V Coloquio de Psicología Fisiológica y Experimental

Simposio

Inferencia Probabilística y Modelos Psicológicos

Laboratorio 25

Facultad de Psicología, UNAM

Proyecto PAPIIT: **IN307214**

Octubre 1º, 2014

Tutorial en Inferencia Probabilística

José Luis Baroja
Laboratorio 25
Facultad de Psicología, UNAM

Proyecto PAPIIT **IN307214**

¿Qué deberíamos creer sobre el mundo después de recolectar ciertas observaciones?

¿Qué deberíamos creer sobre nuestras **explicaciones/modelos** sobre el mundo **dadas** ciertas observaciones?

¿Qué tan probable es que nuestras **explicaciones/modelos** sobre el mundo sean correctos **dadas** ciertas observaciones?

$$Pr(\mathcal{M} \,|\, datos) = \, ?$$

$$Pr(\mathcal{M} \mid datos) = \frac{Pr(datos \mid \mathcal{M})\, Pr(\mathcal{M})}{Pr(datos)}$$

Teorema de Bayes

$$Pr(\mathcal{M}\,|\,datos) = \frac{Pr(datos\,|\,\mathcal{M})\,Pr(\mathcal{M})}{Pr(datos)}$$

Función de Verosimilitud

$$Pr(\mathcal{M} \mid datos) = \frac{Pr(datos \mid \mathcal{M})\, Pr(\mathcal{M})}{Pr(datos)}$$

Función de Verosimilitud

$$Pr(\mathcal{M} \mid datos) = \frac{Pr(datos \mid \mathcal{M})\, Pr(\mathcal{M})}{Pr(datos)}$$

Verosimilitud Marginal

Función de Verosimilitud

Distribución Prior

$$Pr(\mathcal{M} \mid datos) = \frac{Pr(datos \mid \mathcal{M})\, Pr(\mathcal{M})}{Pr(datos)}$$

Verosimilitud Marginal

Función de Verosimilitud

Distribución Prior

$$Pr(\mathcal{M} \mid datos) = \frac{Pr(datos \mid \mathcal{M})\, Pr(\mathcal{M})}{Pr(datos)}$$

Distribución Posterior

Verosimilitud Marginal

Ejemplo:

¿Quién está en la fiesta?

M_1: **Juan** está en la fiesta.

M_1: Juan está en la fiesta.

M_2: **El hermano** de Juan está en la fiesta.

M_1: Juan está en la fiesta.

M_2: El hermano de Juan está en la fiesta.

M_3: **El amigo** del hermano de Juan está en la fiesta.

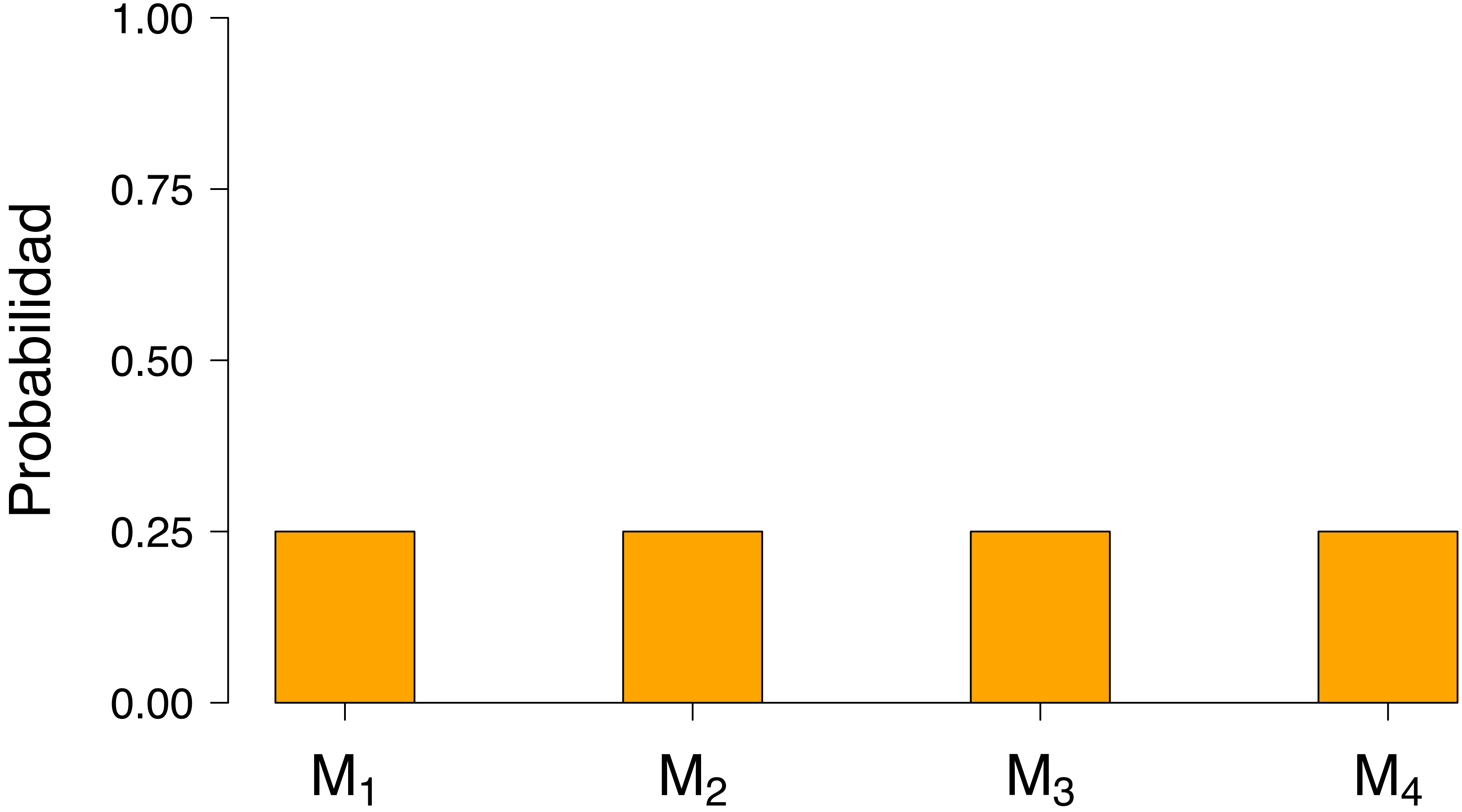
M_1: Juan está en la fiesta.

M_2: El hermano de Juan está en la fiesta.

M_3: El amigo del hermano de Juan está en la fiesta.

M_4: **Ninguno** de ellos está en la fiesta.

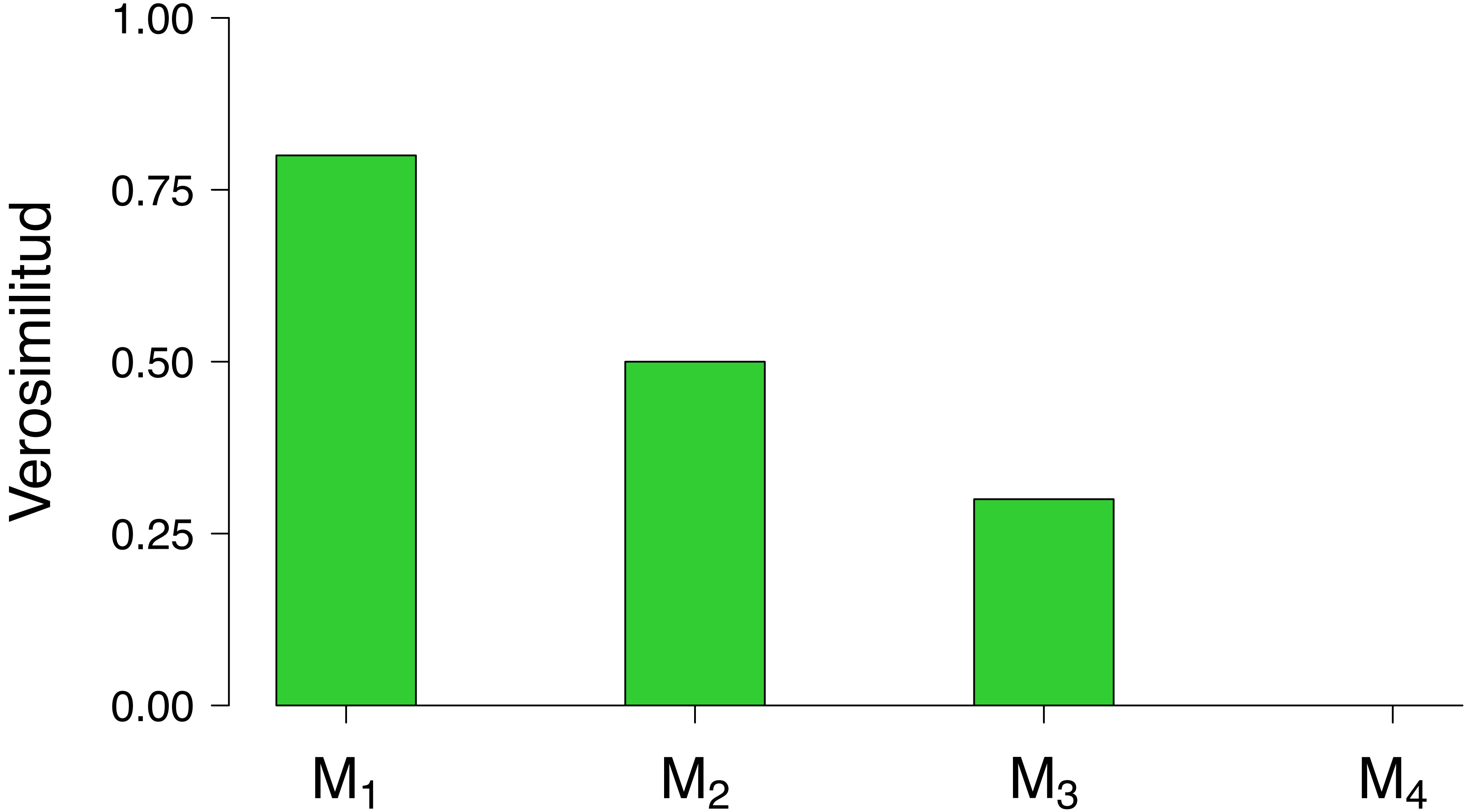
Distribución Prior: $\mathbf{Pr\ (\ M_i\ )}$



Evidencia:

El auto de Juan está afuera de la fiesta.

