

## ПОЛЗУЧЕСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ В УСЛОВИЯХ СОВ- МЕСТНОГО ДЕЙСТВИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ТЕМ- ПЕРАТУР И НАПРЯЖЕНИЙ

Статтю присвячено опису постановки задачі та методу розв'язку задач повзучості оболонок обертання в умовах спільної дії температур та напружень, що періодично змінюються за часом. Для цього випадку надано рівняння стану повзучості та пошкоджуваності матеріалу. Наведено приклад чисельного розв'язання задачі повзучості циліндричної оболонки.

The paper is devoted to the description of the problem statement as well as the method of solution for creep problems of shells of revolution, which are in conditions of joint action of periodically varying temperatures and stresses. The creep-damage constitutive equations are given for this case. The example of numerical solution for the creep problem of cylindrical shell is presented.

**1. Введение.** В современном машиностроении используются тонкостенные конструктивные элементы в виде оболочек вращения. Часто они работают в условиях совместного действия температурных и силовых полей, что приводит к ползучести материала оболочек и обусловленному ею накоплению необратимой поврежденности, приводящему к разрушению. Во многих случаях в оболочечных конструкциях, используемых в современном авиационном и космическом машиностроении, двигателестроении, химических производствах, имеет место периодическое изменение как уровня нагруженности оболочек, так и распределения температур. Для этого случая, как известно из экспериментов и практики эксплуатации [1, 2], характерно существенное влияние периодического изменения напряжений и температур на скорость деформаций ползучести и накопления повреждаемости. Подобное изменение, как правило, приводит к значительному увеличению скорости роста деформаций ползучести, релаксации напряжений, накопления повреждаемости, что, безусловно, должно учитываться при расчетной оценке долговечности конструкций.

Исследованиям в области ползучести оболочечных конструкций посвящены работы Ю.Н. Работнова [1], Н.Н. Малинина [3], А.Н. Подгорного, А.В. Бурлакова, Г.И. Львова, О.К. Морачковского [4], Ю.Н. Шевченко [5] и других ученых. В этих работах задачи ползучести и повреждаемости оболочек решались в основном в статической постановке, без учета периодического, циклического изменения температур и напряжений.

В работах [6-7] был сформулирован новый подход к решению задач ползучести при действии осциллирующего поля напряжений, основанный на методах многих масштабов времени и осреднения на периоде. Этот подход был использован при решении задач динамической ползучести и повреждаемости при вынужденных колебаниях тонкостенных конструкций [7, 8]. В последую-

щих работах рассмотрены случаи периодического изменения нагрузок с малой частотой, а также комбинированное воздействие на оболочку нагрузок с большим и малым периодами их изменения во времени [9].

Расширение области использования подхода работ [6-7] на случай совместного действия периодически изменяющихся температур и нагрузок в двумерных задачах теории ползучести выполнено в работе [10]. Настоящая статья посвящена использованию разработанных в работах [9, 10] методов решения в задачах ползучести оболочек вращения при их вынужденных колебаниях.

**2. Уравнения состояния.** В работе уравнения состояния ползучести материалов с повреждаемостью при периодических изменениях температур и напряжений построены, исходя из необходимости получения таких уравнений, применение которых позволяет проводить расчеты элементов конструкций. Материальные постоянные, входящие в эти уравнения состояния, получают исключительно в исследованиях ползучести и длительной прочности при статическом нагружении и постоянных значениях температур, на стандартных образцах при растяжении.

Ползучесть образца, вырезанного из металлического материала, будем изучать в рамках общих кинетических зависимостей теории структурных параметров, предложенных Ю.Н. Работновым [1]. Уравнения состояния ползучести при простом напряженном состоянии, принимая закон ползучести с повреждаемостью типа Бейли-Нортон и Работнова-Качанова, имеют следующий вид:

$$\dot{\epsilon} = B(T) \frac{(\sigma)^n}{(1 - \omega)^k}; \quad \dot{\omega} = D(T) \frac{(\sigma)^y}{(1 - \omega)^l}, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t_*) = \omega_*, \quad (1)$$

где  $\epsilon(t)$ ,  $\omega(t)$  – необратимые деформации ползучести и параметр повреждаемости;  $\omega_*$  – значение параметра повреждаемости в момент времени окончания скрытого разрушения  $t_*$ .

