & \textit{если } \mu_B = 0, \\ \mu_B, & \textit{если } \mu_A = 0, \\ 0 & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

В теории нечетких множеств оператор дополнения не является единственным. Помимо общеизвестного $\forall x\ \overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$, существует целый набор операторов дополнения нечеткого множества**.**

Пусть задано некоторое отображение $\lambda : [0, 1] \to [0, 1]$. Это отображение будет называться *оператором отрицания* в теории нечетких множеств, если выполняются следующие условия:

(1) $\lambda(0)=1, \qquad \lambda(1)=0,$

(2) $\mu_A \le \mu_B \Rightarrow \lambda(\mu_A) \ge \lambda(\mu_B).$

Если кроме этого выполняются условия:

(3) λ – строго убывающая функция,

(4) λ – непрерывная функция,

то она называется строгим отрицанием.

Функция λ называется *сильным отрицанием* или *инволюцией,* если наряду с условиями (1) и (2) для нее справедливо:

(5) $\lambda(\lambda(\mu)) = \mu..$

Приведем примеры функции отрицания:

- Классическое отрицание $\lambda(\mu) = \overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x).$
- Квадратичное отрицание $\lambda(\mu) = \sqrt{1-\mu^2}.$
- Отрицание Сугено $\lambda(\mu) = \dfrac{1-\mu}{1+k\mu}, \quad где \quad -1 < k < \infty.$

Дополнение порогового типа $\lambda(\mu) = \begin{cases} 1, & если \;\; \mu \le \alpha, \\ 0, & если \;\; \mu > \alpha. \end{cases}$

Будем называть любое значение λ, для которого $\lambda(\mu) = \mu$, *равновесной точкой.* Для любого непрерывного отрицания существует единственная равновесная точка.

Пример

$$\lambda(\lambda(\mu)) = \sqrt{1-\lambda^2(\mu)} = \sqrt{1-(1-\mu^2)} = \mu,$$

$$\lambda(\lambda(\mu)) = \frac{1-\lambda(\mu)}{1+k\lambda(\mu)} = \frac{1-\dfrac{1-\mu}{1+k\mu}}{1+k\dfrac{1-\mu}{1+k\mu}} = \frac{k\mu+\mu}{1+k} = \mu .$$

12.3 Показатель размытости нечетких множеств

Так как нечеткие множества используются для описания плохо определенных, неоднозначно понимаемых ситуаций, объектов, понятий, то Де Лука предложил ввести в рассмотрение показатель этой неопределенности, который можно было бы использовать для оценки, классификации объектов, описываемых нечеткими множествами. Этот показатель был назван **показателем размытости** (или мерой энтропии) нечетких множеств.

Можно выделить три аспекта этого показателя**:**

1) показатель внутренней неопределенности, двусмысленности, противоречивости, обусловленных неполной, частичной принадлежностью объектов множеству;
2) мера отличия нечеткого множества от обычного множества;
3) существование нетривиального показателя размытости**,** удовлетворяющего определенным свойствам, напрямую зависит от свойств алгебры нечетких множеств и характеризует ее как алгебраическую структуру.

В соответствии с этими тремя аспектами и будут рассмотрены основные результаты, связанные с понятием показателя размытости**.**

<u>Аксиоматический подход к определению показателя размытости</u>

Показатель размытости – это мера внутренней неопределенности, двусмысленности объектов множества *X* по отношению к некоторому свойству *A*, характеризующему эти объекты и определяющему в *X* нечеткое множество объектов *A*. Неопределенность состоит в том, что объект $x \in X$ обладает свойством A в частичной мере, определяемой ($0 < \mu_A(x) < 1$), и не обладает этим свойством в мере $\bar{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$. Такая двусмысленность объекта x по отношению к свойству A максимальна, когда степени принадлежности объекта x к обоим классам равны, т. е. $\mu_A(x) = \mu_{\bar{A}}(x) = 0{,}5$, и минимальна, когда объект принадлежит только к одному из этих классов, т.е. либо $\mu_A(x) = 1$, $\mu_{\bar{A}}(x) = 0$, либо $\mu_A(x) = 0$, $\mu_{\bar{A}}(x) = 1$. Таким образом, *глобальный показатель размытости* нечеткого множества A можно определить в виде функционала d, удовлетворяющего следующим условиям:

P1. $d(A) < d(B)$, если A является заострением *B,* т. е. $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ при $\mu_B(x) < 0{,}5$; $\mu_A(x) \ge \mu_B(x)$ при $\mu_B(x) > 0{,}5$ и $\mu_A(x)$

– любое при $\mu_B(x) = 0{,}5$;

P2. $d(A) = d(\overline{A})$;

P3. Если $A \cap B = \varnothing$, то $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$.

Итак, показатель размытости можно рассматривать как аддитивный, симметричный и строго возрастающий с увеличением размытости нечеткого множества функционал, определенный на множестве $J(A)$ всех нечетких подмножеств множества X.

Примером коэффициента размытости может служить логарифмическая энтропия нечетких множеств:

$$d(A) = \sum_{j=1}^{N} S_j(\mu_A(x_j)),$$

где S – функция Шеннона

$$S(y) = -y \ln y - (1-y)\ln(1-y).$$

Чем больше d, тем неопределенность выше.

Метрический подход к определению показателя размытости

Показатель размытости – это мера отличия нечеткого множества от ближайшего к нему обычного множества. Другими словами – это определение с его помощью расстояния до максимального размытого множества $A_{0,5}$: $\forall x \in X \;\; \mu_{A_{0,5}}(x) = 0{,}5$ и расстояния между нечетким множеством и его дополнением. Оказывается, эти подходы имеют много общего между собой, и определяемый с помощью метрики показатель размытости обладает многими свойствами, сформулированными выше.

Множеством, ближайшим к нечеткому множеству *A*, называется неразмытое множество $\underline{A}$ такое, что

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \;\; \mu_A(x) > 0{,}5 \\ 0, & \textit{если} \;\; \mu_A(x) \le 0{,}5. \end{cases}$$

Показателем размытости называется функционал

$$d(A) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} \left| \mu_A(x_j) - \mu_{\underline{A}}(x_j) \right|,$$

который может быть представлен также в виде

$$d(A) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} \mu_{A \cap \bar{A}}(x_j).$$

Если использовать евклидово расстояние между элементами, то получим

$$d(A) = \frac{2}{N} \sqrt{\sum (\mu_A(x_j) - \mu_{\underline{A}}(x_j))^2}.$$

Контрольные вопросы

1. Дать определение основных понятий теории нечетких множеств (НМ): нечеткого множества, функции принадлежности, носитель НМ, высота НМ, нормальное и субнормальное НМ, НМ уровня α, пустое НМ, точка перехода, выпуклое НМ, ближайшее к НМ четкое множество.
2. Привести примеры нечетких множеств.
3. Принцип обобщения.
4. Определение треугольной нормы и конормы. Привести примеры.
5. Оператор пересечения и объединения НМ. Примеры.
6. Оператор дополнения. Свойства и примеры.
7. Примеры вычисления пересечения, объединения и дополнения для конкретно-заданных НМ.
8. Что характеризует показатель размытости НМ?
9. Аксиоматический подход к показателю размытости.
10. Метрический подход к показателю размытости.
11. Привести пример вычисления показателя размытости для конкретно заданного НМ.

13. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

В основе построения функции принадлежности лежит теория измерений.

Целью измерения является получение количественной информации о величине реально существующих объектов материального мира, а также взаимодействия между ними. Задачи измерения могут быть как познавательными (изучение элементарных частиц, организма человека и т. д.), так и прикладными (управление конкретным технологическим процессом, контроль качества продукции).

При проведении экспертиз важным условием успеха является возможность формализовать информацию, не поддающуюся количественному измерению, так, чтобы помочь принимающему решение выбрать из множества действий одно. Поэтому в вопросах, связанных с теорией измерений, основное место отводится понятию шкалы измерения. В зависимости от того, по какой шкале идет измерение, экспертные оценки содержат больший или меньший объем информации и обладают различной способностью к математической форматизации.

13.1 Типы шкал

Шкалы наименований или классификации используются для описания принадлежности объектов к определенным классам. Всем объектам одного и того же класса присваивается одно и то же число, объектам разных классов – разные.

В этой шкале определены только два отношения: «равно» и «не равно». Следовательно, допустимы любые преобразования, лишь бы одинаковые объекты были поименованы одинаковыми символами (числами, буквами, словами), а разные объекты имели бы разные имена. Этим способом фиксируются такие характеристики, как собственные имена людей, их национальность, названия населенных пунктов и т. п.

Шкала порядка применяется для измерения упорядочения объектов по единичному или совокупности признаков. Числа в шкале порядка отражают только порядок следования объектов и не дают возможности сказать, на сколько или во сколько один объект предпочтительнее другого.