Función de Verosimilitud: $\mathbf{Pr(d \mid M_i)}$

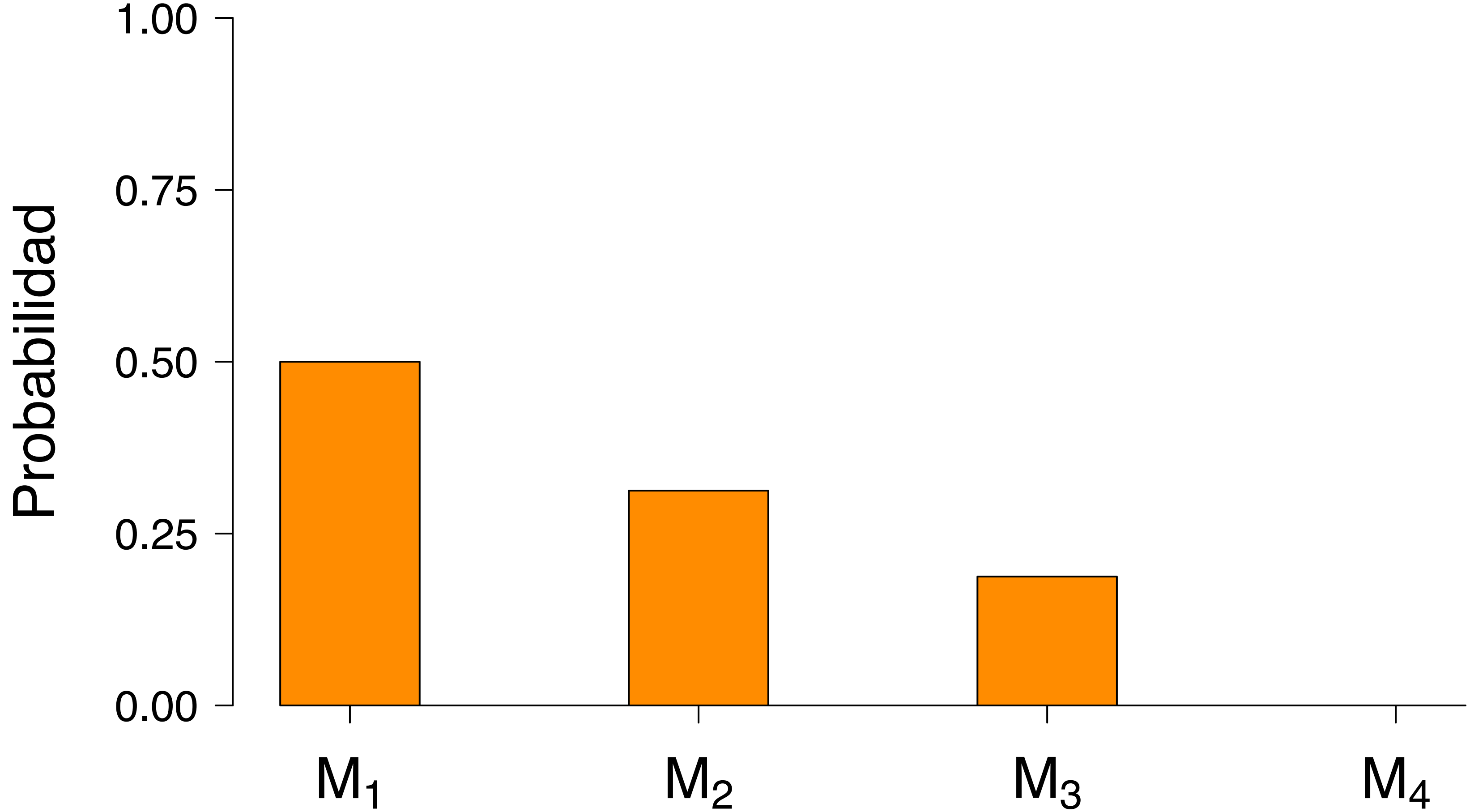


¿Cómo actualizamos nuestras creencias después de observar la evidencia?

¿Cómo actualizamos nuestras creencias después de observar la evidencia?

$$Pr(\mathcal{M}_i \,|\, d) = \frac{Pr(d \,|\, \mathcal{M}_i)\, Pr(\mathcal{M}_i)}{Pr(d)}$$

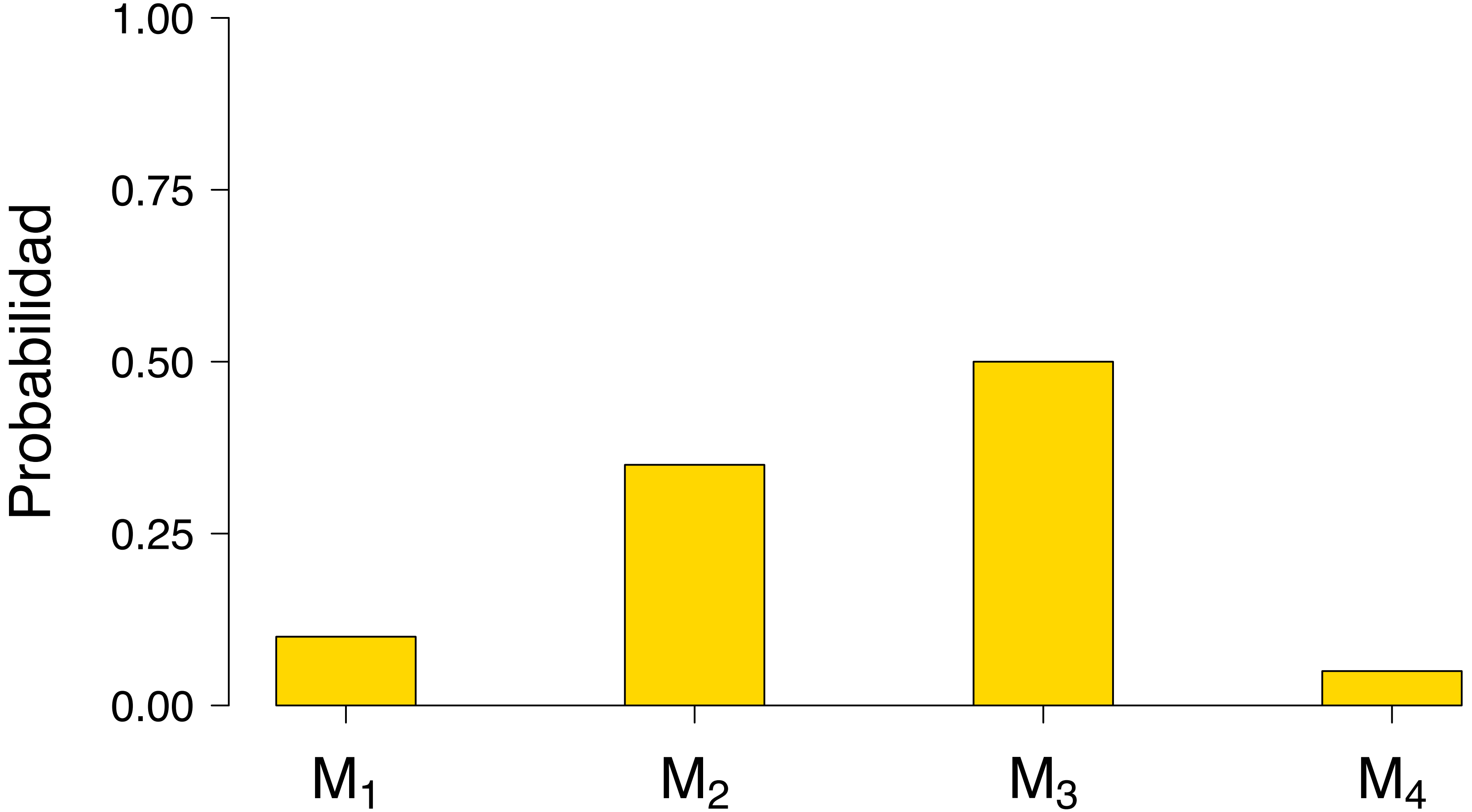
Distribución Posterior: **Pr (M_i | d)**



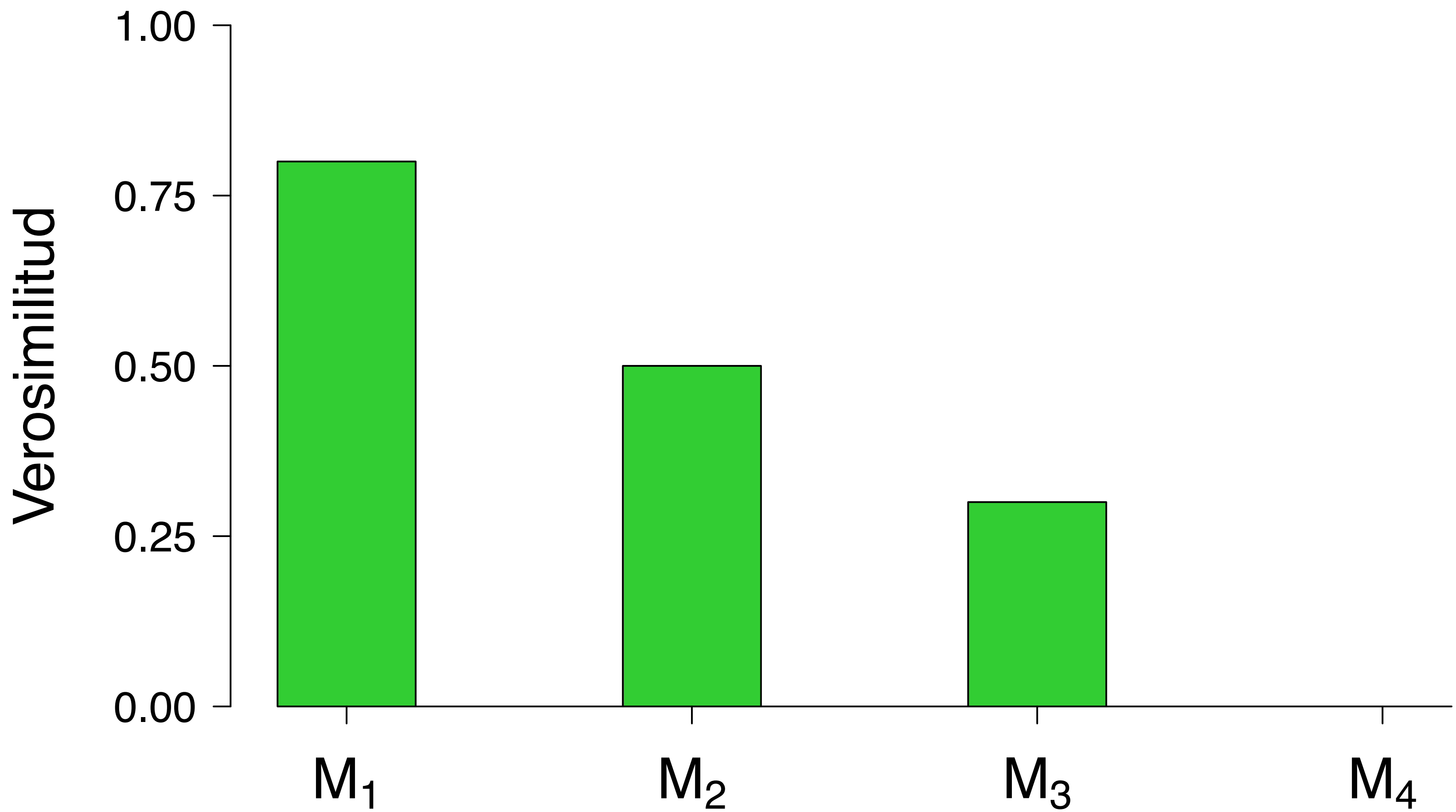
(Otro) ejemplo:

¿Quién está en la fiesta **del amigo**?

