UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad De Ciencias Físico Matemáticas

Inteligencia Artificial

DOCENTE: LUIS ÁNGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ

Act 8: Laboratorio de Álgebra Lineal

JOSÉ LUIS CALDERÓN GALARZA – 2132939

GRUPO 031

ENTREGA: 22 DE FEBRERO DEL 2025

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

4.1 Operaciones con matrices y determinantes

1.- Encuentra la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-5) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] (-2)(4)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] (-4)(5) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrics es igual al producto de los determinantes

Supongamos que tenemos 2 matrices A y B

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} bg+ae & af+bh \\ dg+ce & cf+dh \end{bmatrix}$$

$\det(A) = ad - bc \qquad \det(B) = eh - fg$

$\det(A)\cdot\det(B) = (ad-bc)(eh-fg)$

$= adeh - adfg - bceh + bcfg$

$= adeh + bcfg - (adfg + bceh)$

$\det(AB) = (bg+ae)(cf+dh) - (af+bh)(dg+ce)$

$= bgcf + \cancel{bgdh} + \cancel{aecf} + aedh - (afdg + \cancel{afce} + \cancel{bhdg} + bhce)$

$\det(AB) = bcfg + adeh - (adfg + bceh)$

$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

$adeh + bcfg - (adfg + bceh) = adeh + bcfg - (adfg + bceh)$ ✓

4.2 Sistema de ecuaciones lineales

3.- Resuelva el sig sistema por el metodo de Gauss-seidel

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{7 + y - z}{4} \qquad y = \frac{1 + 2x + 2z}{4} \qquad z = \frac{5 - x + y}{3}$$

$$x = \frac{7 + 0 - 0}{4} = 1.75 \qquad y = \frac{1 + 2(1.75) + 2(0)}{4} = 1.125 \qquad z = \frac{5 - (1.75) + (1.125)}{3} = 1.45833$$

$$x = \frac{7 + 1.125 - 1.45833}{4} = 1.66667 \qquad y = \frac{1 + 2(1.66667) + 2(1.45833)}{4} = 1.8125 \qquad z = \frac{5 - (1.66667) + 1.8125}{3} = 1.71528$$

$$\varepsilon_{ax_1} = \left|\frac{1.66667 - 1.75}{1.66667}\right| * 100\% = 4.99\%$$

$$\varepsilon_{ay} = \left|\frac{1.8125 - 1.125}{1.8125}\right| * 100\% = 37.93\% \qquad \varepsilon_{az} = \left|\frac{1.71528 - 1.45833}{1.71528}\right| * 100\% = 14.98\%$$

$$x = \frac{7 + 1.8125 - 1.71528}{4} = 1.77431 \qquad y = \frac{1 + 2(1.77431) + 2(1.71528)}{4} = 1.9948$$

$$z = \frac{5 - (1.77431) + (1.9948)}{3} = 1.74016 \qquad \varepsilon_{ax} = \left|\frac{1.77431 - 1.66667}{1.77431}\right| * 100\% = 6.06\%$$

$$\varepsilon_{ay} = \left|\frac{1.9948 - 1.8125}{1.9948}\right| * 100\% = 9.14\% \qquad \varepsilon_{az} = \left|\frac{1.74016 - 1.71528}{1.74016}\right| * 100\% = 1.43\%$$

$$x = \frac{7 + 1.9948 - 1.74016}{4} = 1.81366 \qquad y = \frac{1 + 2(1.81366) + 2(1.74016)}{4} = 2.02691$$

$$z = \frac{5 - 1.81366 + 2.02691}{3} = 1.73775 \qquad \varepsilon_{ax} \left|\frac{1.81366 - 1.77431}{1.81366}\right| * 100\% = 2.17\%$$

$$\varepsilon_{ay} = \left|\frac{2.02691 - 1.9948}{2.02691}\right| * 100\% = 1.58\% \qquad \varepsilon_{az} = \left|\frac{1.73775 - 1.74016}{1.73775}\right| * 100\% = 0.14\%$$

$$\therefore \quad x \approx 1.814 \qquad y \approx 2.027 \qquad z \approx 1.738$$

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FCFM
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

4.- Encuentre todas las soluciones del sistema homogeneo

$$x + 2y + 3z = 0$$
$$2x + 4y + 6z = 0$$
$$3x + 6y + 9z = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right] (-2)(-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x + 2y + 3z = 0$$

$$x = -2y - 3z$$

Sol general $= (x, y, z) = (-2y - 3z, y, z)$

$\Rightarrow (x, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$

Donde $y, z \in \mathbb{R}$

$\therefore$ Las soluciones del sistema forman un sub espacio vectorial de dimensión 2, generado por los vectores $(-2,1,0)$ y $(-3,0,1)$