Допустимыми преобразованиями для данного типа шкалы являются все монотонные преобразования, т.е. такие, которые не нарушают порядок следования значений измеряемых величин. Такие шкалы появ-

ляются, например, в результате сравнения тел по твердости. Записи «1; 2; 3» и «5,3; 12,5; 109,2» содержат одинаковую информацию о том, что первое тело самое твердое, второе менее твердое, а третье – самое мягкое. И никакой информации о том, во сколько раз одно тверже другого, на сколько единиц оно тверже и т. д., в этих записях нет, и полагаться на конкретные значения чисел, на их отношения или
разности нельзя.

Шкала интервалов применяется для отображения величины различия между свойствами объектов (измерение температуры по Фаренгейту и Цельсию). Шкала может иметь произвольные масштаб и точки отсчета, например:

$$\frac{T_1^\circ F - T_2^\circ F}{T_3^\circ F - T_4^\circ F} = \frac{T_1^\circ C - T_2^\circ C}{T_3^\circ C - T_4^\circ C}.$$

Между протоколами допустимы линейные преобразования.

Шкала отношений отражает отношения свойств объектов, т. е. во сколько раз свойство одного объекта превосходит свойство другого. Один и тот же эмпирический смысл имеют протоколы «16 кг», «16000 г», «0,016 т» и т. д. От любой записи можно перейти к любой другой, подобрав соответствующий множитель «*a*». Этот тип шкалы удобен для измерения весов, длин и т. д.

Шкала разностей используется для измерения свойств объектов при необходимости указания, на сколько один объект превосходит другой по одному или нескольким признакам. Является частным случаем шкалы интервалов при выборе единицы масштаба.

Абсолютная шкала – частный случай шкалы интервалов. В ней обозначается нулевая точка отсчета и единичный масштаб. Применяется для измерения количества объектов.

13.2 Методы измерений

Ранжирование. При ранжировании эксперт располагает объекты в порядке предпочтения, руководствуясь одним или несколькими показателями сравнения.

Парная оценка или метод парных сравнений представляет собой процедуру установления предпочтений объектов при сравнении всех возможных пар.

Непосредственная оценка представляет собой процедуру приписывания объектам числовых значений по шкале интервалов. Эквивалентным объектам приписывается одно и то же число. Этот метод может быть осуществлен только при полной информированности экспертов о свойствах объектов. Вместо числовой оси может использоваться балльная оценка.

Последовательное сравнение включает в себя ранжирование и непосредственную оценку.

13.3 Классификация методов построения функции принадлежности

Наиболее важным этапом нечеткой формализации задачи является задание функций принадлежности для нечетких множеств, определяющих термы лингвистических переменных задачи.

В зависимости от того, насколько хорошо рассматриваемая задача формализуется, для построения функций принадлежности используются либо **формальные процедуры**, либо **экспертные оценки**.

В качестве примера формальной процедуры вычисления функции принадлежности рассмотрим ***с*пособ вычисления частичной принадлежности друг другу строгих множеств**.

Пусть покрытием *K* обычного множества U является любая совокупность обычных подмножеств $\{A_1,..., A_k\}$ множества U таких, что $A_i \neq \varnothing,\ A_1 \cup ... \cup A_k = U$. В крайнем случае, когда для любых $i, j\ (i \neq j),\ A_i \cap A_j = 0$, имеет место разбиение U. Предположим, что имеется $B \subseteq U$, тогда *B* может рассматриваться как нечеткое подмножество *K* с функцией принадлежности

$$\mu_B(A_i) = \frac{|A_i \cap B|}{|A_i \cup B|},$$

где $|A|$ – мощность множества *A*.

Пример

Пусть $U = \{1, 2, ..., 9\}$; $B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$;

$K = \{\{1, 2, 3, 5\}, \{3, 6, 9\}, \{2, 4, 8\}, \{1, 3, 7\}, \{2, 3, 8\}\} =$
$= \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$.

Тогда, рассматривая *B* как нечеткое подмножество *К,* можно написать:

$$B = \{(A_1, 1/2), (A_2, 1/3), (A_3, 1/3), (A_4, 1/7), (A_5, 3/5)\}.$$

Еще один пример формальной процедуры вычисления функции принадлежности связан с решением задачи многоцелевой оптимизации. Решение такой задачи можно рассматривать, как нечеткое подмножество значений целевой функции, следующим образом.

Пусть $f_1,...f_k$ – целевые функции, где $f_i : R^n \to R$, и пусть требуется решить задачу $f_i \to \max$ для всех i. Пусть $f_i^* < \infty$ – максимальное значение функции f_i и $C = \{f_1,...,f_k\}$ – множество целевых функций. Тогда любое значение *x* в области определения f_i, можно рассматривать, как нечеткое множество на *С* с вектором значений принадлежности

$$\mu_x = (\mu_1,...,\mu_k), \text{ где } \mu_i = \frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^*}.$$

Для **плохо формализуемых задач** основным источником данных для построения функций принадлежности являются экспертные оценки.

В основу построения функций принадлежности полагаются экспертные оценки, высказанные одним или группой экспертов. После чего эти оценки должны быть преобразованы в функции принадлежности. Отметим, что в зависимости от метода обработки оценок могут получаться различные функции принадлежности, эффективность которых проверяется на практике.

Существует ряд методов построения по экспертным оценкам функции принадлежности нечеткого множества. Можно выделить две группы методов: **прямые и косвенные методы.**

Прямые методы определяются тем, что эксперт непосредственно задает правила определения значений функции принадлежности, характеризующей данное понятие. Эти значения согласуются с его предпочтениями на множестве объектов U следующим образом:

1) для любых $u_1, u_2 \in U$, $\mu_A(u_1) < \mu_A(u_2)$ тогда и только тогда, если u_2 предпочтительнее u_1, т.е. в большей степени характеризуется понятием *A;*

2) для любых $u_1, u_2 \in U$, $\mu_A(u_1) = \mu_A(u_2)$ тогда и только тогда, если u_1 и u_2 безразличны относительно понятия *A*.

Примеры прямых методов: непосредственное задание функции принадлежности таблицей, формулой, перечислением, а также методы, основанные на вероятностной трактовке функции принадлежности $\mu_A = P(A | u)$, т.е. вероятности того, что объект $u \in U$ будет отнесен к множеству, которое характеризует понятие *A*.

В **косвенных методах** значения функции принадлежности выбираются таким образом, чтобы удовлетворять заранее сформулированным условиям. Экспертная информация является только исходными данными для дальнейшей обработки. Дополнительные условия могут налагаться как на вид получаемой информации, так и на процедуру обработки. Примерами дополнительных условий могут служить следующие: функция принадлежности должна отражать близость к заранее выделенному эталону; объекты множества *U* являются точками в параметрическом пространстве; результатом процедуры обработки должна быть функция принадлежности, удовлетворяющая условиям интервальной шкалы и т.д.

Таким образом, имеются две основные группы методов построения функции принадлежности: прямые и косвенные. Однако, функция принадлежности может отражать как мнение группы экспертов, так и мнение одного эксперта. Следовательно, возможны, по крайней мере, четыре группы методов: **прямые** и **косвенные** для одного эксперта, **прямые** и **косвенные** для группы экспертов.

<u>Прямые методы для одного эксперта</u>

Прямые методы для одного эксперта состоят в непосредственном задании функции, позволяющей вычислять значения.

Рассмотрим предложенный Осгудом **метод семантических дифференциалов.** Практически в любой области можно получить множество шкал оценок, используя следующую процедуру:

1) определить список свойств, по которым оценивается понятие (объект);

2) найти в этом списке полярные свойства и сформировать полярную шкалу;

3) для каждой пары полюсов оценить, в какой степени введенное понятие обладает положительным свойством.

Совокупность оценок по шкалам была названа *профилем понятия.* Следовательно, вектор с координатами, изменяющимися от 0 до 1, также называется *профилем*. Профиль есть нечеткое подмножество положительного списка свойств или шкал.

Пример. В задаче распознавания лиц можно выделить следующие шкалы:

x_1	Высота лба	Низкий – широкий
x_2	Профиль носа	Горбатый – курносый
x_3	Длина носа	Короткий – длинный
x_4	Разрез глаз	Узкие – широкие
x_5	Цвет глаз	Темные – светлые
x_6	Форма	Остроконечный – квадратный
x_7	Толщина губ	Тонкие – толстые
x_8	Цвет лица	Смуглое – светлое
x_9	Очертание лица	Овальное – квадратное

Светлое квадратное лицо, у которого чрезвычайно широкий лоб, курносый длинный нос, широкие светлые глаза, остроконечный подбородок, может быть определено как нечеткое множество $\{(x_1, 1),\ (x_2, 1),...(x_9, 1)\}$.

Косвенные методы для одного эксперта

Часто возникают случаи, когда не существует элементарных измеримых свойств и признаков, которые определяют интересующие нас понятия, например, красоту, интеллектуальность.

Среди косвенных методов определения функции принадлежности наибольшее распространение получил **метод парных сравнений Саати**. Сложность использования этого метода заключается в необходимости нахождения собственного вектора матрицы парных сравнений, которая задается с помощью специально предложенной шкалы.