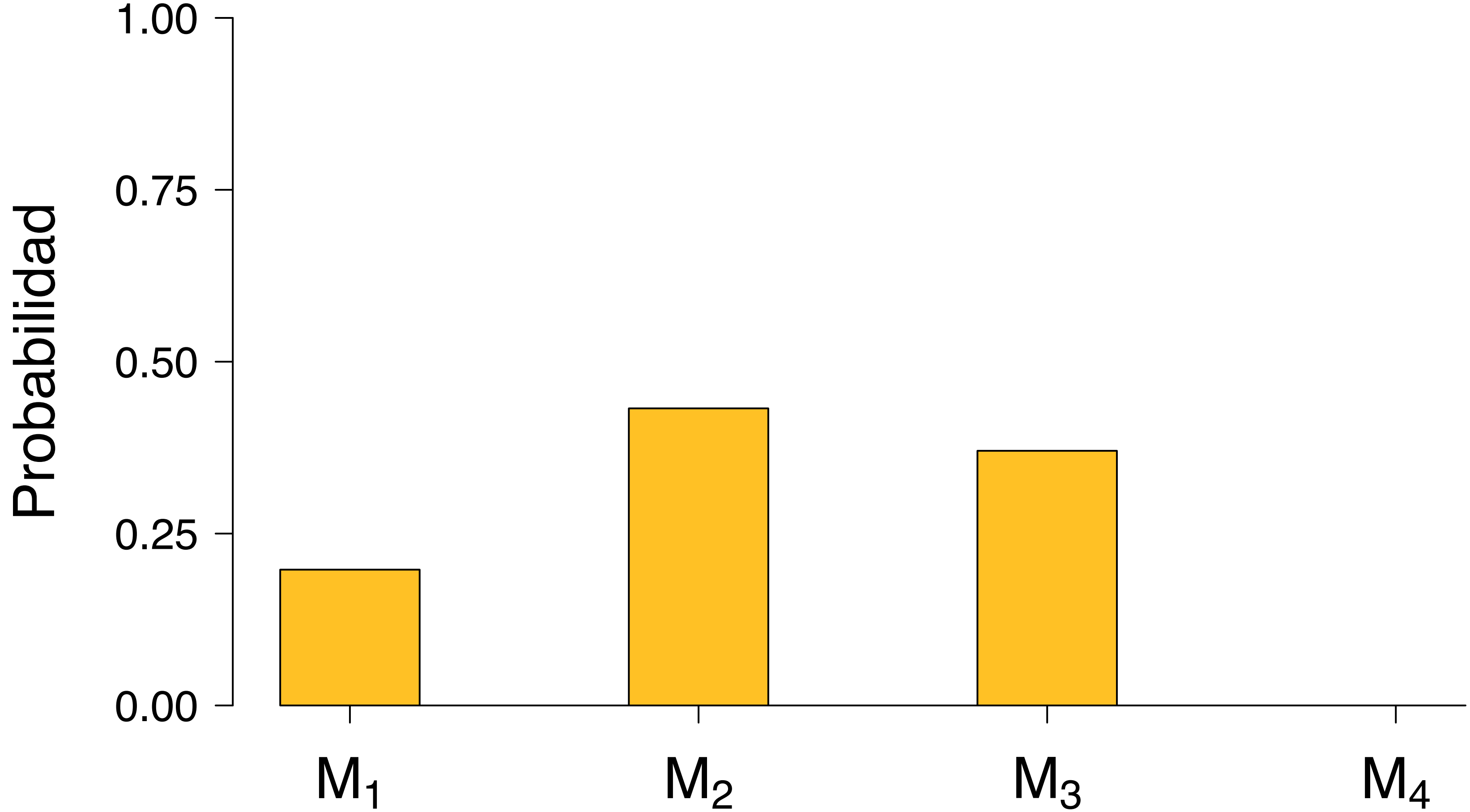
(Otra) Distribución Prior: **Pr (M_i)**



Función de Verosimilitud: $\mathbf{Pr}\ (\mathbf{d} \mid \mathbf{M_i})$



(Otra) Distribución Posterior: $\mathbf{Pr (M_i \mid d)}$



La regla de Bayes especifica cómo combinar **conocimiento previo** con **evidencia nueva**.

Una moneda produce **soles** con cierta probabilidad desconocida θ .

Si observamos la secuencia:

00

¿Qué deberíamos creer sobre θ ?

Una moneda produce **soles** con cierta probabilidad desconocida θ .

Si observamos la secuencia:

00

¿Qué deberíamos creer sobre θ ?

¿Y si observamos?

00101001110101001010101111

Una moneda produce **soles** con cierta probabilidad desconocida θ.

Si observamos la secuencia:

00

¿Qué deberíamos creer sobre θ?

¿Y si observamos?

0010100111010100101010101111

¿O si observamos?

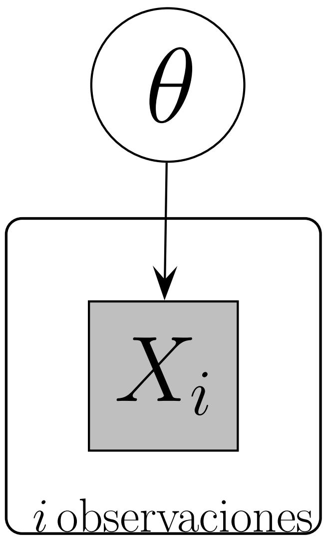
0000000000010010000000000000

Secuencia 1:

```
X <- [ 0 0 ]
```

Secuencia 1:

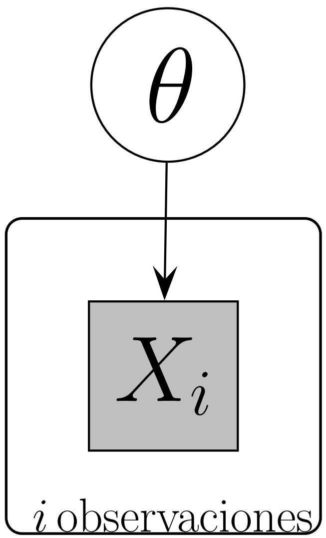
```
X <- [ 0 0 ]
```



$$X_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$$

Secuencia 1:

```
X <- [ 0 0 ]
```

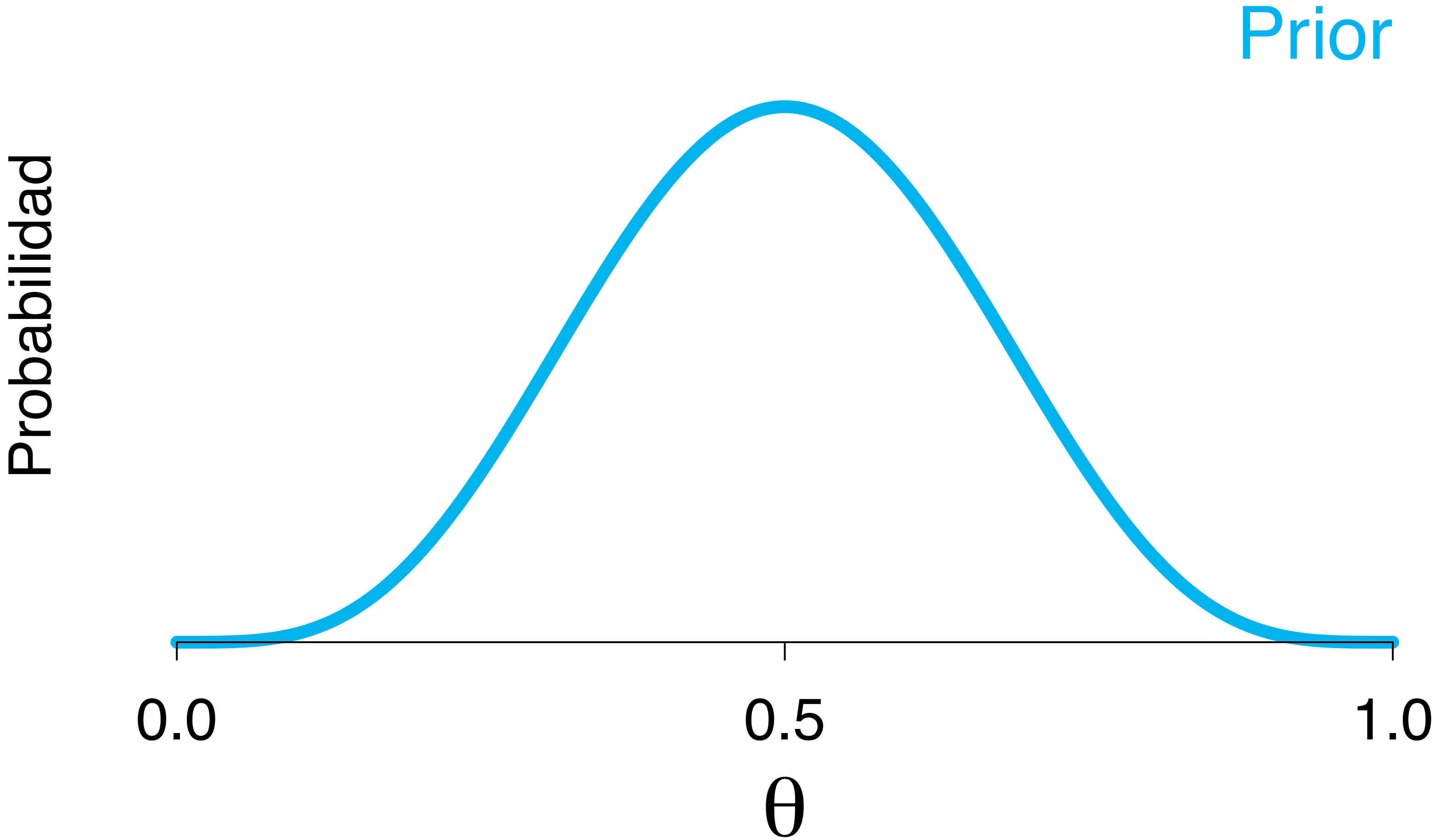


$$\theta \sim \text{Beta}\big(\alpha = 5, \beta = 5\big)$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}\big(\theta\big)$$

