

華中科技大學

本科生毕业设计[论文]

真空双折射的冷原子量子模拟方案研究

院 系 物理学院

专业班级 物理 1601

姓 名 廖吉恺

学 号 U2016XXXXXX

指导教师 胡忠坤

2020 年 5 月 10 日

## 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：                      年      月      日

# 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保障、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关学位论文管理部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权省级优秀学士论文评选机构将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于 1、保密 ☐，在 年解密后适用本授权书。

2、不保密 ☒。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名: 年 月 日

导师签名:                      年      月      日

## 摘 要

基于冷原子光晶格平台量子模拟是近来物理研究的一大热点,已广泛涉及到原子与光物理、凝聚态物理、高能物理等各个研究方向。在高能物理上也尤为突出,它有望解决量子色动力学中夸克禁闭等强作用多体稳定性问题,阐释量子场论中格点正规化的物理图像,并且具有高灵活低成本的优点。

本文主要论述了真空双折射量子模拟的必要性、合法性和可行性,本文所做工作是模拟真空双折射的关键一步。在导论中我们介绍了高能物理发展状况,包括对格点场论的研究倾向,迫切解决量子色动力学的强作用和重整化发散等问题。我们回顾了近来量子模拟在各个领域的发展,在高能上还未有真空双折射这种有光子自能修正的模拟理论。

在超冷原子部分,我们介绍了二能级系统、缀饰态、拉曼过程、自发辐射、光场量子化、多普勒冷却、光晶格系统。我们深入研究了希尔伯特空间的截断方法,首次以双势阱光晶格为例,剖析了它丰富的准粒子激发,这为模拟正负电子过程奠定基础。

在高能量子电动力学物理过程中,正负电子部分,我们提出了在坐标空间鉴别正负电子态的标准,我们考虑了非相对论近似静电磁场下的电子哈密顿量,与实验观测到的物理现象吻合。以此鉴别标准我们讨论了含时光场下的正负电子物理过程。最后将狄拉克旋量方程扩展到拓扑材料上的发现。在真空双折射部分,本文借鉴前人对真空双折射场论上的工作,从哈密顿的角度对其做了一些新的物理诠释,确定了磁场对真空双折射的重要作用。本文提出了一个二维朗道光折射模型,简化了光与正负电子的自由度,用两个物理环境模拟光子两种偏振,引入佩尔斯规范相位,从而推导出真空双折射格点化哈密顿量,以便于光晶格模拟。

最后在量子模拟部分,我们介绍了实验制备阿贝尔规范场的方法,主要有旋转人工规范势、拉曼人工规范势以及量子链模型三种方法。然后我们构造了双势阱光晶格,分析了希尔伯特空间截断之后的基矢,列出了真空态、光子态、正负电子态所满足的哈密顿量,也简单介绍了计算模拟的结果。本文的最后,提出真空双折射模拟方案,并简要讨论该模拟有待改进之处。

**关键词:** 量子模拟; 真空双折射; 正负电子对; 光子自能; 格点规范场

## Abstract

Quantum simulation based on ultracold atom optical lattice platform is a hot spot in recent physics research, which has been widely involved in various research directions such as atomic, molecular, and optical physics, condensed matter physics, high-energy physics. It is particularly prominent in high-energy physics. It is expected to solve the problem of many-body stability such as quark confinement in quantum chromodynamics, to explain the physical image of lattice regularization in quantum field theory, and has the advantages of high flexibility and low cost.

This paper mainly discusses the necessity, legitimacy and feasibility of vacuum birefringence quantum simulation. The work done in this paper is a key step in simulating vacuum birefringence. In the introduction, we introduce the development of high-energy physics, including the research tendency of lattice field theory, in order to urgently solve the problems of the strong interaction in quantum chromodynamics and the renormalization divergence. We review the recent development of quantum simulation in various fields. In high energy physics, there was no vacuum birefringence simulation theory with photon self-energy correction.

In the ultracold atom section, we introduce two-level systems, decorated states, Raman processes, spontaneous emission, electromagnetic field quantization, Doppler cooling, and optical lattice systems. We have deeply studied the truncation method of Hilbert space. For the first time, taking the double-well optical lattice as an example, we analyze its rich quasi-particle excitation, which lays the foundation for simulating the dynamics of electron and positron.

In the process of high-energy quantum electrodynamics, in the part of electron and positron, we propose a standard for identifying electron and positron states in the coordinate space. We consider the non-relativity approximation of the electron Hamiltonian under static electromagnetic field, which agrees with the physical phenomena observed in experiments. Based on this identification criterion, we discuss the physical dynamics of electron and positron in the time-dependent electromagnetic field. Finally, the Dirac spinor field equation is extended to the discovery on topological materials. In the part of vacuum birefringence, this paper draws on previous work on vacuum birefringence

expressed by quantum field theory and makes some new physical interpretations from the perspective of Hamiltonian to determine the important role of magnetic field on vacuum birefringence. In this paper, a two-dimensional Landau light refraction model is proposed, which simplifies the degrees of freedom of light and positrons and electrons. The two physical environments are used to simulate the two polarizations of photons. We introduce the Peierls substitution to derive the vacuum birefringence latticed Hamiltonian, in order to facilitate the simulation on optical lattice.

Finally, in the quantum simulation part, we introduce the experimental preparation of the Abel  $U(1)$  gauge field. There are three main methods, rotation artificial gauge potential, Raman artificial gauge potential and quantum link model. Then we construct a double-well optical lattice, analyze the basis vector after truncation in Hilbert space, list the Hamiltonian satisfied by the vacuum state, photon state, and positron and electron states, and also briefly introduce the result of calculation simulation. At the end of this article, a vacuum birefringence simulation scheme is proposed, and we give some in-depth discussion on the simulation.

**Key Words:** Quantum simulation; Vacuum birefringence; Electron and positron pairs; Photon self-energy; Lattice field theory

# 目 录

摘要 .....	I
Abstract .....	II
1 导论 .....	1
1.1 传统高能研究的局限 .....	1
1.2 应运而生的量子模拟 .....	3
1.3 量子模拟的研究进展 .....	5
1.4 量子模拟高能现象 .....	7
2 超冷原子 .....	9
2.1 量子光学 .....	9
2.2 冷却原理 .....	15
2.3 Raman 过程 .....	19
2.4 光晶格模型 .....	21
2.5 Hilbert 空间截断-准粒子激发 .....	23
3 QED 物理过程 .....	28
3.1 正负电子对产生湮灭 .....	28
3.1.1 自由场下的正负电子 .....	29
3.1.2 静电磁场下 Dirac-Hamiltonian .....	32
3.1.3 光场下的多体 Hamiltonian .....	34
3.1.4 Dirac 方程在拓扑物理上的延展 .....	35
3.2 真空双折射 .....	38
3.2.1 场论推演的 Hamiltonian .....	39
3.2.2 二维 Landau 光折射模型 .....	42
3.2.3 格点化 Hamiltonian .....	45
4 量子模拟 .....	49
4.1 U(1) 规范场模拟 .....	49
4.2 Double-Well 模拟正负电子 .....	53
4.3 真空双折射模拟方案 .....	57
5 结论与展望 .....	60

参考文献 .....	63
------------	----

# 1 导论

从量子力学与相对论的建立以来,现代物理学在各个方向上都有蓬勃的发展。研究领域从原子与光物理到等离子体物理,从粒子物理到凝聚态物理,研究者在这些方面上都做出了许多出色的工作,而这些成果给社会带来生产力的飞跃无可厚非,研究现代物理正是化解社会矛盾、提升人们生活质量的捷径。然而现代物理更加的抽象与逻辑化,20世纪以来物理与数学紧密地结合,用很多巧妙而又简洁的数学语言来描述物理过程,看似毫不相关的物理过程却有着相似的数学结构,数学的相似性暗含了形而上的相同过程,这成为了一种用眼睛看微观和超宏观的新方法、新思路,也就是所谓的物理模拟。无论研究物理哪个方向,可能研究的手段与对象不同,而最终的目标却是相同的,一种研究方法的成功预示着一套物理问题的成功解决,这是现代物理研究的一个特征。

化解社会矛盾、提高社会生产力的根本在于能源、材料与人工智能,现代物理研究的重点方向正是如此。凝聚态中的常温超导,等离子体中的磁约束核聚变,天文中的暗物质与暗能量,粒子物理中的基本粒子与高能现象,原子与光物理中的量子信息与量子计算,以及最近的拓扑量子计算<sup>[1]</sup>的研究都是能源、材料与超算问题的关键。现代物理很多围绕这些问题而展开,同时也发现了许多新奇有趣的物理,但难以避免的问题比如量子多体问题成为了解释新物理时理论计算的瓶颈。在粒子物理蓬勃发展的时候,Feynman便认为利用量子计算可能能解决经典物理不能解决的困难<sup>[2]</sup>,而经过激光物理、原子与光物理的发展,这种量子模拟渐渐成为可能,研究强关联系统这一重要问题<sup>[3]</sup>再次成为物理学界的热点,有望能够模拟解释高温超导中电声子的强相互作用<sup>[4]</sup>以及分数量子霍尔效应等物理过程。而对于高能物理而言,在标准模型构建之后,仍有许多待解释的问题,量子模拟也成为了研究高能物理的新视角。

## 1.1 传统高能研究的局限

高能物理又称粒子物理,是研究粒子的构成与相互作用的学科,一般是还原到最基本的粒子进行研究最基本的相互作用。基本粒子是指假定不可再分割的粒子,在量子场论中阐释为场论的激发,由于基本粒子在常温下稳定组成原子等粒子,研究基本粒子需要到 GeV 至 TeV 能量量级,一般是以粒子碰撞的形



式测量散射振幅来实验, 少数有用强磁场中衰变来实验如测定  $\mu$  子  $g-2$  因子<sup>[5]</sup>, 通过量子场论对散射振幅和衰变系数的计算可以与实验数据对比从而验证理论的正确性, 更准确的说就是构造的基本粒子 Lagrangian 的正确性。杨振宁前辈提出的 Yang-Mills 理论是一种  $SU(N)$  的非 Abel 的规范理论, 确定了基本粒子有  $G = U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$  规范<sup>[6]</sup>, 这是建立标准模型的基石, 也是电弱统一的一大前提。同时杨振宁前辈与李振道前辈提出的宇称不守恒也蕴含着 CPT 对称, 而后来在凝聚态中拓扑不变性的发现, 使得对称性在物理学中的地位提到前所未有的高度。杨振宁前辈曾概括 20 世纪理论物理学的三大主旋律为: 量子化、对称性和相位因子, 后两者也成为了 21 世纪物理研究方向的主旋律。

标准模型的构建与量子场论工具的运用几乎可以描述所有的基本粒子及其相互作用, 实验测定结果与理论也几乎吻合, 这意味着标准模型取得了巨大的成功。然而研究至今, 仍有许多困难存留, 像中微子质量问题, 以及量子色动力学的计算问题以及重整化与正规化的物理意义都是量子场论计算不能够解释的, 特别是量子色动力学中夸克禁闭即在空间尺度上无法分离出单个夸克的束缚物理问题<sup>[7]</sup>, 以及多个夸克与胶子组成粒子的稳定性问题<sup>[8]</sup>。所以一些研究者便转向量子色动力学的格点论研究, 也有一些转向了超对称、超 Higgs 机制的研究。再者高能物理全是由场论积分的方法计算, 这缺乏严格的物理图像, 不能够说清楚散射长度之内的物理过程。实验上又需要极高的碰撞能量, 这种研究成本是巨大的。况且 Higgs 自发对称性破缺仍然有许多不可知原因, 这也促使人们要走出纯计算的迷宫, 开始思考背后的物理是什么。

本文从格点论方法剖析高能 QED(量子电动力学) 的一些现象, 希望通过最原始的量子力学过程研究粒子之间的相互作用, 这种成本较低的研究不仅可以探索粒子在散射长度之内的物理过程, 也可以与凝聚态中的电声子散射过程类比, 相通的物理行为可以论断电声子在高温超导中扮演的角色。利用格点论研究高能物理过程有如下优点:

- 连续空间总是存在微扰论下的积分发散, 格点化能够避免这种发散
- 可以研究非微扰的强规范场作用过程, 有更加直观的物理图像<sup>[9]</sup>
- 与凝聚态系统更接近, 研究格点场论也有利于研究凝聚态物理现象, 而像凝聚态中的相变理论又有助于研究 Higgs 对称破缺机制
- 有更广阔的模拟平台与更灵活的研究手段, 成本低, 如光晶格、二维材料

经过将近 1 个世纪的场论计算，标准模型的结果是令人满意的，然而我们回头一想，背后的物理行为还欠缺认识。格点论是一种简化物理模型，重新看世界的新方法，而要克服计算困难，还需要量子模拟的帮助。

## 1.2 应运而生的量子模拟

Schrödinger 方程对量子力学的描述可以阐释非相对论情况下的微观力学行为，其中最重要的就是 Hamiltonian，一个确定的 Hamiltonian 和确定的初始条件可以决定 Hilbert 空间态的演化，对于凝聚态与等离子体，由于强关联的作用，不能由单粒子 Hamiltonian 描述系统，这时需要对 Hamiltonian 粒子数表象转换，即二次量子化，Hamiltonian 用场的产生湮灭算符来表示，这也避免的相对论因果律颠倒与负概率的出现。然而在量子场论中 Hamiltonian 的量子化只是研究态的其中一步，更多的由 Feynman 的路径积分方法来计算散射振幅，也就是说只需要 Lagrangian 便可以研究现有的可测物理量，实验预测成为纯计算结果。然而就如上面提到的，高能物理有许多物理图像不清楚的地方也有许多解释不了的问题，甚至是无法场论计算的问题如多体强关联，所以我们需要利用量子模拟的途径，研究这些物理过程的 Hamiltonian。

不仅仅是高能物理正在试图用格点论的语言去研究 QCD(量子色动力学)，在凝聚态、等离子体、混沌科学以及宇宙学都需要研究多体物质态的相互作用、联系与演化。由于强相互多体问题不可解导致我们不能解析计算，甚至数值计算也有巨大的计算复杂度，这也意味着我们得让量子态直接告诉我们结果怎样。只要 Hamiltonian 形式相同，参数相同，初始条件相同，那么物理演化最后一定是相同的，所以构造这样一个系统便可以告诉我们待解问题的结果，这就是量子模拟的思路，如图1-1。准确来说量子模拟主要分为两大类<sup>[10]</sup>：

- 数字量子模拟 (DQS)
- 类比量子模拟 (AQS)

DQS 是指通过量子比特构造逻辑门的方式组成一个量子计算机来计算量子系统，由于量子比特是可以处于叠加态的，所以  $N$  个量子比特相当于并行计算了  $O(2^N)$  的逻辑运算，这才能匹敌量子系统指数爆炸的数据规模。AQS 则是构建相同 Hamiltonian 的物理系统，通过测量构造的物理系统的物理量来预测待解问

题的结果。

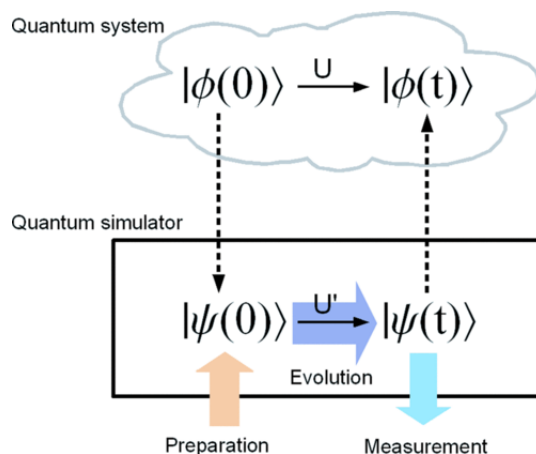


图 1-1 量子模拟原理图, 量子模拟的合法性在于模拟系统与被模拟系统量子态的演化算符是具有相同形式的

Doppler 其中利用冷原子来量子模拟在近几年中得到了越来越多物理学家的关注。自激光发明以后, 激光的相干性与强度非常优异, 还在逐年提升。在 1933 年证明了激光有耗散力与反应力的特点, 促使 1975 年提出利用激光冷却原子的方法。即利用 Doppler 效应使作用在原子上的辐射力由其速度决定, 可以调整失谐量来减速粒子, 这种技术称为 Doppler 冷却<sup>[11] [12]</sup>。在三维上搭建这种激光平台, 以及磁光阱的应用, 可以使原子降低到  $\mu\text{K}$  量级温度。而在后来又相继发展出偏振梯度冷却, 拉曼冷却以及蒸发冷却。而冷原子的发展这才刚刚开始, 在不断降低温度后又发现了在稀薄环境下的 Bose-Einstein 凝聚, 并发现了许多新物理现象<sup>[13] [14]</sup>, 这也开启了另外一个研究方向。而束缚粒子的方法也层出不穷, 离子阱利用磁场来束缚离子或中性原子, 强光所产生的光晶格使得冷原子模拟凝聚态周期体系成为可能, 同样操纵原子与光态也成为了一个主流学科, 光泵浦可以转变原子的磁性, Raman 过程联系了不同能级的跃迁又可以选择速度或冷却原子, 调节 Feshbach 散射长度来控制两体粒子相互作用强度<sup>[15]</sup>, 以及利用自发参量下转换 (SPDC) 来制造纠缠光子态<sup>[16]</sup>, 等等。冷原子体系参数调节是容易的, 包括晶格形状, 隧穿强度, 原子种类极性, 原子自旋以及光的偏振都有高效调整的实验基础。可以说在原子与光物理的背景下操控量子态是更具可行性的, 所以冷原子光晶格平台下模拟高能现象不只是一个漂亮的理论, 还是一个可实现易调控可探测的实验基础。

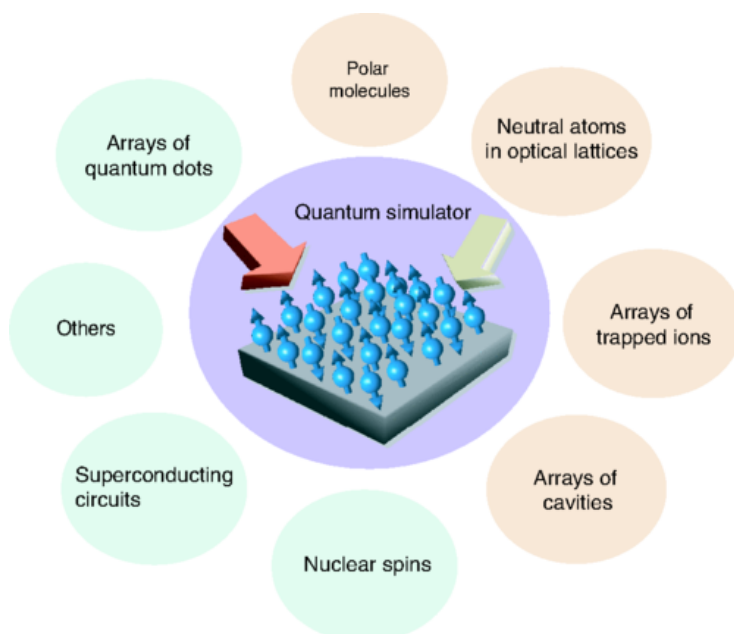


图 1-2 量子模拟平台，包括极化分子、光晶格、离子阱、光腔、核自旋、超导量子电路、量子点等等

### 1.3 量子模拟的研究进展

量子模拟在凝聚态上的工作是出众的，对于强关联的周期格点，讨论集中于 Hubbard 模型上。根据紧束缚理论，在周期晶格跃迁有相互作用的多体问题在低温近似下便可以得到 Hubbard Hamiltonian，并且考察不同粒子波函数的交叠强度，可以得到一部是由自旋多体系统贡献的，在不同的参数范围内便有铁磁与反铁磁的量子相变。对于有较为强的两体排斥相互作用时，便会出现反铁磁的自旋交换过程，也就是 Heisenberg 模型，再通过掺杂便可以构建出 t-J 模型。在光晶格中注入少量冷原子便可以实现这种 Hubbard 模型，研究多体物理问题<sup>[17]</sup>，通过调整冷原子系统的物理参数便可以直接探测到量子相变，Greiner 组通过调节晶格深度从而探测到 Bose-Einstein 凝聚到 Mott 绝缘体的转变<sup>[18]</sup>。而在光晶格注入极化分子，可以调节粒子之间相互作用强度<sup>[19]</sup>，相应的也可以研究自旋系统的量子模拟<sup>[20]</sup>，研究混沌玻璃系统<sup>[21]</sup>乃至加入 Anderson 局域化<sup>[22]</sup>等问题。而凝聚态热点问题更是量子模拟发展的方向，首先是对超导物理的模拟，探究超流与 BCS 态交叉<sup>[23]</sup>，也有对拓扑序的模拟，从而构建非 Abel 的任意子<sup>[24]</sup>，以及通过像旋转光晶格或者 Raman 过程制造人工规范势来模拟任意子或者拓扑物理<sup>[25]</sup>，研究对称性保护的拓扑态 (SPT) 的边缘性质<sup>[26]</sup>，等等。

与上文提到一样，格点场论很自然的过渡到了光晶格的量子模拟，在光晶

格中加入规范场即可<sup>[27]</sup>，这里的规范势可以是 QED 的 U(1) 规范场，也可以是 QCD 的 SU(3) 规范场，U(1) 全局规范势的模拟可以通过旋转光晶格与 Raman 过程产生，然而对于 SU(N) 的非 Abel 局域规范场则需要利用 Quantum Link formulation<sup>[28] [29]</sup> 来模拟。这是一种将规范场等价为角动量算符的方法，利用这种方法，可以探讨 QED 中光子在与电子/正电子相互作用时候所起到的作用，也可以探索 QCD 中胶子与夸克的强禁闭作用<sup>[30]</sup> 与夸克链断裂的动力学过程<sup>[31]</sup>，以及组成其他粒子的机制。为了使高能物理现象更直观，有模拟 Dirac 费米子在相对论下的相互作用<sup>[32]</sup>，有与最近反常霍尔效应结合研究非 Abel 光晶格的 Dirac 费米行为<sup>[33]</sup>，还有像在方晶格中模拟无质量的 Dirac 费米子<sup>[34]</sup>，等等。更多的便是研究量子相变的动力学过程<sup>[35]</sup>，量子相变的研究不仅对凝聚态中相变临界点的工作有帮助，也能让人们更好地理解 Higgs 机制，解释为什么电弱相互作用的玻色子具有质量，甚至有望阐释宇宙学中的暴胀理论。

量子模拟还用到了宇宙学理论中，冷原子中的准粒子激发过程与黑洞视界周围正反粒子激发所产生的 Hawking 辐射有异曲同工之处<sup>[36]</sup>，国外金政实验组也在冷原子系统中发现宇宙学中的 Sakharov 震荡<sup>[37]</sup>，这意味着人们只需要研究冷原子的动力学关联函数即可理解宇宙现象。这种 Quench 后的超流体的非平衡演化过程有大量学者研究，它跟量子相变的临界点物理有关，类似的非时序关联函数还与混沌联系<sup>[38]</sup>。还有用 Bose-Einstein 凝聚研究宇宙膨胀的问题<sup>[39]</sup>。在原子与光物理上也同样可以量子模拟，比如利用超导量子电路模拟腔 QED 研究<sup>[40]</sup>，用囚禁离子模拟非线性干涉仪<sup>[41]</sup>，以及开放系统的模拟<sup>[42]</sup>。

就像上面说明的，国际上已开展对高能费米子相互作用的模拟，这是研究 QCD 规范场的第一步，但是仅限于电子相互作用，没有正电子的产生，没有考虑规范场下 Dirac 费米子完整形式<sup>[32]</sup>，或者没有直观的粒子间的相互作用产生湮灭，没有考察自能修正与顶点修正<sup>[31]</sup>，更多的，一维模型适用范围有限，物理现象单一。总而言之，量子模拟的工作几乎涵盖所有的物理领域，由于像冷原子系统的灵活性以及像囚禁离子的易操作性，量子模拟有较强的通用性与可行性，然而许多工作还只是初步阶段，浅尝辄止，还需要后续的努力与创新。

## 1.4 量子模拟高能现象

在 Wilson 提出格点正规化之后, QCD 格点论已经研究多年, 然而能把这套理论带入实验室的少之又少, 在实验室中看到 QCD 夸克构建核子的过程是非常有趣而又意义的, 也是理解 QCD 相互作用的一个途径。另一方面, 重整化与正规化的结论是理想的, 然而理解重整化的物理参数修正的物理含义还是一个待解的问题, 利用量子模拟高效地看到自能过程, 顶点过程大有裨益, 重新认识巴巴散射、反常磁矩, 强磁场光子分裂, 真空极化等过程, 不论对于 QED 还是对于电弱、强力都是重要课题。说到真空, 真空不空这是继 Dirac 方程问世后的大发现, 电磁场的真空能会短时激发不为零的电磁场, 强光也会在真空传播中折射, 以及还有 Casimir 效应<sup>[43]</sup>, 真空相变、虚假真空<sup>[44]</sup> 等奇妙现象, 通过量子模拟去研究真空不空的物理问题也是极具吸引力的。