4.3 Espacios vectoriales y auto-valores y autovectores

5. Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores $\{(1,2,3),(2,4,6),(3,6,9)\}$

Representamos los vectores en forma de matriz

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{matrix}(-2)(-3)\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

El numero de filas no nulas en la matriz escalonada es 1, lo que indica que la dimensión del subespacio generado por los vectores es **1**

El unico vector no nulo en la matriz escalonada es $(1,2,3)$, por lo que la base del subespacio es $\{(1,2,3)\}$

$\therefore$ La dimension del subespacio es 1 y su base es $\{(1,2,3)\}$

6.- Determine los autovalores y autovectores de la matriz

$$G=\begin{bmatrix}5&-2\\-2&5\end{bmatrix} \qquad (G-\lambda I)x=0$$

Calculamos los autovalores

$\det(G-\lambda I)=0$

$$G-\lambda I=\begin{bmatrix}5-\lambda&-2\\-2&5-\lambda\end{bmatrix}$$

$(5-\lambda)(5-\lambda)-(4)=0$

$25-10\lambda+\lambda^2-4=0$

$\lambda^2-10\lambda+21=0$

$(\lambda-7)(\lambda-3)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=7 \quad \lambda_2=3$

Ahora calculamos los auto vectores

Para $\lambda_1=7$

$$G-7I=\begin{vmatrix}5-7&-2\\-2&5-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{vmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow -2x_1-2x_2=0 \Rightarrow x_1+x_2=0 \Rightarrow x_1=-x_2$$

$\therefore$ El auto vector asociado es $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

Para $\lambda_2=3$

$$G-3I=\begin{bmatrix}5-3&-2\\-2&5-3\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}2&-2\\-2&2\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}2&-2\\-2&2\end{vmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 2x_1-2x_2=0$

$x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2$

$\therefore$ El autovector asociado es $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

4.4 Aplicaciones en IA: Reducción de dimensionalidad.

7. Explique como el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el algebra lineal para reducir dimensiones.

El Análisis de Componentes Principales es una técnica que nos ayuda a simplificar conjuntos de datos grandes sin perder demasiada información. Básicamente, toma un montón de variables y las convierte en un número menor de "componentes principales" que siguen representando bien los datos originales.

Pasos de PCA:

1. Estandarización de los datos:

   Antes de empezar, se ajustan los datos para que todas las variables tengan la misma importancia. Esto se hace restando la media y dividiendo por la desviación estándar.

2. Cálculo de la matriz de covarianza:

   Esta matriz nos dice cómo se relacionan entre sí las diferentes variables. Si dos variables tienen una alta covarianza, significa que cambian juntas.

3. Obtención de los valores y vectores propios

   - Los valores propios nos dicen cuánta información (o variabilidad) captura cada componente.
   - Los vectores propios nos muestran la dirección en la que los datos tienen mayor variabilidad.

4. Selección de los componentes principales

   - Se ordenan los valores propios de mayor a menor.
   - Se eligen los primeros que explican la mayor parte de la variabilidad en los datos.

5. Transformación de los datos

   - Finalmente, los datos originales se convierten a esta nueva base más pequeña, utilizando los vectores propios seleccionados.

8. Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz.

8. Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La SVD descompone H en

$$H = U \Sigma V^T$$

Donde:

U es una matriz ortogonal que contiene los autovectores de HH^T

V es una matriz ortogonal que contiene los autovectores de H^TH

Σ es una matriz diagonal con los valores singulares

$$H^TH = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(H^TH - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & 7 \\ 7 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(13-\lambda)(5-\lambda) - (7)(7) = 0$$

$$65 - 13\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 49 = 0$$

$$\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$

$$\lambda = 9 \pm \sqrt{65}$$

$$\lambda_1 = 9 + \sqrt{65} \quad \lambda_2 = 9 - \sqrt{65}$$

$$\sigma = \sqrt{9 \pm \sqrt{65}}$$

$$\sigma_1 \approx 4.13 \quad \sigma_2 \approx 0.97$$

Para $\lambda_1 = 9 + \sqrt{65}$

$$\begin{bmatrix} 13-(9+\sqrt{65}) & 7 \\ 7 & 5-(9+\sqrt{65}) \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -0.86 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 9 - \sqrt{65}$

$$\begin{bmatrix} 13-(9-\sqrt{65}) & 7 \\ 7 & 5-(9-\sqrt{65}) \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.86 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V = \begin{bmatrix} -0.86 & -0.5 \\ -0.5 & 0.86 \end{bmatrix}$$