Рассмотрим метод, также использующий матрицу парных сравнений элементов универсального множества, но, в отличие от метода Саати, не требующий нахождения собственного вектора матрицы.

Пусть A – некоторое свойство, которое рассматривается как лингвистический терм. Нечеткое множество, с помощью которого формализуется терм A, представляет собой совокупность пар:

$$A = \{< u_1,\ \mu_A(u_1) >,\ < u_2,\ \mu_A(u_2) >, ..., < u_n,\ \mu_A(u_n) >\}$$

где $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ – универсальное множество, на котором задается нечеткое множество A. Задача состоит в том, чтобы определить значения $\mu_A(u_i)$ для всех $i = 1,...,n$. Совокупность этих значений и будет составлять искомую функцию принадлежности.

Метод, который предлагается для решения поставленной проблемы, базируется на идее распределения степеней принадлежности элементов универсального множества согласно с их рангами. Под рангом элемента $u_i \in U$ будем понимать число $r_A(u_i)$, которое характеризует значимость этого элемента в формировании свойства, описываемого нечетким термом. Допускаем, что выполняется правило: **чем больший ранг элемента, тем больше степень принадлежности.**

Для последующих построений введем такие обозначения: $r_A(u_i) = r_i,\ \mu_A(u_i) = \mu_i$. Тогда правило распределения степеней принадлежности можно задать в виде системы соотношений:

$$\begin{cases} \dfrac{\mu_1}{r_1} = \dfrac{\mu_2}{r_2} = ... = \dfrac{\mu_n}{r_n}, \\ \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n = 1. \end{cases}$$

Используя данные соотношения, легко определить степени принадлежности всех элементов универсального множества через степень принадлежности опорного элемента.

Если опорным является элемент $u_i \in U$ с принадлежностью μ_i, то

$$\mu_j = \frac{r_j}{r_i}\mu_i, \quad \textit{для всех} \quad j \neq i.$$

Учитывая условие нормирования, находим:

$$\mu_1 = (1 + \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3}{r_1} + ... + \frac{r_n}{r_1})^{-1},$$

$$\mu_2 = (\frac{r_1}{r_2} + 1 + \frac{r_3}{r_2} + ... + \frac{r_n}{r_2})^{-1},$$

....

$$\mu_n = (\frac{r_1}{r_n} + \frac{r_2}{r_n} + \frac{r_3}{r_n} + ... + 1)^{-1}.$$

Полученные формулы дают возможность вычислять степени принадлежности элементов $u_i \in U$ к нечеткому терму A двумя независимыми путями:

1) по абсолютным оценкам уровней r_i, которые определяются согласно методикам, предложенным в теории структурного анализа систем;

2) по относительным оценкам рангов $\frac{r_i}{r_j} = s_{ij}$, которые образуют матрицу $S = (s_{ij})$. Эта матрица обладает следующими свойствами:

а) она диагональная, т. е. $s_{ii} = 1,\ i = 1,..., n$;

б) ее элементы, которые симметричны относительно главной диагонали, связаны зависимостью $s_{ji} = \frac{1}{s_{ij}}$;

в) она транзитивна, т. е. $s_{ik} \cdot s_{kj} = s_{ij}$.

Наличие этих свойств приводит к тому, что при известных элементах одной строки матрицы S легко определить элементы всех других строк. Если известна k-я строка, т. е. элементы s_{kj}, $j=1,...,n$, то произвольный элемент s_{ij} находится так:

$$s_{ij}=\frac{s_{kj}}{s_{ki}}.$$

Поскольку матрица S может быть интерпретирована как матрица парных сравнений рангов, то для экспертных оценок элементов этой матрицы можно использовать 9 балльную шкалу Саати. В нашем случае шкала формируется так:

Числовая оценка (s_{ij})	Качественная оценка (сравнение r_i и r_j)
1	отсутствие преимущества r_i над r_j
3	слабое преимущество r_i над r_j
5	существенное преимущество r_i над r_j
7	явное преимущество r_i над r_j
9	абсолютное преимущество r_i над r_j
2, 4, 6, 8	Промежуточные сравнительные оценки

Прямые методы для группы экспертов

При интерпретации степени принадлежности, как вероятности, было предложено получать функции принадлежности для нескольких классов понятий S_j расчетным путем, используя равенство $\mu_{S_j}(u_i)=p(S_j\,|\,u_i)$, где условная вероятность определяется по формуле Байеса:

$$p(S_j \mid u_i) = \frac{p_{u_i}(S_j)\; p(u_i \mid S_j)}{\sum_{j=1}^{m} p_{u_i}(S_j)\; p(u_i \mid S_j)},$$

причем $$p_{u_i}(S_j) = \frac{(y_j)_{u=u_i}}{n}, \qquad j = 1,\dots,m, \quad i = 1,\dots,n,$$

y_j – число случаев при значении параметра u_i, когда верной оказалась j – я гипотеза.

Осис предложил следующую методику оценки функции принадлежности. Первоначально определяется то максимальное количество классов, которое может быть описано данным набором параметров. Для каждого элемента *u* значение функции принадлежности класса S_1 дополняет до единицы значения функции принадлежности класса S_2 (в случае двух классов). Таким образом, система должна состоять из классов, представляющих противоположные события. Сумма значений функции принадлежности произвольного элемента *u* к системе таких классов будет равна единице. Если число классов и их состав четко не определены, то необходимо вводить условный класс, включающий те классы, которые не выявлены. Далее эксперты оценивают в процентах при данном состоянии *u* степень проявления каждого класса из названного перечня.

Однако в некоторых случаях мнение эксперта очень трудно выразить в процентах, поэтому более приемлемым способом оценки функции принадлежности будет метод опроса, который состоит в следующем. Оцениваемое состояние предъявляется большому числу экспертов, и каждый имеет один голос. Он должен однозначно отдать предпочтение одному из классов заранее известного перечня. Значение функции принадлежности вычисляется по формуле $\mu_S(u) = n_S / n$, где n – число экспертов, участвовавших в эксперименте, и n_S – число экспертов, проголосовавших за класс *S*.

Пример. Пусть в результате переписи населения в некоторой области с численностью жителей p получено множество значений возраста $U = [0,100]$. Пусть $y(u)$ – число людей, имеющих возраст u и утверждающих, что являются молодыми. Пусть $n(u)$ – действительное число людей, имеющих возраст u; тогда $p=\int\limits_0^{100} dn(u)$. Можно считать, что понятие «МОЛОДОЙ» описывается нечетким множеством на U с функцией принадлежности $\mu(u)=y(u)/n(u)$. Очевидно, что для малых значений возраста $y(u)=n(u)$, следовательно, $\mu(u)=1$. Однако, не все $n(35)$ считают себя молодыми, следовательно, $y(35)<n(35)$. Для $u>80$ число $y(u)$ должно быть очень маленьким.

Косвенные методы для группы экспертов

Шер предлагает способ определения функции принадлежности на основе интервальных оценок. Пусть интервал $[x_{ji}, x'_{ji}]$ отражает мнение i-го эксперта, $(i=1,...,m)$, о значении j-го $(j=1,...,n)$ признака оцениваемого понятия S. Тогда полным описанием этого понятия i-м экспертом является гиперпараллелепипед $\theta_i=[x_{1i}, x'_{1i}]\times...\times[x_{ni}, x'_{ni}]$. Приводится процедура, позволяющая вычислять коэффициенты компетентности экспертов, а также сводить исходную «размытую» функцию (усредненные экспертные оценки) к характеристической функции неразмытого, четкого множества. Алгоритм следующий:

1. Рассматривая для каждого признака j все интервалы, предложенные экспертами, находим связанное покрытие их объединения, состоящее из непересекающихся интервалов, концами которых являются только концы исходных интервалов:

$$[x_{jk}, x'_{jk}], \qquad j=1,...,n, \quad k=1,...,m_j-1.$$

2. Образуем на основе полученных покрытий непересекающиеся гиперпараллелепипеды:

$$T_k=[x_{ik}, x'_{ik}]\times...\times[x_{nk}, x'_{nk}], \qquad k=1,...,m'.$$

3. Вычисляем для $x\in T_k$

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}1, & \text{если } T_k\cap\theta_i\neq\varnothing,\\ 0, & \text{если } T_k\cap\theta_i=\varnothing.\end{cases}.$$

4. Полагаем номер итерации $l=1$.

5. Вводим коэффициенты компетентности

$$\{\lambda_i^l\}_{i=1}^m = \{1/m\}_{i=1}^m .$$

6. Вычисляем приближение функции принадлежности при нормированных λ_i, т. е. $\sum\lambda_i^l = 1$:

$$f^l(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x)\lambda_i^l, \qquad x \in T_k, \quad k = 1,...,m'.$$

7. Вычисляем функционал рассогласования мнения i-го эксперта с мнением экспертного совета на l-*й* итерации:

$$\delta_i^l = \sum_{x\in T_k}[f^l(x) - \varphi_i(x)]^2, \quad i = 1,...,m, \quad k = 1,..., m'.$$

8. Вычисляем $\Delta = \sum_{i=1}^m 1/\delta_i^l$.