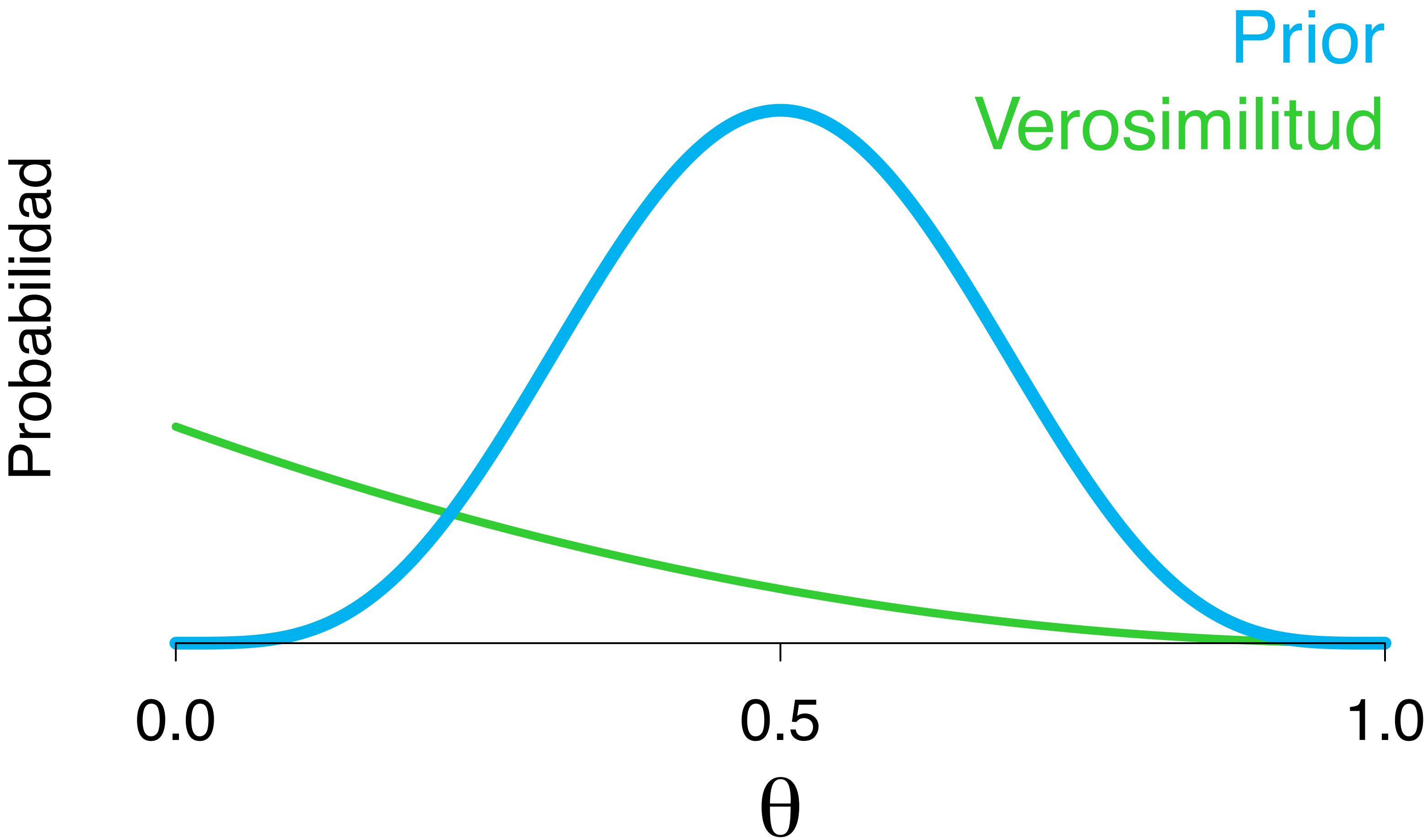
Secuencia 1:

```
X <- [ 0 0 ]
```



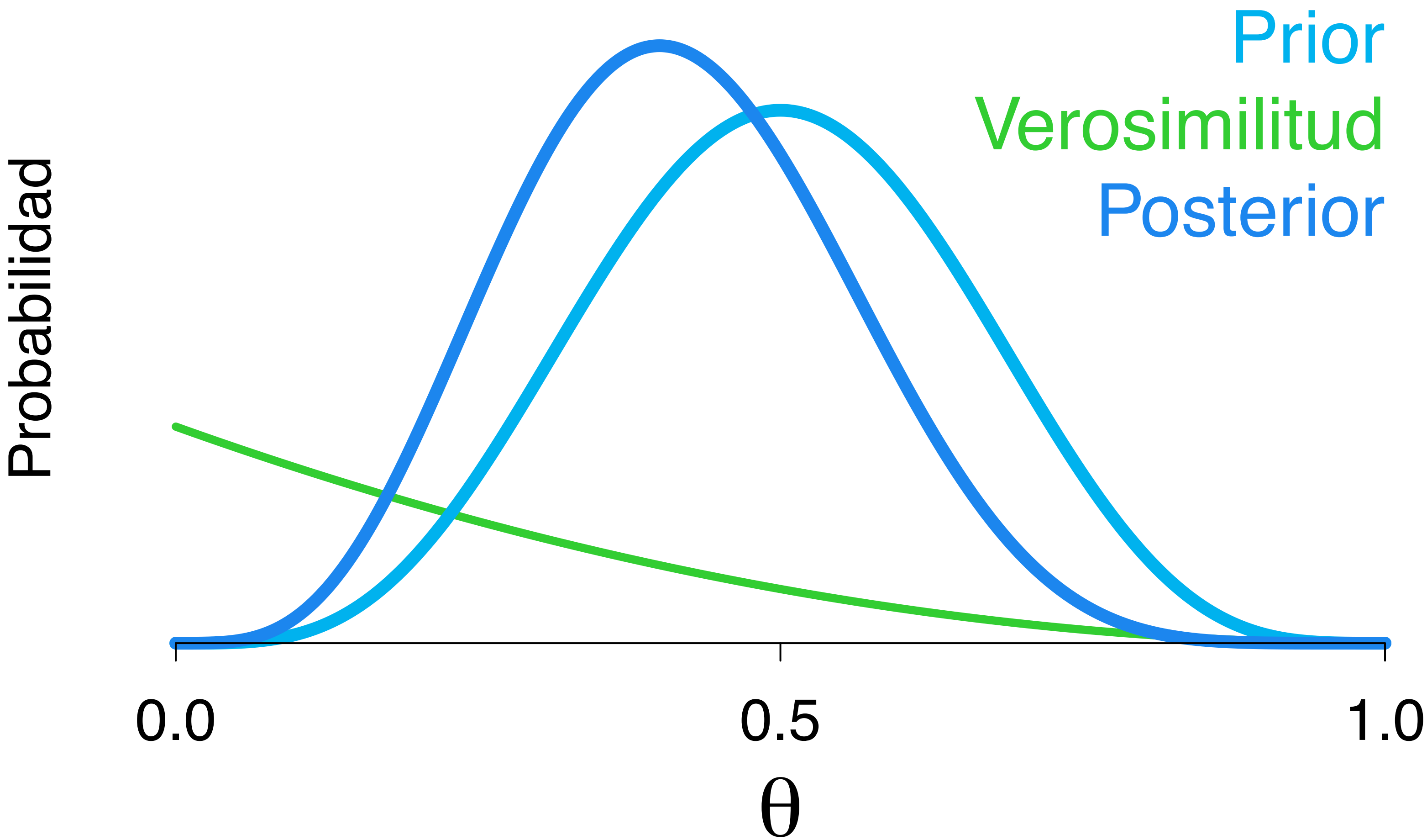
Secuencia 1:

```
X <- [ 0 0 ]
```



Secuencia 1:

```
X <- [ 0 0 ]
```

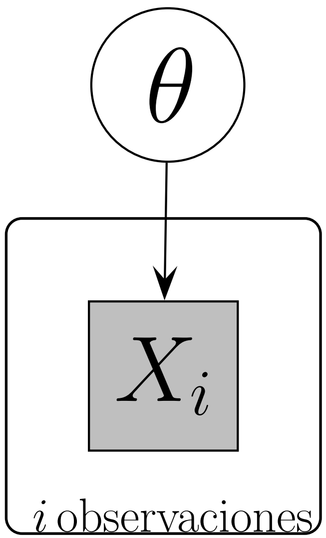


Secuencia 2:

```
X <- [ 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 … ]
```

Secuencia 2:

```
X <- [ 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 ... ]
```