В работе рассматривается комбинированное нагружение точки материала и закон изменения во времени температуры в виде

$$\bar{\sigma} = \sigma + \sigma^1 = \sigma \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin \left( \frac{2\pi k}{T_\sigma} t + \beta_k \right) \right]; \quad (2)$$

$$\bar{T} = T + T^1 = T \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} M_i^T \sin \left( \frac{2\pi i}{T_T} t + \beta_i^T \right) \right] \quad (3)$$

где  $M_k = \sigma^{ak} / \sigma$  – коэффициенты асимметрии периодически изменяющейся составляющей напряжения;  $\sigma^{ak}$ ,  $\beta_k$  – амплитудные значения и фаза периодически изменяющихся во времени с частотой  $f_\sigma = 1/T_\sigma$  составляющих

напряжения;  $M_i^T = T_i^a / T$  – коэффициенты асимметрии периодически изменяющейся составляющей температуры;  $T_i^a$ ,  $\beta_i^T$  – амплитудные значения и фаза периодически изменяющихся с частотой  $f_T = 1/T_T$  составляющих температуры.

Для описания процессов ползучести и связанной с ней повреждаемости при комбинированном периодическом нагружении и изменении рабочих температур в работе применяется методика асимптотических разложений и усреднения на периоде. Асимптотические разложения по малому параметру позволяют представить процессы в двух масштабах времени – медленного  $t$  и быстрого  $\xi = \tau/T$ ,  $\tau = t/\mu$ , так, что

$$c \cong c^0(t) + \mu c^1(\xi), \quad (4)$$

$$\omega \cong \omega^0(t) + \mu \omega^1(\xi), \quad (5)$$

где  $c^0(t)$ ,  $\omega^0(t)$ ,  $c^1(\xi)$ ,  $\omega^1(\xi)$  – функции, отвечающие основному процессу ползучести и повреждаемости в масштабе медленно изменяющегося времени и периодически повторяющемуся процессу в масштабе быстрого времени  $\xi$ ;  $\mu = \min[(f_o t_*)^{-1}, (f_T t_*)^{-1}]$ ,  $\mu \ll 1$  – малый параметр, отвечающий отношению периодов быстро изменяющихся периодических составляющих напряжения или температуры к основному времени процесса ползучести.

Тогда, проводя процедуру усреднения сначала на периоде периодически изменяющегося напряжения, а далее на периоде периодически изменяющейся температуры, уравнения состояния для основного процесса ползучести при комбинированном нагружении и изменяющейся температуре в случае сложно-напряженного состояния принимают вид:

$$\dot{c}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{g_T(T) g_n(M_k^{\sigma_i}) \sigma_i^{n-1}}{(1-\omega)^m} s_{ij}, \quad c_{ij}(0) = 0,$$

$$\dot{\omega} = g_r(M_k^{\sigma_e}) g_T^{\omega}(T) \frac{(\sigma_e)^r}{(1-\omega)^l}, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \omega(t_*) = 1, \quad (6)$$

$$g_T(T) = b \int_0^1 \exp \left[ -\frac{Q}{T} \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} M_i^T \sin(2\pi i \xi) \right) \right] d\xi, \quad M_i^T = T_i^a / T,$$

$$g_n(M_k^{\sigma_i}) = \int_0^1 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{\sigma_i} \sin(2\pi k \xi) \right)^n d\xi, \quad M_k^{\sigma_i} = \sigma_i^{ak} / \sigma_i$$

$$g_r(M_k^{\sigma_e}) = \int_0^1 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{\sigma_e} \sin(2\pi k \xi) \right)^r d\xi, \quad M_k^{\sigma_e} = \sigma_e^{ak} / \sigma_e$$

$$g_T^{\omega}(T) = d \int_0^1 \exp \left[ -\frac{Q}{T} (1 + M_i^T \sin(2\pi i \xi)) \right] d\xi, \quad M_i^T = T_i^a / T;$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad \sigma_e = \alpha \sigma_i + (1-\alpha) \sigma_i;$$

$$\sigma_e^0 = (1-\alpha) \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij}^0 S_{ij}^0} + \alpha \sigma_i^0; \quad \sigma_e^{ak} = (1-\alpha) \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij}^{ak} S_{ij}^{ak}} + \alpha \sigma_i^{ak},$$