Para U:

$$\det(HH^T - \lambda I) = 0$$

$$HH^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 8 \\ 8 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(10-\lambda)(8-\lambda) - (8)(8) = 0$$

$$80 - 18\lambda + \lambda^2 - 64 = 0$$

$$\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_1 = 9 + \sqrt{65}$$

$$\lambda_2 = 9 - \sqrt{65}$$

Para $\lambda_1 = 9+\sqrt{65}$

$$\begin{bmatrix} 10-(9+\sqrt{65}) & 8 \\ 8 & 8-(9+\sqrt{65}) \end{bmatrix} V = 0 \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} -0.75 \\ -0.66 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 9-\sqrt{65}$

$$\begin{bmatrix} 10-(9-\sqrt{65}) & 8 \\ 8 & 8-(9-\sqrt{65}) \end{bmatrix} V = 0 \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} -0.66 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} -0.75 & -0.66 \\ -0.66 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ La descomposicion SVD de H es:

$$H = U \Sigma V^T$$

Donde $U = \begin{bmatrix} -0.75 & -0.66 \\ -0.66 & 0.75 \end{bmatrix}$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4.13 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix}$$

$$V^T = \begin{bmatrix} -0.86 & -0.5 \\ -0.5 & 0.86 \end{bmatrix}$$

9.Analice el uso de algebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales.

El álgebra lineal es la base matemática fundamental del aprendizaje profundo y las redes neuronales artificiales. Se usa en múltiples aspectos, desde la representación de datos hasta la optimización del entrenamiento.

1. **Representación de datos**: Se utilizan vectores, matrices y tensores para organizar la información y hacer cálculos eficientes en GPUs y TPUs.

2. **Cálculo de activación**: Las redes neuronales transforman datos usando ecuaciones como $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{W}$ son los pesos, $\boldsymbol{x}$ la entrada y $\boldsymbol{b}$ el sesgo. Luego, se aplican funciones de activación para mejorar el aprendizaje.
3. **Retropropagación y ajuste de pesos**: Mediante gradiente descendente, la red ajusta sus pesos para minimizar el error de predicción.
4. **Reducción de dimensionalidad**: Métodos como SVD y PCA ayudan a optimizar modelos reduciendo información redundante.
5. **Aplicaciones avanzadas**: Se usa en embeddings de palabras, redes convolucionales para imágenes y redes recurrentes para secuencias.

En resumen, el álgebra lineal es una herramienta fundamental en el aprendizaje profundo y las redes neuronales. Gracias a ella, es posible organizar datos, ajustar los modelos para que aprendan mejor y hacer cálculos de manera eficiente. Además, se usa en muchas aplicaciones avanzadas, como el reconocimiento de imágenes y el procesamiento de texto. Entender estos conceptos ayuda a mejorar el desarrollo de la inteligencia artificial y sus aplicaciones en el mundo real.

10. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA.

Los espacios vectoriales son fundamentales para la inteligencia artificial (IA) porque permiten representar datos de manera que los algoritmos puedan procesarlos eficientemente. En términos simples, convierten información del mundo real (como texto, imágenes o audio) en números organizados dentro de un espacio matemático.

En IA, los datos se representan como vectores en espacios de alta dimensión, permitiendo realizar operaciones matemáticas para el aprendizaje automático.

1. **Representación de datos**:
   - **Imágenes**: Matrices de píxeles (RGB o escala de grises).
   - **Texto**: Word embeddings como Word2Vec, GloVe o Transformers.
   - **Sonido**: Espectrogramas procesados como matrices.
2. **Representación de palabras en espacios vectoriales**:
   - Modelos como Word2Vec capturan relaciones semánticas entre palabras.
   - Ejemplo: *Rey - Hombre + Mujer ≈ Reina*.
3. **Espacios vectoriales en imágenes y visión artificial**:
   - CNNs extraen características y las proyectan en espacios latentes.
   - Autoencoders y GANs generan imágenes realistas.

- Se usan métricas como distancia euclidiana o coseno para medir similitud.

4. **Uso en modelos avanzados (Transformers)**:
   - Los Transformers usan atención auto-regresiva para analizar relaciones entre palabras.
   - Modelos como CLIP asocian imágenes y texto en un mismo espacio vectorial.
5. **Aplicaciones prácticas**:
   - **Búsqueda semántica**: Motores de búsqueda inteligentes.
   - **Sistemas de recomendación**: Encuentran contenido similar.
   - **Aprendizaje por representaciones**: Modelos auto-supervisados detectan patrones.

En conclusión, los espacios vectoriales son una pieza clave en la inteligencia artificial, ya que permiten transformar datos del mundo real en representaciones matemáticas que los algoritmos pueden procesar de manera eficiente. Su uso abarca desde el análisis de texto e imágenes hasta modelos avanzados como Transformers y sistemas de recomendación. Gracias a ellos, la IA puede entender relaciones, identificar patrones y mejorar la precisión en tareas como la búsqueda semántica y la generación de contenido, haciendo que las aplicaciones sean más inteligentes y funcionales en el día a día.