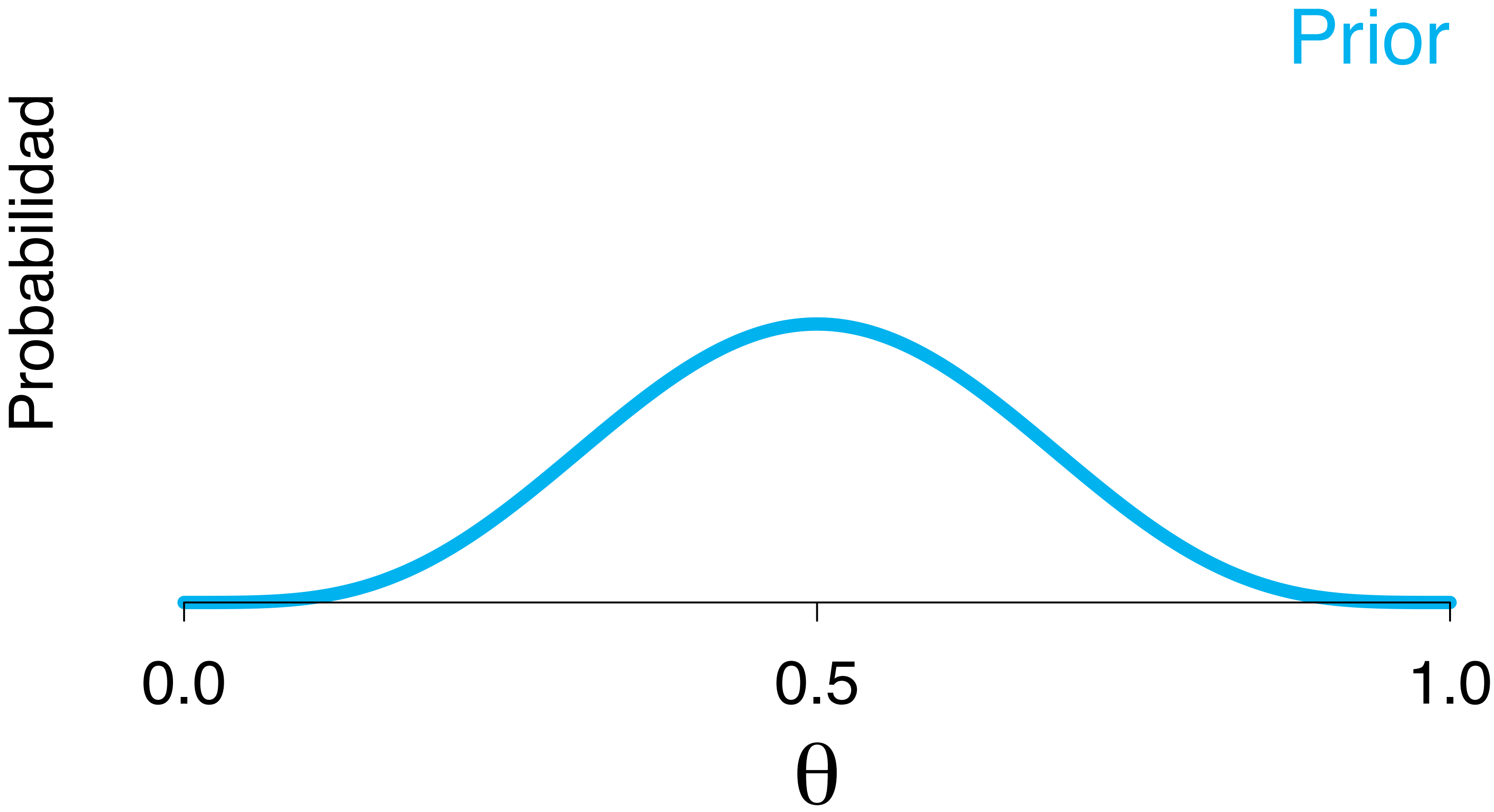


$$\theta \sim \mathrm{Beta}\big(\alpha = 5, \beta = 5\big)$$

$$X_i \sim \mathrm{Bernoulli}\big(\theta\big)$$

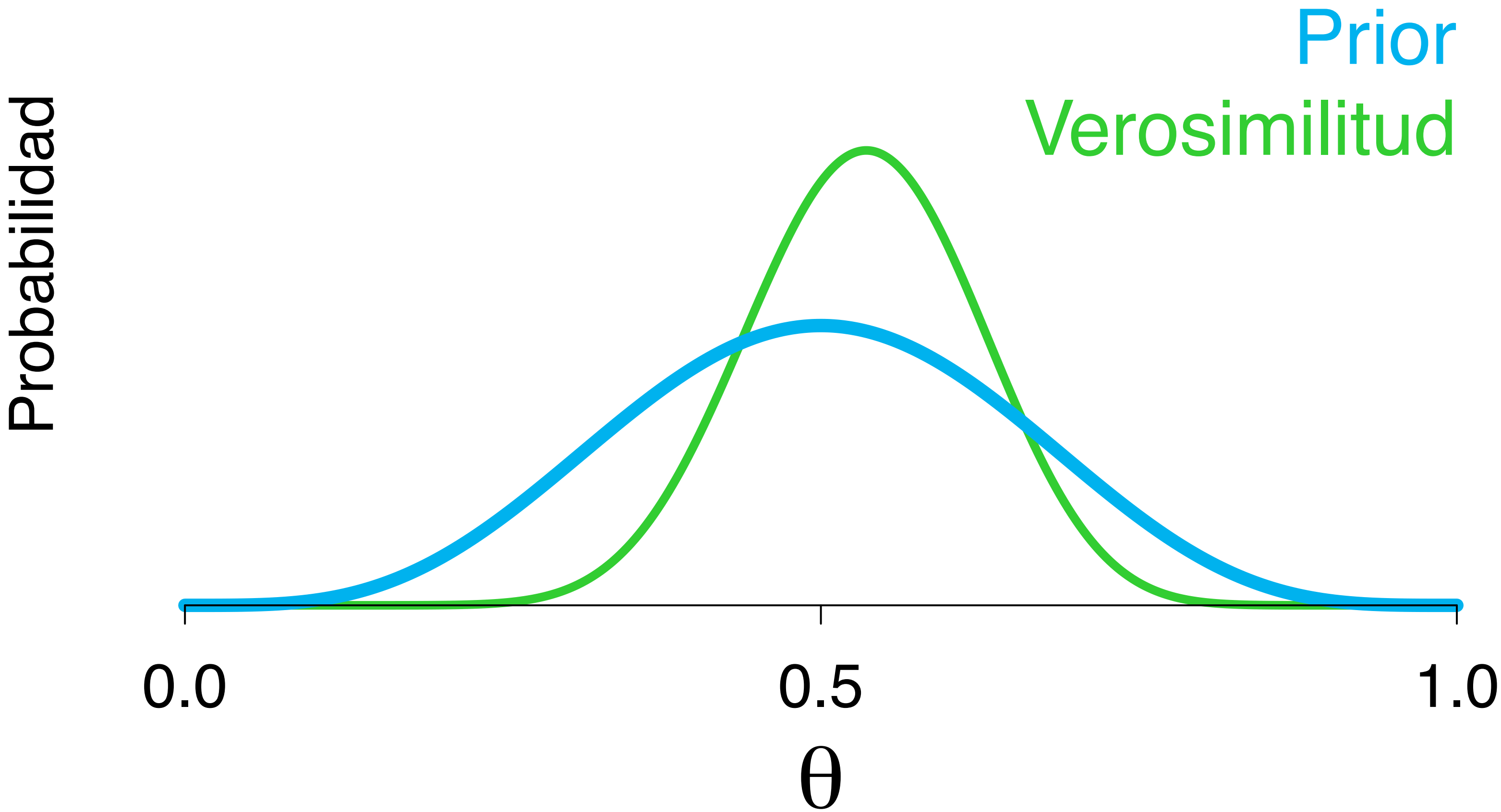
Secuencia 2:

```
X <- [ 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 ... ]
```



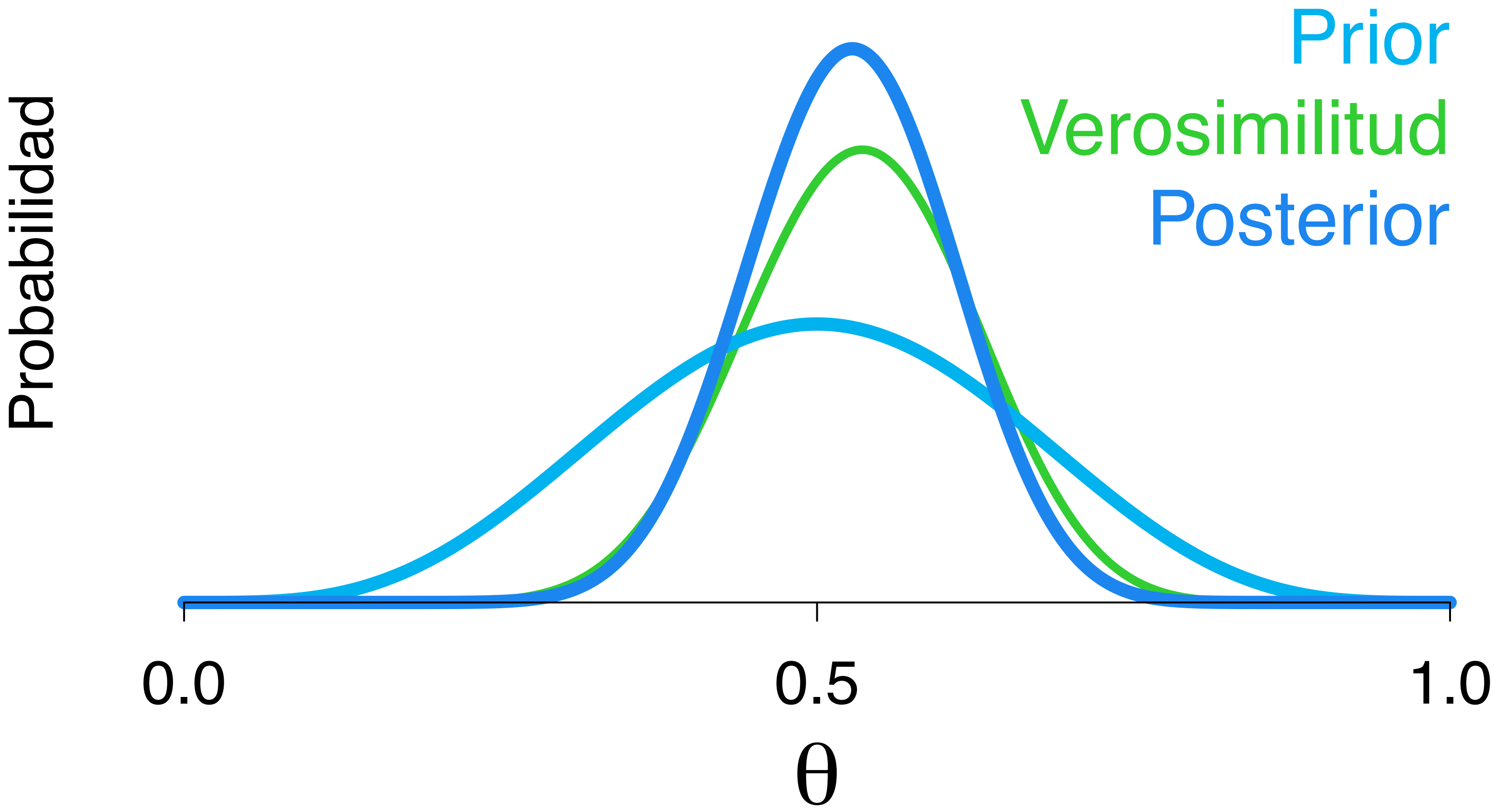
Secuencia 2:

X <- [0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 ...]



Secuencia 2:

```
X <- [ 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 … ]
```

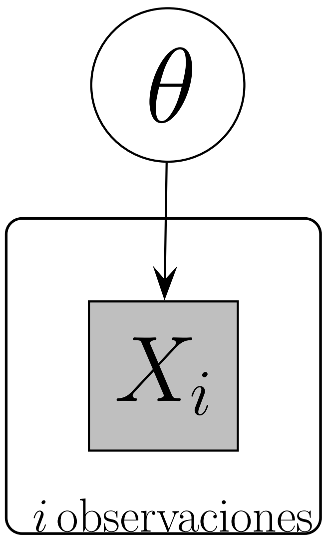


Secuencia 3:

```
X <- [ 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 … ]
```

Secuencia 3:

```
X <- [ 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 ... ]
```