где  $\sigma_i$ ,  $S_{ij}$  – максимальное нормальное напряжение и компоненты девиатора тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ ;  $\alpha$  – параметр чувствительности материала к виду разрушения;  $S_{ij}^{ak}$  – компоненты девиатора амплитудных напряжений  $\sigma_{ij}^{ak}$ .

**3. Математическая модель и метод решения.** В работе рассматривается математическая постановка начально-краевой задачи ползучести тела объемом  $V$ , закрепленного на части поверхности  $S_1$  и нагруженного объемными силами  $f_i$  и поверхностными силами  $p_i$  на части поверхности  $S_2$ . В этом случае математическая постановка начально-краевой задачи ползучести тела представляется системой уравнений:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + c_{ij}, \quad \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})$$

$$x_i \in V;$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - c_{kl}); \quad \sigma_{ij} n_j = p_i^{(0)} + \Phi_i(t), \quad x_i \in S_2; \quad (7)$$

$$u_i = \bar{u}_i, \quad x_i \in S_1; \quad u_i(x_i, 0) = c_{ij}(x_i, 0) = 0,$$

где  $n$  – единичная нормаль к границе тела,  $j=1,2,3$ ;  $\{D\}$  – тензор упругих свойств материала;  $\bar{u}_i$  – не изменяющиеся во времени известные значения

перемещений точек поверхности  $S_1$ ;  $\Phi_i(t) = p_i^{\max} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\Omega_k t + \beta_k)$ ,

$p_i^{\max}$  – амплитуды соответствующих компонент поверхностных нагружений;  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ;  $\Omega_k = 2\pi k / T$ . Рассматриваем прямоугольные циклы изменения температуры от  $T_{\max}$  до  $T_{\min}$  и обратно. Считаем, что все точки тела в каждый момент нагреты до одной и той же температуры. В работе [11] показано, что влиянием переходных изменений температурного поля на осредненную скорость ползучести при смене уровня нагрева во многих случаях можно пренебречь.

Асимптотические разложения (4), (5) и усреднения на периоде позволяют разделить систему (7) на две: первая получается из соотношений, остающихся после усреднения, и описывает процессы, происходящие в медленном основном движении, а вторая – в результате вычитания из (7) первой системы.

Таким образом, для определения напряженно-деформированного состояния тел при периодическом нагружении и изменении температуры решается следующая система уравнений, в которой все неизвестные изменяются в масштабе медленного времени:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + f_i &= 0 \quad x_i \in V; \quad \sigma_{ij} n_j = p_i, \quad x_i \in S_2; \\ \varepsilon_{ij} &= C_{ijkl} \sigma_{kl} + c_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}), \quad x_i \in V; \\ u_i &= \bar{u}_i, \quad x_i \in S_1; \quad u_i(x_i, 0) = c_{ij}(x_i, 0) = 0,\end{aligned}\quad (8)$$

с уравнениями состояния в виде (6).

Для конкретизации предложенных в работе уравнений состояния (6) предварительно определяются компоненты тензоров амплитудных значений напряжений по решению краевой задачи в масштабе быстрого времени ( $k=1,2, \dots$ ):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}^{ak} &= -\rho(\Omega_k)^2 u_i^{ak}, \quad x_i \in V; \quad \sigma_{ij}^{ak} n_j = p_i^{\max} A_k, \quad x_i \in S_2 \\ \varepsilon_{ij}^{ak} &= \frac{1}{2} (u_{i,j}^{ak} + u_{j,i}^{ak}) = C_{ijmn} \sigma_{mn}^{ak}, \\ x_i &\in V; \quad u_i^{ak} = 0, \quad x_i \in S_1.\end{aligned}\quad (9)$$

Таким образом, решением системы (9) для каждой гармоники  $k$  находят-ся компоненты тензоров амплитудных значений напряжений, по которым определяются коэффициенты  $g_n(M_k^{\sigma_i})$ ,  $g_r(M_k^{\sigma_e})$ , конкретизирующие уравнения состояния (6).

