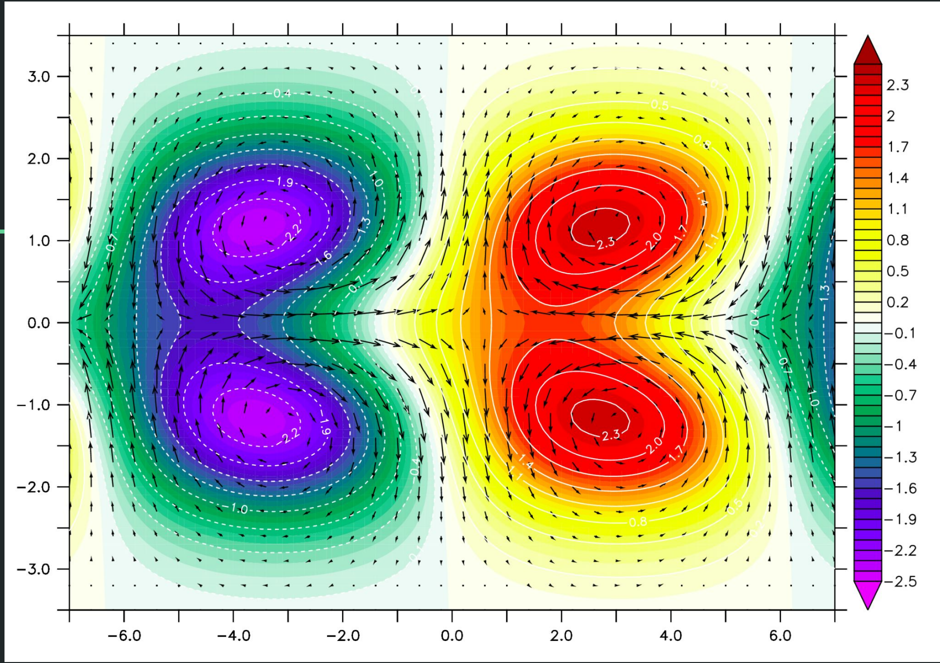
Introducción a la modelación numérica



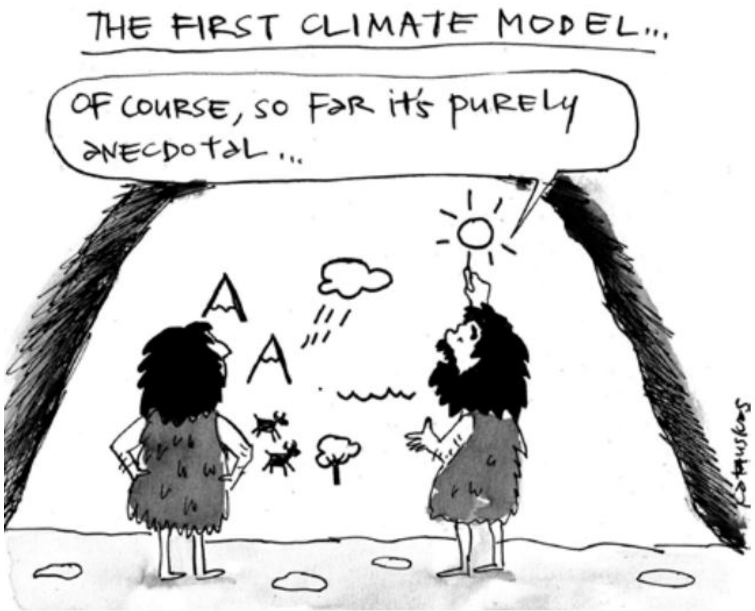
ENCiT, 2024-II

Jorge Luis García Franco

¿Qué es la modelación numérica?

- Un modelo es una abstracción de un problema, en ciencias físicas es una abstracción matemática de la realidad. Una aproximación, una escultura de la realidad.
- La representación de un problema a través de un conjunto de ecuaciones y cálculos que típicamente se resuelven con una computadora.
- Sus fines son:
  - Resolver problemas rápidamente
  - Predicción del futuro de un sistema
  - Tratar de entender cómo funciona el mundo real a través de experimentos numéricos.

La importancia en las Ciencias de la Tierra



Todo científico de la Tierra debe tener el entendimiento básico de cómo funciona un modelo, sus limitantes y usos.

Ser un modelador es una habilidad que requiere habilidades lógico matemáticas pero en diferentes grados. Un modelo puede ser tan simple como una relación algebraica entre dos variables, una independiente y otra dependiente.