所以为了解决 QCD 规范理论多体问题, 以及正视自能修正与顶点修正的发散问题, 甚至解释 Higgs 自发对称破缺的原因, 这都需要构建一个清晰物理图像的理论或实验, 而基于冷原子光晶格模拟含规范场的格点费米子便成为一个不错的研究手段。本文主要研究目的是推断所构建的冷原子系统模拟 QED 物理现象的合法性。本文首先讨论冷原子原理与技术, 介绍一些常用的冷却调控原子方法, 其中正负电子冷原子模拟部分借鉴课题组以往的 Double-Well 光晶格系统以及其完整的 Hamiltonian, 不多赘述, 重点探讨高能物理中正负电子系统的 Hamiltonian, 便于与冷原子系统相互对照。在此基础之上, 探究真空双折射的机理, 并推演真空双折射的 Hamiltonian, 这是研究光子自能修正的一个典型例子, 按照格点化的方法, 我们提出一个新的二维光晶格系统来模拟真空双折射, 最后, 本文讨论实现这样的 Hamiltonian 需要用到的量子模拟手段, 如何构造规范场, 如何构造正负电子态, 以及如何通过可测物理量评估真空双折射的影响程度。

本文给出了正负电子在周期晶格模型中的产生湮灭的动力学 Hamiltonian, 并加入静规范场, 探讨强磁场对相对论电子与光的作用, 为光晶格模拟正负电子产生湮灭与真空双折射奠定基础, 而且所推演的 Hamiltonian 是一般性, 可以应用到凝聚态中的空穴电子对的动力学研究。本文工作是对以往光晶格模拟规范-费米子混合场一般化的归纳与推演, 分析真空双折射的场论解释, 以及首次

给出了高能物理现象在光晶格中实现应满足的 Hamiltonian, 已取得的卓越的成果, 这是研究集体准粒子激发动力学过程的关键一步, 也是研究冷原子模拟高能现象开创性的工作。

## 2 超冷原子

冷原子物理是原子与光物理的一大方向,是激光冷却发展以来饱受关注的量子模拟手段。冷原子顾名思义即温度极低的原子团,速度低也意味着原子之间相互碰撞的影响程度不大。所以冷原子团的单体独立性更强,严格满足 Schrödinger 力学。继量子光学的问世以来,对这种单体系冷原子的操控已经较为成熟,在本征态热化假说<sup>[45] [46]</sup>之下,通过调控相互作用大小与力程、内外自由度的耦合强度以及在位能高低,可以制备所需要的量子态。然而要使原子团到达极低的温度需要一系列的冷却手段,这就是朱棣文前辈们所做的工作。超冷原子有许多有趣的物理现象,首先就是 Bose-Einstein 凝聚,这是一种全部费米子处于同一量子态的状态,由于原子团比较稀薄,这种状态更像费米气体而非固液,这种现象类似于温度 2.17K 以下 He<sub>2</sub>, 表现为集体效应,无粘滞力且以平面波的方式导热,甚至与 BCS 态也是类同的,实质上而言,这些现象是所有原子处在同一个量子态、相位一致的结果。冷原子物理多用于量子信息的物理对象,具有良好的相干性,便于制备纠缠态,也常用于精密测量,而用于多体系统的量子模拟相比其他系统更胜一筹。

### 2.1 量子光学

在介绍冷原子量子模拟之前,需要一些原子分子光物理 (AMO) 有关基础知识,以便于理解光晶格动力学与量子调控方法。量子光学是量子电动力学的分支,主要源于原子与光物理的调控理论与技术的钻研需要,比如通过光调控原子保持原子相干性,实现量子比特翻转和相位差等等。光场从经典场论到量子场论的过渡,研究量子化后的光场对原子作用影响。该学科为量子信息与量子模拟提供了实现技术,也让人们深刻认识了能级系统。量子光学的最基础模型即是二能级系统,讨论半经典情况,在这之前先介绍表象变换。

Schrödinger 方程涵盖了态随时间改变的时间演化算符

$$|\psi(t_0)\rangle \longrightarrow |\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (2.1)$$

其中  $U(t, t_0) = T \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt' \right]$ , T 是时序算符,意味着指数展开的积分需要以时间顺序先后积分,可以看到态的演化完全由 Hamiltonian 决定。表



象是指态在某个参数下概率的分布, 比如  $\psi(x) = \langle x|\psi \rangle$  就是在实坐标下波函数概率, 而绘景是指态与算符的演化关系, 由于可观测物理量只能期望值即  $\langle \psi(t)|A|\psi(t) \rangle$ , 那么我们也可以说态不随时间演化, 而算符随时间演化, 即海森堡绘景  $\langle \psi(t_0)|A(t)|\psi(t_0) \rangle$ , 根据(2.1)只需要把  $A$  替换为  $A(t) = U^\dagger(t, t_0)AU(t, t_0)$ 。而对于二能级系统最常用的是相互作用绘景, 含相互作用的 Hamiltonian 是  $H = H_0 + V_S$ , 相互作用表象下态定义为

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_S(t)\rangle \quad (2.2)$$

非常容易的推导得到

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = V_I(t) |\psi_I(t)\rangle \quad (2.3)$$

其中

$$V_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} V_S(t) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} \quad (2.4)$$

这里的  $V$  可以是不依赖于时间也可以依赖于时间, 我们可以通过相互作用表象去计算二能级系统的本征态。另一个要介绍的是密度矩阵, 用密度矩阵态的演化最大优点在于它可以考虑开放系统, 即可以加入热力学性质, 众所周知, Dirac 态在多体情况下是复杂, 并且不符合热力学统计的, 这里衍生一个概念, 量子平均值与统计平均值是不同的, 叠加态每个本征态的量子概率合整仍是一个单态, 而统计平均则是多态的热力学概率。密度矩阵的定义是

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.5)$$

其中  $\sum_i P_i = 1$  是热力学概率满足概率归一, 如果是纯态, 则  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ , 可以看到纯态  $\rho^2 = \rho$  而热学混合态  $\rho^2 \leq \rho$ , 根据 Schrödinger 方程与密度矩阵的定义, 很容易得到密度矩阵的演化方程 (Schrödinger-von Neumann 方程)

$$\partial_t \rho = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \quad (2.6)$$

还可以得到热力学期望值

$$\langle \langle A \rangle \rangle = \sum_\alpha P_\alpha \langle \psi_\alpha | A | \psi_\alpha \rangle = \text{Tr}[A\rho] \quad (2.7)$$

现在来讨论二能级系统, 原子具有内外自由度, 分别是原子中电子能级与原子整体的动量, 如果用经典力学来解释, 即整体动能与相对动能的关系。在时间尺度差异较大时, 两个自由度可以说是独立的, 一般由于内部自由度时间尺度远远小于外部, 所以可以理解为内部自由度先平衡后再对外部影响。考虑经典平面

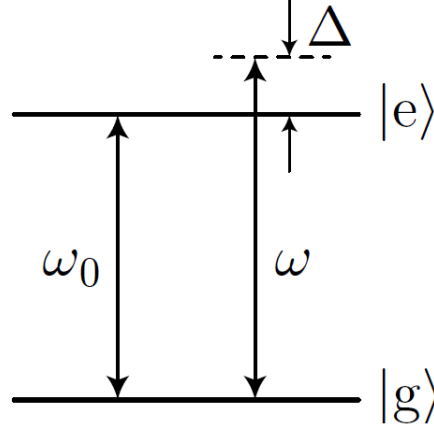


图 2-1 二能级系统示意图，上能态为  $|e\rangle$ ，下能态为  $|g\rangle$ ，能级差  $\omega_0$ ，光频为  $\omega$  且具有  $\Delta$  的失谐量

波电磁场，由于  $B = E/c$  对于氢原子模型中，只需要考虑电场，在电偶极子近似下，即原子尺度远小于电磁场波长时，原子感受的电场为  $\mathbf{E}(t) = \hat{\epsilon} E_0 \cos(\omega t)$ 。再看原子二能级，在电场中电子与核受驱动产生电偶极子，上能态为  $|e\rangle$  能量  $\hbar\omega_0$ ，下能态为  $|g\rangle$  能量为 0，如图2-1，有 Hamiltonian

$$H = \hbar\omega_0|e\rangle\langle e| - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad (2.8)$$

其中  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$  是电偶极子，根据二能级归一性  $|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = 1$  展开相互作用 Hamiltonian，由于电偶极子期望值是实的，可以定义  $\Omega = \frac{e\langle e|\mathbf{r}|g\rangle \cdot \mathbf{E}_0}{\hbar}$  称作 Rabi 频率，简化为两部分

$$H_0 = \hbar\omega_0|e\rangle\langle e| \quad V_S = \hbar\Omega(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)\cos(\omega t + \phi) \quad (2.9)$$

由于仪器本身无法探测两个信号中频率极大的信号，最后取时间平均后这部分可以忽略不计，所以可以用旋转波近似，即忽略掉频率极大的部分  $e^{\pm i[(\omega_0 + \omega)t + \phi]}$ ，根据(2.4)可以演绎出相互作用表象下的二能级体系

$$V_I(t) = \frac{1}{2}\hbar\Omega(|e\rangle\langle g|e^{i(\omega_0 - \omega)t - \phi} + |g\rangle\langle e|e^{-i(\omega_0 - \omega)t + \phi}) \quad (2.10)$$

考虑共振情况 ( $\omega_0 - \omega = 0$ )，限定初始条件  $|\psi(0)\rangle = |g\rangle$  可以通过(2.3)得到一个二元方程组，能看到

$$V_I = \begin{bmatrix} \hbar\omega_0 & \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i\phi} \\ \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

可以通过求  $V_I$  的本征值来得到光场下的相互作用表象本征能量与本征态演化

$$|\psi_I(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)|g\rangle - ie^{i\phi}\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)|e\rangle \quad (2.12)$$

最后只需要在不同态前加上无光场下的能量动力学相位因子即可，而这种随时间演化的态就称作缀饰态，即把光场加进原子的能态上。

光场量子化可以通过谐振腔求解波模电场与磁场，也可以直接通过电磁场的 Lagrangian 加上 Lorentz 规范，这里我们直接从量子场论的方式出发。规范 (gauge) 是场论中重要的概念，不论是电磁场还是弱场强场都是满足不同的规范对称性的，规范变换不改变实际的物理量，所以选择一种规范形式是允许的，在量子场论中 Feynman 提出了直接在 Lagrangian 中加入规范项即可使得 Lagrangian 具备 Lorentz 协变性

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.13)$$

这里声明 Einstein 求和指标  $\mu, \nu$  是四维 Minkowski 矢量指标，而  $i, j$  是三维 Euclidean 矢量指标。如果考虑 Lorentz 规范则  $\lambda = 1$ ，有

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \quad (2.14)$$

按照套路，可以求得正则动量

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu \quad (2.15)$$

将 Lagrangian 代入到 Hamiltonian 中可以得到

$$\begin{aligned} H = P^0 &= \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \right) d^3x \\ &= \int \left( -\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \right) d^3x \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \left( \dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \vec{\nabla} A^\mu \cdot \vec{\nabla} A_\mu \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

然后根据正则量子化条件

$$\begin{aligned} [A_\mu(t, \vec{x}), \Pi_\nu(t, \vec{x}')] &= ig_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ [A_\mu(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{x}')] &= [\dot{A}_\mu(t, \vec{x}), \dot{A}_\nu(t, \vec{x}')] = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

这里需要注意的是原先对电磁场的约束比如 Lorentz 规范不再是矢势约束，因为算符化应是对算符期望值的约束，即  $\langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0$ ，这样才能满足对易关系，称作弱 Lorentz 规范。过渡到动量空间后加入物理常数直接量子化场

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k \epsilon_0 \hbar^{-1}}} \sum_{\sigma=1}^4 \epsilon_\mu^{(\sigma)}(k) \left[ a_{(\sigma)}(k) e^{-ik \cdot x} + a_{(\sigma)}^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right] \quad (2.18)$$

其中  $\epsilon^{(\sigma)}$  指  $\sigma$  光极化分量的偏振矢量，(极化分量可以分别是 x, y 方向也可以分别是左旋右旋)， $ik \cdot x$  是四维矢量内积，把上式代入到(2.17)即可以得到产生湮灭

算符的对易关系, 自然证明上式即为量子化的场, 这样便可以考虑多体与 Dirac 效应的物理过程。最后顺手把 Hamiltonian 量子化

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{k} \sum_s \hbar\omega \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right] \quad (2.19)$$

产生湮灭算符常用于粒子数表象, 通过对易关系  $[a, a^\dagger] = 1$  可以推出粒子数算符, 对于单模光子湮灭算符定义是

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} |n-1\rangle \langle n| \sqrt{n} \quad (2.20)$$

这里  $n$  代表光子数, 根据(2.18)可以看出电场可以写成产生湮灭算符的形式, 暂时不考虑物理学常数与偏振,  $a$  总是与  $e^{-i(\omega t + \phi)}$  在一起, 而  $a^\dagger$  与  $e^{+i(\omega t + \phi)}$  搭配, 这是满足能量守恒, 旋转波近似的运用意味着能量不守恒只是暂时的, 时间平均后能量是守恒的。从  $\mathbf{E}_0$  分离出来产生湮灭算符再与(2.9)结合可以得到

$$\tilde{H} = \hbar\omega_0 |\mathbf{e}\rangle \langle \mathbf{e}| + \hbar g (\sigma a^\dagger e^{+i(\omega t + \phi)} + \sigma^\dagger a e^{-i(\omega t + \phi)}) \quad (2.21)$$

在当我们考虑到光场的能量时候, 这里的耦合作用是光场相互作用表象, 可以通过光场自能项将 Hamiltonian 从光场相互作用表象转换到光场 Schrödinger 表象, 这时产生湮灭动力学相位因子消失

$$H = \hbar\omega_0 |\mathbf{e}\rangle \langle \mathbf{e}| + \hbar g (\sigma a^\dagger e^{+i\phi} + \sigma^\dagger a e^{-i\phi}) + \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.22)$$

其中  $\sigma = |g\rangle \langle e|$ ,  $g = \hbar\Omega/2$ , 第二项正是光场与原子能级耦合 Hamiltonian, 第三项是单模光场的能量。当失谐量  $\phi = 0$  时, 这其实与之后的正负电子产生湮灭是类同的, 因为根据 Dirac 的解释正负电子产生即电子从负能级被强光激励跃迁到正能级的基态上, 只是  $\sigma$  转换成正负电子产生算符。

量子光学还有一个重要的物理概念, 它是系统处于开放体系中存在多光子跃迁的结果, 即自发辐射。通过场论中重整化的方法, 其实可以将多光子耗散过程约化为对能量的修正。首先考虑两点关联函数 (Green 函数), 自由场 Green 函数可以通过路径积分获得

$$G_0(\mathbf{x}, \tau) \equiv \langle \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \phi(0, 0) \rangle \equiv \frac{\int D\phi (\bar{\phi}(\mathbf{x}) \phi(0)) e^{-S_0[\phi]}}{\int D\phi e^{-S_0[\phi]}} \quad (2.23)$$

参考凝聚态场论内容<sup>[47]</sup>, 可以得到在相干态表象下的作用量为

$$S_0[\bar{\psi}, \psi] = \int_0^\beta d\tau [\bar{\psi} \partial_\tau \psi + H(\bar{\psi}, \psi)] \quad (2.24)$$

通过 Gauss 函数两点函数的计算方法<sup>[47]</sup>, 可以得到动量空间下一个 Matsubara 频

率的 Green 函数

$$\hat{G}_0(\omega_n) = \frac{1}{-i\omega_n - H} \quad (2.25)$$

自发辐射的过程不是激发态一次性跃迁到基态的过程，而是有释放的光子再激发再辐射的级数过程，如图2-2，假设与光场作用的过程有  $i\hbar\hat{\Gamma}/2$  路径过程，则

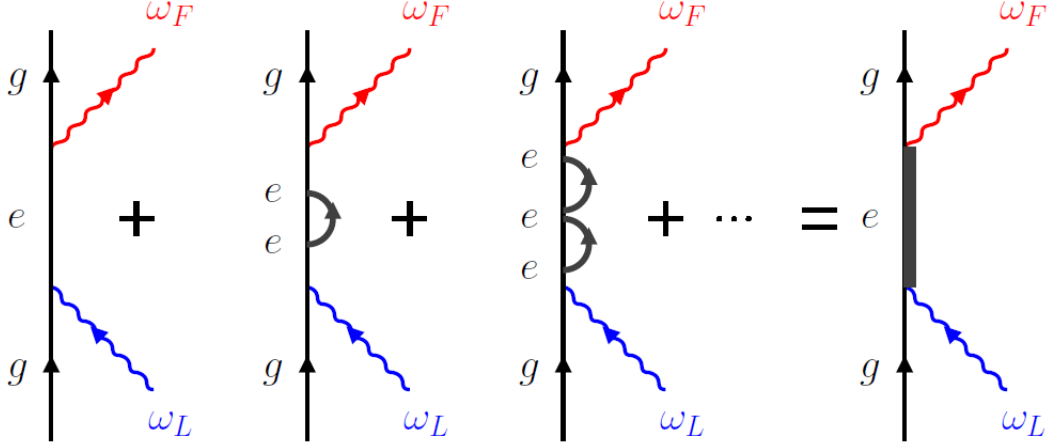


图 2-2 自发辐射的多光子过程，光激励原子从基态  $g$  到激发态  $e$  的跃迁，然后原子从激发态自发辐射回基态，然而这个过程可能是存在原子在  $e$  能级时向其他能级跃迁又跃迁回  $e$  能级这种多光子过程，Dyson 级数求和可以得到最右边重整化后结果

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \frac{i\hbar}{2} \hat{\Gamma} \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \frac{i\hbar}{2} \hat{\Gamma} \hat{G}_0 \frac{i\hbar}{2} \hat{\Gamma} \hat{G}_0 + \cdots = \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \frac{i\hbar}{2} \hat{\Gamma} \hat{G} \quad (2.26)$$

这就是 Dyson 级数，然后通过迭代计算求出

$$\hat{G}(\omega_n) = \left[ \left( -i\omega_n + \hat{H} - \frac{i\hbar}{2} \hat{\Gamma} \right)^{-1} \right] \quad (2.27)$$

可以看到，自发辐射的影响如同量子场论中的重整化思想一样，只是需要把 Hamiltonian 加上  $-i\hbar\hat{\Gamma}/2$  即可，如果代入到时间演化算符中发现重整化这项导致系统 Hamiltonian 非厄密，成为激发态的耗散项，具体计算细节参见原子与光相互作用<sup>[48]</sup>。经过对自发辐射理解，可以直接引出光学 Bloch 方程，该方程可以解决开放系统含自发辐射问题。已经介绍了密度矩阵的演化方程(2.6)，在二能

级系统中如果让能级差与 Rabi 频率为 0，只考虑耗散

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho_{ee} &= -\Gamma \rho_{ee} \\
 \partial_t \rho_{gg} &= +\Gamma \rho_{ee} \\
 \partial_t \rho_{ge} &= -\frac{\Gamma}{2} \rho_{ge} \\
 \partial_t \rho_{eg} &= -\frac{\Gamma}{2} \rho_{eg}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

最后把这些项加入到演化方程，即得到光学 Bloch 方程

$$\frac{d\rho_A}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_A] + \left( \frac{d\rho_A}{dt} \right)_{\text{spont}} \tag{2.29}$$

有了光学 Bloch 方程便可以得到原子在光场下的耗散力与反应力以及在光场下原子能级与外部自由度的演化，这正是激光冷却的关键所在。

## 2.2 冷却原理

激光冷却发展之前，主要是通过热力学冷却，比如蒸发冷却、压缩冷却、节流冷却等等传统非量子冷却法，然而量子力学的建立，原子温度体现在原子振动能级上，所以通过降低原子振动能级能够进一步冷却。在原子团中，由于测不准原理，速度总是有一定的不确定度的，可以利用 Gauss 函数的不确定度来定义温度。再者要使原子速度集中在 Gauss 函数峰值，还需要让光场力有速度依赖性，才能改变速度分布不确定度。对于速度在囚禁速度范围内，光场比较弱的情况，可以利用两束同波矢对打的激光来冷却，首先考虑辐射力的推导，对于开放准共振系统原子在  $\mathbf{R}$  处求平均力依(2.7)推得

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{R}, t) = -\text{Tr} \left\{ \hat{\rho}_{st} \vec{\nabla} \hat{V}(\vec{R}, t) \right\} = \vec{\mathcal{F}}_{\text{dissip}} + \vec{\mathcal{F}}_{\text{react}} \tag{2.30}$$

经过光学 Bloch 方程得到稳态密度矩阵后便可以得到第一项耗散力与第二项反应力，其中耗散力可以表示为

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{dissip}} = \hbar \vec{k}_L \Gamma \frac{\Omega^2/4}{\delta^2 + (\Gamma^2/4) + (\Omega^2/2)} \tag{2.31}$$

耗散力根据密度矩阵可以看到  $\vec{\mathcal{F}}_{\text{dissip}} = \hbar \vec{k}_L \Gamma \sigma_{ee}^{\text{st}} = \hbar \vec{k}_L \left\langle \frac{dN_{\text{spont}}}{dt} \right\rangle$ ，相当于单位时间内动量改变了自发辐射次数乘以单次改变动量的大小，这意味着激发态寿命越短耗散力作用越强，同样的有反应力

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{react}} = -\frac{\hbar \delta}{4} \frac{\vec{\nabla} \Omega^2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4) + (\Omega^2/2)} \tag{2.32}$$

平面波是没有振幅梯度的，一般是通过光的叠加来产生振幅梯度，比如形成驻波场，而能量从一个光场经过原子传递给另一个光场，从而可以定义光驻波场的势能，对于蓝失谐振情况振幅越小势能越小，相反红失谐振振幅越小势能越大。这其实可以通过缀饰态来解释，缀饰态表示为  $|g, N+1\rangle$  和  $|e, N\rangle$ ，光驻波场为

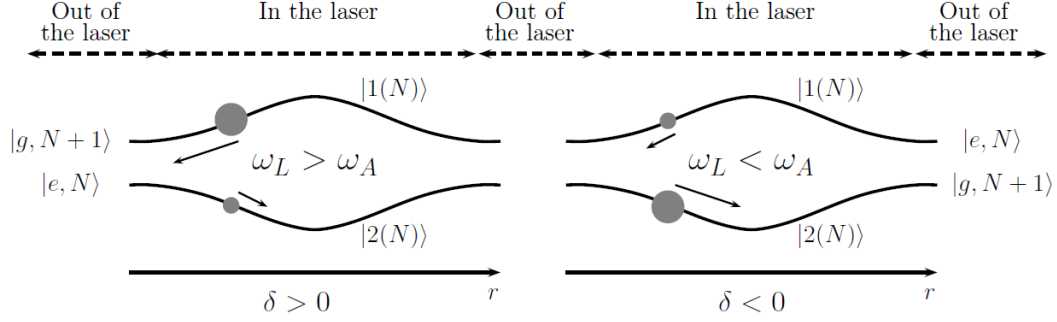


图 2-3 缀饰态能级在坐标  $x$  上的变化，圆圈大小代表布局数的大小

$\Omega = \Omega_0 \sin(k_L x)$ ，对于失谐量为  $\delta$  的 Hamiltonian 表示为

$$H = \begin{bmatrix} \hbar\delta & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

可以求本征值得到缀饰态的能量随光场纵方向的变化修正

$$\hbar\tilde{\Omega}(x) = \hbar [(\omega_L - \omega_0)^2 + \Omega_0^2 \sin^2(k_L x)]^{1/2} \quad (2.34)$$