9. Присваиваем $l = l + 1$.

10. Вычисляем $\lambda_i^l = \Delta/\delta_i^{l-1}$.

11. Если величина $\max\left|\lambda_i^{l-1} - \lambda_i^l\right|$ близка к нулю, то вычисления прекращаем и приближением функции принадлежности считаем $\mu_S(x) = f(x)$, в противном случае возвращаемся к шагу 6.

В результате реализации данного алгоритма формируется функция принадлежности $\mu_S(x)$, при этом мнения экспертов, высказавших оценки, плохо коррелируемые с усредненной оценкой, практически игнорируются благодаря вычислению и учету так называемого «коэффициента компетентности». Сходимость данного алгоритма не очевидна.

13.4 Методы проведения групповой экспертизы

Ниже приводятся практические рекомендации по организации и администрированию групповой экспертизы, используемой для построения функций принадлежности.

Методы проведения групповых экспертиз делятся на:

- очные и заочные;
- индивидуальные и коллективные;
- с обратной связью и без обратной связи.

При **очном методе** проведения экспертизы эксперт работает в присутствии организатора исследования. Эта необходимость может возникнуть, если задача поставлена недостаточно четко и нуждается в уточнении, а также если задача очень сложна. Эксперт может обратиться к организатору за разъяснениями.

При **коллективном методе** проведения экспертизы поставленная проблема решается сообща, «за круглым столом». При **индивидуальном** – каждый эксперт оценивает проблему, исходя из личного опыта и убеждений.

Экспертиза **с обратной связью** (метод Дельфы) предусматривает проведение нескольких туров опроса и анонимное анкетирование. После каждого тура экспертные оценки обрабатываются, и результаты обработки сообщаются экспертам. Метод **без обратной связи** предусматривает один тур опроса при получении удовлетворительных результатов.

Каждый метод имеет ряд достоинств и недостатков, и при выборе определенного метода необходимо хорошо взвесить все его положительные и отрицательные стороны.

Для проведения **очного опроса** требуется больше времени, т. к. организатор экспертизы работает с каждым участником лично, но при сложности поставленной задачи это компенсируется большей точностью полученных результатов.

При проведении экспертизы **методом экспертных комиссий** группа специалистов коллективно оценивает исследуемую проблему. В этих условиях на группу может быть оказано давление одним из авторитетных ее членов, который способен лучше, чем другие, отстаивать свое мнение. Но в этом случае вероятность получения решения поставленной задачи больше. Этот метод рекомендуется при необходимости найти решение в кратчайшие сроки.

Проведение экспертизы **методом Дельфы** связано с большими затратами времени, т. к. в этом случае необходимо провести несколько туров. Но оглашение результатов предыдущего тура и последующий опрос позволяет добиться уменьшения диапазона разброса в индивидуальных ответах и сблизить точки зрения. Работа заканчивается, когда достигнута желаемая сходимость ответов экспертов. Опыт показывает, что чаще всего достаточно бывает провести четыре тура. Метод применяется обычно в прогнозировании, когда имеется большая степень неопределенности.

Экспертиза **без обратной связи** может проводиться при хорошей информированности экспертов в области поставленной задачи.

Контрольные вопросы

1. Типы шкал.
2. Методы измерений.
3. Примеры формальных процедур вычисления функции принадлежности.
4. Прямые и косвенные методы.
5. Прямые методы для одного эксперта.
6. Косвенные методы для одного эксперта. Разработать конкретный пример вычисления функции принадлежности.
7. Прямые методы для группы экспертов.
8. Косвенные методы для группы экспертов.
9. Методы проведения групповой экспертизы.

14. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РАССУЖДЕНИЙ

Под *приближенными рассуждениями* понимается процесс, при котором из нечетких посылок получают некоторые следствия, возможно, тоже нечеткие. Приближенные рассуждения лежат в основе способности человека понимать естественный язык, разбирать почерк, играть в игры, требующие умственных усилий, в общем, принимать решения в сложной и не полностью определенной среде. Эта способность рассуждений в качественных, неточных терминах отличает интеллект человека от интеллекта вычислительной машины.

Основным правилом вывода в традиционной логике является правило **modus ponens**, согласно которому мы судим об истинности высказывания B по истинности высказываний A и $A \to B$. Например, если A – высказывание «Джон в больнице», B – высказывание «Джон болен», то если истинны высказывания «Джон в больнице» и «Если Джон в больнице, то он болен», то истинно и высказывание «Джон болен».

Во многих привычных рассуждениях, однако, правило modus ponens используется не в точной, а в приближенной форме. Так, обычно мы знаем, что *A* истинно и что $A^* \to B$, где A^* есть, в некотором смысле, приближение *A*. Тогда из $A^* \to B$ мы можем сделать вывод о том, что *B* приближенно истинно.

Однако, в отличие от традиционной логики, главным инструментом способа формализации приближенных рассуждений будет так называемое **композиционное правило вывода**, частным случаем которого является правило modus ponens.

14.1 Композиционное правило вывода

Композиционное правило вывода – это обобщение следующей процедуры: предположим, что имеется кривая $y = f(x)$ (рис. 14.1,А) и задано значение $x = a$. Тогда из того, что $y = f(x)$ и $x = a$, мы можем заключить, что $y = b = f(a)$.

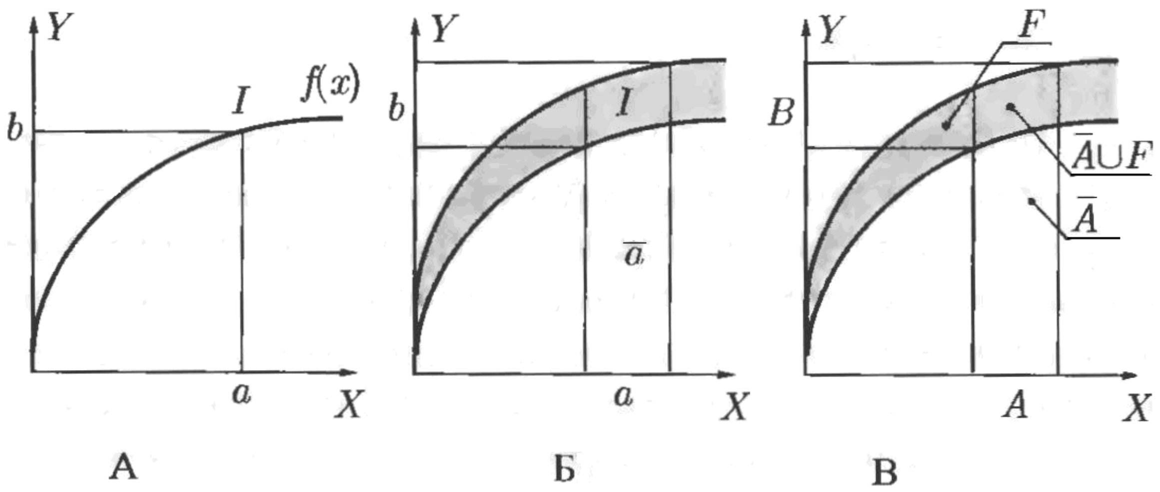


Рисунок 14.1 – Композиционное правило вывода

Обобщим теперь этот процесс, предположив, что *a* – интервал, а *f(x)* – функция, значения которой суть интервалы, как на рисунке 14.1,Б. В этом случае, чтобы найти интервал $y = b$, соответствующий интервалу *a*, мы сначала построим цилиндрическое множество $\bar{a}$ с основанием

a и найдем его пересечение I с кривой, значения которой суть интервалы. Затем спроектируем это пересечение на ось OY и получим желаемое значение y в виде интервала b.

Чтобы продвинуться еще на один шаг по пути обобщения, предположим, что A – нечеткое подмножество оси *OX,* а F – нечеткое отношение в $OX \times OY$ (рис.14.1,B). Вновь образуя цилиндрическое нечеткое множество $\overline{A}$ с основанием A и его пересечение с нечетким отношением *F*, мы получим нечеткое множество $\overline{A} \cap F$, которое является аналогом точки пересечения на рисунке 14.1,А. Таким образом, из того, что $y = f(x)$ и $x = A$ – нечеткое подмножество оси *OX,* мы получаем значение *y* в виде нечеткого подмножества *B* оси OY.