Es diferente plantear un modelo desde cero y escribir sus ecuaciones a utilizar modelos hechos anteriormente y utilizarlos para responder preguntas científicas.

Ejemplos de modelos numéricos

Modelo de predicción de tiempo meteorológico de huracanes.

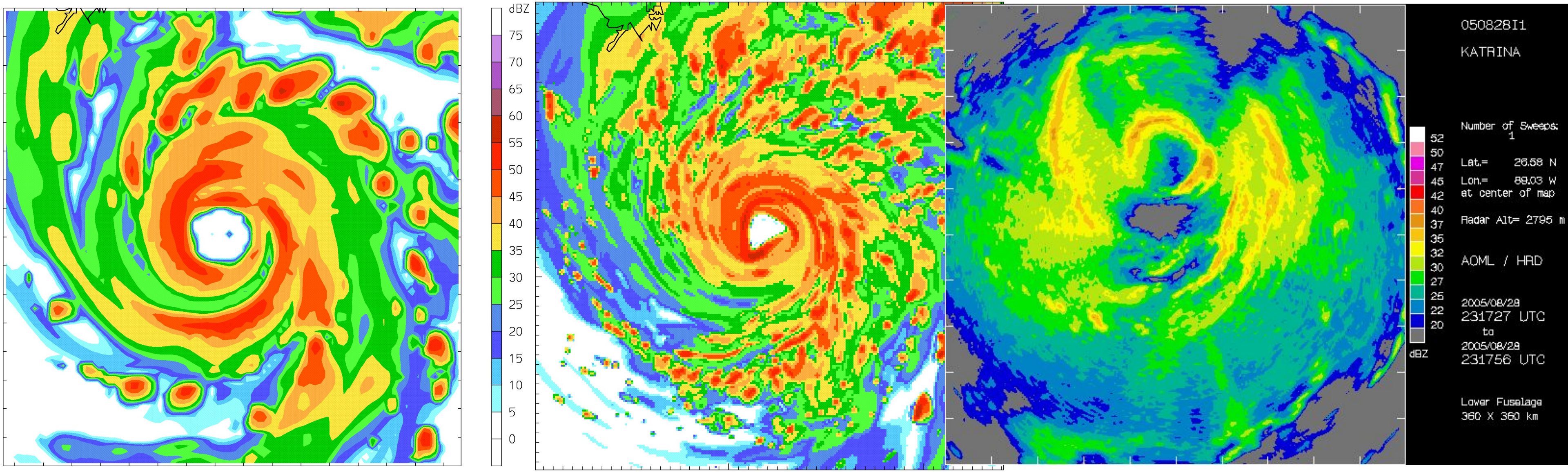
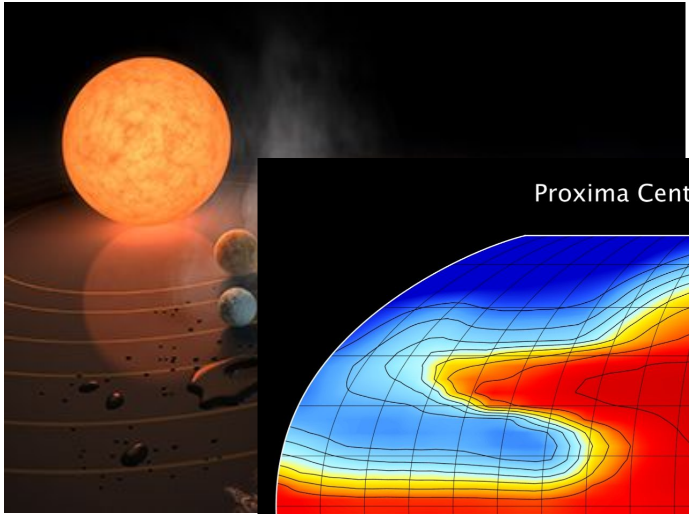
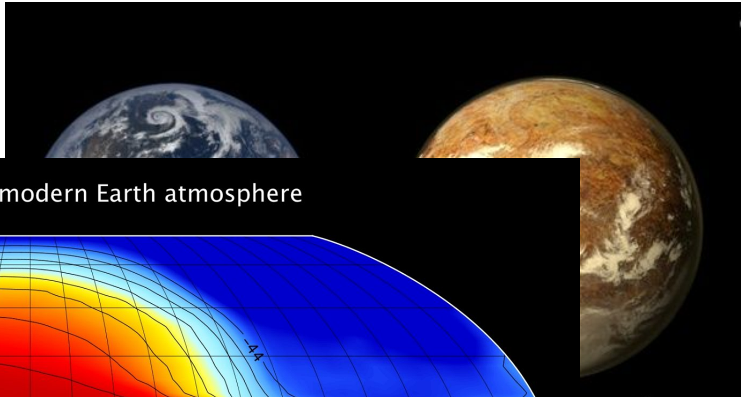