这样不论是红失谐还是蓝失谐在缀饰态能量空间分布上都有从能量高迁移到能量低的趋势，如图2-3。通过对辐射力的讨论，激光冷却实现便成为了可能。对于弱行波场可以通过 Doppler 频移来减速<sup>[49]</sup>，物理上也容易解释，与光传播方向相向的原子感受到光的频率有增加，对于红失谐情况只有这种相向运动的原子被激发，从而获得与速度方向相反的动量，然后随即自发辐射，由于自发辐射的光的概率是各向同性的，这样不会改变原子动量，最后使得囚禁速度范围内的原子都减速下来。假设原子内部时间尺度远远小于外部时间尺度，则可以直接用耗散力来处理 Doppler 冷却，由于原子在移动，原子感受到相向而来的电场为  $\vec{E}_L(\vec{R}, t) = \vec{e}_L \mathcal{E}_L \cos[\omega_L t + \vec{k}_L \cdot \vec{R}] = \vec{e}_L \mathcal{E}_L \cos((\omega_L + \vec{k}_L \cdot \vec{v})t)$ ，对于耗散力则为

$$\mathcal{F}(v) = -\hbar k_L \Gamma \frac{\Omega^2/4}{(\omega_L + k_L v - \omega_A)^2 + (\Gamma^2/4) + (\Omega^2/2)} \quad (2.35)$$

如果在速度为 0 处展开耗散力，可以得到一阶速度系数，类似于阻尼因子

$$\alpha = \hbar k_L^2 \frac{s}{(1+s)^2} \frac{(-\delta)\Gamma}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \quad (2.36)$$

其中  $s = (\Omega^2/2) / (\delta^2 + \Gamma^2/4)$  是饱和参量，正是弱行波场，如果是两束对打的激

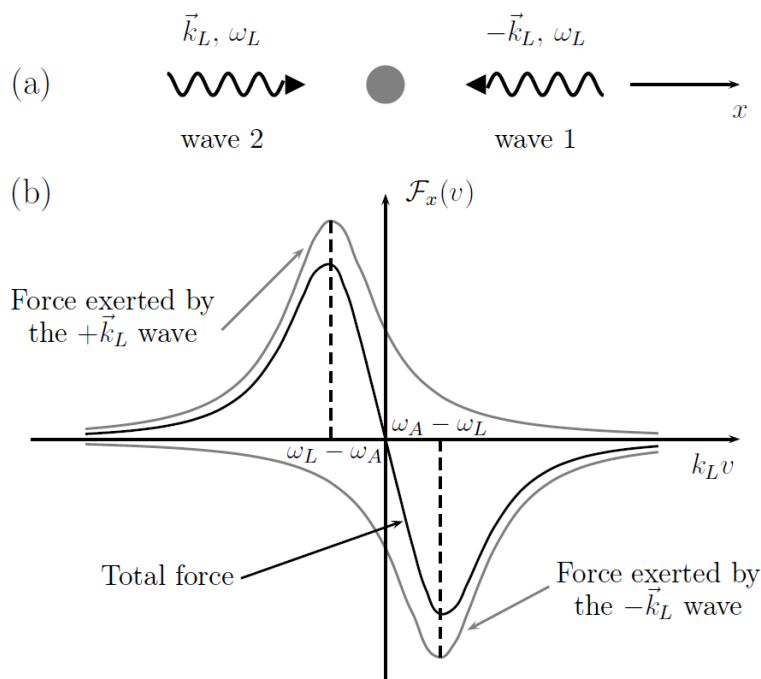


图 2-4 Doppler 冷却耗散力空间分布，灰线指只有一束方向弱光时力的分布，在  $|\omega_L - \omega_A|$  分别取极值，黑线是两束方向相反的光对原子力的作用叠加

光可以忽略形成的驻波场，这是因为空间平均下来为 0，这就是 Doppler 冷却的原型，只需要将 xyz 三轴都加上这种对打的弱激光即可，在一个方向上阻尼因子相应的乘以 2。当光强较强时候，就得考虑多光子跃迁的影响，这时原子在一次自发辐射的过程将会得到极大的动量，这反而会引起原子加速。强驻波场也可以直接用缀饰态来解释，这时候反而是需要蓝失谐才能到达减速的作用。

根据光学 Bloch 方程一般是求前一时刻密度矩阵的稳态值，而后来密度矩阵的演化由当前密度矩阵值与前一时刻的稳态值差决定，这意味着密度矩阵或者布局数是有时间延迟的，相当于上一时刻的布局数。正如(2.34)所提到的缀饰态的能量随空间的分布修正，由于有自发辐射的影响，原子的寿命不是无限长的，这体现在原子能级有一定的展宽，同样缀饰态也会受自发辐射的影响，如同上面(2.33)，加入自发辐射失谐量为  $\delta$  的 Hamiltonian 表示为

$$H = \begin{bmatrix} \hbar\delta & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & -\frac{1}{2}i\hbar\Gamma \end{bmatrix} \quad (2.37)$$



通过微扰论方法可以初略得到

$$\Delta E_{|g, N+1\rangle}^{\Gamma} = -\frac{1}{2}i\hbar\Gamma\frac{\Omega^2}{4\delta^2 + \Gamma^2} \quad \Delta E_{|e, N\rangle}^{\Gamma} = +\frac{1}{2}i\hbar\Gamma\frac{\Omega^2}{4\delta^2 + \Gamma^2} \quad (2.38)$$

如果原子有一个  $x$  正方向移动速度，对于处于缀饰态能量峰值两边的原子，它

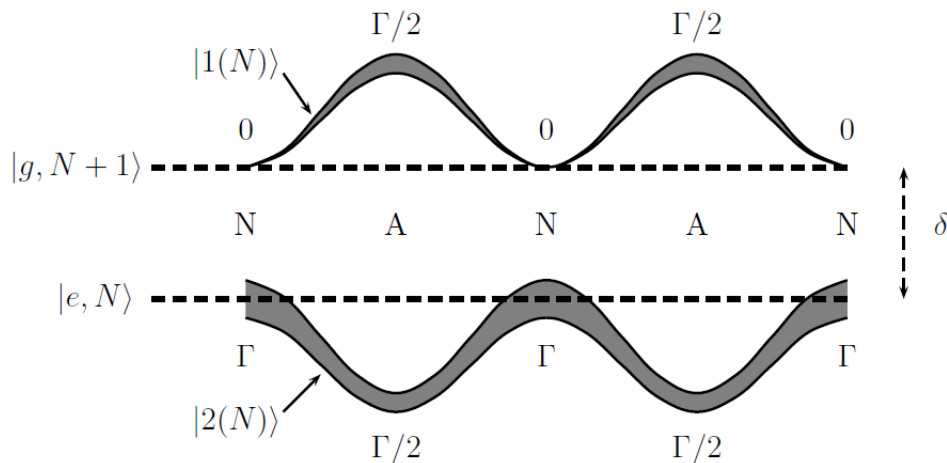


图 2-5 蓝失谐下强驻波场的缀饰态能量空间分布， $\delta$  是蓝失谐量，能量高低由光场振幅决定，阴影部分代表自发辐射强度，宽度越宽，在该能级寿命也就越短，自发辐射强度同样也是与光场振幅有关

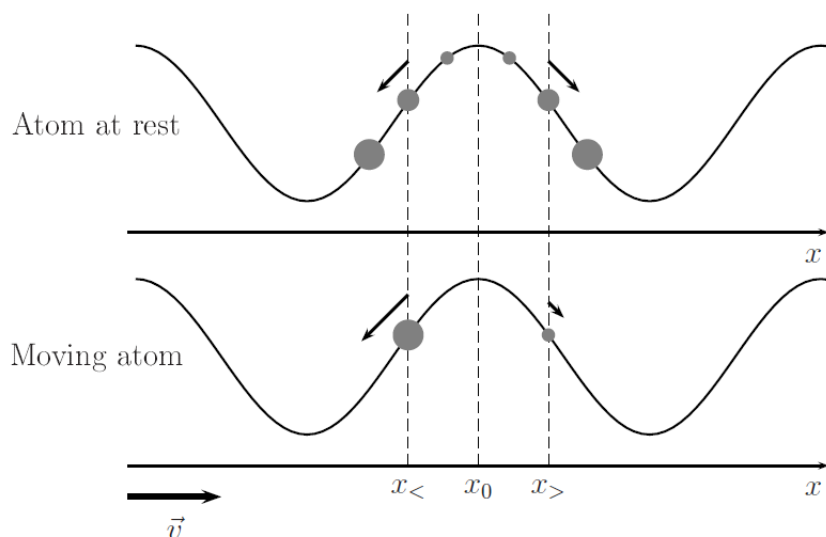


图 2-6 蓝失谐下强驻波场冷却示意图，对于向  $x$  正方向运动的原子团，圆圈大小代表稳定时布局数大小

们所受辐射力方向是相反的，但是左端原子团的布局数是上一时刻离峰值更远的稳定值，而在右端原子团布局数是离峰值更近的稳定值，由于离峰值近的寿命短，所以左端布局数总是比右端布局数多，如图2-6，这样就会有整体减速的

作用，这里原子的动能都转换到了光场中，这种冷却方法也叫作 Sisyphus 冷却。有了这个系统，我们就可以在光晶格下进行冷却，让原子处于晶格谷底当中，这在光晶格 Wannier 态约化是至关重要的。

更多的冷却方法类似于这种 Sisyphus 冷却机制，有偏振梯度冷却、磁致冷却等等，这些冷却手段都可以将原子团进一步冷却，最后通过蒸发冷却等可将原子团冷却至 100nK 左右，在实验上也容易实现，这里不再赘述。

## 2.3 Raman 过程

原子能级是复杂多样的，如果叠加上原子外部自由度，比如原子整体动能等，原子能级将更加复杂。在研究晶格及分子的振动模式、旋转模式时，往往通过光的散射谱来测量，这是因为在考虑到这些复杂能级的叠加后，往往散射过程是非弹性散射，吸收与辐射的光能量是不相同的，这种散射称作 Raman 散射。非弹性散射的原因在于激光与声子有相互作用，导致最后光子能量增加或减少，我们通过这些能量的变化就可以知道声子模式。对于 Raman 散射，可以简化为 3 能级系统，如图2-7所示，我们加入两束激光  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_1 E_{01} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t) +$

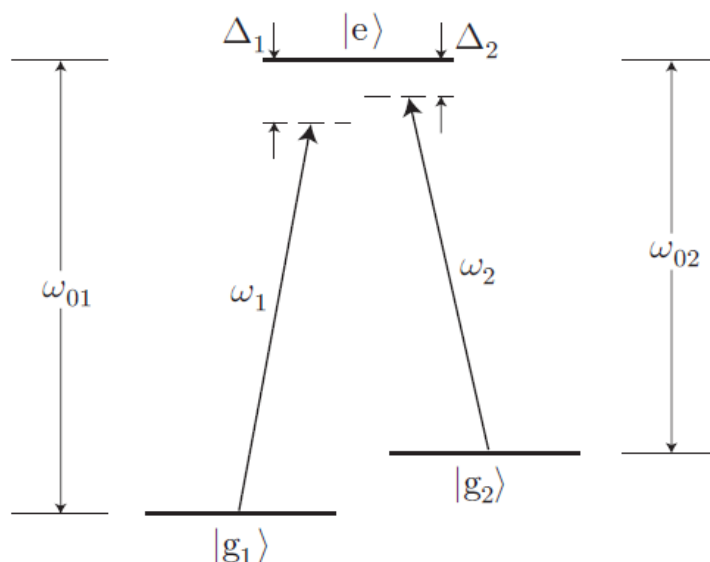


图 2-7 3 能级系统示意图, 两束光频率分别为  $\omega_1, \omega_2$ , 这里有两个低能级  $|g_1\rangle, |g_2\rangle$  和一个对应失谐量为  $\Delta_1, \Delta_2$  的高能级  $|e\rangle$

$\hat{\mathbf{e}}_2 E_{02} \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)$ , 对于一个自由原子具有三能级的 Hamiltonian 表示为

$$H_A = \frac{p^2}{2m} - \hbar\omega_{01} |g_1\rangle \langle g_1| - \hbar\omega_{02} |g_2\rangle \langle g_2| \quad (2.39)$$

正如第一小节所讨论的,在旋转波近似下忽略掉高频项,剩余的原子与场的相互作用项可以写成

$$H_{AF} = \frac{\hbar\Omega_1}{2} \left( \sigma_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} e^{i\omega_1 t} + \sigma_1^\dagger e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_1 t} \right) + \frac{\hbar\Omega_2}{2} \left( \sigma_2 e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} e^{i\omega_2 t} + \sigma_2^\dagger e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_2 t} \right) \quad (2.40)$$

其中  $\sigma_\alpha = |g_\alpha\rangle\langle e|$  为原子能级的降算符,升算符是其厄密共轭以及  $\Omega_\alpha = \frac{-\langle g_\alpha | \hat{\epsilon}_\alpha \cdot \mathbf{d} | e \rangle E_{0\alpha}}{\hbar}$  为 Rabi 频率,我们可以令  $\Delta_\alpha = \omega_\alpha - \omega_{0\alpha}$ , 转换到相互作用表象,即可以消掉  $\omega_\alpha$  频率项,并且利用 Schrödinger 方程与态的一般表示  $|\psi\rangle = \psi_{g_1}|g_1\rangle + \psi_{g_2}|g_2\rangle + \psi_e|e\rangle$ , 得到

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi_e &= \frac{p^2}{2m}\psi_e + \frac{\hbar\Omega_1}{2}e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}\psi_{g_1} + \frac{\hbar\Omega_2}{2}e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}\psi_{g_2} - \hbar\Delta\psi_e \\ i\hbar\partial_t\psi_{g_1} &= \frac{p^2}{2m}\psi_{g_1} + \frac{\hbar\Omega_1}{2}e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}\psi_e + \hbar(\Delta_1 - \Delta)\psi_{g_1} \\ i\hbar\partial_t\psi_{g_2} &= \frac{p^2}{2m}\psi_{g_2} + \frac{\hbar\Omega_2}{2}e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}\psi_e + \hbar(\Delta_2 - \Delta)\psi_{g_2} \end{aligned} \quad (2.41)$$

其中  $\Delta = (\Delta_1 + \Delta_2)/2$ 。这里要求自发辐射展宽要远远小于失谐量 ( $\Gamma \ll \Delta$ ), 这样最高能级的自发辐射可以忽略不计。并且从时间尺度来看,最高能级反应时间远远快于另两能级,所以我们讨论该系统的稳态,即最高能级不再有布局变化 ( $\partial_t\psi_e = 0$ ), 如果失谐量很大  $\frac{p^2}{2m} \ll \hbar|\Delta|$  则

$$\psi_e = \frac{\Omega_1}{2\Delta}e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}\psi_{g_1} + \frac{\Omega_2}{2\Delta}e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}\psi_{g_2} \quad (2.42)$$

有了这个关系,可以替换掉(2.41)中的  $e$  能级,在这种  $e$  能级稳定后的绝热近似下,便可以认为另两能级是独立演化的,这样就有

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi_{g_1} &= \frac{p^2}{2m}\psi_{g_1} + [\hbar\Delta_1 + \hbar\omega_{AC1}]\psi_{g_1} + \frac{\hbar\Omega_R}{2}e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}}\psi_{g_2} \\ i\hbar\partial_t\psi_{g_2} &= \frac{p^2}{2m}\psi_{g_2} + [\hbar\Delta_2 + \hbar\omega_{AC2}]\psi_{g_2} + \frac{\hbar\Omega_R}{2}e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}}\psi_{g_1} \end{aligned} \quad (2.43)$$

其中很重要的是 Raman-Rabi 频率  $\Omega_R = \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Delta}$  和 Stark 偏移  $\omega_{AC\alpha} = \frac{\Omega_\alpha^2}{4\Delta}$ , 并且可以转换成 Hamiltonian 形式

$$H_R = \frac{p^2}{2m} + \hbar(\Delta_1 + \omega_{AC1})|g_1\rangle\langle g_1| + \hbar(\Delta_2 + \omega_{AC2})|g_2\rangle\langle g_2| + \frac{\hbar\Omega_R}{2} \left( \sigma_R e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}} + \sigma_R^\dagger e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} \right) \quad (2.44)$$

其中  $\sigma_R = |g_1\rangle\langle g_2|$ , 这样吸收光频为  $\omega_1$  而辐射的光频  $\omega_2$ , 这就是 Raman 散射的结果。Raman 过程是重要的调控手段,它克服了选择定则跃迁禁闭问题,还可以使得 Rabi 频率的调控更加灵活。在后面我们会利用 Raman 光改变晶格之间隧穿强度的大小,并且可以构造人工规范势,便于讨论规范场下的费米子行为。

## 2.4 光晶格模型

冷原子量子模拟最重要的一个实验平台就是光晶格，光晶格是通过  $xyz$  三个方向对打 6 束相干激光来实现的 3 维势阱，其中可以调节激光波长来使得势阱的大小与势阱数量，通过在两个方向对打短波长激光再在  $z$  轴上对打波长较大的单深势阱，即可以构造出 2 维光晶格系统，用于研究 2 维多体物理。正如冷却原理提到的，在蓝失谐情况下，原子团总是趋于向光场振幅低的波节处，通过缀饰态能量的考察也可以推理得。这相当于构造了一个周期势垒，类似于固体物理中电子所处环境。而由于激光是高斯光束，本身会有高阶谐波的影响，导致原子更集中于光束束腰部，这能使得原子团处于一个封闭系统。通过激光冷却，可

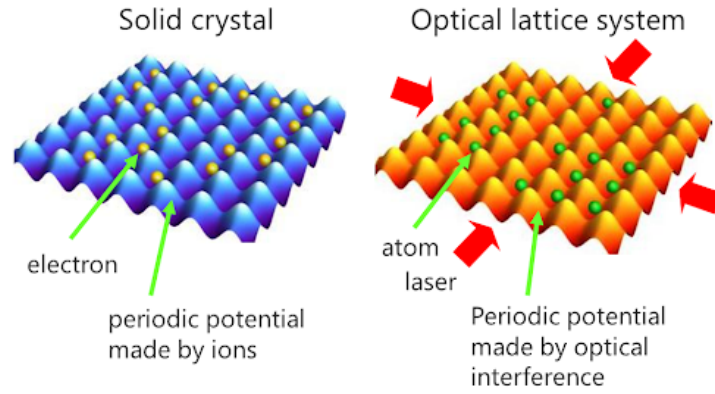


图 2-8 光晶格实验平台示意图，右图利用  $xy$  方向上的四束蓝失谐强光干涉形成周期晶格场，左图是与固体中周期晶格作类比

以使得原子团处在波节处，并且是接近基态的量子态，这种类似于谐振子基态的量子态称作 Wannier 态，相当于一种空间局域态，由于晶格具有周期性，在晶格场中的平面波可用 Bloch 函数来组成，单波矢  $\mathbf{n}$  能级的 Bloch 函数可以描述为

$$\psi_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}) \quad (2.45)$$

其中  $u_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$  的周期函数，每个格点上的 Wannier 态调制相位后加起来就是该周期函数，Wannier 态的定义是

$$|\psi_{\mathbf{R}n}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}}^{\text{B.Z.}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} |\psi_{\mathbf{k}n}\rangle \quad |\psi_{\mathbf{k}n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} |\psi_{\mathbf{R}n}\rangle \quad (2.46)$$

如果二次量子化的形式表示

$$a_{i\sigma}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}}^{\text{B.Z.}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \quad a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} a_{i\sigma}^\dagger \quad (2.47)$$

由于是在低温热化假说下，原子团尽可能的处在基态上，按照紧束缚模型解释，晶格之间只有量子隧穿，而隧穿强度由波函数的交叠情况而定。这时可以将连续 Hilbert 空间表达的动能表象变换到晶格位点表象，得到的晶格中原子动能

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{ii'} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i'})} \epsilon_{\mathbf{k}} a_{i\sigma}^\dagger a_{i'\sigma} \equiv \sum_{ii'} a_{i\sigma}^\dagger t_{ii'} a_{i'\sigma} \quad (2.48)$$

其中  $t_{ii'}$  就是原子在晶格之间的隧穿强度。同样相互作用也在 Hilbert 空间中表述，当在原子极限下，即原子之间离得较远，比如原子团比较稀薄时，远距离的隧穿与相互作用可以忽略不计时，简化后的 Hamiltonian

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle ij \rangle} a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma} + U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow} + \sum_{i < j} V_d(j-i) \hat{n}_i \hat{n}_j \quad (2.49)$$

其中  $V_d(j-i) = \lambda(j-i)^{-3}$  是偶极势或者其他形式的势，这正是 Hubbard 模型，是描述光晶格系统最有效的 Hamiltonian 模型，其中第一项是隧穿项，意味着一处原子湮灭在最近邻处产生，第二项是同位点上自旋相反的相互作用，第三项是通过改变原子或者分子的极化来产生的偶极相互作用，这在光晶格中都是常利用的调控变量。

当物体处于接近绝对零度的状态时，热涨落被冻结，但是量子涨落效应更加显著，此时熵仍有残余，通过调节参量如掺杂或相互作用大小等就可以出现相变，这种叫量子相变。在光晶格中，如果是玻色子，可以通过调节光晶格的晶格深度产生超流-Mott 相变<sup>[18]</sup>，对于费米子，也可以调节 Feshbach 共振改变相互作用强弱产生金属-Mott 相变<sup>[50]</sup>。并且通过将光晶格平台旋转，很容易产生等效的磁规范，能产生实际不能达到的磁强度。实验中也成功利用量子气体显微镜对单个原子的行为拍“快照”，提供探测原子关联等物理量的一个途径。这些实验的成功，使得利用光晶格中冷原子研究量子相变迅速成为研究的热门方向。

光晶格还不只是矩形的，还可以通过调整激光对打方向来产生多边形的晶格，比如六角晶格，这就类似于石墨烯的结构，可以研究石墨烯中 Dirac 锥等对称性破缺问题<sup>[51]</sup>，利用人工规范势<sup>[52]</sup>还可以研究拓扑绝缘体物理性质，以及考虑自旋轨道耦合对六角晶格影响<sup>[53]</sup>。而构造三角晶格可以研究自旋阻挫<sup>[54]</sup>，几何阻挫系统有着许多类似自旋液体和自旋冰的有趣现象，相互作用导致的电荷序和磁序依旧是强关联体系的研究热点。

光晶格也可以研究量子信息的问题，由于温度低，原子之间的相干关系也保持在较为清晰的程度，这样有利于原子纠缠态的制备，可以制造大规模的量子比

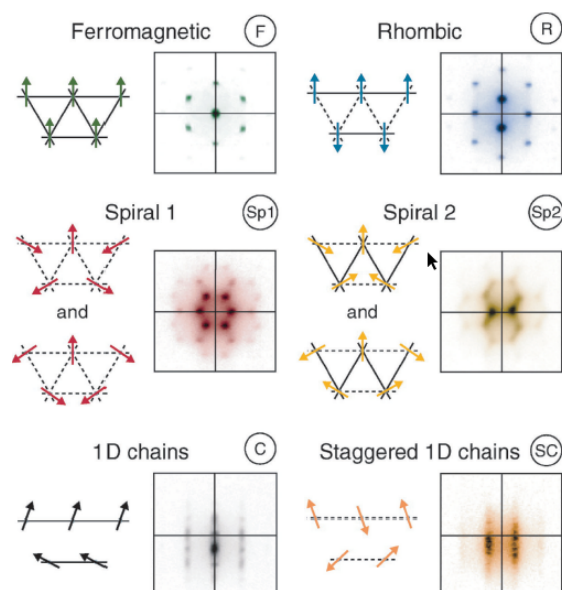


图 2-9 其他形状光晶格模拟自旋阻挫，可以通过改变耦合参数来改变将铁磁(实线)转变为反铁磁(虚线)，从而改变自旋配置

特的纠缠，而在原子钟、量子态的操纵，相干态性质的研究和量子计算等领域内都有着重要的应用价值。总之，光晶格在维度、几何、关联、有序上都有极强的可控性，成为量子模拟研究中炙手可热的平台。

## 2.5 Hilbert 空间截断-准粒子激发

在常温下，原子处在各种量子态上，满足热力统计分布，需要考虑大量的态的叠加，情况非常复杂，不便于研究与推广，这就需要简化物理模型。在冷原子物理中，通过冷却手段降到极低温度时，原子自然从基态往上填充，这时候在低温极限下，便可以认为更高的激发态概率可忽略不计，可以截断掉这些激发态所处的 Hilbert 空间，这时候完备性是基态与几个第一激发态的集合

$$|E_0\rangle\langle E_0| + |E_1, 1\rangle\langle E_1, 1| + |E_1, 2\rangle\langle E_1, 2| + \dots = 1 \quad (2.50)$$

这种第一激发态的能态往往会有准粒子的出现。准粒子是集体激发类似粒子行为的激发态，比如电子在晶格中受核子作用体现的是质量修正的自由准电子，以及声子是集体振荡波的量子化，也归为准粒子。在后面可以看到，自旋翻转的传播，也是一种准粒子行为，更准确的说应该是磁畴 (Magnetic Kink) 态