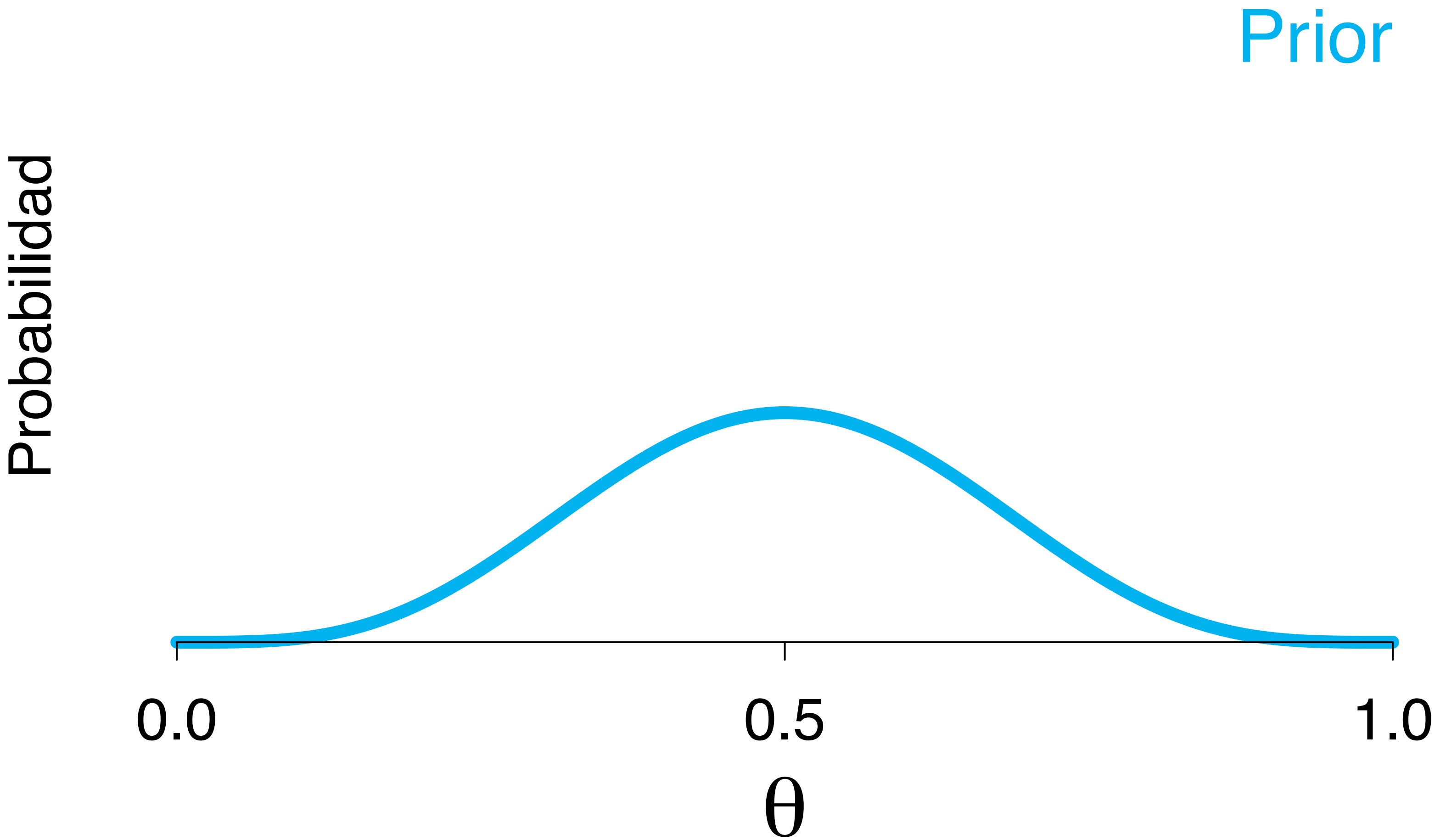


$$\theta \sim \mathrm{Beta}\big(\alpha = 5, \beta = 5\big)$$

$$X_i \sim \mathrm{Bernoulli}\big(\theta\big)$$

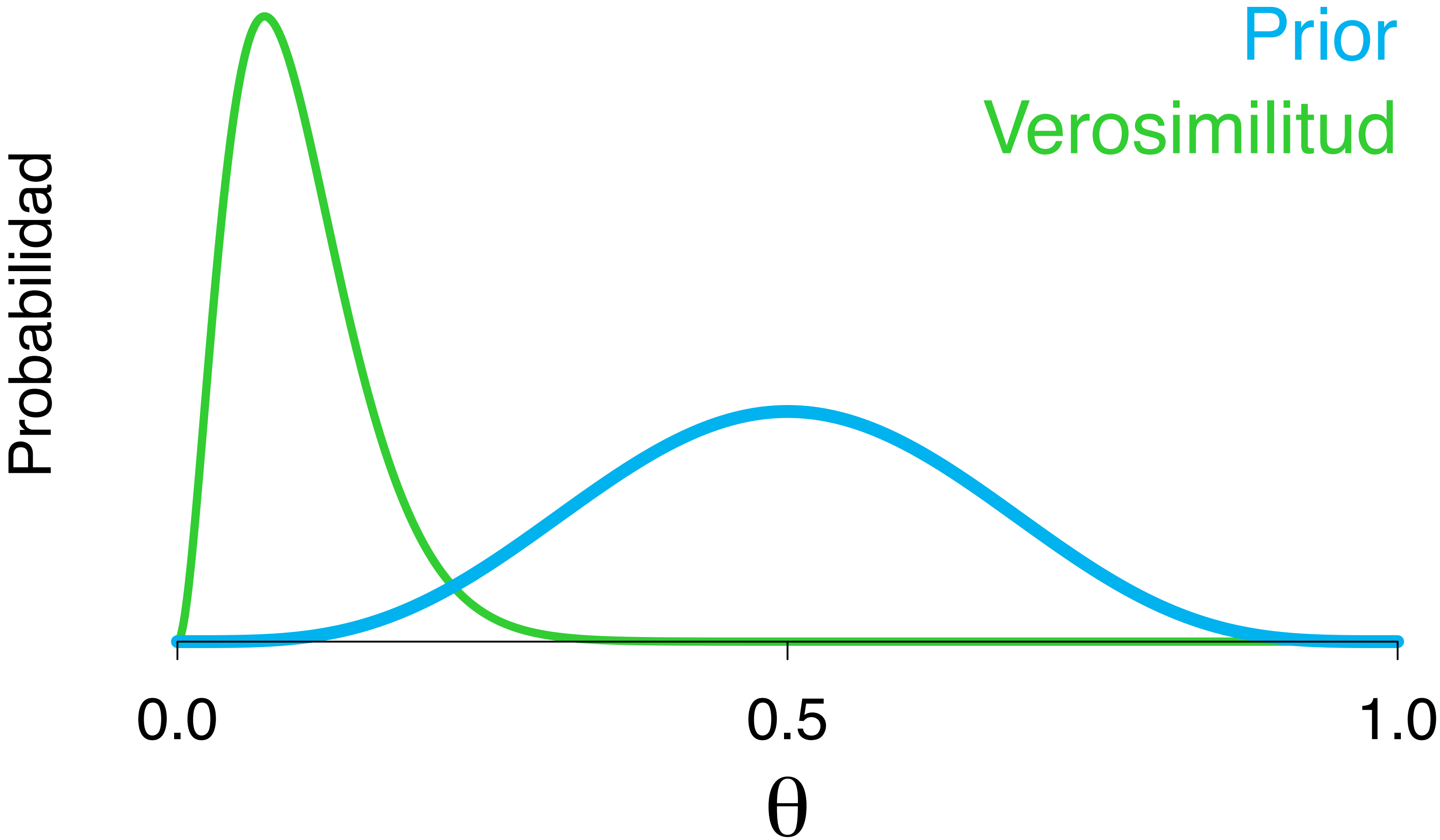
Secuencia 3:

```
X <- [ 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 ... ]
```



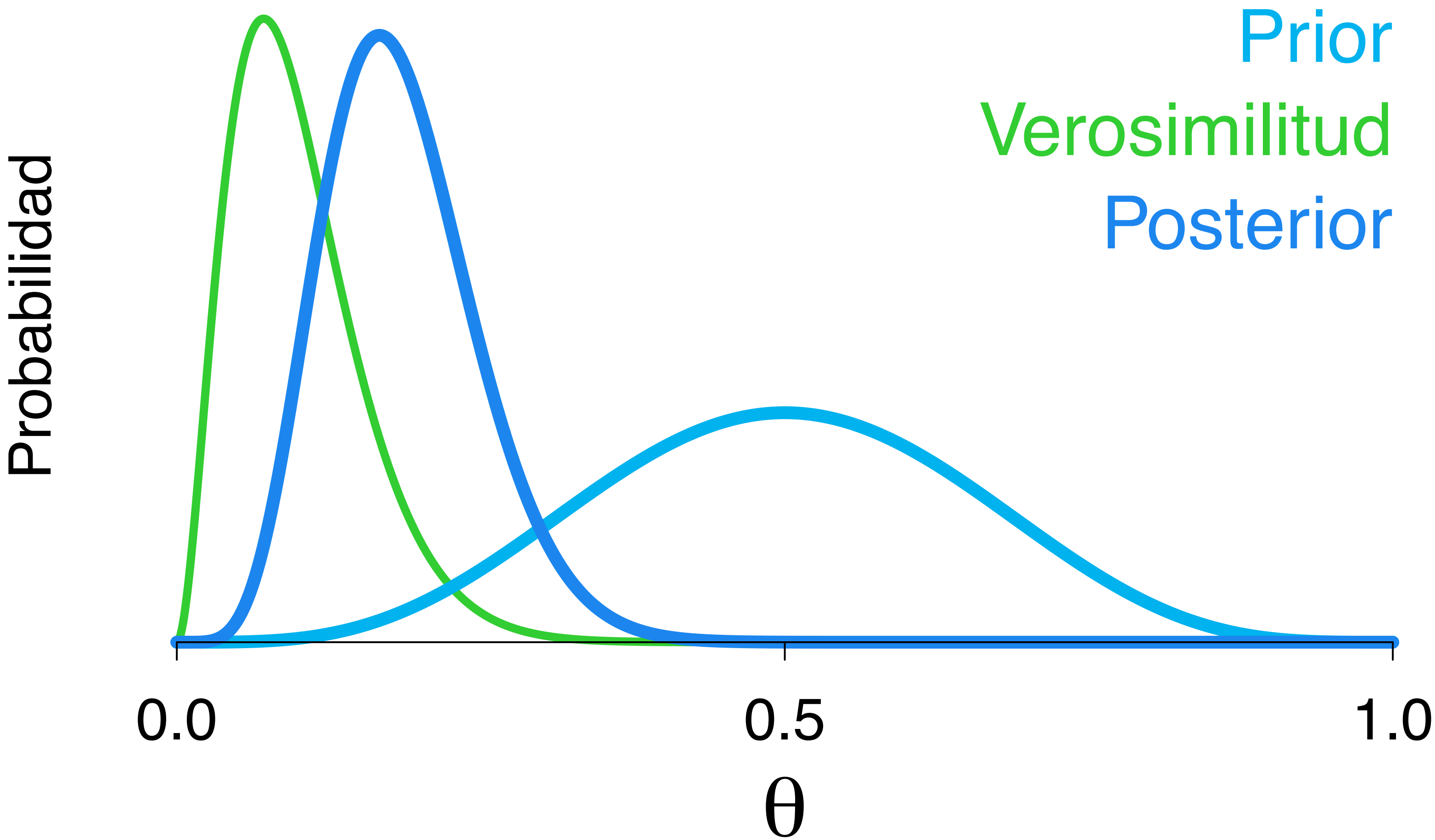
Secuencia 3:

X <- [0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 ...]



Secuencia 3:

```
X <- [ 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 ... ]
```



Podemos resolver los problemas de **selección de modelos** y de **estimación paramétrica** utilizando los principios de inferencia Bayesiana.