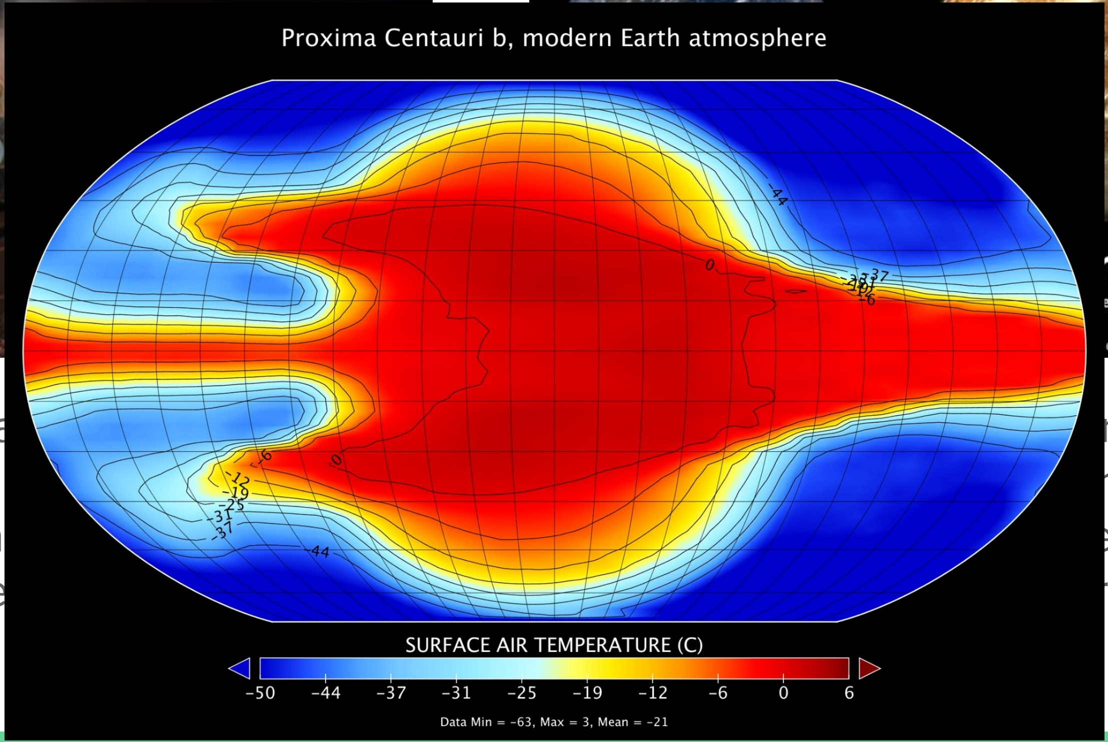
Imagen de reflectividad (proporcional al número de gotas, partículas de hielo) de 2 modelos (izquierda) y unas observaciones (derecha). ¿Qué diferencias observa?

¿Qué ecuaciones les vienen a la mente?