考虑一个 1 维光晶格模型，由调制后的两束激光干涉形成两势阱 (Double-Well) 光晶格,它的势能随空间的函数关系是  $V_{DW}(x) = V_0 (\sin^2(kx) + 2 \cos^2(2kx))$ ,

粒子在 DW 势阱中隧穿也可以在 DW 之间隧穿,并且可以通过选择具有电偶的分子,他们之间存在较大的偶极相互排斥力。如果充入的是玻色子该系统的 Bose-Hubbard Hamiltonian 表示为<sup>[55]</sup>

$$\begin{aligned}\hat{H}_{BH} = & -J \sum_{j=1}^N \left( \hat{a}_{2j}^\dagger \hat{a}_{2j-1} + \text{H.c.} \right) \\ & - J_1 \sum_{j=1}^{N-1} \left( \hat{a}_{2j}^\dagger \hat{a}_{2j+1} + \text{H.c.} \right) \\ & + \sum_{i < j \in [1, 2N]} V_d(j-i) \hat{n}_i \hat{n}_j + \frac{U}{2} \sum_{i=1}^{2N} \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1)\end{aligned}\quad (2.51)$$

其中 DW 的第一个势阱是奇数位点,  $J$  为 DW 势阱内隧穿强度, 而  $J_1$  是 DW 之间隧穿强度,  $V_d(j-i) = d\lambda^{-3}(j-i)^{-3}$ ,  $U$  是同势阱内的相互排斥势强度。对于费米子而言, 最后一项便可以近似为无穷大, 即不存在同位点的费米子。

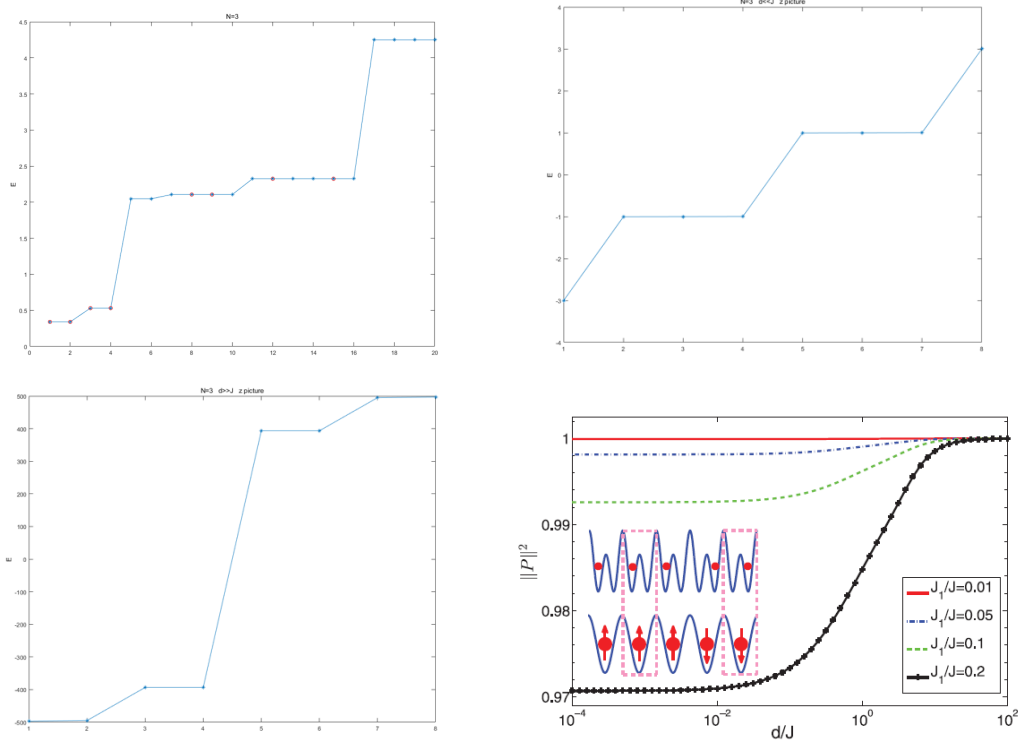


图 2-10 (图 1)1 维 3DW 系统势能图, 红圈指的是 3 个费米子都不在同个 DW 的能级。(图 2) 相互作用远小于 DW 内隧穿强度 ( $d \ll J$ ) 时截断后的最低的 8 本征能级。(图 3) 相互作用远大于 DW 内隧穿强度 ( $d \gg J$ ) 时截断后的最低的 8 本征能级。(图 4) 在  $J_1 \ll J$  时在任意相互作用强度下都能约化为一个 DW 一个粒子的态, 类比于自旋系统

如果考虑简单的 3 个 DW 的 1 维光晶格系统, 只注入相应 DW 数量的费米

子, 我们可以调节势阱几何来改变隧穿强度, 可以使得  $J \gg J_1$ , 还可以调节偶极相互作用大小, 使得  $d \gg J_1$ , 在低温近似下, 原子只能处于势阱的基态, 可以 3 个原子处在不同势阱的所有情况列举出来, 总共  $C_6^3 = 20$  个基矢, 即 20 维的 Hilbert 空间, 通过 Bose-Hubbard Hamiltonian 可以得到基矢对应的能量与基矢之间跃迁强度, 可以列出不同基矢的势能, 见图2-10中子图 1, 加入隧穿强度构成  $20 \times 20$  矩阵 Hamiltonian, 求得本征能级, 在上述条件下, 只有 1 个 DW 只有 1 个粒子所对应的能级是远远低于其他能级的, 这时可以将光晶格系统的 Hilbert 空间截断到只有这 8 个态的空间中, 在低温近似下, 其他能级占据概率接近 0。通过调节相互作用大小, 还可以改变这 8 个态的能级关系。从图2-10中子图 2 与 3 可以看到不同相互作用极限下的能级图, 考察基矢, 其中子图 2 最低能态是每个 DW 中粒子都处于两势阱的偶叠加态, 把 DW 左阱记为  $|L\rangle$ , 右阱记为  $|R\rangle$ , 即  $|L\rangle_i + |R\rangle_i$ 。而对于子图 3 最低两能态是其中一个费米子处于 DW 不同位置, 整体记为  $|LLR\rangle$  和  $|LRR\rangle$ 。由于这种 1 个 DW 只有 1 个粒子的性质, 可以将该系统与自旋系统做类比, 左阱代表自旋向上, 右阱代表自旋向下, 最后利用投影算符  $\hat{P} = \sum_{\vec{\alpha} \in P} |\vec{\alpha}\rangle\langle\vec{\alpha}|$  (其中  $P = \left\{ |\vec{\alpha}\rangle = \prod_{i=1}^N |\alpha_i\rangle_i \right\}, \alpha_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ ) 将 Hamiltonian 投影到自旋系统后, 便得到了 Ising 模型

$$\begin{aligned} \hat{H}_{Ising} \equiv \hat{P} \hat{H}_{BH} \hat{P}^T = & -J \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{x,i} \\ & - \sum_{i < j=1}^N W_d(j-i) \hat{\sigma}_{z,i} \hat{\sigma}_{z,j} + \sum_{i=1}^N U_d(i) \hat{\sigma}_{z,i} + E_0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

其中通过计算可以得到  $W_d(l) = [V_d(2l-1) + V_d(2l+1) - 2V_d(2l)]/4$  以及  $U_d(i) = [V_d(2N-2i+1) - V_d(2i-1)]/4$ , 这样我们可以通过光晶格去模拟 Ising 模型, 可以解出 3 维 Ising 模型需要的解。同样, 它也具有 Ising 模型的量子相变特性, 如果在低温近似下, 改变相互作用大小 ( $d$  与  $J$  关系) 可以得到类似自旋系统的顺磁体到铁磁体的相变, 可以考察整体平均磁矩看到平台的转变, 平均磁矩定义为  $\bar{\sigma}_\alpha \equiv \sum_{i=1}^N \langle \hat{\sigma}_{\alpha,i} \rangle / N$ , 其随相互作用改变如图2-11的子图 1。如同我们分析本征态所得到的结论, 在  $d \gg J$  时候, 会出现这种  $|LLR\rangle$  和  $|LRR\rangle$  态, 这是单磁畴态 (Single-Kink), 在低温度环境下, 原子只会出现在这种单磁畴态上, 所以可以将 Hilbert 空间进一步截断, 只剩下这种态。然后考虑到 Ising 模型的 Hamiltonian, 由于  $J$  很小可以看成这些单磁畴态的微扰跃迁项, 投影后的 Hamiltonian 为

$$\hat{H}_{SK} = - \sum_{n=1}^{N-2} J \left( \alpha_{n+1}^\dagger \alpha_n + \text{H.c.} \right) + \sum_{n=1}^{N-1} \epsilon_n \alpha_n^\dagger \alpha_n \quad (2.53)$$



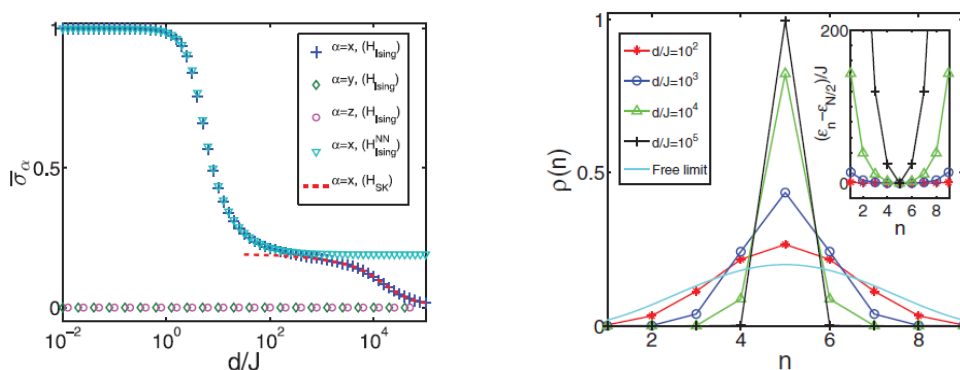


图 2-11 (图 1) 光晶格自旋模拟得到各向平均磁矩随  $d$  的转变 (其中  $H^N N_{Ising}$  表示只考虑最近邻相互作用)(图 2) 不同  $d$  的 SK 本征态在晶格表象下的概率分布

通过上述 Hamiltonian 可以看到, 这种单磁畴态类似于粒子行为的 Hamiltonian, 第一项表示着单磁畴在不同位点之间的隧穿, 而第二项代表磁畴在该位点上具有的势能。我们可以很容易解出粒子的动力学行为, 类似于周期势阱的平面波, 可以考察其在每个位点的概率  $\rho(n) = |\langle n|G\rangle|^2$  ( $|G\rangle_I$  代表低能近似下  $\hat{H}_{Ising}$  解出的态), 处于不同的相互作用强度下解得的本征态在每个位点的概率分布如图2-11的子图 2。透过图可以看到, 当相互作用越强, 磁畴更集中在中心, 按照  $\delta$  函数在动量空间中的展开所得结果, 这种集中于中心的磁畴能动性更低, 意味着弱束缚在中心位置, 相反则能动性越高。这些考察都证实单磁畴态是一种准粒子, 是集体运动表现出的单粒子行为。

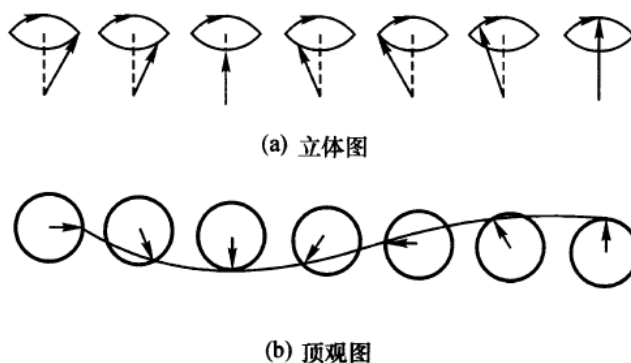


图 2-12 自旋波经典图像, 自旋波是自旋分量转动, 集体上呈现出波的传播

再看当相互作用强度远小于 DW 隧穿强度时, 见图2-10子图 2, 从能量最低的态往上分析, 第一个态它表示为  $\frac{1}{\sqrt{8}}(|L\rangle + |R\rangle) \otimes (|L\rangle + |R\rangle) \otimes (|L\rangle + |R\rangle)$ , 可以把  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle + |R\rangle)$  记作  $|\rightarrow\rangle$ , 这样就是  $|\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rangle$ , 而第二简并能态分别为  $|\rightarrow\rightarrow\leftarrow\rangle$ 、 $|\rightarrow\leftarrow\rightarrow\rangle$  和  $|\leftarrow\rightarrow\rightarrow\rangle$ , 这其实是 Heisenberg 模型中的准粒子激发态,

即自旋波态,最低的能态可以看成真空态,通过微扰激发出的一个自旋波便是第二简并的态的叠加。Heisenberg 模型 Hamiltonian 为<sup>[56]</sup>

$$H = -J \sum_{l,\delta \neq 0} \left\{ \hat{S}_l^z \hat{S}_{l+\delta}^z + \frac{1}{2} \left( \hat{S}_l^+ \hat{S}_{l+\delta}^- + \hat{S}_l^- \hat{S}_{l+\delta}^+ \right) \right\} \quad (2.54)$$

$J$ 为常数,  $\hat{S}$  是自旋角动量算符。对于自旋数  $S$  较大的系统的自旋波如图2-12,可以参考 Heisenberg 模型截断后所推导得到的自旋波 Hamiltonian

$$H_0 = -NZJS^2 + 2ZJS \sum_l a_l^\dagger a_l - JS \sum_{l,\delta \neq 0} \left( a_l a_{l+\delta}^\dagger + a_l^\dagger a_{l+\delta} \right) \quad (2.55)$$

其中  $N$ 、 $Z$ 、 $J$  都为常数,  $S$  是自旋数,这里用到了在低能激发时可以认为  $S$  远大于改变量,将自旋升降算符转换为产生湮灭算符  $\hat{S}_l^+ = a_l \sqrt{2S}$  以及  $\hat{S}_l^- = a_l^\dagger \sqrt{2S}$  和  $\hat{S}^z = (S - a^\dagger a)$ 。对比 Hamiltonian 知道,自旋波也类似前面的单磁畴一样有粒子的行为。

综上,在这里我们介绍了 Hilbert 空间的截断原理,这需要在低温环境之下,某个参量有极大的差异,在这种极限下系统只会出现在一些量子态上,所以可以将 Hilbert 空间截断, Hilbert 空间截断在研究中经常用到,是简化物理模型必要步骤,一个物理研究的好坏在于截断处理是否漂亮。我们也介绍了准粒子,从最低能态开始,第一激发态往往都会出现准粒子,这些准粒子是系统的集体效应, Hamiltonian 行为与经典粒子 Hamiltonian 相差不大,这与场论的量子化观点是相似的,也在凝聚态发现许多这样的准粒子,如声子、自旋波、等离激元、极化子、库伯对等等,所以准粒子的研究是凝聚态中的重点内容,也是本文量子模拟的根基所在。

### 3 QED 物理过程

量子电动力学是在粒子物理还是在原子与光物理中必然不可绕开的学科,它是考虑相对论效应的量子光学,在能量较低有一定修正,这对我们常用的电磁与原子调控有补充意义,便于开展精密实验,在能量较高的研究上都需要考虑到相对论效应,所以量子电动力学提供研究高能物理的理论支持。同时在导论里我们也介绍了粒子物理一个重要的概念是规范场,作为我们最熟悉的规范场当然成为了研究的典型。量子电动力学主要是研究原子场与规范场的相互作用,前人大量工作都是通过 Feynman 图和场论积分来探讨的,然而要用量子力学的 Hamiltonian 来表述是复杂而又困难的,但是为了追求最本质的物理过程,需要考察各种高能处理所对应的量子力学基础。在本文中,我们关注于 QED 现象在冷原子光晶格上的实现所需具备的 Hamiltonian,我们先回顾前人已经在正负电子在光场作用下的 Hamiltonian 表述所做出的结果,然后提出正负电子产生湮灭在晶格系统所满足的 Hamiltonian,再引出我们提出的一个新模型来模拟真空双折射现象,探究光子自能修正的晶格 Hamiltonian,这些工作为将来用光晶格平台模拟这些现象提供理论合法性。

#### 3.1 正负电子对产生湮灭

正电子概念最早由 Dirac 提出,它是一种反物质,通过求解 Dirac 方程发现有负能量解,时年 26 岁的 Dirac 凭着这负能量的解预测了反物质的存在。Dirac 认为负能量的态都是被填满了,根据 Pauli 不相容原理,不存在电子能量不断降低直至发散的情况,而负能量的电子被激发后,跃迁到了正能量态时,这时会凭空出现一个电子和一个负能量态的空穴,而这空穴正是正电子,当正电子与电子接近时,将会湮灭激发光子,放出大量能量。1932 年美国科学家 Anderson 利用 Wilson 云室在实验中发现了正电子。QED 的光子自能修正涉及到正负电子产生湮灭,研究正电子等行为有利于对高能重整化有新的认识,也对反物质研究大有裨益。

### 3.1.1 自由场下的正负电子

在量子场论中, 讨论自由场量子化, 首先便会援引理论力学中 Lagrangian, 一个实际允许的物理过程一定是在 Lagrangian 变分极值的时候, 同样现在把 Lagrangian 扩展到针对多体的算符情况也是同样满足的, 为了在相对论情况下满足 Lorentz 协变性, 能够构造出满足旋量变换的 Lagrangian, 即 Dirac 场 (旋量场) Lagrangian, 这里令  $c = 1, \hbar = 1$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (3.1)$$

其中  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$  而  $\gamma$  矩阵定义为

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

按照理论力学程序, 可以求正则动量来得到 Hamiltonian, 正则动量为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi} \gamma^0 = i\psi^\dagger \quad (3.3)$$

从而代入到 Hamiltonian 定义式中

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} = \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi = \psi^\dagger (-i\gamma_0 \gamma^i \partial_i + m\gamma_0) \psi \quad (3.4)$$

然而这样的 Hamiltonian 是一个二次型形式, 其中二次型中间矩阵具体形式为

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} m & -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \\ -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla & -m \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

对旋量波函数进行么正变换可以转换到另一个表象, 从而能使得以上矩阵对角化, 在这种表象下, Hamiltonian 在每个旋量分量上都是有不同但独立的能量的, 相当于解除了不同旋量分量的耦合, 众所周知, 单体自由场下正负电子都是独立存在的, 通过对该矩阵对角化其实就是在自由场下分出电子、正电子、自旋 1/2 与自旋-1/2 粒子的根据。更多得考察其他物理量, 电荷量与动量

$$P = \psi^\dagger (-i\nabla) \psi, \quad Q = q\psi^\dagger \psi \quad (3.6)$$

我们将这些矩阵形式在坐标空间中表示, 然后同时对角化, 可以得出结论, 只有调制后的平面波形式的波函数满足, 波函数实际上处在  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{旋量}} \otimes \mathcal{S}_{\text{坐标}}$  的直积

空间, 我们将平面波解  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  先作用到(3.5)后只考察旋量空间正负频解

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} & -m \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

将其对角化可以得到正负频表象, 经过一定计算<sup>[57]</sup>, 可以将么正变换后的正负本征值  $\omega$  所对应的本征态表示出来

$$w_+(\mathbf{k}, \eta) = N \begin{pmatrix} \eta \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\omega+m} \eta \end{pmatrix}, \quad w_-(\mathbf{k}, \eta) = N \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\omega+m} \eta \\ \eta \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

其中  $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ ,  $N$  为归一化因子。由于这里只是对旋量空间的 Hamiltonian 对角化, 然而考虑到坐标空间与旋量空间的直积, 对于负频解需要将坐标空间波函数直积上去, 只是可以改变  $\mathbf{k}$  转变符号使得  $w_-(-\mathbf{k}, \eta)$  与  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  搭配, 这样可以定义正负频旋量解

$$u(\mathbf{k}, \eta) = w_+(\mathbf{k}, \eta) = N \begin{pmatrix} \eta \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\omega+m} \eta \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{k}, \eta) = w_-(-\mathbf{k}, \eta) = N \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\omega+m} \eta \\ \eta \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

其中  $\eta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  表示自旋 1/2 空间波函数, 与光场不同, Dirac 场是自旋 1/2 的费米子场, 遵从 Pauli 不相容原理和 Fermi-Dirac 统计, 同时为了消除负能量问题, 对于费米子的量子化场算符应该是对易反号的

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta(\vec{y})\} &= \{\psi_\alpha^\dagger(\vec{x}), \psi_\beta^\dagger(\vec{y})\} = 0 \\ \{\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta^\dagger(\vec{y})\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中  $\{A, B\} = AB + BA$ , 可以写出平面波解的波函数形式

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[ b_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + c_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right] \\ \psi^\dagger(x) &= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[ b_{\vec{p}}^{s\dagger} u^s(\vec{p})^\dagger e^{ip \cdot x} + c_{\vec{p}}^s v^s(\vec{p})^\dagger e^{-ip \cdot x} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中  $p \cdot x$  是四维内积,  $r, s$  代表自旋指标 ( $r, s \in \{\uparrow, \downarrow\}$ ), 并且产生湮灭算符满足

Jordan-Wigner 反对易关系

$$\begin{aligned} \{b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s\dagger}\} &= (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ \{c_{\vec{p}}^r, c_{\vec{q}}^{s\dagger}\} &= (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ \{b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^s\} &= \{c_{\vec{p}}^r, c_{\vec{q}}^s\} = \{b_{\vec{p}}^r, c_{\vec{q}}^{s\dagger}\} = \{b_{\vec{p}}^r, c_{\vec{q}}^s\} = \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

最后通过(3.4)可以得到 Dira 场 Hamiltonian

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left[ b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s - c_{\vec{p}}^{s\dagger} c_{\vec{p}}^s \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left[ b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s + c_{\vec{p}}^{s\dagger} c_{\vec{p}}^s - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right]\end{aligned}\quad (3.13)$$

方程的最后一项是场的零点能, 这相当与固体物理中的 Fermi 能类似, 把 Fermi 能作为真空能, 讨论场的激发能, 只是加上了零能以下的总负能, 不论是否发散, 物理上只关心场的激发。而第二项对应着正电子粒子数算符, 类似于固体物理中的空穴能量表示, 通过 Jordan-Wigner 反对易关系可以使得这种负能态的准粒子具有正的能量, 带正电荷, 并且动量也是与平面波传播对应的方向是相同的, 这种准粒子表现如同带正电荷的电子。

然而我们的推导只是在动量空间的表现, 粒子产生湮灭是一个模式的产生湮灭, 我们的目标在于光晶格系统中模拟 QED 现象, 这需要让 Hamiltonian 表现在坐标空间中, 而且我们需要正负电子产生湮灭算符分开, 这就需要重新推导场函数的形式, 可以以实空间展开只有电子的场 (先不考虑自旋)

$$|\psi_{-}\rangle = \psi_{-}^{\dagger} |\text{Vac}\rangle = \int d\mathbf{x} u^{\dagger}(\mathbf{x}) b^{\dagger}(\mathbf{x}) |\text{Vac}\rangle \quad (3.14)$$

其中  $b^{\dagger}(\mathbf{x}) |\text{Vac}\rangle = |\mathbf{x}\rangle$ ,  $|\mathbf{x}\rangle$  是局域在  $\mathbf{x}$  处的态, 格点化便可以称作 Wannier 态, 对于只有正电子的场算符同样

$$|\psi_{+}\rangle = \psi_{+}^{\dagger} |\text{Vac}\rangle = \int d\mathbf{x} v(\mathbf{x}) c^{\dagger}(\mathbf{x}) |\text{Vac}\rangle \quad (3.15)$$

这里面  $u(\mathbf{x})$  和  $v(\mathbf{x})$  分别是在旋量与坐标空间的直积空间里正和负本征值对应的本征态的任意叠加波函数, 对于在一个坐标上的场算符可以表示为

$$\begin{aligned}\psi_{-}^{\dagger}(\mathbf{x}) &= u^{\dagger}(\mathbf{x}) b^{\dagger}(\mathbf{x}) \\ \psi_{+}^{\dagger}(\mathbf{x}) &= v(\mathbf{x}) c^{\dagger}(\mathbf{x}) \\ \psi^{\dagger}(\mathbf{x}) &= \psi_{-}^{\dagger}(\mathbf{x}) + \psi_{+}^{\dagger}(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (3.16)$$

再根据不同坐标波函数正交性与正负频波函数的正交性, 二次型中间矩阵按照(3.5)可以得到最终自由场的 Hamiltonian

$$\hat{H}_0 = \int d\mathbf{x} \left\{ \psi_{-}^{\dagger}(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \psi_{-}(\mathbf{x}) + \psi_{+}(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \psi_{+}^{\dagger}(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.17)$$