В работе использована конечноэлементная формулировка задач ползучести тонких неосесимметрично нагруженных оболочек вращения. Оболочка вращения с произвольной образующей при неосесимметричном напряженном состоянии разбивается на конечные элементы, которые образованы двумя поперечными сечениями, проходящими через ось вращения конической оболочки. Таким образом, в результате использования метода конечных элементов решается система алгебраических уравнений

$$[K][\Delta] = [P^v] + [P^c] + [P^p] + [P^n], \quad (10)$$

где  $[K]$  – глобальная матрица жесткости;  $[\Delta]$  – вектор узловых перемещений;  $\{P^v\}$  – обобщенный вектор внешних узловых сил,  $[P^v] = \sum_e \int_{S^e} [\Phi]^T [p] dS$ ;  $\{P^c\}$  – обобщенный вектор узловых сил, обуслов-

ленный необратимыми деформациями,  $[P^c] = \sum_e \int_{S^e} [B]^T [R][c] dS$ ,  $\{P^p\}$  – обобщенный вектор узловых усилий от проекции обобщенных сил на нор-

маль,  $[P^p] = \sum_e \int_{S^e} [\Phi]^T [P^p] dS$ ;  $\{P^n\}$  – обобщенный вектор узловых усилий, обусловленный нелинейной составляющей упругих деформаций,  $[P^n] = \sum_e \int_{S^e} [B]^T [R][\varepsilon_n] dS$ .

Система уравнений (10) дополняется уравнениями состояния (6).

Для определения амплитудных значений компонент напряженно-деформированного состояния для каждой гармоники предварительно необходимо решить систему уравнений (9), конечноэлементная формулировка которой принимает следующий вид:

$$([K] - \Omega_k^2 [M])[\Delta^{ak}] = [P^{ak}];$$

где  $[M]$  – матрица масс системы,  $[M] = \sum_e \int_{S^e} [\Phi]^T \rho [\Phi] dS$ ;  $\Omega_k$  – частота

внешнего нагружения;  $\Delta^{ak}$  – вектор амплитудных значений при полигармоническом нагружении в пределах цикла.

**4. Пример расчета.** Рассмотрим задачу о ползучести цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми краями, нагруженной внутренним периодически изменяющимся по прямоугольному циклу давлением.

Оболочка изготовлена из сплава S-321. Физико-механические характеристики сплава определены по диаграммам деформирования, кривым ползучести и справочным данным:  $E=1.67 \times 10^5$  МПа,  $\rho=7.8 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu=0.3$ ,  $b=2.07 \times 10^6$  МПа<sup>-n</sup>/час.,  $n=4.054$ ,  $d=0.219$  МПа<sup>-r</sup>/час,  $r=7.62$ ,  $m=l=2.07$ ,  $\bar{Q} = Q = 4.09 \times 10^4$  К. В кинетическом уравнении для параметра повреждаемости (6) выбираем значение параметра  $\alpha=0$ . Рабочие температуры периодически изменяются по прямоугольному циклу, параметры которого составляют  $T = 923$  К;  $T^a = 100$  К;  $T_T = 2$  часа.

Длина оболочки  $L=0.3$  м, радиус срединной поверхности  $R=0.05$  м, толщина стенки  $h=0.001$  м. Статическая составляющая внутреннего давления  $p_0$  равна 2 МПа, амплитуда его циклической составляющей изменялась в пределах  $(0..0.25)p_0$  для частоты нагружения  $f_2$ , равной  $0.1f$ , где  $f$  – первая собственная частота.