Правило. *Пусть U и V – два универсальных множества с базовыми переменными u и v, соответственно. Пусть A и F – нечеткие подмножества множеств U и* $U \times V$. **Тогда композиционное правило вывода утверждает, что из нечетких множеств *A* и *F* следует нечеткое множество** $B = A \circ F$**. Согласно определению композиции нечетких множеств, получим**

$$\mu_B(v) = \vee_{u \in U}(\mu_A(u) \wedge \mu_F(u,v)).$$

Пример. Пусть

$$U = V = \{1,2,3,4\},$$

$$A = \text{МАЛЫЙ} = \{\langle 1|1\rangle, \langle 2|0{,}6\rangle, \langle 3|0{,}2\rangle, \langle 4|0\rangle\},$$

F = ПРИМЕРНО РАВНЫ =

	1	2	3	4
1	1	0,5	0	0
2	0,5	1	0,5	0
3	0	0,5	1	0,5
4	0	0	0,5	1

.

Тогда получим

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}2\end{bmatrix},$$

что можно проинтерпретировать следующим образом:

B = БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ МАЛЫЙ,

если терм БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ определяется, как оператор увеличения нечеткости.

Словами этот приближенный вывод можно записать в виде:

u – МАЛЫЙ	предпосылка
u,ν – ПРИМЕРНО РАВНЫ	предпосылка
ν – БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ МАЛЫЙ	приближенный вывод

14.2 Нечеткие экспертные системы

Логико-лингвистические методы описания систем основаны на том, что поведение исследуемой системы описывается в естественном (или близком к естественному) языке в терминах лингвистических переменных. Входные и выходные параметры системы рассматриваются как лингвистические переменные, а качественное описание процесса задается совокупностью высказываний следующего вида:

$L_1: если\ A_{11}\ и/или\ A_{12}\ и/или \dots и/или\ A_{1m},\ то\ B_{11}\ и/или \dots и/или\ B_{1n};$

$L_2: если\ A_{21}\ и/или\ A_{22}\ и/или .. и/или\ A_{2m},\ то\ B_{21}\ и/или .. и/или\ B_{2n};$

....

$L_k: если\ A_{k1}\ и/или\ A_{k2}\ и/или \dots и/или\ A_{km},\ то\ B_{k1}\ и/или \dots и/или\ B_{kn},$

где A_{ij} $(i=1,2,...,k,\ j=1,2,...,m)$ – нечеткие высказывания, определенные на значениях входных лингвистических переменных, а B_{ij} $(i=1,2,...,k,\ j=1,2,...,n)$ – нечеткие высказывания, определенные на значениях выходных лингвистических переменных. Эта совокупность правил носит название нечеткой базы знаний.

Подобные вычисления составляют основу **нечетких экспертных систем.** Каждая нечеткая экспертная система использует нечеткие утверждения и правила.

Затем с помощью операторов вычисления дизъюнкции и конъюнкции описание системы можно привести к виду

$$L_1:\ если\ A_1,\ то\ B_1;$$

$$L_2:\ если\ A_2,\ то\ B_2;$$

....

$$L_k: \textit{если } A_k, \textit{ то } B_k,$$

где $A_1, A_2, ...A_k$ – нечеткие множества, заданные на декартовом произведении X универсальных множеств входных лингвистических переменных, а $B_1, B_2, ...B_k$ – нечеткие множества, заданные на декартовом произведении Y универсальных множеств выходных лингвистических переменных.

В основе построения логико-лингвистических систем лежит рассмотренное выше **композиционное правило вывода Заде.**

Преимущество данной модели – в ее универсальности, т.к. на входе могут быть конкретные числовые значения или некоторая неопределенность, описываемая нечетким множеством. Но такая универсальность приводит к повышению сложности системы, размерность которой составляет $m \times n$. Поэтому общей моделью на практике пользуются довольно редко. Обычно используют ее упрощенный вариант, называемый **нечетким выводом**. Он основывается на предположении, что все входные лингвистические переменные имеют известные нам числовые значения (как и бывает довольно часто на практике). Также обычно не используют более одной выходной лингвистической переменной.

Нечетким логическим выводом (fuzzy logic inference) называется аппроксимация зависимости $Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$ каждой выходной лингвистической переменной от входных лингвистических переменных и получение заключения в виде нечеткого множества, соответствующего текущим значениям входов, с использованием нечеткой базы знаний и нечетких операций. Основу нечеткого логического вывода составляет композиционное правило Заде.

В общем случае нечеткий вывод решения происходит за три (или четыре) шага:

1) <u>этап фазификации</u>**.** *С* помощью функций принадлежности всех термов входных лингвистических переменных и на основании задаваемых четких значений из универсумов входных лингвистических переменных определяются степени уверенности в том, что выходная лингвистическая переменная принимает конкретное значение. Эта степень уверенности есть ордината точки пересечения графика функции при-

надлежности терма и прямой x = четкое значение.

2) ***<u>этап непосредственного нечеткого вывода</u>.*** На основании набора правил – нечеткой базы знаний – вычисляется значение истинности для предпосылки каждого правила на основании конкретных нечетких операций, соответствующих конъюнкции или дизъюнкции термов в левой части правил. В большинстве случаев это либо максимум, либо минимум из степеней уверенности термов, вычисленных на этапе фазификации, который применяется к заключению каждого правила. Используя один из способов построения нечеткой импликации, мы получим нечеткую переменную, соответствующую вычисленному значению степени уверенности в левой части правила и нечеткому множеству в правой части правила.

Обычно в качестве вывода используется минимизация. При минимизирующем логическом выводе выходная функция принадлежности ограничена сверху в соответствии с вычисленной степенью истинности посылки правила (нечеткое логическое И).

3) <u>этап композиции (агрегации, аккумуляции)</u>. Все нечеткие множества, назначенные для каждого терма каждой выходной лингвистической переменной, объединяются вместе, и формируется единственное нечеткое множество – значение для каждой выводимой лингвистической переменной. Обычно используются функции MAX или SUM.

4) <u>этап дефазификации (необязательный).</u> Используется тогда, когда полезно преобразовать нечеткий набор значений выводимых лингвистических переменных к точным. Имеется достаточно большое количество методов перехода к точным значениям.

В теории нечетких множеств процедура дефазификации аналогична нахождению характеристик положения (математического ожидания, моды, медианы) случайных величин в теории вероятности. Простейшим способом выполнения процедуры дефазификации является выбор четкого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности. Для многоэкстремальных функций принадлежности часто используются следующие методы дефазификации:

1) COG (Center Of Gravity) – «центр тяжести». Физическим аналогом этой формулы является нахождение центра тяжести плоской фигу-

ры, ограниченной осями координат и графиком функции принадлежности нечеткого множества.

2) MOM (Mean Of Maximums) – «центр максимумов». При использовании метода центра максимумов требуется найти среднее арифметическое элементов универсального множества, имеющих максимальные степени принадлежностей.
3) First Maximum – «первый максимум» – максимум функции принадлежности с наименьшей абсциссой.

Функциональная схема процесса нечеткого вывода в упрощенном виде представлена на рис. 14.2.

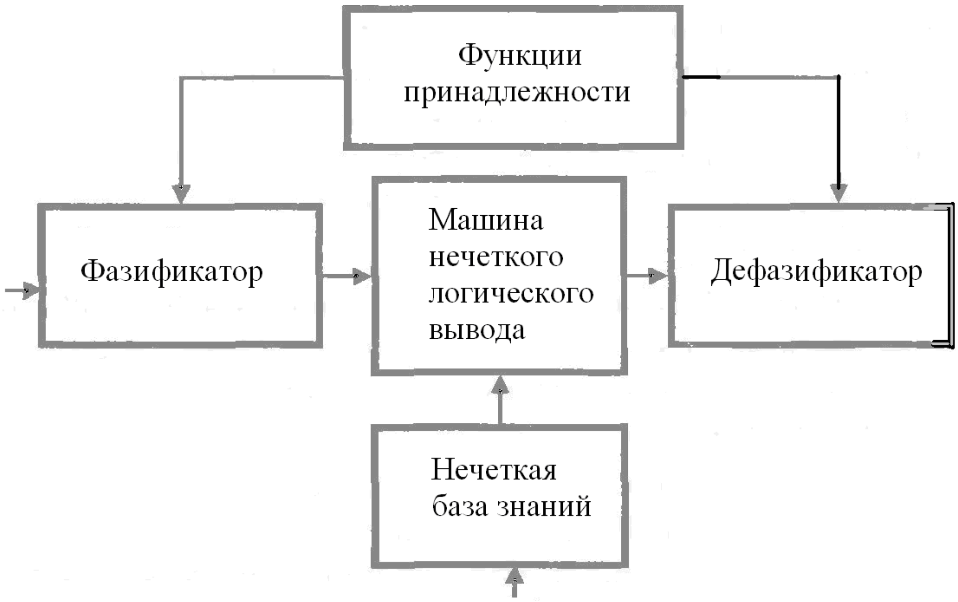


Рисунок 14.2 – Функциональная схема процесса нечеткого вывода

На этой схеме выполнение первого этапа нечеткого вывода – фазификации – осуществляет фазификатор. За процедуру непосредственно нечеткого вывода ответственна машина нечеткого логического вывода, которая производит второй этап процесса вывода на основании задаваемой нечеткой базы знаний (набора правил), а также этап композиции. Дефазификатор выполняет последний этап нечеткого вывода – дефазификацию.