转换成产生湮灭算符的形式

$$\hat{H}_0 = \int d\mathbf{x} \left\{ b^{\dagger}(\mathbf{x}) \left[ u^{\dagger}(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \right] b(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}) \left[ v^{\dagger}(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \right] c^{\dagger}(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.18)$$

根据费米子产生湮灭算符对易关系如  $cc^\dagger \rightarrow -c^\dagger c$  以及  $\int c\hat{P}c^\dagger \rightarrow \int c^\dagger\hat{P}c$  可以得到粒子数表象下的 Hamiltonian([ ]' 具体待推)

$$\hat{H}_0 = \int d\mathbf{x} \left\{ b^\dagger(\mathbf{x}) [u^\dagger(\mathbf{x})H(\mathbf{x})u(\mathbf{x})] b(\mathbf{x}) + c^\dagger(\mathbf{x}) [v^\dagger(\mathbf{x})H(\mathbf{x})v(\mathbf{x})]' c(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.19)$$

该 Hamiltonian 转换到紧束缚表象上即可成为正负电子在晶格上的 Hamiltonian, 要注意的是, 中括号中仍是算符作用到后面的湮灭算符上的结果, 这如同二次量子化的动能算符一样, 可以把湮灭算符看作在该坐标的概率, 只是把它扩展可表示多粒子的数量而已。当把静规范场加入进来后, 仍是通过能量的正负来区分电子与正电子, 只是能量不再是原来的形式。

### 3.1.2 静电磁场下 Dirac-Hamiltonian

静电磁场即不随时间变化的规范场, 研究发现, 对于随时间变化的势阱<sup>[58]</sup>以及亚临界的激波<sup>[59]</sup>都会激励出正负电子对, 但是当静规范场不含时, 演化不需要对 Hamiltonian 整个过程进行时间积分(2.1), 只是对势能与动量有规范势的增加, 不改变正负频解的分离状况。为了只研究电子的 Hamiltonian, 我们讨论静电磁作用的场论 Lagrangian

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathbf{D}_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.20)$$

其中  $\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ , 正则动量仍然是(3.3), 先忽略掉光场自能 Hamiltonian, 按照(3.4)可以表示静规范场 Hamiltonian 为

$$H(\mathbf{x}) = \psi^\dagger \begin{pmatrix} m + q\phi(\mathbf{x}) & \sigma \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{x})) \\ \sigma \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{x})) & -m + q\phi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \psi \quad (3.21)$$

我们考察静规范场的定态性质, 参考定态 Dirac 方程推导, 我们带上所有的物理常量, 通过 Schrödinger 方程可以简化为

$$[c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + \beta mc^2 + V] \psi = E\psi \quad (3.22)$$

其中定义  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma$  是 Pauli 算符, 对于限定能量为正的时候, 本征函数对应电子波函数, 可以简化成只有自旋分量的波函数

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.23)$$

其中  $\psi_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  我们考察非相对论情况, 并且要求能量是正值, 可以令  $E = E' + mc^2$  并且要求  $E' \ll mc^2, V \ll mc^2$ , 便可以将波函数代入到 Dirac 方程中

$$\begin{aligned} (E' - V)\psi_1 - c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})\psi_2 &= 0 \\ (E' - V + 2mc^2)\psi_2 - c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})\psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

解得  $\psi_2$  可以得到  $\psi_1$  所满足的方程

$$E'\psi_1 = \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})] \left(1 + \frac{E' - V}{2mc^2}\right)^{-1} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})] \psi_1 + V\psi_1 \quad (3.25)$$

考虑到  $E' - V \ll mc^2$  可以取

$$\left(1 + \frac{E' - V}{2mc^2}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{E' - V}{2mc^2} \quad (3.26)$$

而对于非相对论情况可以取  $E' - V \approx \frac{p^2}{2m}$ , 再利用恒等式

$$\begin{aligned} \mathbf{p}V - V\mathbf{p} &= -i\hbar\nabla V \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) &= (\nabla V) \cdot \mathbf{p} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla V \times \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) = q(\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) = -i\hbar q \nabla \times \mathbf{A} = -i\hbar q \mathbf{B}$$

由于磁场  $qA \ll p$ , 我们忽略  $V$  与  $A$  的乘积项, 便可以得到最后的 Hamiltonian 形式

$$\left( \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + V - \frac{q}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} - \frac{p^4}{8m^3c^2} - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2} \frac{dV}{dr} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \right) \psi_1 = E'\psi_1 \quad (3.28)$$

第一项是有静规范势的动能项, 它包含了磁场下轨道磁矩的能量, 第三项是磁场下自旋磁矩能量, 如果是电子, 则  $q = -e$ , 那么第三项又等于  $-\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}$ ,  $\boldsymbol{\mu}_s$  是玻尔磁子, 第四项是相对论下动能修正项, 第五项是势能的相对论修正, 称作 Darwin 项, 对于库伦势只有在波函数为 s 态下 (角动量数为 0 时) 有作用, 第六项是自旋轨道耦合项, 它对角动量指标为 0 时没有作用。透过 Dirac-Hamiltonian 我们推出经典得不到的能量项比如自旋有关的作用, 这样可以得到非常精确的氢原子模型能级图, 并且可以解释 Lamb 移位<sup>[60]</sup> 等问题, 如果扩展到随时间变化的电磁场还可以解释反常磁矩<sup>[61]</sup> 等量子场论经典问题。

然而这只限于低能近似下是较精确的, 当我们碰到强激光, 剧烈碰撞等问题后, 不可避免会有 Dirac 负能海的准激发-正电子产生, 该 Hamiltonian 不能处理正电子与电子共存时的问题, 我们需要将 Hamiltonian 扩展到二次量子化表述,



严格讨论光子电子正电子的产生湮灭关系。

### 3.1.3 光场下的多体 Hamiltonian

我们推导了单体 Dirac-Hamiltonian, 对相对论量子力学有了更具体的认识。这里我们要扩展到光场下的 Dirac, 并且用二次量子化方式表达 Hamiltonian, 这样有助于量子模拟中用粒子去描述光子与正负电子。我们认识到光场可以完全由矢势来描述, 先讨论经典光场, 仍取自然常数, 静电磁场的 Hamiltonian 为

$$H_0 = \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0) + \beta m + q\varphi_0] \psi(\mathbf{x}) \quad (3.29)$$

由于是多体问题, 需要考虑相互作用项

$$H_1 = \frac{q^2}{2} \iint \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \psi^\dagger(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \quad (3.30)$$

加入了光场后, 光场单独的 Hamiltonian 为

$$H' = -q \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} \psi(\mathbf{x}) \quad (3.31)$$

我们可以利用算符微扰论粗略得到静电磁场下 Hamiltonian 解析对角化的么正变换矩阵, 可以将原先的场算符分成电子场算符与正电子场算符

$$\psi'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a(\mathbf{x}) \\ b^\dagger(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \psi'(\mathbf{x}) = e^{iS} \psi(\mathbf{x}) \quad (3.32)$$

$S$  是微扰展开的厄密矩阵,  $e^{iS}$  就是算符微扰论么正变换矩阵, 可以得到所有近似变换到正负电子表象的 Hamiltonian<sup>[62]</sup>, 分别有静电磁场项

$$\begin{aligned} H_0 = & \int a^\dagger \left[ m + q\varphi_0 + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)^2 - \frac{q}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \times \mathbf{A}_0) \right. \\ & \left. + \frac{q}{8m^2} \Delta\varphi_0 + \frac{q}{4m^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot [\nabla\varphi_0 \times (\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)]) + \dots \right] a d\mathbf{x} \\ & + \int b^\dagger \left[ m - q\varphi_0 + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + q\mathbf{A}_0)^2 - \frac{q}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \times \mathbf{A}_0) \right. \\ & \left. - \frac{q}{8m^2} \Delta\varphi_0 + \frac{q}{4m^2} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot [\nabla\varphi_0 \times (\mathbf{p} + q\mathbf{A}_0)]) + \dots \right] b d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.33)$$

其中  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  是转置后的  $\boldsymbol{\sigma}$ , 相互作用项

$$\begin{aligned} H_I = & \frac{q^2}{2} \iint a^\dagger(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} a^\dagger(\mathbf{x}') a(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ & + \frac{q^2}{2} \iint b^\dagger(\mathbf{x}) b(\mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} b^\dagger(\mathbf{x}') b(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ & - q^2 \iint a^\dagger(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} b^\dagger(\mathbf{x}') b(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (3.34)$$

以及光场作用项, 它包含对电子或者正电子单独的作用

$$H'_1 = \int a^\dagger \left[ -\frac{q}{m} (\mathbf{A}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)) - \frac{q}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) + \frac{iq^2}{2m^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot [\nabla\varphi_0 \times \mathbf{A}]) + \dots \right] a d\mathbf{x} + \int b^\dagger \left[ -\frac{q}{m} (\mathbf{A}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)) - \frac{q}{2m} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) - \frac{iq^2}{2m^2} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot [\nabla\varphi_0 \times \mathbf{A}]) + \dots \right] b d\mathbf{x} \quad (3.35)$$

和光场所导致的正负电子产生湮灭作用

$$H'_2 = \int a^\dagger \mathcal{H} b^\dagger d\mathbf{x} + \int b \mathcal{H} a d\mathbf{x} \quad (3.36)$$

$$\mathcal{H} = -q(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) + \frac{q}{2m^2} (\mathbf{A}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)) (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)) - \frac{iq}{4m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^*) (\mathbf{A}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)) - \frac{iq^2}{4m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot ((\nabla \times \mathbf{A}_0) \times \mathbf{A})) + \frac{q}{8m^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})) + \frac{q}{4m^2} ((\nabla \times \mathbf{A})(\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)) + \dots \quad (3.37)$$

其中提醒  $\nabla^*$  只作用在  $\mathbf{A}$  上, 以上, 特别是(3.33)与我们之前推导的非常相似, 这也验证了上一节推导结果的正确性。从(3.36)可以看到, 光场诱导下只可能同时产生正负电子或者同时湮灭正负电子, 不可能有产生电子湮灭正电子等行为, 这也是因为正电子只是负能态中的准粒子-空穴, 一定是负能态的电子激发到正能态后出现的, 所以整体上电子数是满足粒子数守恒的。

现在我们需要量子化光场, 矢势的量子化即为光子数表象, 光场量子化我们借鉴(2.18), 由于量子化后有正频项也有负频项, 把正负电子产生湮灭都当作两个能级之间的跃迁, 我们借鉴(2.9)运用相互作用表象后采用旋转波近似忽略掉高频项, 然后剩下了低频的  $e^{\pm i[(\omega_0 - \omega)t + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{x}]}$ , 其中  $\omega_0, \mathbf{k}_0$  相当于电子本身能动量  $H_0 + H_I$  与负能态电子本身能动量差, 这意味正负电子产生只能伴随光子的湮灭, 而正负电子湮灭只能伴随光子产生, 如果光频与光波矢选择合适, 可以激励无失谐无相位差的正负电子, 这时便可以把该低频相位项去掉, 我们将得到更简单的产生湮灭关系。

### 3.1.4 Dirac 方程在拓扑物理上的延展

Dirac 方程是描述 Dirac 费米子的, 高能上也有 Weyl 费米子<sup>[63]</sup> 与 Majorana 费米子的定义, 虽然 Dirac 费米子随处可见, 比如正负电子, 但是在高能中却从未发现 Weyl 费米子与 Majorana 费米子, 然而近期却在凝聚态拓扑材料中发现了

Weyl 手型费米子以及 Majorana 费米子。最早与 Dirac 方程有关的凝聚态现象是在石墨烯中的 Dirac 锥，Dirac 方程在动量空间的 Hamiltonian 就是(3.7)，考虑石墨烯在 Block 表象下的 Hamiltonian 有  $H = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^\dagger h(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}$ ，而

$$h(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & -t_a e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_1} - t_b e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2} - t_c \\ -t_a e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_1} - t_b e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2} - t_c & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

其中  $\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(3, \sqrt{3})$ ,  $\mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(3, -\sqrt{3})$ ,  $a$  是晶格常数，一般石墨烯是同键强的  $t_a = t_b = t_c$ ，通过计算在  $\mathbf{K} = \frac{2\pi}{3a} \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\mathbf{K}' = \frac{2\pi}{3a} \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  附近 ( $\kappa \ll \mathbf{K}$ ) 就会有

$$h(\mathbf{K} + \kappa) = \kappa_x \sigma_x + \kappa_y \sigma_y \quad (3.39)$$

通过计算本征值便会得到在该点附近的能带结构是一种线性色散<sup>[64]</sup>，如图3-1，我们再来看(3.7)，首先对于只在 xy 平面运动的电子，不存在  $k_z$  分量，所以 Dirac-

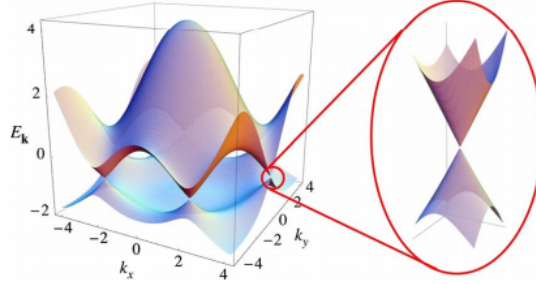


图 3-1 石墨烯能带中的 Dirac 锥，表现出线性色散

Hamiltonian 分开不耦合的空间可以简化为

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} m & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -m \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

然后对于质量趋于 0 的情况有(3.39)形式，由于历史缘故，我们称这种锥能带叫 Dirac 锥。这种在锥点 (Dirac 点) 上的能带非常奇异，可以计算能带在该点的有效质量，是趋于零的，这意味着 Fermi 能级如果在该点上，迁移率会非常大，正是这种零有效质量使得量子隧穿效应完全穿透。如果考虑到自旋，存在自旋轨道耦合，根据 Kane-Mele 模型<sup>[65]</sup>，在存在时间反演对称性下可以预测石墨烯存在量子自旋霍尔效应<sup>[66]</sup>，如图3-2，通过计算 Berry 曲率在 Brillouin 区的积分，得到自旋霍尔电导将是量子霍尔效应的两倍，这是因为边缘态不再是一个而是自旋上下分别一个并传播方向相反。

Dirac 锥的存在是对称性保护的结果。Dirac 锥的存在是 Dirac-Hamiltonian 的

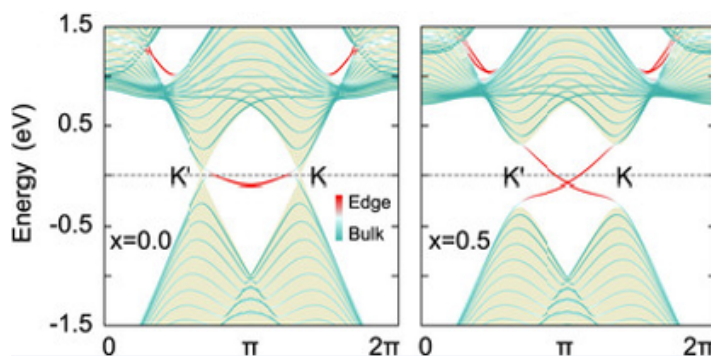


图 3-2 考虑 SOC 具有量子自旋霍尔效应的石墨烯能带，右图为考虑 SOC 后能隙打开

质量项趋于零，然而对于键强不同等普遍情况的  $H = d_i(\mathbf{k})\sigma_i + \epsilon(\mathbf{k})I_{2 \times 2}$ ，只要是在  $\mathbf{K}, \mathbf{K}'$  点就一定存在 Dirac 点存在，这是因为有时间反演对称性与空间反演对称性的存在，这两个对称性保护了局域的 Dirac 点不被打开能隙，通过考察它的 Berry 矢势可以看到 Dirac 点是有涡旋存在的，这意味着 Dirac 点是具备一定被这两个对称性保护的拓扑性质，只有当  $\mathbf{K}, \mathbf{K}'$  两个 Dirac 点重合时能使得能隙打开。进一步的研究发现，只要有  $C_3$  对称性的石墨烯 (比如  $t_a = t_b = t_c$ ) 能保证全局 Dirac 点不被打开能隙，即由  $C_3$  全局保护<sup>[64]</sup>。

另一方面，正是因为石墨烯中存在这样的 Hamiltonian，我们可以用石墨烯来探究质量为 0 费米子行为，这也是最近利用拓扑材料模拟三种费米子的主导思想。对于 Weyl 费米子的发现是在三维 Weyl 半金属中，考虑强三维 Chern 绝缘体，如果在  $k_z = 0$  平面是能带反转交叠在一起，由于自旋轨道耦合而打开能隙，具有拓扑数不为 0，而由于在一个方向比如  $z$  轴有较强耦合强度时，在  $k_z = \pi$  平面能带不反转，而拓扑数为 0，这时在其中间总会有一个  $k_z$  面能带简并到一点上，并且局域是线性色散，该点就称作 Weyl 点，这时材料不可能是绝缘体，只能是半金属。粒子物理中 Weyl 费米子是无质量的费米子，它的 Hamiltonian 为

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \cdot \mathbf{k} & 0 \\ 0 & -\sigma \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

分为右旋与左旋两个手性费米子，对于 Weyl 费米子来说，左右旋费米子是螺旋度  $\hat{h} = \frac{1}{2}\sigma \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$  的本征函数，因此右旋费米子也是电子，而左旋费米子是正电子。对于 Weyl 半金属中的 Weyl 点一般有两个，其中一个为右旋 Weyl 点，满足右旋 Weyl-Hamiltonian，另一个是左旋的，可以对每个 Weyl 点求能带关系，的确是线性色散，而且是三维线性。对于高于 Weyl 点的 Fermi 能级可以求 Berry 曲率在

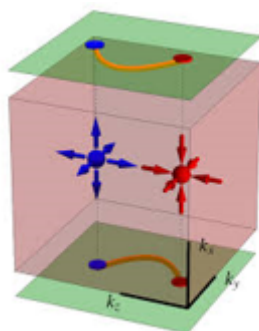


图 3-3 Weyl 半金属以及表面上的 Fermi 弧，左右两核分别是不同手性的 Weyl 点，在边缘上也是不同手性的边缘态

整个 Fermi 面的积分

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n(\mathbf{k}) &= i \langle u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \rangle \\ \Omega_n(\mathbf{k}) &= \nabla \times \mathcal{A}_n(\mathbf{k}) \\ C &= \frac{1}{2\pi} \int_{FS} d\mathbf{S} \cdot \Omega_n(\mathbf{k})\end{aligned}\quad (3.42)$$

可以计算对于右旋拓扑数  $C = 1$  而左旋拓扑数  $C = -1$ ，这相当于包围 Weyl 点算的曲率，类似于包围磁单极子算磁通量。正是因为这种只有包围一个 Weyl 点时拓扑非平庸，所以只有在两个 Weyl 点中间的  $k_z$  平面是有拓扑数和边缘态的，也正是如此在 Weyl 半金属表面对应的两 Weyl 点中间会出现 Fermi 弧<sup>[67] [68]</sup>，这种弧其实就是边缘态，如图3-3。Weyl 费米子还有很多种类，刚刚提到的只是 Type-I Weyl 半金属，还有 Type-II<sup>[69]</sup>。Majorana 费米子的发现在这不再赘述，总之，大量拓扑材料中发现了有关这三类费米子相同的 Hamiltonian，这使得在这些材料中研究基本费米子成为可能。

## 3.2 真空双折射

自量子电动力学的建立以来，对于真空的概念一次又一次被刷新，首先是真空能的发现，然后到预言负能量电子海的存在，再到计算出 Casimir 效应，以及预言真空相变等等。其中真空双折射也是研究真空的一大热点。真空双折射是考虑到 QED 后的微小修正，然而我们可以人为将其效应放大。双折射是光学中常见的物理现象，它表现为光束射入某些材料，不是正常的光折射，而是会产生两束分开的光，并且沿着不同方向传播。在光学中容易解释，这是因为光是有偏振的，当射入晶面分层所导致的两向异性材料时，沿不同偏振的光电解质系数

不同, 折射率不同, 最后导致波矢大小分布不再是各向同性的, 群速度不再与波矢方向同向, 在实验中表现出光线偏转效应。真空双折射起源于 Cotton-Mouton 效应<sup>[70]</sup>, 在强磁场下许多气体都有双折射效应, 当尽可能将体系抽真空, 会发现仍会有双折射现象。然而这种效应是微弱的, 这也使得测量双折射比较困难, 我们这里提出用冷原子模拟真空双折射的物理过程, 本文着重推导真空双折射在周期晶格系统应具有 Hamiltonian, 我们尽可能关注于简单的 Landau 规范模型。

### 3.2.1 场论推演的 Hamiltonian

量子场论中利用传播子与 Feynman 图的方式, 真空双折射是容易解释的, 首先在高能中旋量场的场函数的 Feynman 传播子的表述与(2.25)有些不同

$$\begin{aligned} G_F(x-y) &= -i \langle 0 | T(\Phi(x)\Phi(y)) | 0 \rangle \\ &= -i \langle 0 | [\Theta(x^0 - y^0) \Phi(x)\Phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \Phi(y)\Phi(x)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.43)$$

对于自旋 1/2 的费米子场, 考虑到(3.11)场函数可以得到 Feynman 传播子在动量空间的表达

$$\begin{aligned} G_F(p) &= \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} \end{aligned} \quad (3.44)$$

其中  $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$  然而在强磁场下 Feynman 传播子是需要修正动量的, 这时 Feynman 传播子变成在静磁场形式

$$G_F(p) = \frac{i}{\not{p} - qA_0 - m} \quad (3.45)$$

我们对其进行 Dyson 级数展开

$$G_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-iqA_0) \frac{i}{\not{p} - m} \right]^n \quad (3.46)$$

如果画出这个 Feynman 图, 见图3-4, 我们看到静磁场相当于给电子传播提供了很多光子的作用, 如果放到经典电磁学中, 电子在静磁场中受到 Lorentz 力其实是多个光子动量传递的结果。对于普通的单光子传播都是可能有光子自能修正的, 这在高能中是一个重要贡献, 光子自能修正可以表示见图3-5, 一个  $\mu$  偏振的光子传播中会产生 off-shell 的正负电子对, 随即湮灭生成  $\nu$  偏振的光子, 通过

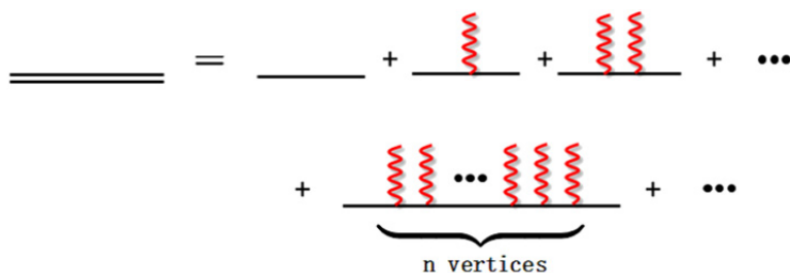


图 3-4 静磁场下电子的传播子，红色波浪线代表光子传播子，黑线为费米子传播子

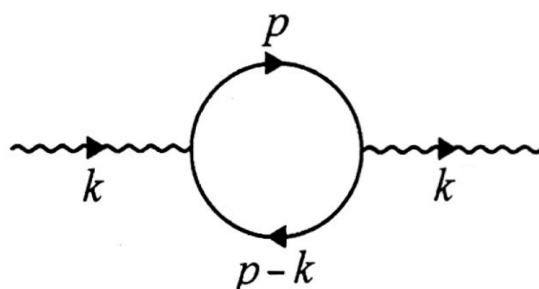


图 3-5 光子自能 Feynman 图，这里极化的正负电子是 off-shell 的， $k, p$  代表动量

Feynman 图，这种光子自能场论积分表示为

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-ie\gamma_\mu) iG_F(p) (-ie\gamma_\nu) iG_F(p-k) \\ &= -q^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma_\mu \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2} \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

如果是这种普通情况下，由于各种指标的贡献的一样的，最后光子仍以原偏振沿原方向同波矢传播。然而对于在强静磁场下的光子，它产生的正负电子在传播中会受到磁场多光子作用，如图3-6，这时正负电子传播子不再是自由传播，而是如图3-4的传播，相应的应该把 Feynman 传播子改成含矢势的形式(3.45)。