Ejemplo
Modelo de Decaimiento Exponencial

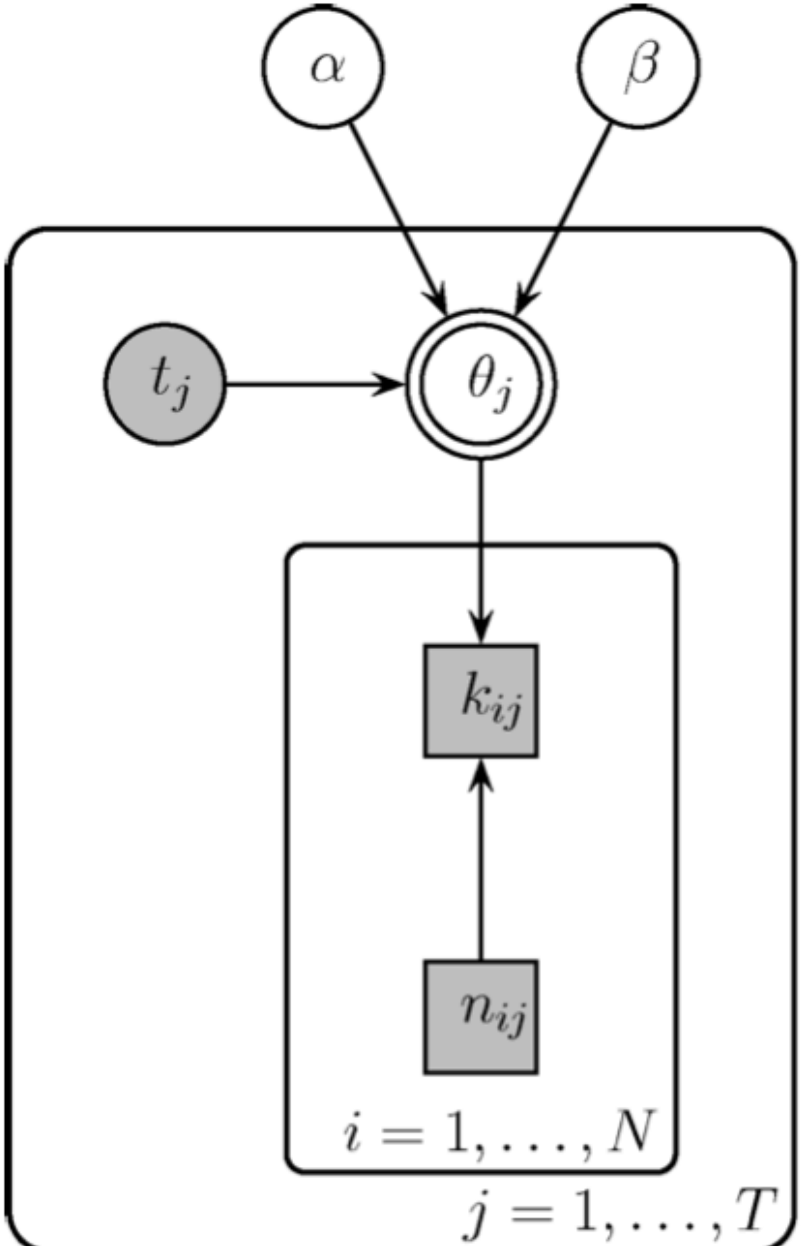
- Shiffrin, RM et al. (2008). *Cognitive Science, 32*, 1248-1284.

La probabilidad de recordar un item después de cierto tiempo:

$$\theta_t = exp(-\alpha t) + \beta$$

α : Tasa de decaimiento
β : Linea base de recuerdo

	Time Interval In Seconds									
Participant	1	2	4	7	12	21	35	59	99	200
1	18	18	16	13	9	6	4	4	4	—
2	17	13	9	6	4	4	4	4	4	—
3	14	10	6	4	4	4	4	4	4	—
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

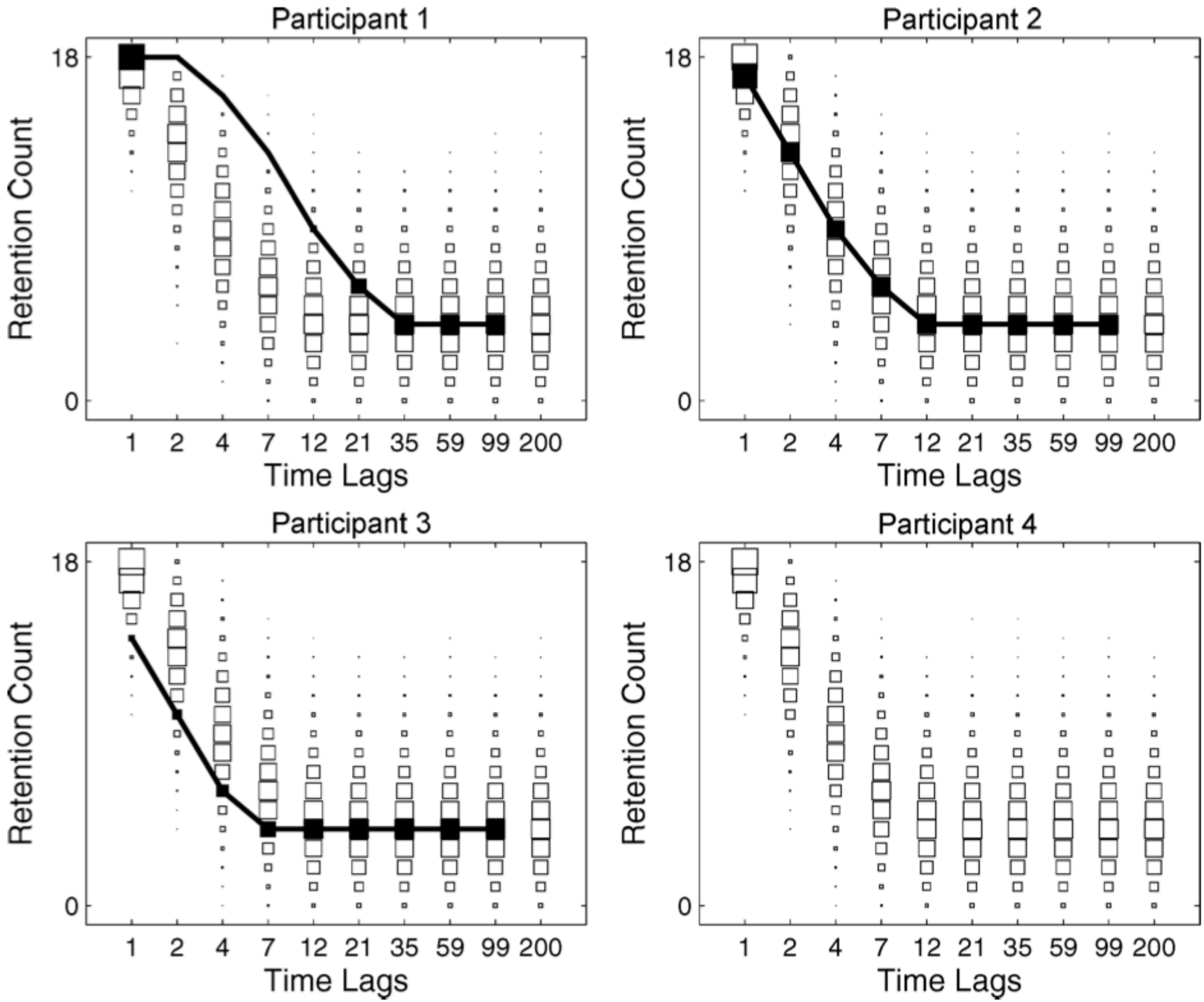


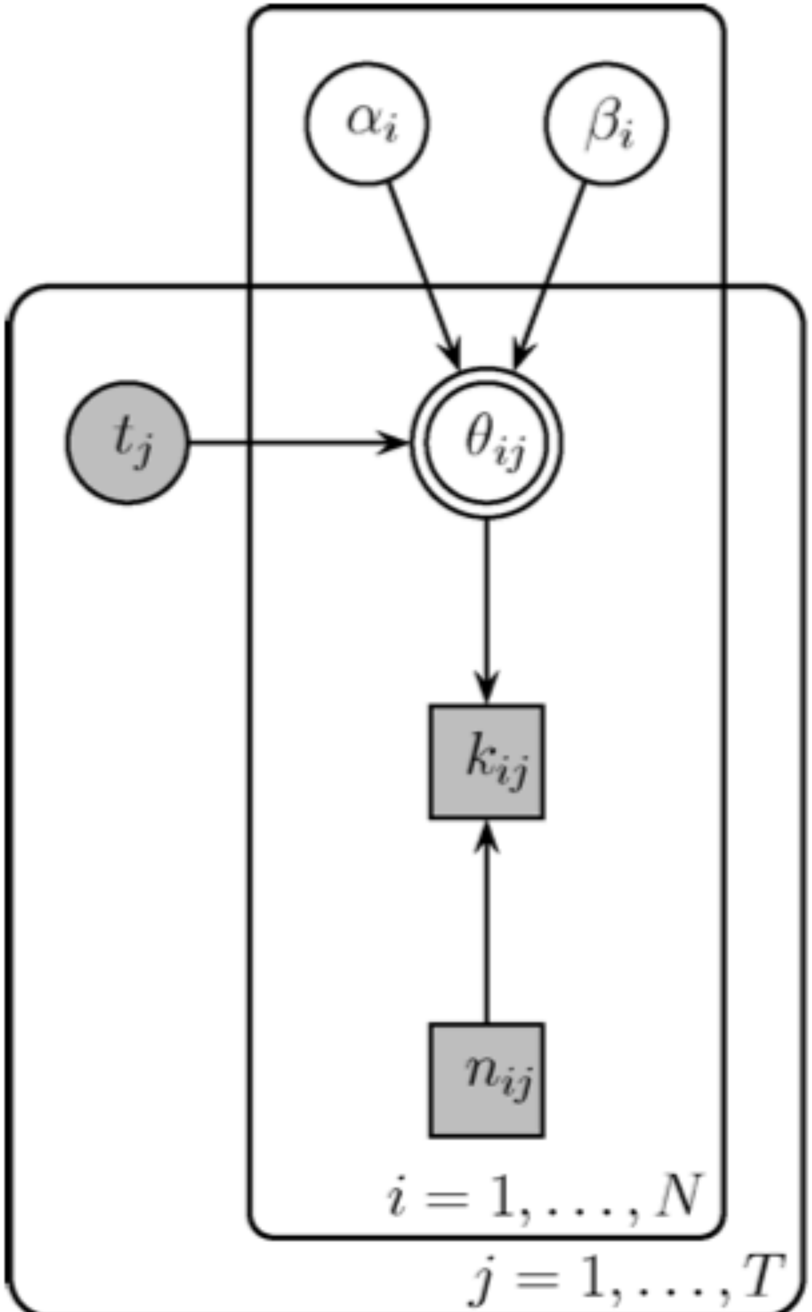
$$\alpha \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$\beta \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$\theta_j = \exp\left(-\alpha t_j\right) + \beta \qquad 0 < \theta_j < 1$$

$$k_{ij} \sim \text{Binomial}(\theta_j, n_{ij})$$


Participant 1
Participant 2
Participant 3
Participant 4
Retention Count
18
0
1 2 4 7 12 21 35 59 99 200
Time Lags

