

Enunciado:

Resuelva los siguientes ejercicios sobre análisis de algoritmos, mejor y peor caso, caso promedio y reglar para el cálculo de tiempos de ejecución.

1. Suponga que $T_1(N) = O(f(N))$ y $T_2(N) = O(f(N))$. Indique cuales de los siguientes enunciados son verdaderos.

- a) $T_1(N) + T_2(N) = O(f(N))$
- b) $T_1(N) - T_2(N) = o(f(N))$
- c) $T_1(N)/T_2(N) = O(1)$
- d) $T_1(N) = O(T_2(N))$

2. Sean $f(N)$ y $g(N)$ dos funciones asintóticamente positivas. Pruebe verdadera o falsa cada una de las siguientes proposiciones.

- a) $f(N) = O(g(N))$ implica $g(N) = O(f(N))$.
- b) $f(N) + g(N) = \Theta(\min(f(N), g(N)))$.
- c) $f(N) = O(g(N))$ implica $2^{f(N)} = O(2^{g(N)})$.
- d) $f(N) = O(f^2(N))$.
- e) $f(N) = O(g(N))$ implica $g(N) = \Omega(f(N))$.

3. Especifique para qué valores de los números reales p y q se satisfacen las siguientes proposiciones:

- a) $N^p = O(N^q)$,
- b) $N^p = \Theta(N^q)$.

4. Un algoritmo ejecuta en 0,5 ms para un conjunto de datos de entrada de tamaño 100. ¿Qué tan grande son los datos de entrada si el algoritmo ejecuta durante 1 minuto, si su tiempo de ejecución es alguno de las siguientes opciones?

- a) $O(N \log N)$
- b) Cuadrático
- c) Cúbico

5. Para cada uno de los siguientes fragmentos de código haga un análisis del tiempo de ejecución en términos de notación $O(f(n))$, $\Omega(g(n))$ y $\Theta(h(n))$.

- a)

```
for (i = 0; i < n; ++i)
    for (j = 0; j < n * n; ++j)
        ++sum;
```
- b)

```
for (i = 0; i < n; ++i)
    for (j = 0; j < i; ++j)
        ++sum;
```

```
c) | for (i = 0; i < n; ++i)
    |   for (j = 0; j < i * i; ++j)
    |     for (k = 0; k < j; ++k)
    |       ++sum;

d) | for (i = 1; i < n; ++i)
    |   for (j = 1; j < i * i; ++j)
    |     if (j % i == 0)
    |       for (k = 0; k < j; ++k)
    |         ++sum;
```

¿Cambia el comportamiento asintótico de sus respuestas si reemplazamos `++sum` por `sum++`? Justifique.

6. ¿Cuál es el tiempo de ejecución, $T(N)$, del siguiente ciclo como una función de N ? Una vez calculado $T(N)$, muestre a cuáles de los conjuntos de funciones $\Theta(f(N))$, $\Omega(g(N))$ o $O(h(N))$ pertenece.

```
1 | for (int i = 5; i < N; i *= 2)
2 |   sum += i * i;
```

Justifique claramente su respuesta. Suponga que se satisface que $N \geq 6$.

7. ¿Cuál es el tiempo de ejecución, $T(N)$, del siguiente ciclo como función de N ?

```
1 | int N;
2 | cin >> N;
3 |
4 | for (int i = 1 ; i < N; i++)
5 |   for (int j = i; j < N; j += i)
6 |     std::cout << "AED\n";
```

Una vez calculado $T(N)$, exprese en términos de $\Theta(f(N))$, $\Omega(g(N))$ o $O(h(N))$. Proponga la cota más estricta posible.