Рассмотрим алгоритм нечеткого вывода на конкретном примере. Пусть у нас есть некоторая система, например, реактор, описываемая тремя параметрами: температура, давление и расход рабочего вещества. Все показатели измеримы, и множество возможных значений известно.

Также из опыта работы с системой известны некоторые правила, связывающие значения этих параметров.

Предположим, что сломался датчик, измеряющий значение одного из параметров системы, но знать его показания необходимо, хотя бы приблизительно. В этих условиях ставится задача об отыскании этого неизвестного значения (пусть это будет давление) при известных показателях двух других параметров (температуры и расхода). База правил, устанавливающая взаимосвязь параметров, имеет вид:

- если Температура низкая и Расход малый, то Давление низкое;
- если Температура средняя, то Давление среднее;
- если Температура высокая или Расход большой, то Давление высокое.

Итак, Температура, Давление и Расход – лингвистические переменные. Опишем каждую из них.

Температура. Универсум (множество возможных значений) – отрезок [0,150]. Начальное множество термов {Высокая, Средняя, Низкая}. Функции принадлежности термов имеют следующий вид (рис. 14.3):

Рисунок 14.3 – Лингвистическая переменная Температура

Давление. Универсум – отрезок [0.100]. Начальное множество термов {Высокое, Среднее, Низкое}. Функции принадлежности термов имеют вид (рис.14.4):

Рисунок 14.4 – Лингвистическая переменная Давление

Расход. Универсум – отрезок [0,8]. Начальное множество термов {Большой, Средний, Малый}. Функции принадлежности термов имеют вид (рис.14.5):

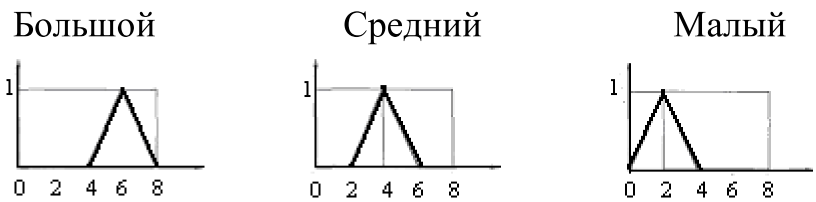


Рисунок 14.5 – Лингвистическая переменная Расход

Пусть известны значения Температура 85 и Расход 3,5. Произведем расчет значения давления.

Последовательно рассмотрим этапы нечеткого вывода:

Сначала по заданным значениям входных параметров найдем степени уверенности простейших утверждений вида «Лингв. переменная *A* есть Терм Лингв. переменной *A*». Этот этап называется фазификацией, т. е. переходом от заданных четких значений к степеням уверенности. Получаем следующие степени уверенности:

- Температура Высокая – 0,7;
- Температура Средняя – 1;
- Температура Низкая – 0,3;
- Расход Большой – 0;
- Расход Средний – 0,75;
- Расход Малый – 0,25.

Затем вычислим степени уверенности посылок правил (по минимаксным правилам операций дизъюнкции и конъюнкции):

- Температура низкая и Расход малый: min (Темп. Низкая, Расход Малый) = min(0,3; 0,25) = 0,25;
- Температура Средняя: 1;
- Температура Высокая или Расход Большой: max (Темп. Высокая, Расход Большой) = max(0,7; 0) = 0,7.

Следует отметить также тот факт, что с помощью преобразований нечетких множеств любое правило, содержащее в левой части как конъюнкции, так и дизъюнкции, можно привести к системе правил, в левой части каждого будут либо только конъюнкции, либо только дизъюнкции. Таким образом, не уменьшая общности, можно рассматривать правила, содержащие в левой части либо только конъюнкции, либо только дизъюнкции.

Каждое из правил представляет из себя нечеткую импликацию. Степень уверенности посылки мы вычислили, а степень уверенности заключения задается функцией принадлежности соответствующего терма. Поэтому, используя один из способов построения нечеткой импликации, мы получим новую нечеткую переменную, соответствующую степени уверенности в значении выходных данных при применении к заданным входным соответствующего правила. Используя определение нечеткой импликации как минимума левой и правой частей (определение Mamdani), имеем:

Рисунок 14.6 – Набор правил

Теперь необходимо объединить результаты применения всех правил.

Этот этап называется аккумуляцией. Один из основных способов аккумуляции – построение максимума полученных функций принадлежности (ФП). Для этого удобно перенести все три рисунка 14.6 на одну систему осей (рис. 14.7). Искомый результат – ломаная, соответствующая максимуму.

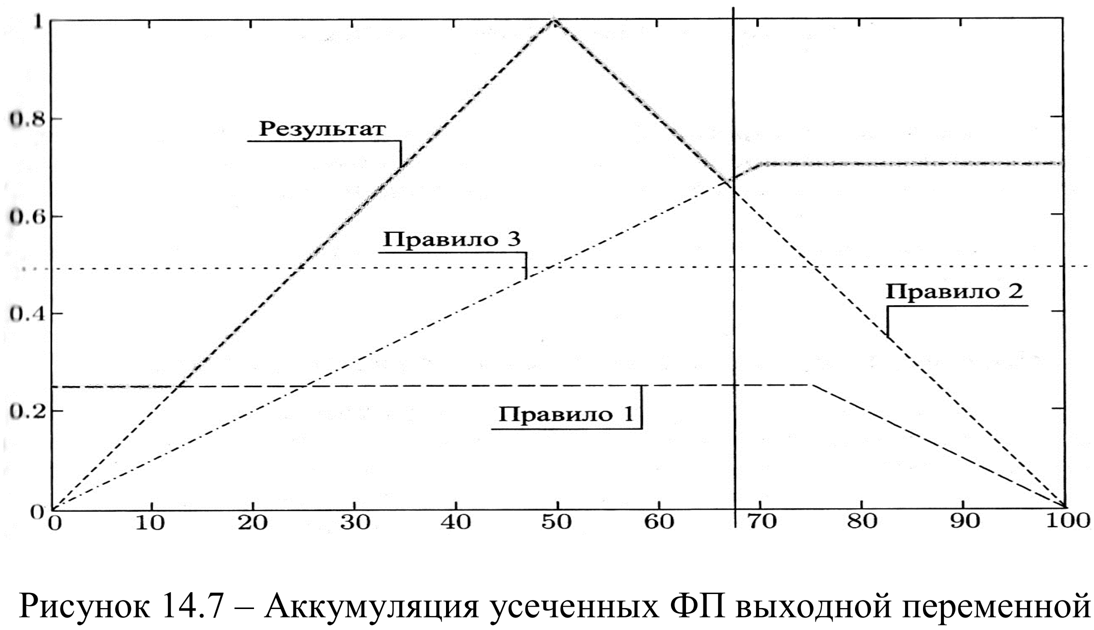


Рисунок 14.7 – Аккумуляция усеченных ФП выходной переменной

Полученную функцию принадлежности уже можно считать результатом. Это новый терм выходной переменной Давление. Его функция принадлежности говорит о степени уверенности в значении давления при заданных значениях входных параметров и использовании правил определяющих соотношение входных и выходных переменных. Но обычно все-таки необходимо какое-то конкретное числовое значение. Для его получения используется этап дефазификации, т. е. получения конкретного значения из универса по заданной на нем функции принадлежности.

Существует множество методов дефазификации, но в нашем случае достаточно метода первого максимума. Применяя его к полученной функции принадлежности, получаем, что значение давления – 50 (рис. 14.7).

Таким образом, если мы знаем, что температура равна 85, а расход рабочего вещества – 3,5, то можем сделать вывод, что давление в реакторе равно примерно 50. Для получения более достоверного результата (или его уточнения), надо детализировать входные и выходные лингвистические переменные путем введения дополнительных термов и соответственно расширить базу правил.

Рассмотренная задача является примером простейшей нечеткой экспертной системы. Нетрудно видеть, что если в исходной задаче выходная переменная называется «требуемое управляющее воздействие», то такая задача становится задачей управления, а нечеткая экспертная система – способом ее решения.

Контрольные вопросы

1. Пояснить, что такое композиционное правило вывода и привести пример.
2. Что такое нечеткий вывод? Этапы решения задачи на основе нечеткого вывода.
3. Методы дефазификации.
4. Пример нечеткой экспертной системы.

15. ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

В настоящее время нечеткие системы управления нашли широкое применение во всех областях техники и технологии.

По мнению специалистов [21, 22] контроллеры, основанные на нечеткой логике, – наиболее важное приложение теории нечетких множеств. Их функционирование отличается от работы обычных контроллеров, а для описания работы системы вместо дифференциальных уравнений используются знания экспертов. Эти знания могут быть выражены естественным образом с помощью лингвистических переменных, которые описываются нечеткими множествами.

Использование нечеткого управления рекомендуется для очень сложных процессов, когда не существует простой математической модели; для нелинейных процессов высоких порядков; если должна производиться обработка экспертных знаний.