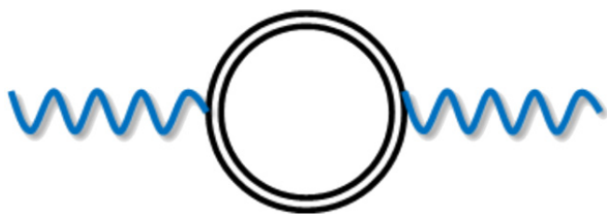


图 3-6 在强静磁场下的光子的自能修正

我们可以把光子自能修正代入到 Hamiltonian 中，按照场论理论<sup>[71]</sup>，这种加

入自能修正所对应的光场 Lagrangian(密度) 为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\int d^4x' A^\mu(x)\Pi_{\mu\nu}(x, x') A^\nu(x') \quad (3.48)$$

还是以 Feynman 规范的方法(2.13), 以及之后在量子光学中的量子化方法, 我们假定自能二阶修正占主要作用, 可以得到最后 Hamiltonian 形式

$$H = \int d^3\mathbf{k} \sum_s \hbar\omega \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{2} \iint d^4x d^4x' A^\mu(x) \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(x, x') A^\nu(x') \quad (3.49)$$

主要讨论第二项, 我们参考光场量子化后的矢势形式(2.18), 假定自能过程尺度极小, 还是利用旋转波近似忽略高频项

$$\Delta H = \frac{g}{2} \iint \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \iint d^4x d^4x' e^{ikx-ik'x'} [\epsilon^\mu \Pi_{\mu\nu}(x, x') \epsilon^\nu] a_{\mathbf{k}\mu}^\dagger a_{\mathbf{k}'\nu} + h.c. \quad (3.50)$$

其中  $g$  是量子化模量常数, 我们假设自能作用范围极小, 所以对  $x'$  积分是  $\delta(x-x')$  积分, 这样对于  $e^{ikx-ik'x'}$  调制后要求前后波矢模与能量差别极小, 这样有

$$\Delta H = \frac{g}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} [\epsilon^\mu \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) \epsilon^\nu] a_{\mathbf{k}\mu}^\dagger a_{\mathbf{k}\nu} + h.c. \quad (3.51)$$

这样含有光子自能修正的能量直接与前面提到的自能积分3.47挂钩, 对于不含静矢势的自能积分偏振起的作用体现在

$$\text{tr} [\gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k} + m)] = f(d) [2p_\mu p_\nu - p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} (p^2 - pk - m^2)] \quad (3.52)$$

其中  $g_{\mu\nu}$  是 Minkowski 度规矩阵, 最后算出未重整化的自能积分是

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \frac{\alpha}{3\pi} (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) & \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right. \\ & \left. - 6 \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[ 1 - \frac{k^2}{m^2} x(1-x) \right] + O(\varepsilon) \right\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

其中  $\alpha$  是精细结构常数, 而  $\varepsilon, \mu^2$  都是 Hooft 与 Veltman 所提出的维度正规化引入的参数  $\varepsilon \rightarrow 0, \mu \rightarrow 1$ 。我们只关注大括号之前的部分, 可以发现对于  $z$  轴方向传播的光子, 由于规范对称性与 Lorentz 协变性约束使得  $\mu$  只能取 1 与 2, 我们取  $\mu = 1, \nu = 3$ , 从  $x$  偏振到  $z$  偏振, 最后  $k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2$  总是为 0, 也就意味着不存在折射现象。如果是这样, 对于  $z$  轴传播的光, 我们可以推断形如(3.52)形式的都不贡献折射率。现在加入沿  $y$  轴静磁场, 自能积分的正负电子动量将修正

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = -q^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma_\mu \frac{\not{p} - q\mathbf{A}_0 + m}{(p - q\mathbf{A})^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{\not{p} - q\mathbf{A}_0 - \not{k} + m}{(p - q\mathbf{A} - k)^2 - m^2} \right] \quad (3.54)$$

假如我们取 Landau 规范  $\mathbf{A}_0 = \vec{e}_x z B$ , 我们考虑  $x$  偏振到  $z$  偏振的贡献, 并只对



$p$  进行修正, 这样可以得到多余的(3.52)项

$$\Delta = f(d) (-2qzBp_3 + qzBk_3) \quad (3.55)$$

第一项通过对  $p$  积分会丢掉, 然而第二项是无法积分去掉的, 意味着  $x$  偏振会有一定转变为  $z$  偏振, 发生了折射。如果磁场非常大, 那么偏转程度就越大。

真空双折射的物理图像也清晰不少。正如前面提到的, 大量的实验都是在强磁场下抽真空得到的真空双折射结果, 这是因为在强磁场中才有明显的对正负电子动量的修正。有了强磁场, 这相当于对光子诱导的虚正负电子在传播过程中受到磁场的偏折, 这可能是最主要的贡献, 这种偏折最终促使正负电子湮灭不再是原来的方向, 这其实就是强磁场导致真空的偏极化。而真空双折射的发生也不是一定要有强磁场, 只是现象极其微弱, 这是因为真空其实有光场的量子涨落, 这使得在无磁场的真空中仍然会有微弱瞬时的磁场出现, 从而使得光在传播中偏极化, 出现真空双折射效应, 总之磁场是真空双折射必不可少的因素。我们接下来不研究双折射的相速度与群速度关系, 我们更关注于光传播方向的偏转与传播过程的速度, 这是可以直接实验观测到的, 以上是本文探索场论描述真空双折射理论所做的阐释。

### 3.2.2 二维 Landau 光折射模型

这里我们提出一个新的二维规范系统给真空双折射的量子模拟做理论铺垫。在光场下的多体 Hamiltonian 中我们得到了这些产生湮灭关系, 我们需要把这些 Hamiltonian 投影到晶格系统中, 便于模拟, 但在这之前, 我们需要确认自由度的问题。对于正负电子产生湮灭, 我们只需要在一维中即可, 通过 Double-Well 的光晶格可以构造出正电子态、电子态、光态与真空态, 只考虑他们一维运动的产生湮灭以及传播问题, 然而对于真空双折射, 透过(3.54)可以确认的是, 我们不仅需要以上四个态, 还需要考量光子的偏振或者说自旋, 电子自旋我们可以固定假定不起影响, 然后因为静磁场的存在, 在一维系统是不可能实现规范场效应的 (见 Landau 规范表达式), 我们固定光子的初始传播方向与偏振方向, 以及忽略掉光子、正负电子在第三方向上的传播和光子在第三方向的偏振, 还能表现出加了静规范场后空间的不均匀性, 或者说光子感受到的物理环境不同, 可以构造出一个二维 Landau 规范光折射模型。我们考虑这样的模型, 一个二维光晶格系

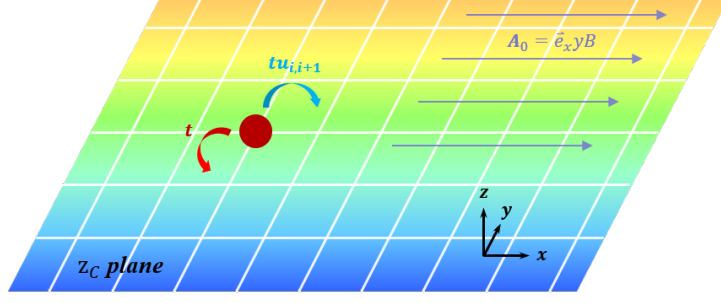


图 3-7 二维 Landau 规范下的光晶格系统, 粒子在 x 轴隧穿叠加规范相位, 在其它轴上只有隧穿强度, 选取 z 轴上的 xy 平面, 在 y 轴矢势呈不均匀性

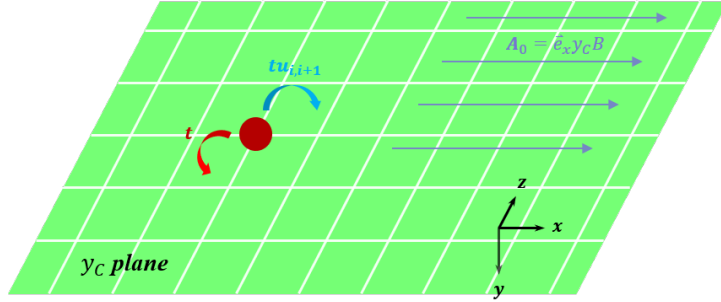


图 3-8 二维 Landau 规范下的光晶格系统, 选取 y 轴上的 xz 平面, 改变坐标角度在 z 轴矢势呈均匀

统, 在低温近似下都处于 Wannier 态上, 我们注入与光晶格数量相同的费米子, 整个系统可以通过 Fermion-Hubbard 模型去描述, 我们可以调整费米子的偶极相互作用或者 Feshbach 共振参数来改变费米子间的相互作用强度, 在后面我们也会提到, 每个格点其实是由 Double-Well 来构成, 用于模拟真空态、光子态、正负电子态, 他们在晶格之间的隧穿强度可以调整晶格形状来改变。我们已知道磁场对真空双折射的作用, 在实验上只需要看到不同偏振光的折射率与偏转即可, 所以随即加入静态的 Landau 规范势, 这里我们定义了右手坐标系, 我们用两种环境模拟不同偏振的光, 如图3-7。

首先考虑初始光偏振是沿 y 轴的, 磁场沿 z 轴, 这时矢势是 x 轴方向, 并且在 y 轴方向表现出不均匀, 见图3-7, 固定电子自旋 z 轴分量向上, 正电子 z 轴分量向下, 下面我们认为矢势是 y 坐标的函数, 忽略高阶项与量为 0 的项, 我们可以根据(3.33)简化正负电子在晶格下的 Hamiltonian

$$\begin{aligned}
 H_0 = & \sum_{xy} a^\dagger \left[ m + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)^2 - \frac{q}{2m} (\nabla \times \mathbf{A}_0) \right] a \\
 & + \sum_{xy} b^\dagger \left[ m + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + q\mathbf{A}_0)^2 + \frac{q}{2m} (\nabla \times \mathbf{A}_0) \right] b
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

相互作用是与(3.34)相同的, 只是需要将连续坐标转变为格点坐标, 不再重复, 我

们再探讨加入光子后,光子与正负电子的作用,分为光子对电子或正电子单独的影响,类同(3.35)简化为

$$H'_1 = \sum_{xy} a^\dagger \left[ -\frac{q}{m} (\mathbf{A}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)) \right] a + \sum_{xy} b^\dagger \left[ -\frac{q}{m} (\mathbf{A}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)) \right] b \quad (3.57)$$

然而为了简单起见,我们理论上光子量少,在光子的湮灭后只有正负电子,没有光子作用,这样该项可以省略掉。然后考虑正负电子对项,正如正负电子产生湮灭中所提及的,对的产生只能伴随光子的湮灭,对的湮灭只能伴随光子的产生,光子的湮灭算符由  $c$  表示,那么(3.36)可以写成

$$H'_2 = \sum_{xy} a^\dagger \mathcal{H} c b^\dagger + \sum_{xy} b c^\dagger \mathcal{H} a \quad (3.58)$$

我们将式(3.37)矢势中的产生湮灭算符提出来,可以得到以下三项

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -q(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{A}) + \frac{q}{2m^2} (\mathbf{A}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)) (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)) \\ & - \frac{iq}{4m} (\boldsymbol{\sigma} \nabla^*) (\mathbf{A}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0)) \end{aligned} \quad (3.59)$$

在上面的简化过程中,我们认为电场势能为零,并且忽略掉分母为  $m^2$  项,因为  $m$  是与取自然常数  $c^2$  搭配,相对能量极小。在这里我们选择的光子偏振只能是  $xy$  平面上的偏振,所以对于  $A_z$  方向是不贡献的,更多的光子以及正负电子的动量  $P_z$  也是不贡献的。对于初始光偏振为  $z$  轴方向,我们将讨论在  $xz$  面上的粒子产生湮灭以及传播,这时磁场仍沿  $z$  轴,但矢势还是在  $x$  轴方向,这时在  $y$  轴表现不均匀,选取其中一个  $xz$  平面,整个平面是均匀的,如图3-8。我们可将上面的 Hamiltonian 中动量修正中的  $\mathbf{A}$  换成常数即可。

我们还需要一个处理手段,可以将加入磁矢势后的动量转变为晶格的隧穿,这种转换称作 Peierls 替换。我们在固体物理的二次量子化表述已经接触过对于能量为矢势修正后的动能是可以用带规范相位的隧穿来表述的。首先根据连续群的生成元可以对格点进行平移操作

$$\hat{T}|m\rangle = e^{-i\frac{P_x}{\hbar}a}|m\rangle = |m+a\rangle \quad (3.60)$$

再则加入  $U(1)$  规范势系统,隧穿过程中总是伴随着规范相位,因此会有个  $U_{xy} =$

$e^{i\theta}, \theta = \frac{q}{\hbar} \int_x^y d\vec{l} \cdot \vec{A}$ , 对平移算符与规范相位都展开, 可以看到

$$\begin{aligned}
 & e^{i\theta} |m+a\rangle \langle m| + e^{-i\theta} |m\rangle \langle m+a| \\
 &= \left( 1 + \frac{iaqA_x}{\hbar} - \frac{a^2 q^2 A_x^2}{2\hbar^2} + \mathcal{O}(a^3) \right) \\
 & \left( 1 - \frac{i\mathbf{p}_x}{\hbar} a - \frac{\mathbf{p}_x^2}{2\hbar^2} a^2 + \mathcal{O}(a^3) \right) |m\rangle \langle m| + \text{h.c.} \\
 &= \left( 2 - \frac{\mathbf{p}_x^2}{\hbar^2} a^2 + \frac{q\{\mathbf{p}_x, A_x\}}{\hbar^2} a^2 - \frac{q^2 A_x^2}{\hbar^2} a^2 + \mathcal{O}(a^3) \right) |m\rangle \langle m| \\
 &= \left( -\frac{a^2}{\hbar^2} (\mathbf{p}_x - qA_x)^2 + 2 + \mathcal{O}(a^3) \right) |m\rangle \langle m|
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

得到了规范势修正后的动能, 所以对于格点中动能我们可以用等式的最左边表示, 这意味着隧穿的强度。但 Peierls 给出了动能的表述, 我们还需要规范势修正后动量表述, 本文构造这种形式

$$\begin{aligned}
 & e^{i\theta} |m+a\rangle \langle m| - e^{-i\theta} |m\rangle \langle m+a| \\
 &= \left( 1 + \frac{i\mathbf{p}_x}{\hbar} a - \frac{iaqA_x}{\hbar} + \mathcal{O}(a^3) \right) |m\rangle \langle m| - \text{h.c.} \\
 &= \left( -i\frac{2a}{\hbar} (\mathbf{p}_x - qA_x) \right) |m\rangle \langle m|
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

通过这种构造可以将含规范势的动量项都转换成等式左边的格点隧穿。接下来我们对上述 Hamiltonian 进行格点化, 便于光晶格系统模拟。

### 3.2.3 格点化 Hamiltonian

我们将格点指标  $x$  换成  $i$ , 将  $y$  换成  $j$ , 对于正负电子的 Hamiltonian 的格点化过程非常熟悉, 按照(3.56), 可以分为在位势与隧穿量, 在位势就是质量以及动能修正量, 而隧穿项如同 Peierls 替换(3.61)一样, 将动能转换成近邻隧穿, 我们忽略自旋磁矩能量

$$\begin{aligned}
 H_0 = & \sum_{ij} \left[ (m - 4t) a_{ij}^\dagger a_{ij} + \left( t a_{ij}^\dagger u_{i,i+1} a_{i+1,j} + \text{h.c.} \right) + \left( t a_{ij}^\dagger a_{i,j+1} + \text{h.c.} \right) \right] \\
 & + \sum_{ij} \left[ (m - 4t) b_{ij}^\dagger b_{ij} + \left( t b_{ij}^\dagger u_{i,i+1}^\dagger b_{i+1,j} + \text{h.c.} \right) + \left( t b_{ij}^\dagger b_{i,j+1} + \text{h.c.} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

其中定义  $u_{i,i+1} = e^{iq \int_i^{i+1} j B dx}$ , 晶格常数都为  $a$ , 隧穿强度  $t = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}$ , 这种含规范势的隧穿项我们会在量子模拟中提及如何在实验中构造, 同样根据(3.34)可以

得到相互作用项, 这里只关心正负电子吸引项

$$H_I = -q^2 \sum_{ii'jj'} a_{ij}^\dagger a_{ij} \frac{1}{\sqrt{(i-i')^2 + (j-j')^2}} b_{i'j'}^\dagger b_{i'j'} \quad (3.64)$$

由于是费米子,  $\sum'$  表示不考虑同位点的相互作用。接下来讨论光子与正负电子的相互作用, 由于初始光子较少, 光子对正负电子单独作用不考虑, 直接考虑产生湮灭项。根据(3.59)三项, 先将正负电子自旋基矢 ( $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ ) 作用在 Hamiltonian 上, 可以将  $\sigma$  消除。我们首先列出光子湮灭产生正负电子, 探讨只有 y 偏振的初始状态并且不加规范势具备的 Hamiltonian, 第一项有 (虚数表示为  $\mathbf{i}$ )

$$\begin{aligned} H_1'^+ &= \sum_{ij} -q(A_x - \mathbf{i}A_y)a_{ij}^\dagger b_{ij}^\dagger \\ &= \sum_{ij} -q\mathbf{i}\eta c_{ij}a_{ij}^\dagger b_{ij}^\dagger \end{aligned} \quad (3.65)$$

其中在光子能量与正负电子能量能级差无失谐情况下, 根据腔光量子化有模参量  $\eta = \sqrt{\frac{1}{2\omega L^3}}$ , 这项算是正负电子产生的主要项, 第二项为

$$\begin{aligned} H_2'^+ &= \sum_{ij} \frac{q}{2m^2} a_{ij}^\dagger (A_x P_x + A_y P_y) (P_x - \mathbf{i}P_y) b_{ij}^\dagger \\ &= \sum_{ij} \frac{q\eta t'^2}{2m^2} a_{ij}^\dagger c_{ij} (Q_{xy} - \mathbf{i}Q_{yy}) \\ Q_{xy} &= b_{i+1,j+1}^\dagger - b_{i+1,j-1}^\dagger - b_{i-1,j+1}^\dagger + b_{i-1,j-1}^\dagger \\ Q_{yy} &= b_{i,j+1}^\dagger + b_{i,j-1}^\dagger - 2b_{i,j}^\dagger \end{aligned} \quad (3.66)$$

其中隧穿强度  $t' = -\frac{\mathbf{i}}{2a}$ , 我们定义了晶格化算符简化用替换式  $Q_{xy}^\dagger, Q_{yy}^\dagger$ , 它们与动量算符不是一回事。该项是在正负电子极化方向受到光场偏移项。第三项为 ( $\partial^A$  只对光场矢势做偏导)

$$\begin{aligned} H_3'^+ &= \sum_{ij} -\frac{\mathbf{i}q}{4m} a_{ij}^\dagger (\partial_x^A - \mathbf{i}\partial_y^A) (A_x P_x + A_y P_y) b_{ij}^\dagger \\ &= \sum_{ij} \frac{q\eta t'^2}{4m} a_{ij}^\dagger (c_{i+1,j} - c_{i-1,j} - \mathbf{i}c_{i,j+1} + \mathbf{i}c_{i,j-1}) (b_{i,j+1}^\dagger - b_{i,j-1}^\dagger) \end{aligned} \quad (3.67)$$

该项为光场空间分布对极化的影响。下面加入规范势, 按照(3.59)我们需要将动量替换为规范势下的动量, 这时可以受(3.62)启发, 将对于有  $\mathbf{i}$  指标变化的加

入规范势因子  $u = u_{i,i+1}$ , 上面三个式子转变为

$$\begin{aligned} H_1'^+ &\Rightarrow H_1'^+ \\ P_{xy}^\dagger &\Rightarrow ub_{i+1,j+1}^\dagger - ub_{i+1,j-1}^\dagger - u^\dagger b_{i-1,j+1}^\dagger + u^\dagger b_{i-1,j-1}^\dagger \\ H_3'^+ &\Rightarrow H_3'^+ \end{aligned} \quad (3.68)$$

当在处理正负电子湮灭光子产生项时, 可能会出现光路的偏转, 这时候不再是

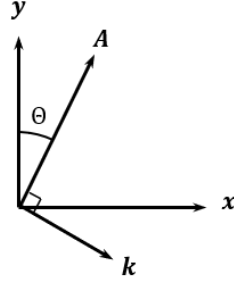


图 3-9 在 xy 平面偏转的矢势与其动量方向的关系

单单的 y 轴偏振, 见图3-9, 可以得到以下矢势与动量关系

$$\begin{aligned} A_y &= \eta \frac{k_x}{\omega} \\ A_x &= -\eta \frac{k_y}{\omega} \end{aligned} \quad (3.69)$$

将矢势与动量关系代入, 以及将自旋基矢和规范动量代入后可以得到光子产生部分, 仍由三项组成

$$\begin{aligned} H_1'^- &= \sum_{ij} -q(A_x + \mathbf{i}A_y)b_{ij}a_{ij} \\ &= \sum_{ij} -\frac{q\eta}{\omega}(-k_y + \mathbf{i}k_x)c_{ij}^\dagger b_{ij}a_{ij} \\ &= \sum_{ij} -\frac{q\eta t'}{\omega}b_{ij}(c_{i,j-1}^\dagger - c_{i,j+1}^\dagger + \mathbf{i}c_{i+1,j}^\dagger - \mathbf{i}c_{i-1,j}^\dagger)a_{ij} \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} H_2'^- &= \sum_{ij} \frac{q}{2\omega m^2}b_{ij}(A_x P_x + A_y P_y)(P_x + \mathbf{i}P_y)a_{ij} \\ &= \sum_{ij} -\frac{qt'^3}{2\omega m^2}b_{ij} \left[ (c_{i,j+1}^\dagger - c_{i,j-1}^\dagger)(W_{xx} + \mathbf{i}W_{xy}) - (c_{i+1,j}^\dagger - c_{i-1,j}^\dagger)(\mathbf{i}W_{yy} + W_{xy}) \right] \end{aligned}$$

$$W_{xx} = ua_{i+1,j} - u^\dagger a_{i-1,j} - 2a_{i,j}$$

$$W_{xy} = ua_{i+1,j+1} - ua_{i+1,j-1} - u^\dagger a_{i-1,j+1} + u^\dagger a_{i-1,j-1}$$

$$W_{yy} = a_{i,j+1} + a_{i,j-1} - 2a_{i,j} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned}
 H_3'^- &= \sum_{ij} -\frac{\mathbf{i}q}{4\omega m} b_{ij} (\partial_x^A + \mathbf{i}\partial_y^A) (A_x P_x + A_y P_y) a_{ij} \\
 &= \sum_{ij} -\frac{q\eta t^3}{4\omega m} b_{ij} [(\mathbf{i}K_{xy} - K_{yy})(u a_{i+1,j} - u^\dagger a_{i-1,j}) + (K_{xy} - \mathbf{i}K_{xx})(a_{i,j+1} - a_{i,j-1})] \\
 K_{xx} &= c_{i+1,j}^\dagger - c_{i-1,j}^\dagger - 2c_{i,j}^\dagger \\
 K_{xy} &= c_{i+1,j+1}^\dagger - c_{i+1,j-1}^\dagger - c_{i-1,j+1}^\dagger + c_{i-1,j-1}^\dagger \\
 K_{yy} &= c_{i,j+1}^\dagger + c_{i,j-1}^\dagger - 2c_{i,j}^\dagger
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

至此本文推导出正负电子产生湮灭过程的所有格点 Hamiltonian，现在我们对推导结果进行一定讨论。首先对于该模型，是否有真空双折射现象需要考察如图3-7和3-8两个环境下光子传播的折射率与偏转程度，所以上述过程是建立在光在 xy 平面只有 xy 偏振的情况3-7，那么要算光在 xz 平面只有 xz 偏振情况3-8，我们只需要将 z 轴重新定义成 y 轴，将 y 轴重新定义成 z 轴，这样上述对 y 轴方向的算符仍然成立，只是需要将磁场产生的规范势定为常数即可，这样再算它的的折射率与偏转。

由于这种产生湮灭过程或者说光子自能过程一般发生不止一次，可能光不再是沿着 x 轴传播，可能对于(3.68)不再成立，那么我们只需要将正负电子湮灭过程的三项取复共轭转置操作即可，这是因为 Hamiltonian 一定是厄密的，只是在对极化过程中那一时是非厄密的，对产生与湮灭刚好是相互复共轭转置的。