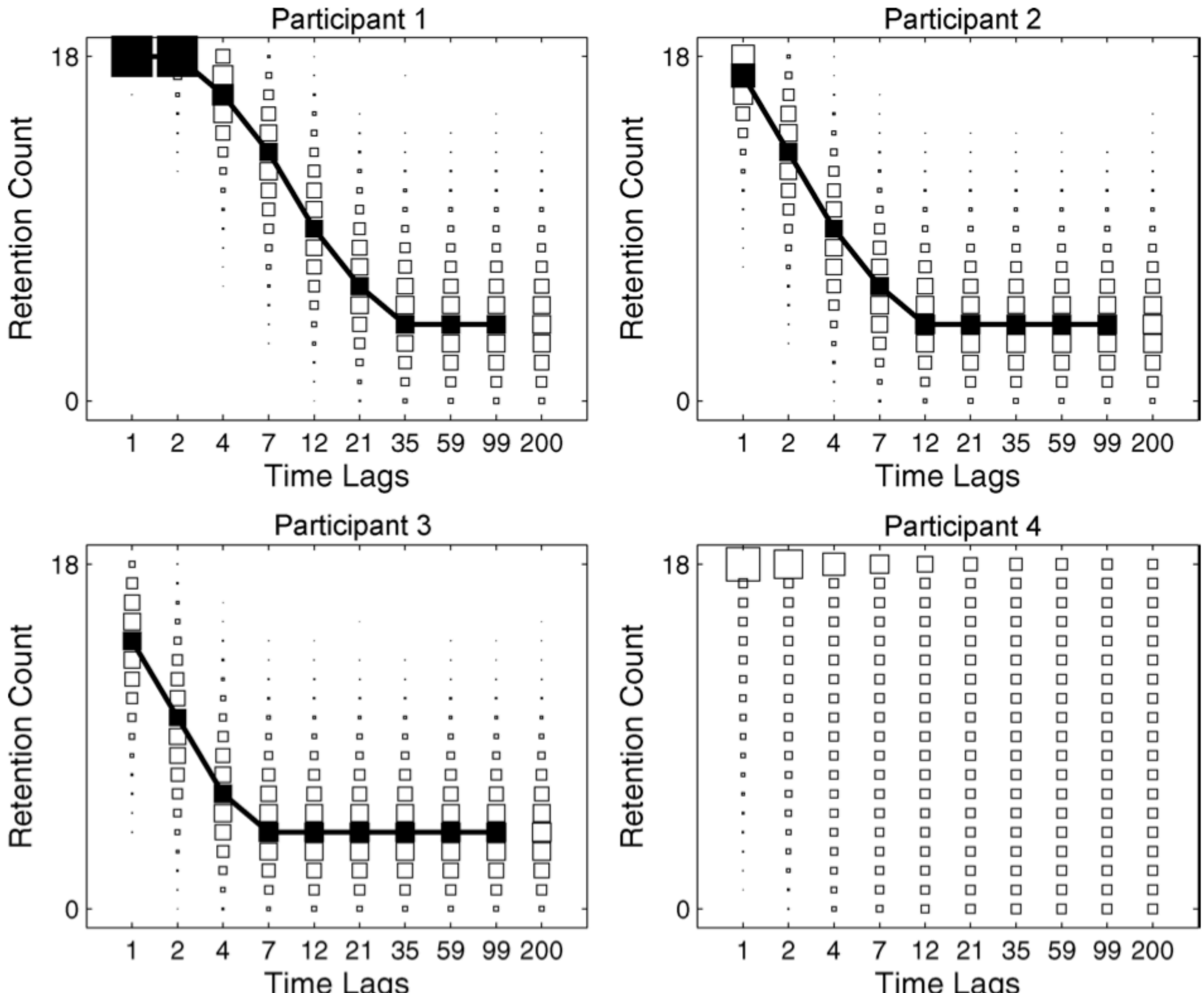


$$\alpha_i \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

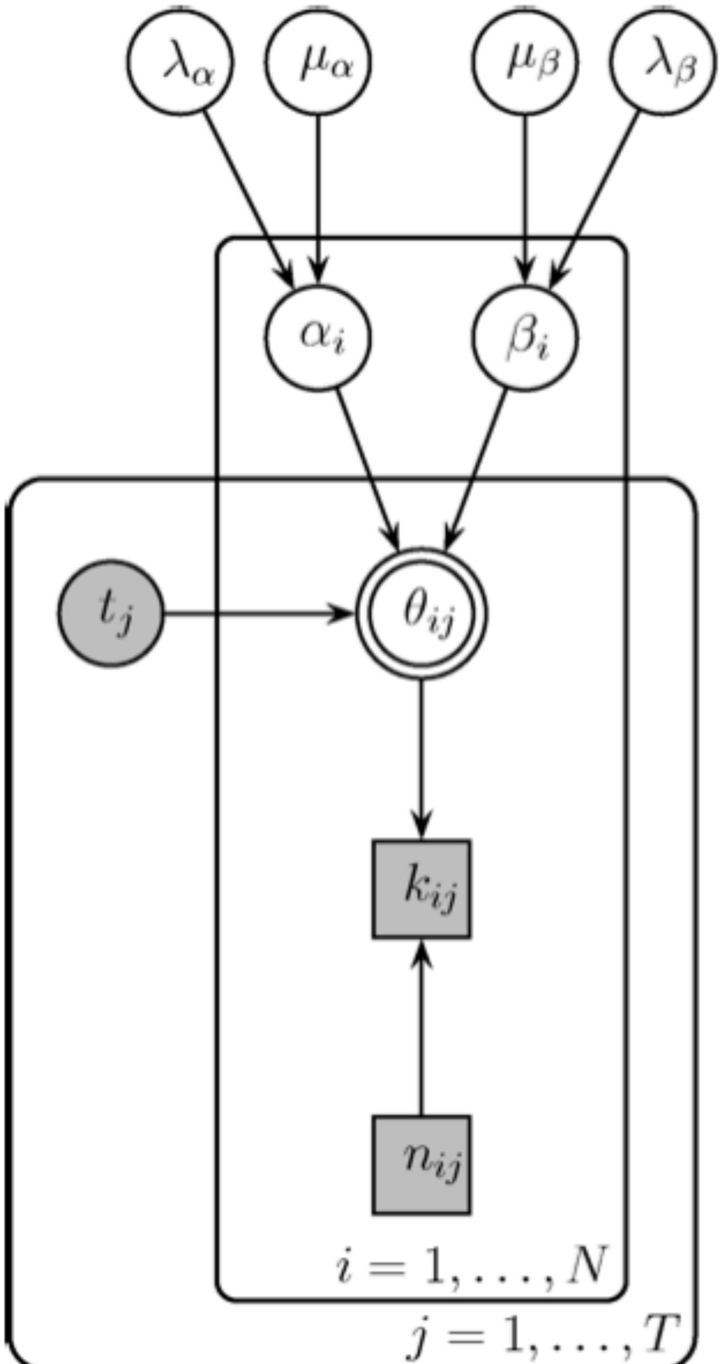
$$\beta_i \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$\theta_{ij} = \exp\left(-\alpha_i t_j\right) + \beta_i \qquad 0 < \theta_j < 1$$

$$k_{ij} \sim \text{Binomial}(\theta_{ij}, n_{ij})$$



Participant 1
Participant 2
Participant 3
Participant 4
Retention Count
18
0
1 2 4 7 12 21 35 59 99 200
Time Lags



$$\mu_\alpha \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$\lambda_\alpha \sim \text{Gamma}(.001, .001)$$

$$\mu_\beta \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

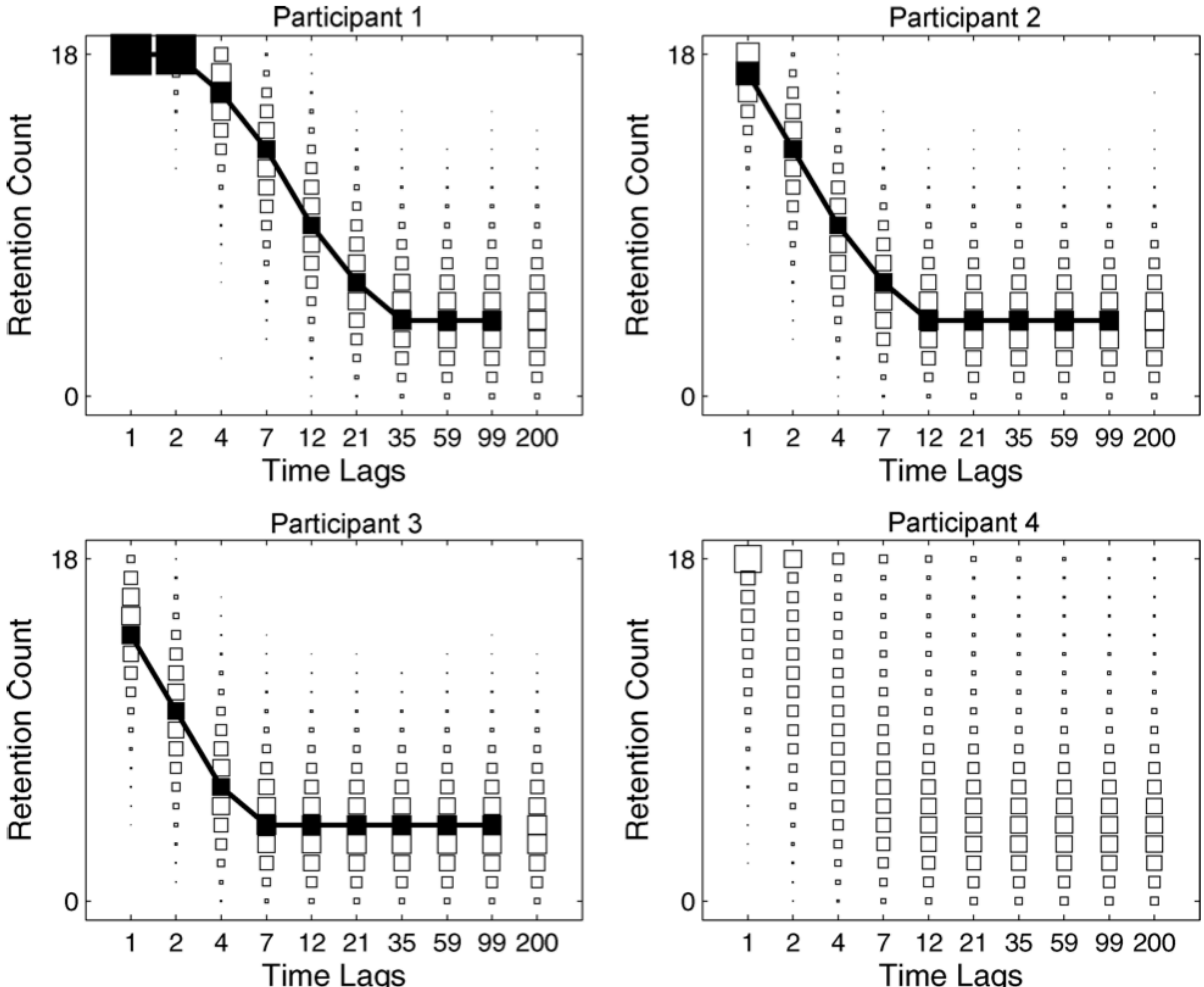
$$\lambda_\beta \sim \text{Gamma}(.001, .001)$$

$$\alpha_i \sim \text{Gaussian}(\mu_\alpha, \lambda_\alpha) \qquad 0 < \alpha_i < 1$$

$$\beta_i \sim \text{Gaussian}(\mu_\beta, \lambda_\beta) \qquad 0 < \beta_i < 1$$

$$\theta_{ij} = \exp\left(-\alpha_i t_j\right) + \beta_i \qquad 0 < \theta_{ij} < 1$$

$$k_{ij} \sim \text{Binomial}(\theta_{ij}, n_{ij})$$


Participant 1
Participant 2
Participant 3
Participant 4
Retention Count
18
0
Time Lags
1
2
4
7
12
21
35
59
99
200