Поверхность оболочки покрывалась 200 конечными элементами. На рис.1. представлен график релаксации интенсивности напряжений в точке центрального сечения наружной поверхности оболочки. Здесь кривая 1 соответствует статическому нагружению при постоянной температуре, кривая 2 – периодическому нагружению при постоянной температуре; кривая 3 – комбинированному действию периодически изменяющейся по прямоугольному циклу температуры и периодического нагружения. Из графика видно, что в задаче, решенной с учетом всех трех факторов (кривая 3), уровень достигнутых

к моменту времени 40 ч напряжений отличается на 15% от случая чисто статического нагружения, в дальнейшем это отличие сохраняется.

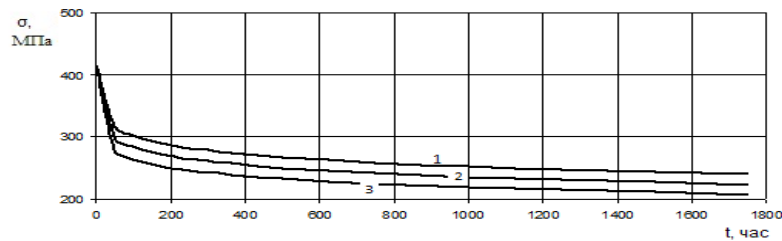


Рис.1. График релаксации интенсивности напряжений в точке центрального сечения наружной поверхности оболочки

**5. Выводы.** Анализ численных результатов позволяет сделать вывод о существенном влиянии периодически изменяющихся составляющих напряжений и рабочих температур на скорость перераспределения напряжений при ползучести, что несомненно должно учитываться при проектировании и оценке долговечности оболочечных конструктивных элементов.

**Список литературы:** 1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. - М.: Наука, 1966. - 752 с. 2. *Тайра С.* Теория высокотемпературной прочности материалов / С. Тайра, Р. Отани. - М.: Металлургия, 1986. - 280 с. 3. *Малинин Н.Н.* Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций / Н.Н. Малинин. - М.: Машиностроение, 1981. - 221 с. 4. *Подгорный А.Н.* Ползучесть элементов машиностроительных конструкций / А.Н. Подгорный, В.В. Бортовой, П.П. Гонтаровский, В.Д. Коломак, Г.И. Львов, Ю.И. Матюхин, О.К. Морачковский. - Киев: Наук. думка, 1984. - 262 с. 5. *Шевченко Ю.Н.* Решение плоских и осесимметричных краевых задач термовязкопластичности с учетом повреждаемости материала при ползучести / Ю.Н. Шевченко, В.Н. Мазур // Прикл. механика. - 1986. - Т.22, № 8. - С. 3-17. 6. *Морачковский О.К.* О нелинейных задачах ползучести тел при воздействии быстро осциллирующего поля / О.К. Морачковский // Прикладная механика. - 1992. - Т.28, №8. - С.17-23. 7. *Бреславский Д.В.* Нелинейная ползучесть и разрушение плоских тел при высокочастотном циклическом нагружении / Д.В. Бреславский, О.К. Морачковский // Прикладная механика. - 1998. - Т. 34, №3. - С.97-103. 8. *Altenbach H.* Cyclic Creep-Damage in Thin-Walled Structures / H.Altenbach, D.Breslavsky, O.Morachkovsky, K.Naumenko. // Journal of Strain Analysis for Engineering Design. Suffolk, UK, 2000. - Vol.35. - No 1.- p.1-11. 9. *Бреславский Д.В.* Высокотемпературная ползучесть и длительная прочность элементов конструкций при циклическом нагружении / Д.В. Бреславский, О.К. Морачковский, О.А. Татаринова // Проблемы прочности. - Київ, 2008. - № 5. - С.45-53. 10. *Бреславський Д.В.* Модель циклічної термовязкопластичності для тіл обертання / Д.В. Бреславський, О.К. Морачковський, Ю.М. Коритко // Проблеми прочности. - Київ, 2011. - № 2. - С.33-46. 11. *Бреславський Д.В.* Ползучесть тел вращения при циклических тепловых нагрузках / Д.В. Бреславский, Ю.Н. Корытко // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. - Дніпропетровськ: ДНУ імені Олеся Гончара. - 2009. - №10. - С. 41-47.

Поступила в редколлегию 01.10.2012