Modelos de atmósferas planetarias

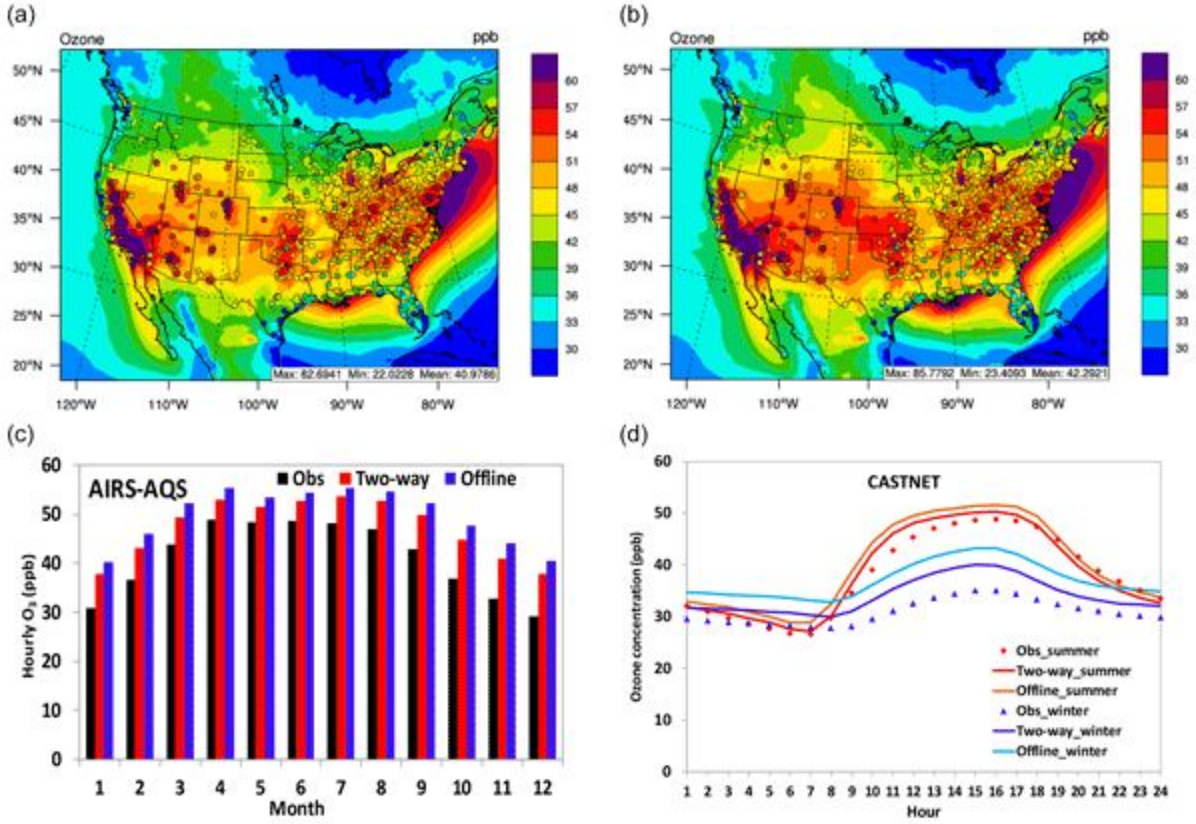






La mejor manera ... rvaciones
superficiales de ... ral. Estos
modelos calcula ... e los planetas a
partir de conoce ... otación,
albedo, etc.

Modelos de manejo de calidad del aire

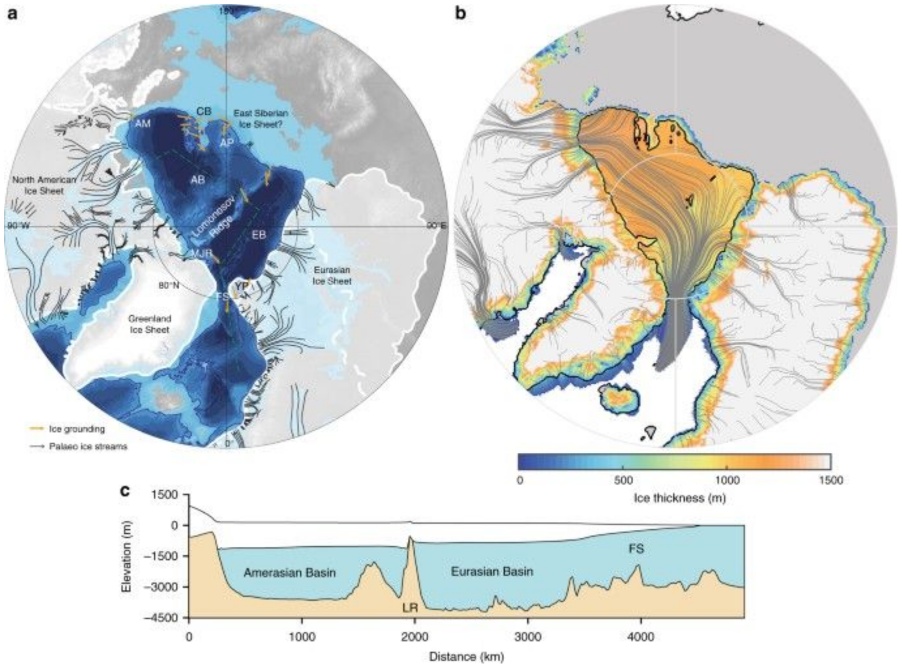


Modelos de calidad del aire: Community Multiscale Air Quality Modeling System (CMAQ) y Weather Research and Forecasting (WRF).