对于真空双折射具体哪项是起主导作用，暂时还不能说清，只能通过 m 量级来判断，当然如果要得到更加精确的结果，我们需要将剩余的项都考虑进来。甚至我们可能需要扩展到三维系统，这是因为光场也可能极化出 z 轴方向的正负电子对，所以该模型还欠缺严格的推导，只是在一定程度上简化了复杂问题。也正是计算比较复杂，甚至有多体相互作用的影响，我们可以通过构造量子模拟平台去探究主要起作用的一项。以上本文将高能 QED 的部分现象转化为粒子数表象，并且把它转化为格点系统，便于开展光晶格实验。我们推导的 Hamiltonian 方程都是一般化的，可以考虑到更多项的贡献，也可以扩展规范形式，为处理高能格点正规化做了一定铺垫。在下面我们将介绍量子模拟实现方法。

## 4 量子模拟

如导论所述,量子模拟的目标是解决多体、发散等计算问题和直观地理解物理现象,量子模拟的合法性要求模拟与被模拟系统 Hamiltonian 形式是相同的,而量子模拟的优越性体现于模拟的平台相比实际物理实验有更突出的可行性,更强大的易调性以及更低廉的成本。在前几章我们认识到量子模拟可以解决高能中的一些疑难问题,并且能直观的看到高能现象,也从高能理论中推演出与量子模拟相适应的 Hamiltonian,现在我们需要介绍如何在冷原子光晶格中制备与该 Hamiltonian 对应的自由度与物理环境,可以看到,正是光晶格的易调性和多样的自由度使得高能现象模拟便于实现。

### 4.1 U(1) 规范场模拟

真空双折射需要较大的静磁场,我们首先需要在光晶格中构造静规范场,而在量子模拟格点 QCD、量子霍尔效应等方面也需要规范场的存在,规范场是量子模拟中不可或缺的话题。规范场的加入是经典格点场论计算一大难题,对于规范场的模拟,有数字量子模拟 (DQS) 可以通过量子计算具备规范场的计算复杂度,我们为了有更直观贴切的物理环境,我们还是直接从 Hamiltonian 中构造规范势,这里介绍三种 U(1) 规范势的制造机制。

首先量子气体的旋转可以产生规范势,我们可以将光晶格平台整体绕着  $z$  轴旋转起来,在这种旋转坐标系中,对于中性原子囚禁在二维光晶格谷底是静止的,我们考虑一个费米子在光晶格谷底以简谐势阱处理,旋转矢量  $\Omega = \Omega \hat{z}$ , 由于惯性力,在旋转坐标系中,费米子的 Hamiltonian 为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) - L_z \Omega \quad (4.1)$$

其中费米子只在  $xy$  平面运动,简谐频率为  $\omega$ , 改变形式可以得到

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - m\Omega \hat{z} \times \mathbf{r})^2 + \frac{1}{2} m (\omega^2 - \Omega^2) (x^2 + y^2) \quad (4.2)$$

这与磁矢势的动量是类似的,可以看到这类似于粒子在均匀磁场  $\mathbf{B} = 2m\Omega/q$  运动,矢势为  $\mathbf{A} = m\Omega \times \mathbf{r}/q$ , 这里中性原子在旋转坐标系受到的 Coriolis 力等效于 Lorentz 力。当旋转矢量有  $\Omega = \omega$  时,原来的简谐势阱扁平化,这时候只有动能项,由于矢势的存在,会出现 Landau 能级,这时候系统所有粒子都会处在同



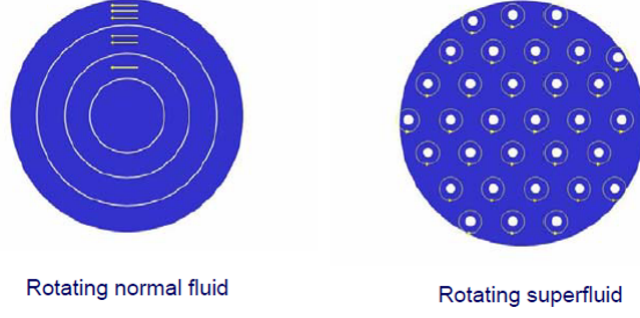


图 4-1 在超流体中旋转平台所观测到现象与经典(左图)的对比

一个 Landau 能级简并态中, 如果每个粒子相位一致, 那么就可能出现超流等多体现象。

Raman 过程也可以制造人工规范势<sup>[72]</sup>, 前面我们已经介绍了 Raman 过程, 通过求解三能级模型我们得到了在最高激发态稳定时, 另两个能级的等效 Hamiltonian 见(2.44), 我们选择在 x 轴上光强相同, 波矢相反的两束光, 这样二能级有效 Hamiltonian 总可以写成

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & ge^{i2k_0x} \\ ge^{-i2k_0x} & -\Delta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

我们考察类似这种形式的 Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

可以求解本征值与本征函数 (缀饰态) 有

$$|\chi_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad |\chi_2\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

波函数可以表示为  $|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle = \psi_1(\mathbf{r}, t)|\chi_1(\mathbf{r})\rangle + \psi_2(\mathbf{r}, t)|\chi_2(\mathbf{r})\rangle$  根据完备性条件, 对于动量算符作用在上面会得到 (态和态系数都含有坐标变量)

$$\hat{\mathbf{p}}|\Psi\rangle = (\hat{\mathbf{p}}\psi_1)|\chi_1\rangle + (\hat{\mathbf{p}}\psi_2)|\chi_2\rangle - \sum_{j,l=1}^2 \mathbf{A}_{jl}\psi_l|\chi_j\rangle \quad (4.6)$$

其中  $\mathbf{A}_{jl} = i\hbar\langle\chi_j|\nabla\chi_l\rangle$  是规范场的矢势, 这样对于只有  $|\chi_1\rangle$  的波函数它的演化方程为

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \left[ \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2}{2m} + \frac{\hbar\Omega}{2} + W \right] \psi_1 \quad (4.7)$$

可以得到表达式  $\mathbf{A} = i\hbar\langle\chi_1|\nabla\chi_1\rangle = \frac{\hbar}{2}(\cos\theta - 1)\nabla\phi$  和  $W = \frac{\hbar^2}{2m}|\langle\chi_2|\nabla\chi_1\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}[(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta(\nabla\phi)^2]$ , 最后我们将 Raman 过程(4.3)的一个缀饰态有效 Hamil-

tonian 写出来可以得到矢势的表达式

$$H_{\text{eff}} = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2}{2m} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{A} = (A_x, 0, 0), \quad A_x = \hbar k_0(\Delta/\sqrt{\Delta^2 + g^2} - 1)$$

如果  $\Delta$  是随空间变化的, 那么可以得到磁场  $\mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{A}(x)$ , 这样通过 Raman 过程制造了人工规范势, 对于光晶格平台, 我们可以让格点随空间有一定的线性偏置, 这样失谐量  $\Delta$  是空间的一次函数, 如果  $g$  很大, 则可以近似在光晶格系统中加入了均匀磁场。

然而通过旋转平台来制造人工规范势不能产生较大的磁场, 这是因为旋转强度是有限制的, 而用 Raman 过程对费米子的能级要求非常高, 对于强关联问题和散射问题, 都不能较好地确定失谐量大小, 这样导致我们得到的磁场不再是均匀的。以及, 如果我们想直接通过人工规范势来代替光子相互作用, 以及模拟 QCD 等非 Abel 规范场问题, 还需要一个一般化的人工规范场, 它需要满足规范对称性以及规范场的基本特性。所以接下来我们介绍 Quantum Link 模型<sup>[28] [29]</sup>, 量子电动力学的量子化过程中指出, 电场其实就是电磁场的正则动量(2.15), 通过量子化对易关系(2.17)可以得到

$$[E_i(\vec{x}), A_j(\vec{x}')] = i\delta_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.9)$$

对于电磁场需要满足高斯定理

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho)|\Psi(A)\rangle = 0 \quad (4.10)$$

这里值得一提的是, 规范对称性以及高斯定理都是弱条件, 只有作用在光子态后的期望值才满足。按照 Wilson 的 U(1) 格点规范理论, 电子在两个格点隧穿时会附加规范相位

$$\hat{T} = -ta_x^\dagger U_{xy} a_y \quad (4.11)$$

两个格点之间的规范相位为

$$U_{xy} = \exp\left(i\frac{q}{\hbar} \int_x^y d\vec{l} \cdot \vec{A}\right) = \exp(i\varphi_{xy}) \in U(1) \quad (4.12)$$

通过代换矢势得到对易关系

$$[E_{xy}, U_{xy}] = U_{xy} \quad (4.13)$$

并且在格系统下的高斯定理转变为

$$G_x = \left[ \sum_i (E_{x,x+i} - E_{x-i,x}) - \rho \right] |\Psi(A)\rangle = 0 \quad (4.14)$$

这样可以得到规范变换的李群指数化表示, 因此要求局域规范对称性有

$$e^{-i\theta G_x} H e^{i\theta G_x} = H \quad \text{or} \quad [G_x, H] = 0 \quad (4.15)$$

有了(4.13)和(4.15)两个约束条件我们可以适当选择算符和 Hamiltonian, 我们选择角动量算符, 定义

$$U_{xy} = S_{xy}^+, \quad U_{xy}^\dagger = S_{xy}^-, \quad E_{xy} = S_{xy}^z \quad (4.16)$$

意味着电子在格点之间的隧穿伴随着另外一个自由度的角动量分量的升降, 便可以模拟电子在规范场下的行为, 并且如果 Hamiltonian 构造的合适, 还满足格点系统下的连续局域的规范对称性。实验实现上可以通过光晶格中混合玻色子费米子异核自旋交换来实现这种类似角动量算符作用<sup>[73]</sup>。这里我们讨论一

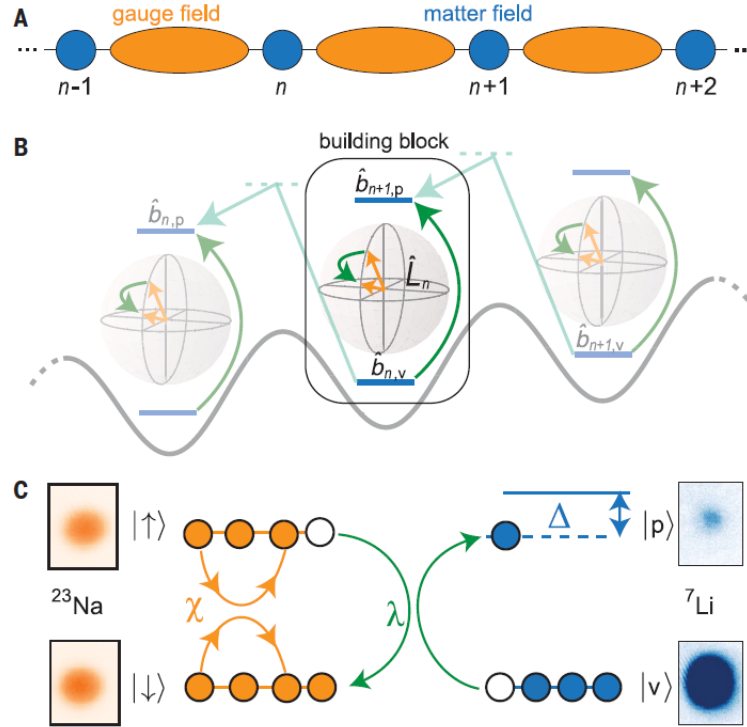


图 4-2 在光晶格系统中具有局域 U(1) 对称性可扩展的人工规范势。(图 B) 使用 Raman 过程在不同格点之间隧穿, 每个格点上发生异核自旋交换。(图 c) 其中  $\chi$  是玻色子自能系数,  $\Delta$  是异核自旋交换跃迁后能级与最接近其的能级之间的失谐量,  $\lambda$  是异核自旋交换的耦合强度

维的光晶格, 其中每个光晶格都是  $^{23}\text{Na}$  玻色子和  $^7\text{Li}$  费米子少量混合, 我们加

入外磁场, 原子总角动量分量指数  $F = 1$ , 选取其中两个 Zeeman 能级, 其中令  $^{23}\text{Na}$  两态  $|\uparrow\rangle = |m_F = 1\rangle, |\downarrow\rangle = |m_F = 0\rangle$ , 而令  $^7\text{Li}$  两态  $|\text{particle}\rangle = |p\rangle = |m_F = 1\rangle, |\text{vacuum}\rangle = |m_F = 0\rangle$ , 我们分离原子在隧穿同时产生规范场相位, 从而避免与人工光场发生作用的先后导致规范场缀饰地不连续, 两个晶格之间我们通过 Raman 过程将  $^7\text{Li}$  态  $|n+1, p\rangle$  和  $|n+1, v\rangle$  耦合等效于 Wannier 态的隧穿, 然后在  $^7\text{Li}$  隧穿到另一个晶格中, 与  $^{23}\text{Na}$  发生异核自旋交换<sup>[74]</sup> 从而使得  $^{23}\text{Na}$  轨道角动量分量指数下降还将  $^7\text{Li}$  还原到真空态, 整个过程可以看作  $^7\text{Li}$  在一个晶格隧穿到另一个近邻晶格并且附加了一个角动量升降系数, 我们将 Hamiltonian 表示出来

$$\hat{H} = \sum \left[ \hat{H}_n + h\Omega \left( \hat{b}_{n,p}^\dagger \hat{b}_{n,v} + \hat{b}_{n,v}^\dagger \hat{b}_{n,p} \right) \right] \quad (4.17)$$

分成两部分, 第一项是内部 Hamiltonian, 第二项是 Raman 过程等效的隧穿, 隧穿强度  $\Omega$

$$\hat{H}_n/h = \chi \hat{L}_z^2 + \frac{\Delta}{2} \left( \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p - \hat{b}_v^\dagger \hat{b}_v \right) + \lambda \left( \hat{b}_p^\dagger \hat{L}_- \hat{b}_v + \hat{b}_v^\dagger \hat{L}_+ \hat{b}_p \right) \quad (4.18)$$

其中我们把  $\hat{b}_p = \hat{b}_{n+1,p}, \hat{b}_v = \hat{b}_{n,v}$ , 根据(4.16)第一项是电场能量, 而第二项分别是图4-2子图 c 中异核自旋交换之前和之后的能量, 而第三项则是异核自旋交换项, 这个就是如(4.11)规范场下的粒子隧穿项, 从而将局域 U(1) 规范连续地加在费米子场上。

## 4.2 Double-Well 模拟正负电子

量子模拟的物理环境我们已经介绍了, 现在我们关心正负电子自由度。首先为了不考虑费米子自旋自由度, 固定电子与正电子自旋分量相反, 即一个自旋向上一个自旋向下, 然后是这样 Dirac 方程就简化到了正负电子这两个旋量自由度上, 首先这两个粒子电荷是相反的, 我们可以用两个态代表它们, 以及为了表现出光子湮灭产生正负电子或者正负电子湮灭产生光子这种直观现象, 还需要准备光子态和真空态, 那么至少是 4 个态。

在低温近似下的 Double-Well 中可以实现这四种态的制备, 我们选择偶极相互作用的超冷费米子注入在一维光学 Double-Well 晶格中, 激光是有一定蓝失谐, 使得势能空间分布如图4-3, 我们定义 DW 之间隧穿强度为  $J_1$  而 DW 内隧穿为  $J$ , 粒子之间有偶极相互作用参数为  $d$ , 对于冷却后系统, 由于是费米子, 不会

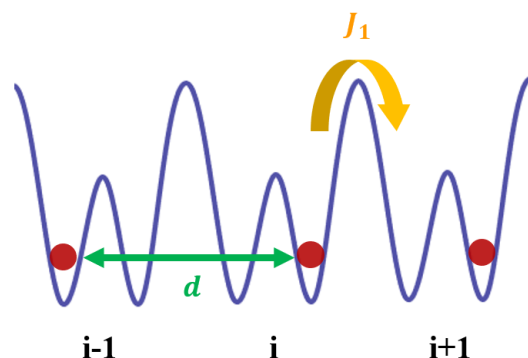


图 4-3 一维光学调制的 Double-Well 驻波场，满足 Fermi-Hubbard 模型， $d$  是偶极排斥势参数， $J_1$  是 DW 之间隧穿强度

出现占据同势阱情况，只考虑近邻相互作用，这时类似于(2.51)有 Hamiltonian

$$\begin{aligned} \hat{H}_{FH} = & -J \sum_{j=1}^N \left( \hat{a}_{2j}^\dagger \hat{a}_{2j-1} + \text{H.c.} \right) \\ & - J_1 \sum_{j=1}^{N-1} \left( \hat{a}_{2j}^\dagger \hat{a}_{2j+1} + \text{H.c.} \right) \\ & + d \sum_j^{2N-1} \hat{n}_j \hat{n}_{j+1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

我们注入与 DW 数量相同的费米子数量，调整偶极相互作用力可以使得  $J_1 \ll d \ll J$ ，参考图2-10可以看到最低能量系统都处在左阱与右阱的正叠加态  $|L\rangle_i + |R\rangle_i$ ，可以认为这是真空态，当到了第一激发态时，这时会有负叠加态的出现，这可以认为该第一激发态是光子态，类似于真空中光子激发。现在我们调整光晶格形状可以使得  $J_1 < d < J$  但数值差别小了些，这时按照图2-10子图 4 或者分

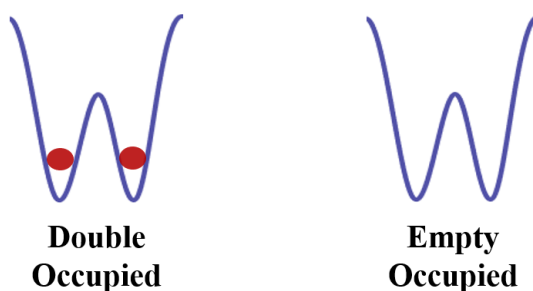


图 4-4 在  $J_1 < d < J$  情况下，DW 系统第一激发态出现双占据和空态，左图双占据态，右图空态

析能级图会发现每个 DW 中不只是这两个态了，而是 DW 会有双占据态和空态，如图4-4我们可以定义它们分别是电子态与空穴(正电子)态。

这样我们将真空态、光子态、电子态、正电子态标记为  $|V\rangle_i, |P\rangle_i, |D\rangle_i, |H\rangle_i$ , 他们分别是态  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle_i + |R\rangle_i), \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle_i - |R\rangle_i), |LR\rangle_i, |0\rangle_i$ 。我们有完备性条件, 可以将原先的 Hamiltonian 投影到新的基矢上, 根据论文<sup>[75]</sup>, 采用产生湮灭算符  $b_{i,H}^\dagger$  为有效 Hamiltonian

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_J + \hat{H}_{J_1} + \hat{H}_s + \hat{H}_I + \hat{H}_c + \hat{H}_{\text{offset}} \quad (4.20)$$

将 Hamiltonian 拆分得到

$$\hat{H}_J = J \sum_i^N n_{i,P} \quad (4.21)$$

该项是光场能量项, 能量为所有格点光子数总和, 只是系统注入的是费米子, 同位点不可能有多个光子

$$\hat{H}_{J_1} = H.c. + -J_1 \sum_i^{N-1} \left\{ \begin{aligned} & b_{i,H}^\dagger b_{i+1,H} - b_{i,H}^\dagger a_{i,P}^\dagger b_{i+1,H} + b_{i,H}^\dagger a_{i+1,P} b_{i+1,H} - b_{i,H}^\dagger a_{i+1,P}^\dagger a_{i,P} b_{i+1,H} \\ & b_{i+1,D}^\dagger b_{i,D} - b_{i+1,D}^\dagger a_{i+1,P} b_{i,D} + b_{i+1,D}^\dagger a_{i,P}^\dagger b_{i,D} - b_{i+1,D}^\dagger a_{i,P}^\dagger a_{i+1,P} b_{i,D} \\ & -b_{i,D} b_{i+1,H} + a_{i+1,P} b_{i,D} b_{i+1,H} + a_{i,P}^\dagger b_{i,D} b_{i+1,H} - a_{i,P}^\dagger a_{i+1,P} b_{i,D} b_{i+1,H} \\ & -b_{i,H}^\dagger b_{i+1,D} + b_{i,H} b_{i+1,D} a_{i+1,P}^\dagger + b_{i,H} b_{i+1,D} a_{i,P} - b_{i,H} b_{i+1,D} a_{i,P}^\dagger a_{i+1,P} \end{aligned} \right. \quad (4.22)$$

该项描述了正负电子产生湮灭和正负电子的移动, 是最重要一项, 但这与我们高能 QED 部分推导不尽相同, 这是因为该量子模拟系统是费米子, 不允许同位点占据多个光子和正负电子, 我们可以通过加入改变晶格格点指数来获得同位点的产生湮灭, 我们还可以加入 Raman 过程可以使得部分隧穿更加容易进行从而忽略掉我们不关心的项

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{d}{4} (a_{i,P}^\dagger + a_{i,P}) (a_{i+1,P}^\dagger + a_{i+1,P}) \\ & +\frac{d}{4} (a_{i,P}^\dagger + a_{i,P}) n_{i+1,H} \\ & -\frac{d}{4} (a_{i,P}^\dagger + a_{i,P}) n_{i+1,D} \\ & -\frac{d}{4} n_{i,H} (a_{i+1,P}^\dagger + a_{i+1,P}) \\ & +\frac{d}{4} n_{i,H} n_{i+1,H} - \frac{d}{4} n_{i,H} n_{i+1,D} \\ & +\frac{d}{4} n_{i,D} (a_{i+1,P}^\dagger + a_{i+1,P}) \\ & -\frac{d}{4} n_{i,D} n_{i+1,H} + \frac{d}{4} n_{i,D} n_{i+1,D} \end{aligned} \right. \quad (4.23)$$

该项部分为光场下正负电子的能量, 部分是正负电子的相互作用项, 这是正负电

子在传播中必不可少的一项,这可能是真空双折射偏极化的原因所在

$$\begin{aligned}\hat{H}_s = & d \sum_{i=1}^N \hat{n}_{i,D} + \sum_i^N \left( \frac{d}{2} \hat{n}_{i,H} + \frac{d}{2} \hat{n}_{i,D} \right) \\ & + \frac{d}{4} \left( \hat{a}_{1,P}^\dagger + \hat{a}_{1,P} \right) - \frac{d}{4} \left( \hat{a}_{N,P}^\dagger + \hat{a}_{N,P} \right)\end{aligned}\quad (4.24)$$

第一项是双占据态粒子的偶极相互作用力所提供的剩余力,第二项是正负电子的能量差,可以调整相互作用强度从而使得与  $mc^2$  近似,接近真实实验。最后两项是由于非周期条件下的 Hamiltonian 会存在边界项,光场会在两端聚集。

$$\hat{H}_c = \frac{(N-1)d}{4} \quad (4.25)$$

该项为对易关系留下的常数项,与 DW 数量有关

$$\hat{H}_{\text{offset}} = -J \sum_i^N \hat{n}_{i,V} \quad (4.26)$$

最后这项是真空态本身的能量,这算是系统的偏置能量,我们可以认为以该能量为能量为 0 的基准。对于正负电子产生湮灭过程,我们可以通过加入一定的瞬

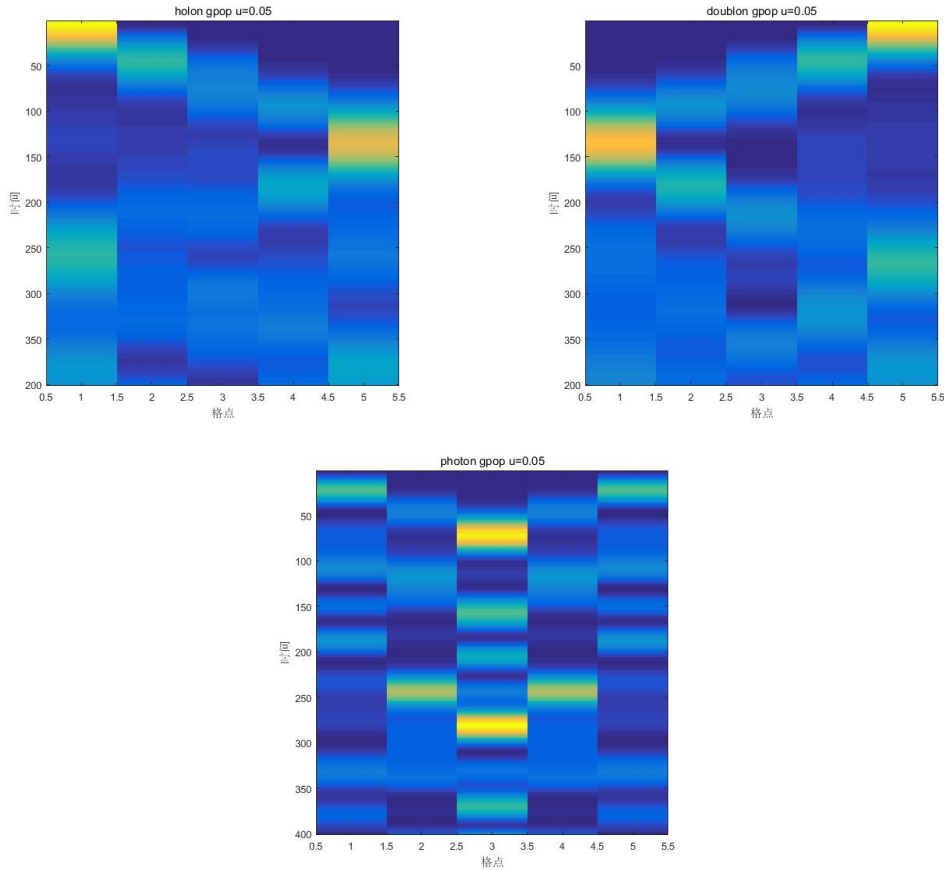


图 4-5 5DW 系统去掉边界的台阶势场后,三种态在格点占据概率随时间的演化(图 1)正电子态(图 2)电子态(图 3)光子态

时势场从而使得初态为真空态下激励出一对正负电子态，可以通过计算机模拟该过程，见图4-5，可以看到，对于 5DW 系统，通过计算机模拟，比较格点占据概率，正负电子产生的同时伴随着光子的湮灭而正负电子湮灭的同时伴随着光子的产生，一系列可靠结果表明，这与物理实验是相吻合的。我们可以通过这种 DW 系统模拟真空双折射，只是需要将前面所提到的规范场加进来，并且扩展到二维空间。