В то же время использование нечеткого управления не рекомендуется, если приемлемый результат может быть получен с помощью общей теории управления; уже существует формализованная и адекватная математическая модель; задача управления не разрешима, например, если система не вполне управляема.

Ниже приведены примеры реального успешного применения нечетких экспертных систем в разных областях [23]:

автоматическое управление воротами плотины на гидроэлектростанциях (Tokio Electric Pow.); упрощенное управление роботами (Hirota, Fuji Electric, Toshiba, Omron); наведение телекамер при трансляции спортивных событий (Omron); предотвращение нежелательных температурных флуктуаций в системах кондиционирования воздуха (Mitsubishi, Sharp);

эффективное и стабильное управление автомобильными двигателями (Nissan); управление экономичной скоростью автомобилей (Nissan, Subaru); улучшение эффективности и оптимизация промышленных систем управления (Aptronix, Omron, Meiden, Sha, Micom,

Mitsubishi, Nisshin-Denki, Oku-Electronics); позиционирование приводов в
производстве полупроводников wafer-steppers (Canon);

оптимизированное планирование автобусных расписаний (Toshiba, Nippon-System, Keihan-Express); системы архивации документов (Mitsubishi Elec.); системы прогнозирования землетрясений (Inst. of Seismology Bureau of Metrology, Japan);

медицина: диагностика рака (Kawasaki Medical School); сочетание методов нечеткой логики и нейронных сетей (Matsushita); распознавание рукописных символов в карманных компьютерах (записных книжках) (Sony); распознавание движения изображения в видеокамерах (Canon, Minolta);

автоматическое управление двигателем пылесосов с автоматическим определением типа поверхности и степени засоренности (Matsushita); управление освещенностью в камкодерах (Sanyo); компенсация вибраций в камкодерах (Matsushita);

однокнопочное управление стиральными машинами (Matsushita, Hitatchi); распознавание рукописных текстов, объектов, голоса (CSK, Hitachi, Hosai Univ., Ricoh); вспомогательные средства для полета вертолетов (Sugeno); моделирование судебных процессов (Meihi Gakuin Univ, Nagoy Univ.); САПР производственных процессов (Aptronix, Harima, Ishikawajima-OC Engeneering);

управление скоростью линий и температурой при производстве стали (Kawasaki Steel, New-Nippon Steel, NKK); управление метрополитенами для повышения удобства вождения, точности остановки и экономии энергии (Hitachi); оптимизация потребления бензина в автомобилях (NOK, Nippon Denki Tools); повышение чувствительности и эффективности управления лифтами (Fujitec, Hitachi, Toshiba); повышение безопасности ядерных реакторов (Hitachi, Bernard, Nuclear Fuel div.).

Далее приводится краткое описание конкретного проекта по разработке контроллера для системы кондиционирования воздуха Mitsubishi [23].

Постановка задачи: промышленная система кондиционирования воздуха, обеспечивающая гибкую реакцию на изменения окружающих условий.

Для решения задачи использованы 6 лингвистических переменных, 50 нечетких правил. Входными значениями являлись температура в комнате, температура стены и мгновенные значения этих сигналов.

Календарный план разработки следующий: 4 дня на создание прототипа; 20 дней на тестирование и интеграцию; 80 дней на оптимизацию на реальных тестовых объектах.

Итог проекта – реализация в виде чисто программного комплекса на стандартном микроконтроллере.

Результат внедрения: уменьшение времени начала работы до 40% к стандартному решению; поддержка температуры при наличии возмущающих факторов (открытые окна и т.п.) существенно улучшена; небольшое требуемое число датчиков; экономия энергии – 24%.

Таким образом, приведенные примеры убеждают в эффективности и хороших перспективах нечетких систем управления.

В заключение рассмотрим конкретный пример управления и алгоритм его решения [23].

Пример: Перевернутый маятник

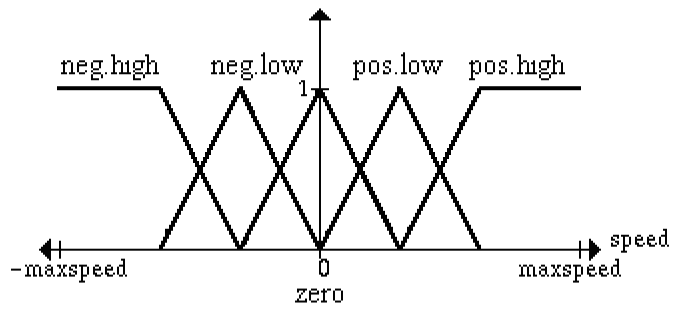
Задача состоит в балансировке вертикальной мачты, подвижно закрепленной нижним концом на тележке, которая может двигаться только в двух направлениях – влево или вправо.

Первый шаг (введение лингвистических переменных, термов и определение функций принадлежности).

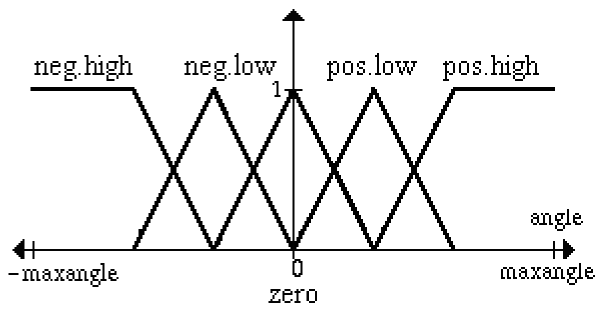
Определим (субъективно), что такое высокая скорость, низкая скорость и т.п. для тележки. Это делается описанием функции принадлежности для нечетких множеств:

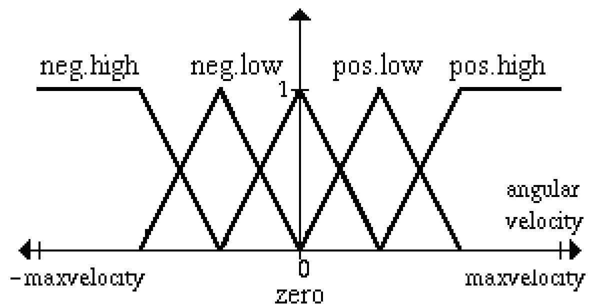
отрицательная высокая, neg.high ,
отрицательная низкая, neg.low,

нулевая, zero,
положительная низкая, pos.low,
положительная высокая, pos.high.



То же самое делается для угла между тележкой и мачтой маятника и для угловой скорости изменения этого угла:





Для упрощения предполагается, что начальное положение мачты около центра, так что угол более чем 45 градусов, в любом направлении по определению никогда не возникнет.

Второй шаг (составление базы правил).

Выскажем некоторые правила, которые необходимо учитывать при решении задачи.

Положим, например, что мачта находится по центру (угол равен нулю) и не движется (угловая скорость – ноль). Очевидно, что это желаемое положение, и предпринимать ничего не надо (скорость тележки равна нулю).

Рассмотрим другой случай: мачта находится по центру, как и прежде, но движется с низкой скоростью в положительном направлении. Естественно, необходимо компенсировать движение мачты, передвигая тележку в том же направлении с низкой скоростью.

Итак, получаем два правила, которые представляются в форме высказываний:

Если угол равен нулю И угловая скорость равна нулю, тогда скорость должна быть равна нулю.

Если угол равен нулю И угловая скорость положительная низкая, тогда скорость должна быть положительной низкой.

Формулируя подобным образом и другие высказывания, например:

Если угол равен нулю И угловая скорость положительная высокая, тогда скорость должна быть положительной высокой
и т.д., сведем все полученные правила в таблицу:

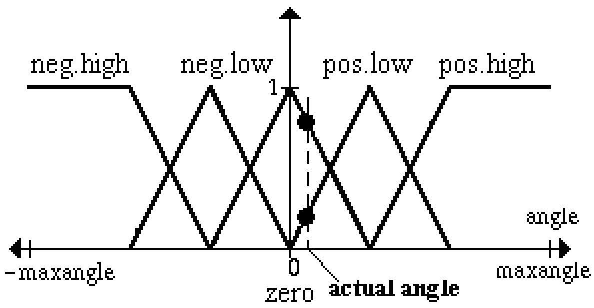
Выходная переменная «Скорость»		Входная переменная «Угол»				
		ОВ	ОН	0	ПН	ПВ
Входная переменная «Угловая скорость»	ОВ			ОВ		
	ОН			ОН	0	
	0	ОВ	ОН	0	ПН	ПВ
	ПН		0	ПН		
	ПВ			ПВ		

В таблице приняты сокращения: ОВ – Отрицательное Высокое (большое) значение, ОН – Отрицательное Низкое (малое) значение, 0 – нуль, ПН – Положительное Низкое (малое) значение, ПВ – Положительное Высокое (большое) значение.

