Tarea 4 de Aprendizaje Máquina, 2022

Universidad Iberoamericana

18 de abril de 2022

1. Considere el caso visto en clase en que $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\theta, 1)$, en el que $x_1, \ldots, x_m$ están observados y $x_{m+1} > a, \ldots, x_n > a$ están censurados. Vimos que, en este caso, el algoritmo EM se reduce a iterar:

$$\theta^{(j+1)} = \frac{m}{n}\bar{x}_{obs} + \frac{n-m}{n}\theta^{(j)} + \left(\frac{n-m}{n}\right)\frac{\phi(a-\theta^{(j)})}{1-\Phi(a-\theta^{(j)})}.$$

   Programe el algoritmo EM, haga algunos experimentos y diga sus observaciones.

2. En vez de haber usado el algoritmo EM, pudimos haber maximizado la verosimilitud observada, que en este caso está dada por

$$L(\theta|\vec{x}) \propto \left[\prod_{i=1}^{m}\phi(x_i;\theta,1)\right]\left[(1-\Phi(a-\theta))\right]^{n-m}.$$

   Si $\theta^\star$ es el estimador de máxima verosimilitud, demuestre que:

$$\theta^\star = \bar{x}_{obs} + \left(\frac{n-m}{m}\right)\frac{\phi(a-\theta^\star)}{1-\Phi(a-\theta^\star)}.$$

   ¿Qué sucede si hacemos

$$\theta^{(j+1)} = \bar{x}_{obs} + \left(\frac{n-m}{m}\right)\frac{\phi(a-\theta^{(j)})}{1-\Phi(a-\theta^{(j)})}?$$

   Hágalo y compare el resultado con el inciso anterior.

3. **Datos exponenciales con censura por la derecha**. Considere un caso similar al anterior en el que se tiene $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathrm{Exp}(\theta)$, donde θ representa el valor esperado. Suponga que $x_1, \ldots, x_m$ están observados y que $x_{m+1} > a, \ldots, x_n > a$ están censurados por la derecha.

   (a) Demuestre que para este caso, el algoritmo EM se reduce a iterar:

$$\theta^{(j+1)} = \frac{1}{n}\left[s + (n-m)\theta^{(j)}\right],$$

   donde $s = \sum_{i=1}^{m} x_i + (n-m)a$. Prográmelo, haga algunos experimentos y diga sus observaciones. ¿Qué sucede si inicializamos el algoritmo en $\theta^{(0)} = s/m$?

   (b) Halle el estimador de máxima verosimilitud.

Fecha de entrega: 25 de abril de 2022.