### 4.3 真空双折射模拟方案

经过高能 QED 格点化 Hamiltonian 的推导，以及寻找到了光晶格系统中的四种态，我们有理由将高能 QED 的物理过程在光晶格中模拟。在这里我们对真空双折射模拟实现提出以下评述，具体实验细节不赘述。

首先，我们需要比对光子作用的正负电子对在高能理论与光晶格系统的表达的 Hamiltonian，可确定的是，以  $1/m$  为展开依据的高能 Hamiltonian 中的主导项，在光晶格 DW 平台中都具备，只是可能会附加不必要的项，这些项可以通过 Raman 过程、调整晶格形状等方法去抵消或者增强，相比之下可以近似一些项不作用。当形式一致时便可以将隧穿强度、相互作用大小等调整为粒子物理常数关系，从而可以有真实的物理结果，便于比对。

	原始系统	模拟系统
环境	二维格点系统	二维 DW 光晶格系统
	z 轴静磁场	x 方向 Raman 过程人工 Landau 规范
基矢	光子态	DW 单粒子奇叠加态
	真空态	DW 单粒子偶叠加态
	电子态	DW 双占据态
	正电子态	DW 空态
	光子 x/y 偏振	y 轴不均匀矢势环境
	光子 z 偏振	y 轴均匀矢势环境

表 4-1 真空双折射原始系统与模拟系统在环境与基矢上的对比

再者，真空双折射量子模拟方案，我们如同上面提到的正负电子对的制备方法，先注入同 DW 数量的费米子，将其由冷却原理提到的方法降温，选择



$J_1 < d < J$  使得费米子最初都处于真空态上, 通过 U(1) 规范模拟的最后一种方案加入 Landau 规范, 使得在  $x$  方向跳跃时有规范势的叠加。我们制备如图3-7和图3-8两个系统, 我们将在系统边缘处激励一个光子态, 光子将向  $x$  轴方向传播, 在传播途中会出现正负电子态的产生, 即双占据态与空态出现。这时正负电子会感受到磁场的存在, 也会有相互吸引的趋势。在它们再次合并后将再次出现光子态, 测量两个物理环境下最后光子态变化的相位以及偏转角度即可, 从而测量出力光子不同偏振的相位关系, 以及双折射偏角。我们在这里列出了原始基矢与环境对应着模拟基矢与环境的比对表, 如表4-1, 也提出一个模拟真空双折射的实验雏形, 如图4-6所示。

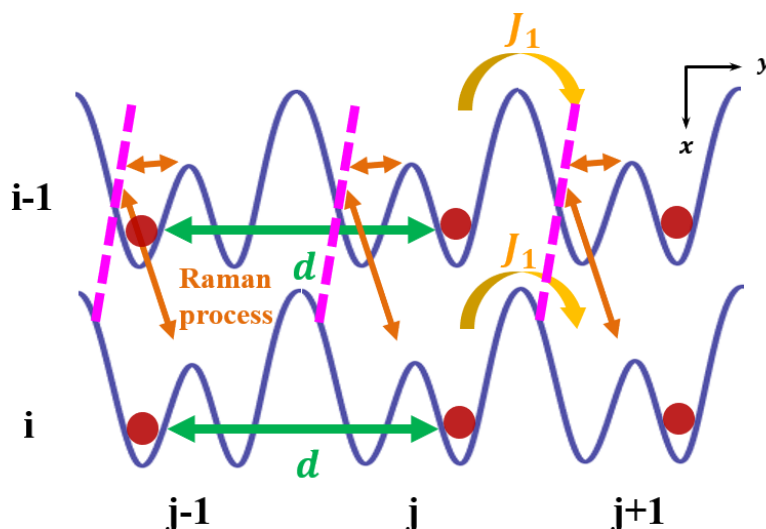


图 4-6 二维 DW 光晶格模拟环境示意图,  $z$  轴均匀磁场可以用 Landau 规范在  $x$  方向加入 Raman 过程制造的人工规范势来实现, 改变 Raman 过程在  $y$  轴上失谐量的均匀性与否来模拟不同环境

在量子模拟之前, 可以先实现小系统或者进一步简化模型, 比如将规范势去掉考虑 DW 和只考察单晶格规范势, 制备不同数量的费米子, 探究它们在这些简化系统实现是否优良, 以及鲁棒性的好坏。可以考虑这些粒子的关联程度和响应强度, 检查在不同环境是否处于如我们前面提到的态上, 为真空双折射的模拟做好充足的预实验。

然而, 对于真空双折射的模拟是较为复杂, 一方面是静磁场起作用的项占多数, 我们不清楚哪些项是起主要作用, 然而我们可以通过量子模拟的过程去确定这个关系。我们可以调整光晶格系统只表达一个项比如(3.70), 这时光子只是

产生正负电子但不受静磁场影响，静磁场的影响主要在于正负电子的传播过程，这样比对真实实验趋势，我们可以理解该项对真空双折射是否起主导作用，从而研究每一项的物理含义。另一方面，光子自能中的正负电子对是非在壳的，不满足能动关系，也就是光子激励的正负电子是失谐的，然而在本文中我们假定正负电子对是无失谐激励，从而忽略掉了失谐相位加成，这可能成为模拟不准确的原因之一。

## 5 结论与展望

在本文中，我们首先介绍了量子模拟的广泛运用，其中高能物理为了处理 QCD 多体以及发散问题借助光晶格量子模拟平台是个不错的选择，量子模拟平台相比实际物理实验有更突出的可行性，更强大的易调性以及更低廉的成本，因此本文以此出发，探究量子模拟高能现象所需要回答的问题。通过全文，可以总结出以下结论

1. 超冷原子的操控和 Hilbert 空间截断都比较成熟，借鉴原子与光物理的研究，很容易实现态的转换与选取，只需要在低温条件下，根据热化假说都能够限制在少量的态上，然后通过 Raman 过程以及 Feshbach 共振可以调整冷原子系统参数，从而实现 Hilbert 空间的截断，得到目标的准粒子。所以冷原子系统量子模拟具有极强的灵活性。
2. 正负电子的区分在于静电磁场下旋量场 Hamiltonian 正负频本征函数，这时动量与电荷算符也同时对角化，所推导电子 Hamiltonian 也被物理实验证实。通过 Jordan-Wigner 反对易关系可以将负能态电子用负能态空穴表示，即正电子。按照这种区分办法可以对含时变化光场下的 Hamiltonian 进行微扰对角化，得到区分正负电子在光场下的动力学方程。这种正负电子混合的旋量粒子也在拓扑材料中发现。
3. 本文通过 Hamiltonian 方式分析认为磁场是真空双折射的主要原因。在场论最新研究中已经清楚真空双折射的散射矩阵是由规范场影响，我们直接从 Hamiltonian 上分析加入规范势后的变化，更直观地发现光子自能修正中无法积分去掉的规范项，从而粗略地评估了磁场对真空双折射的作用大小。
4. 本文提出了一种简化真空双折射过程，并可以用格点系统模拟的模型，该模型只加入 Landau 规范，对不同偏振应用在不同物理环境当中，从而可以用 DW 四个态就可以模拟出真空双折射的结论。我们运用 Peierls 推论来表示动量的规范修正，从而规范场简化到只是晶格之间隧穿多出的相位而已。本文推导给出了晶格表象下真空双折射所有主导 Hamiltonian，这给了量子模拟真空双折射充足的物理实在支持。
5. 为了实现光晶格量子模拟，介绍了三种 U(1) 规范场的实现手段，前两种可以直接构造规范势修正的动能，最后一种可以直接构造格点隧穿时所加成

的规范相位,所以本文采用第三种规范方法更贴合。我们也介绍了 Double-Well 中如何得到这真空态、光子态、正负电子态这四种态,通过计算机模拟可以看到这种模拟是符合预期有较好的鲁棒性的,这里也给出了相应的光晶格系统中所满足的 Hamiltonian,以便于比对调参。最后简单叙述了真空双折射的模拟方案,类同于正负电子对产生湮灭,只是加入了规范势并在两个物理环境比对不同偏振光的传播结果。以上说明了模拟真空双折射是可行的。

本文对整个量子模拟流程完整给出。在导论中对量子模拟与高能物理的文献总结已体现了光晶格量子模拟的必要性,后面本文推导高能物理在晶格系统的表达给量子模拟提供理论合法性,最后介绍原子与光物理以及规范场、正负电子态表现了量子模拟极高的灵活性。然而光晶格系统模拟真空双折射与对产生湮灭还有一定的局限与不足,表现为以下这些方面。

1. 真空双折射是虚粒子过程。我们知道光子自能是非在壳的,然而在正负电子对产生湮灭项上我们是假设光子是匹配正负能级差的,是没有失谐的,这会导致自能过程是难以产生的,或者在光晶格系统自能过程是有一定相位上的错误,这里需要引起重视,这会对最后双折射的结果有较大的误差。
2. 真空双折射格点化 Hamiltonian 中其主导作用的项还暂不清楚。真空双折射所致的光路偏折是因为磁场下正负电子产生湮灭方向偏转所致还是因为正负电子在磁场中传播偏折所致还是两者都有是我们模拟真空双折射需要弄清的重要问题。为了让真空双折射模拟结果更准确,甚至 Hamiltonian 更高阶展开也要考虑,这意味着我们要推导更多格点化项,这也加大了实验难度。
3. 二维 Landau 模型暂未考虑自旋自由度和  $z$  轴维度。为了简化模型,我们只采用了二维空间,并且用两个环境模拟两种偏振,然而无法忽视  $z$  轴方向光子、正负电子的动量,这可能会出错。再者我们固定了自旋,然而我们知道对于磁场沿着  $z$  轴,按照量子主轴,自旋是  $z$  轴量子化的,当我们考虑图3-8环境,将  $z$  转换为  $y$  轴时,作用到自旋算符不再是真空双折射给出的 Hamiltonian,这点也需要再推导以验证对错。如果模拟结果出错,我们需要再考虑这些问题。
4. 实验上也有很多困难。首先是光子自能过程后相位是难以测量的,测量光

子传播速度更为现实,再者光晶格中虚数隧穿可以通过 Floquet 工程来制造,但是要在宏大的系统精确分布不同的隧穿强度,工程上还是有难度。更多的,由于正负电子电荷不同,规范场相位也是相反的,对于一个模型构建两种规范场,以及给予双占据态和空态不同电荷都是较为困难的。而且对于 DW 模型所构建的正负电子模型,由于是费米子,在同位点上不会有多粒子,这也可能成为模拟过程中的漏洞。

综上,在真空双折射模拟上,我们还可以在以上提到的问题上更加细化理论的推导,扩展模型的维度与自由度,更贴切真实的物理过程,在实验上我们应该做更多的简化,或者寻找新的实现手段,以便使得模拟更具可行性。我们期望本文的先驱性工作可以激励本领域更多同行研究人员在上述方向上开展更为详尽深入的研究。

## 参考文献

- [1] SARMA S D, FREEDMAN M, NAYAK C. Majorana zero modes and topological quantum computation[J]. npj Quantum Information, 2015, 1.
- [2] FEYNMAN R P. Simulating physics with computers[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1982, 21 : 467 – 488.
- [3] QUINTANILLA J, HOOLEY C. The strong-correlations puzzle[J]. Physics World, 2009, 22 : 32 – 37.
- [4] PHILLIPS J C. Percolative theories of strongly disordered ceramic high-temperature superconductors[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2010, 107 : 1307 – 1310.
- [5] BERINGER J, ARGUIN J F, BARNETT R M, et al. Review of Particle Physics[J]. Physical Review D, 2012, 86.
- [6] YANG C N, MILLS R L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance[J]. Physical Review, 1954, 96 : 191 – 195.
- [7] GREENSITE J. An Introduction to the Confinement Problem[M]. [S.l.] : Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [8] GIGNOUX C, SILVESTRE-BRAC B, RICHARD J. Possibility of stable multi-quark baryons[J]. Physics Letters B, 1987, 193 : 323 – 326.
- [9] WILSON K G. Confinement of quarks[J]. Physical Review D, 1974, 10 : 2445 – 2459.
- [10] GEORGESCU I, ASHHAB S, NORI F. Quantum simulation[J]. Reviews of Modern Physics, 2014, 86 : 153 – 185.
- [11] COHEN-TANNOUDJI C N, PHILLIPS W D. New Mechanisms for Laser Cooling[J]. Physics Today, 1990, 43 : 33 – 40.
- [12] CHU S. Nobel Lecture: The manipulation of neutral particles[J]. Reviews of Modern Physics, 1998, 70 : 685 – 706.

- [13] CORNELL E A, WIEMAN C E. Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments[J]. Reviews of Modern Physics, 2002, 74 : 875 – 893.
- [14] KETTERLE W. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser[J]. Reviews of Modern Physics, 2002, 74 : 1131 – 1151.
- [15] CHIN C, GRIMM R, JULIENNE P, et al. Feshbach Resonances in Ultracold Gases[J]. Reviews of Modern Physics, 2010, 82 : 1225–1286.
- [16] COUTEAU C. Spontaneous parametric down-conversion[J]. Contemporary Physics, 2018, 59 : 291 – 304.
- [17] BLOCH I, DALIBARD J, ZWERGER W. Many-body physics with ultracold gases[J]. Reviews of Modern Physics, 2008, 80 : 885 – 964.
- [18] GREINER M, MANDEL O, ESSLINGER T, et al. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms[J]. Nature, 2002, 415 : 39 – 44.
- [19] ORTNER M, MICHELI A, PUPILLO G, et al. Quantum simulations of extended Hubbard models with dipolar crystals[J]. New Journal of Physics, 2009, 11 : 055045.
- [20] GARCÍA-RIPOLL J J, MARTIN-DELGADO M A, CIRAC J I. Implementation of Spin Hamiltonians in Optical Lattices[J]. Physical Review Letters, 2004, 93.
- [21] FALLANI L, LYE J E, GUARRERA V, et al. Ultracold Atoms in a Disordered Crystal of Light: Towards a Bose Glass[J]. Physical Review Letters, 2007, 98.
- [22] BILLY J, JOSSE V, ZUO Z, et al. Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder[J]. Nature, 2008, 453 : 891 – 894.
- [23] ZWIERLEIN M W, ABO-SHAER J R, SCHIROTZEK A, et al. Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas[J]. Nature, 2005, 435 : 1047 – 1051.

- [24] AGUADO M, BRENNEN G K, VERSTRAETE F, et al. Creation, Manipulation, and Detection of Abelian and Non-Abelian Anyons in Optical Lattices[J]. Physical Review Letters, 2008, 101.
- [25] LIN Y-J, COMPTON R L, JIMÉNEZ-GARCÍA K, et al. Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms[J]. Nature, 2009, 462 : 628 – 632.
- [26] LIU X-J, LIU Z-X, CHENG M. Manipulating Topological Edge Spins in a One-Dimensional Optical Lattice[J]. Physical Review Letters, 2013, 110.
- [27] BüCHLER H P, HERMELE M, HUBER S D, et al. Atomic Quantum Simulator for Lattice Gauge Theories and Ring Exchange Models[J]. Physical Review Letters, 2005, 95.
- [28] ORLAND P, ROHRLICH D. Lattice gauge magnets: Local isospin from spin[J]. Nuclear Physics B, 1990, 338 : 647 – 672.
- [29] CHANDRASEKHARAN S, WIESE U-J. Quantum link models: A discrete approach to gauge theories[J]. Nuclear Physics B, 1997, 492 : 455 – 471.
- [30] KORMOS M, COLLURA M, TAKÁCS G, et al. Real-time confinement following a quantum quench to a non-integrable model[J]. Nature Physics, 2016, 13 : 246 – 249.
- [31] BANERJEE D, DALMONTE M, MÜLLER M, et al. Atomic Quantum Simulation of Dynamical Gauge Fields Coupled to Fermionic Matter: From String Breaking to Evolution after a Quench[J]. Physical Review Letters, 2012, 109.
- [32] CIRAC J I, MARANER P, PACHOS J K. Cold Atom Simulation of Interacting Relativistic Quantum Field Theories[J]. Physical Review Letters, 2010, 105.
- [33] GOLDMAN N, KUBASIAK A, BERMUDEZ A, et al. Non-Abelian Optical Lattices: Anomalous Quantum Hall Effect and Dirac Fermions[J]. Physical Review Letters, 2009, 103.
- [34] HOU J-M, YANG W-X, LIU X-J. Massless Dirac fermions in a square optical lattice[J]. Physical Review A, 2009, 79.



- [35] ZUREK W H, DORNER U, ZOLLER P. Dynamics of a Quantum Phase Transition[J]. Physical Review Letters, 2005, 95.
- [36] GIOVANAZZI S. Hawking Radiation in Sonic Black Holes[J]. Physical Review Letters, 2005, 94.
- [37] HUNG C-L, GURARIE V, CHIN C. From Cosmology to Cold Atoms: Observation of Sakharov Oscillations in a Quenched Atomic Superfluid[J]. Science, 2013, 341 : 1213 – 1215.
- [38] LIN C-J, MOTRUNICH O I. Out-of-time-ordered correlators in a quantum Ising chain[J]. Physical Review B, 2018, 97.
- [39] FISCHER U, SCHÜTZHOLD R. Quantum simulation of cosmic inflation in two-component Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review A, 2004, 70.
- [40] YOU J Q, NORI F. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits[J]. Nature, 2011, 474 : 589 – 597.
- [41] LEIBFRIED D, DEMARCO B, MEYER V, et al. Trapped-Ion Quantum Simulator: Experimental Application to Nonlinear Interferometers[J]. Physical Review Letters, 2002, 89.
- [42] MÜLLER M, HAMMERER K, ZHOU Y L, et al. Simulating open quantum systems: from many-body interactions to stabilizer pumping[J]. New Journal of Physics, 2011, 13 : 085007.
- [43] MATLOOB R. Casimir effect between two conducting plates[J]. Physical Review A, 1999, 60 : 3421 – 3428.
- [44] TURNER M S, WILCZEK F. Is our vacuum metastable?[J]. Nature, 1982, 298 : 633 – 634.
- [45] DEUTSCH J M. Quantum statistical mechanics in a closed system[J]. Physical Review A, 1991, 43 : 2046 – 2049.
- [46] RIGOL M, DUNJKO V, OLSHANII M. Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems[J]. Nature, 2008, 452 : 854 – 858.

- [47] ALTLAND A, SIMONS B D. Second edition[C] // Condensed Matter Field Theory. 2010.
- [48] DUPONT-ROC J, COHEN-TANNOUDJI C, GRYNBERG G. Atom-Photon Interactions[J]. Basic Processes and Appli, 1992.
- [49] COHEN-TANNOUDJI C, OTHERS. Advances in atomic physics: an overview[M]. [S.l.]: World Scientific, 2011.
- [50] JÖRDENS R, STROHMAIER N, GÜNTER K, et al. A Mott insulator of fermionic atoms in an optical lattice[J]. Nature, 2008, 455 : 204–207.
- [51] WU C, BERGMAN D, BALENTS L, et al. Flat Bands and Wigner Crystallization in the Honeycomb Optical Lattice[J]. Physical Review Letters, 2007, 99.
- [52] LIN Y-J, COMPTON R L, JIMÉNEZ-GARCÍA K, et al. Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms[J]. Nature, 2009, 462 : 628–632.
- [53] WU W, RACHEL S, LIU W-M, et al. Quantum spin Hall insulators with interactions and lattice anisotropy[J]. Physical Review B, 2012, 85.
- [54] STRUCK J, OLSCHLAGER C, LE TARGAT R, et al. Quantum Simulation of Frustrated Classical Magnetism in Triangular Optical Lattices[J]. Science, 2011, 333 : 996–999.
- [55] YIN X, CAO L, SCHMELCHER P. Magnetic kink states emulated with dipolar superlattice gases[J]. EPL (Europhysics Letters), 2015, 110 : 26004.
- [56] 李正中. 固体理论 [M]. 2002.
- [57] 王正行. 简明量子场论 [M]. [S.l.]: 北京大学出版社, 2008.
- [58] WANG Q, LIU J, FU L-B. Pumping Electron-Positron Pairs from a Well Potential[J]. Scientific Reports, 2016, 6.
- [59] LV Q, SU Q, GROBE R. Manipulation of the Vacuum to Control Its Field-Induced Decay[J]. Physical Review Letters, 2018, 121.

- [60] WELTON T A. Some Observable Effects of the Quantum-Mechanical Fluctuations of the Electromagnetic Field[J]. Physical Review, 1948, 74 : 1157 – 1167.
- [61] AVAN P, COHEN-TANNOUDJI C, DUPONT-ROC J, et al. Effect of high frequency irradiation on the dynamical properties of weakly bound electrons[J]. Journal de Physique, 1976, 37 : 993 – 1009.
- [62] LEE C. STATIONARY STATES OF AN ELECTRON-POSITRON SYSTEM AND ANNIHILATION TRANSITIONS[J]. Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz., 1957, 33.
- [63] WEYL H. Elektron und Gravitation. II[J]. Zeitschrift fur Physik, 1929, 56 : 330 – 352.
- [64] BERNEVIG B A, HUGHES T L. Topological insulators and topological superconductors[M]. [S.l.] : Princeton university press, 2013.
- [65] KANE C L, MELE E J. Z2Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect[J]. Physical Review Letters, 2005, 95.
- [66] KANE C L, MELE E J. Quantum Spin Hall Effect in Graphene[J]. Physical Review Letters, 2005, 95.
- [67] WAN X, TURNER A M, VISHWANATH A, et al. Topological semimetal and Fermi-arc surface states in the electronic structure of pyrochlore iridates[J]. Physical Review B, 2011, 83.
- [68] XU S-Y, BELOPOLSKI I, ALIDOUST N, et al. Discovery of a Weyl fermion semimetal and topological Fermi arcs[J]. Science, 2015, 349 : 613 – 617.
- [69] SOLUYANOV A A, GRESCH D, WANG Z, et al. Type-II Weyl semimetals[J]. Nature, 2015, 527 : 495 – 498.
- [70] RIZZO C, RIZZO A, BISHOP D M. The Cotton-Mouton effect in gases: Experiment and theory[J]. International Reviews in Physical Chemistry, 1997, 16 : 81 – 111.

- [71] DITTRICH W, GIES H. Vacuum Birefringence in Strong Magnetic Fields[J]. arXiv:hep-ph/9806417, 1998.
- [72] LIN Y-J, COMPTON R, PERRY A, et al. Bose-Einstein Condensate in a Uniform Light-Induced Vector Potential[J]. Physical Review Letters, 2009, 102.
- [73] MIL A, ZACHE T V, HEGDE A, et al. A scalable realization of local U(1) gauge invariance in cold atomic mixtures[J]. Science, 2020, 367 : 1128 – 1130.
- [74] LI X, ZHU B, HE X, et al. Coherent Heteronuclear Spin Dynamics in an Ultracold Spinor Mixture[J]. Physical Review Letters, 2015, 114.
- [75] 刘武. 利用超冷原子系统进行正反粒子对产生/湮灭的量子模拟的理论研究[J]. 华中科技大学本科生毕业设计, 2018.