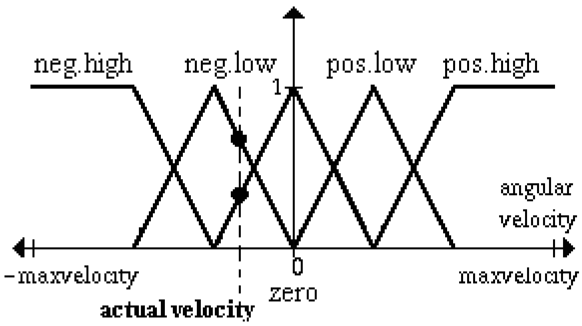
<u>*Третий шаг*</u> (фазификация).

Пусть получены (например, измерены) численные значения угла и угловой скорости (изображены на графиках) и определена степень уверенности для каждого терма лингвистических переменных «угол» и «угловая скорость» - это ординаты точек пересечения вертикальных прямых с функциями принадлежности.

Реальное значение угла:



Реальное значение угловой скорости:



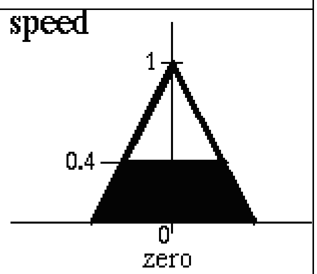
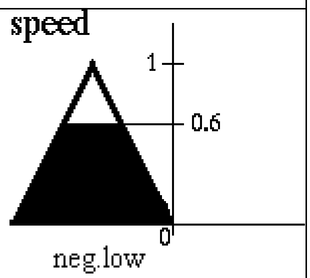
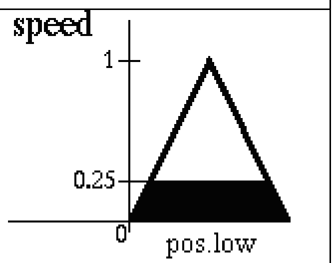
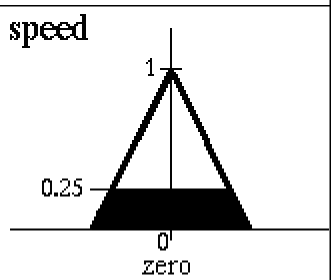
<u>*Четвертый шаг*</u> (непосредственно нечеткий вывод).

Для каждой переменной мы имеем по два терма с ненулевыми значениями функции принадлежности. Таким образом, всего будут задействованы четыре правила из базы, соответствующие:

- угол – 0, угловая скорость – 0;
- угол – 0, угловая скорость – ОН;
- угол – ПН, угловая скорость – 0;
- угол – ПН, угловая скорость – ОН.

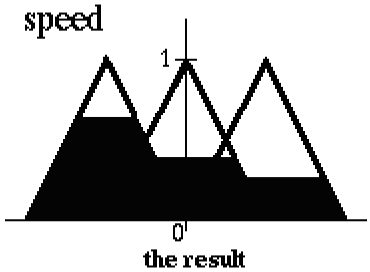
Используя минимаксную форму операций дизъюнкции и конъюнкции, вычислим значение истинности для левой части соответствующих правил.

Результат представим в виде таблицы.

№ правила	Содержание правила	Результирующая усеченная функция принадлежности терма выходной переменной
1	*Если угол равен нулю И угловая скорость равна нулю, тогда скорость равна нулю.* Пояснение к получению результата: так как две части условий правила объединяются по **И**, то вычисляем min (0.75; 0.4) = 0.4 и уменьшаем нечеткое множество «ноль» для переменной «скорость» до этого уровня	
2	*Если угол равен нулю И угловая скорость отрицательная низкая, тогда скорость – отрицательная низкая*	
3	*Если угол положительный низкий И угловая скорость равна нулю тогда скорость –- положительная низкая*	
4	*Если угол положительный малый И угловая скорость отрицательная низкая, тогда скорость равна нулю*	

Пятый шаг (композиция).

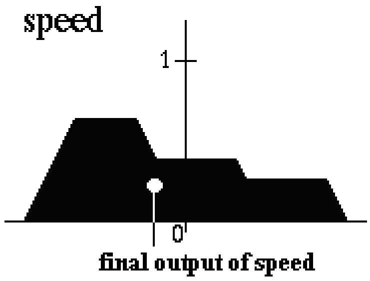
Объединение четырех полученных выше усеченных функций принадлежности дает общее решение:



Таким образом, решением нечеткого контроллера является нечеткое множество (для скорости).

Шестой шаг (дефазификация).

Далее необходимо выбрать одно значение для представления конечного выходного значения. Выбираем в качестве конечного значения центр тяжести нечеткого множества:



На этом один шаг процедуры получения управления на основе нечеткой логики закончен. При поступлении новых измерений угла и угловой скорости шаги 3 – 6 повторяются.

Вся данная процедура получения решения называется контроллером *Мамдани* (*Mamdani* controller).

Контрольные вопросы

1. В каких случаях рекомендуется использовать нечеткие системы управления, а в каких – традиционные?

2. Перечислить «шаги» формализации и решения задачи нечеткого управления.

3. В каких математических пакетах реализованы средства «fuzzy logic»? Какие возможности они предоставляют?

4. Сформулировать конкретную задачу нечеткого управления и решить ее. Решение представить в виде записки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник в 5-ти тт..; 2-е изд., перераб. и доп. / под ред. К.А.Пупкова, Н.Д.Егупова. – М.: Из-во МГТУ им. Баумана. – 2004.

2. Дорф Р.. Современные системы управления : пер. с англ. / Р. Дорф, Р. Бишоп – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.

3. Филлипс Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филлипс, Р. Харбор – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001. – 615с.

4. Сурмин Ю.П. Теория систем и системный анализ : учеб. пособ. / Ю.П. Сурмин – К: МЛУП, 2003. – 368 с.

5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц – М.: Наука, 1969. – 424 с.

6. Моисеев Н.Н. Методы оптимизации / Н.Н. Моисеев, Ю.П. Иванилов, Е.М. Столярова – М.: Наука, 1978. – 352 с.

7. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем / А.А. Фельдбаум – М.: Физматгиз, 1963. – 552 с.

8. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций : учеб. пособ. для вузов / П.Д. Крутько – М.: Машиностроение, 2004. – 576 с.

9. Тарасенков А.М. Динамика полета и боевого маневрирования летательных аппаратов / А.М. Тарасенков, В.Г. Брага, В.Т. Тараненко – М.: Изд-во ВВИА им. Жуковского, 1984 – 512 с.

10. Дьяконов В.П. VisSim+Mathcad+MATLAB. Визуальное математическое моделирование / В.П. Дьяконов – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 384 с.

11. Браммер К. Фильтр Калмана-Бьюси / К. Браммер, Г. Зиффлинг – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 200 с.

12. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.

13. Методические указания к лабораторным работам по курсам: «Обратные задачи динамики» и «Методы синтеза и оптимизации систем

управления» для студентов специальностей 7.080202 и 7.080201 / сост. Успенский В.Б., Шипулина Л.В. – Х.: НТУ «ХПИ», 2011. –28 с.

14. Гриняев С. Нечеткая логика в системах управления / С. Гриняев // "Компьютерра", №38 от 08.10.2001 г. Адрес страницы в Интернете: http://offline.computerra.ru/2001/415/13052/

15. Паклин Н. Нечеткая логика – математические основы / Адрес страницы в Интернете:
http://www.basegroup.ru/library/analysis/fuzzylogic/math/

16. Тема 11. Нечеткая логика / Адрес страницы в Интернете: http://www.victoria.lviv.ua/html/oio/html/theme11_rus.htm

17. Круглов В.В. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети: учеб. пособ. / В.В. Круглов, М.И. Дли, Р.Ю. Голунов – М.: Физматлит, 2001. – 224 с.

18. Круглов В.В. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики нечеткого вывода / В.В. Круглов, М.И. Дли – М.: Физматлит, 2002.

19. Масалович А. Нечеткая логика: на гребне "Третьей волны" / Адрес страницы в Интернете:
http://logic-bratsk.ru/radio/fuzzy/misc/nechet_log.htm

20. Яхъяева Г.Э. Нечеткие множества и нейронные сети: учеб. пособ. / Г.Э. Яхъяева. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. –316 с.

21. Прикладные нечеткие системы : перевод с япон. / К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др.; под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. – М.: Мир, 1993.

22. Нечеткие системы управления динамическими объектами на основе микроконтроллеров. Адрес страницы в Интернете: http://www.unilib.neva.ru/dl/531/chapter6.html

23. Введение в нечеткую логику и системы нечеткого управления / P.Bauer, S. Nouak, R. Winkler; перевод С. В. Кряжевских, 1997. Адрес страницы в Интернете: http://www.gotai.net/documents/doc-1-f1-001.aspx

Навчальне видання

В. Б. Успенський, Л.В. Шипулина

СУЧАСНА ТЕОРІЯ УПРАВЛІННЯ. МЕТОДИ СИНТЕЗУ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

Навчально-методичний посібник