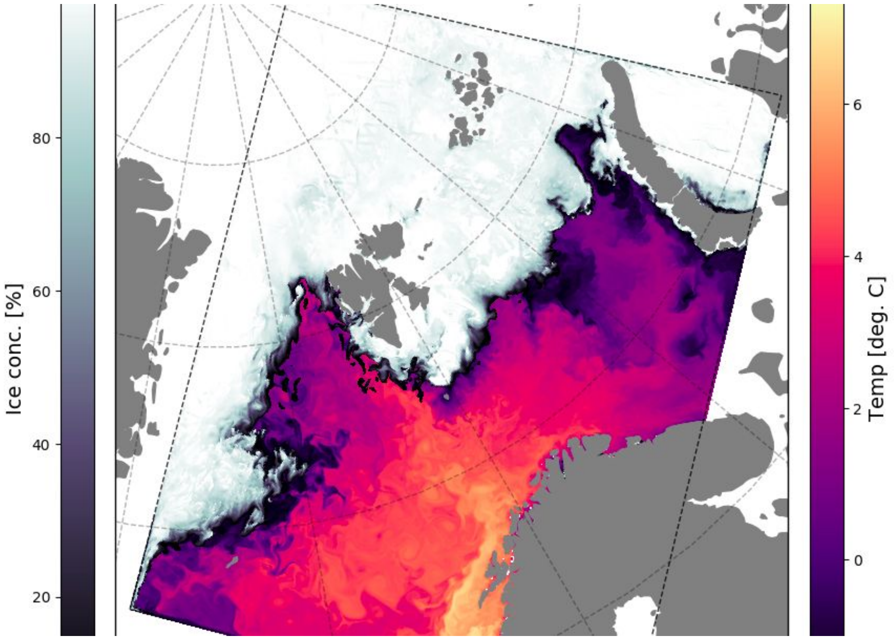
Resuelven la dinámica (dispersión), química (producción de ozono) y radiación (nubes, aerosoles) con la finalidad de predecir episodios de mala calidad del aire.

¿Qué ecuaciones les vienen a la mente con estos modelos?

Modelos numéricos del hielo



Simulaciones numéricas del espesor del hielo en el Ártico, utilizadas para compararse con observaciones, de Gasson et al., 2018.



El modelo Barents-2.5 model es un modelo hielo-océano acoplado, cuyo dominio es el mar de Barents y las areas aledañas a Svalbard. Es la principal herramienta del Servicio Meteorológico Noruego para predecir la evolución del hielo.

Características de un modelo

- Dimensión: quiero resolver el espacio horizontal, vertical o sólo una dimensión.
- Resolución: cuántos puntos en el espacio físico quiero resolver mi modelo
- Dominio: dónde quiero resolver mi modelo
- Tipo solución
    - Diagnóstica: busca investigar las causas de algo que ya sucedió o los elementos que llevaron a un resultado. Sus ecuaciones, por lo general, no tienen dependencia del tiempo.
    - Prognóstica: busca obtener soluciones para tiempos futuros del problema inicial. Sus ecuaciones dependen del tiempo, entonces provee soluciones en cada paso de tiempo.
- Paso de tiempo (dt): cada cuánto se resuelve una ecuación en el sistema de solución.
- Problemas de frontera versus problemas de condición inicial

Objetivos de esta sección del curso

Entender los principales elementos de la modelación numérica, incluidas sus ventajas y posibles tropiezos o dificultades.

- Ventajas
    - Velocidad para obtener soluciones a problemas complejos.
    - Capacidad de experimentar y explorar el espacio de parámetros.
- Dificultades
    - Costo computacional y el error numérico.
    - Incertidumbre de los resultados, y su interpretación, a la hora de parametrizar procesos.
    - Modelos sobre simplificados o sumamente complicados para la complejidad requerida por el problema.

Ecuaciones de Navier Stokes

$$\frac{du}{dt} - \left(f + u\frac{\tan\phi}{a}\right)v = -\frac{1}{a\cos\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + F_\lambda$$

$$\frac{dv}{dt} + \left(f + u\frac{\tan\phi}{a}\right)u = -\frac{1}{\rho a}\frac{\partial p}{\partial\phi} + F_\phi$$

$$g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

momentum

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{1}{a\cos\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial\phi}(\rho v\cos\phi)\right] - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)$$

mass

$$C_p\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = Q$$

energy

$$p = \rho RT$$

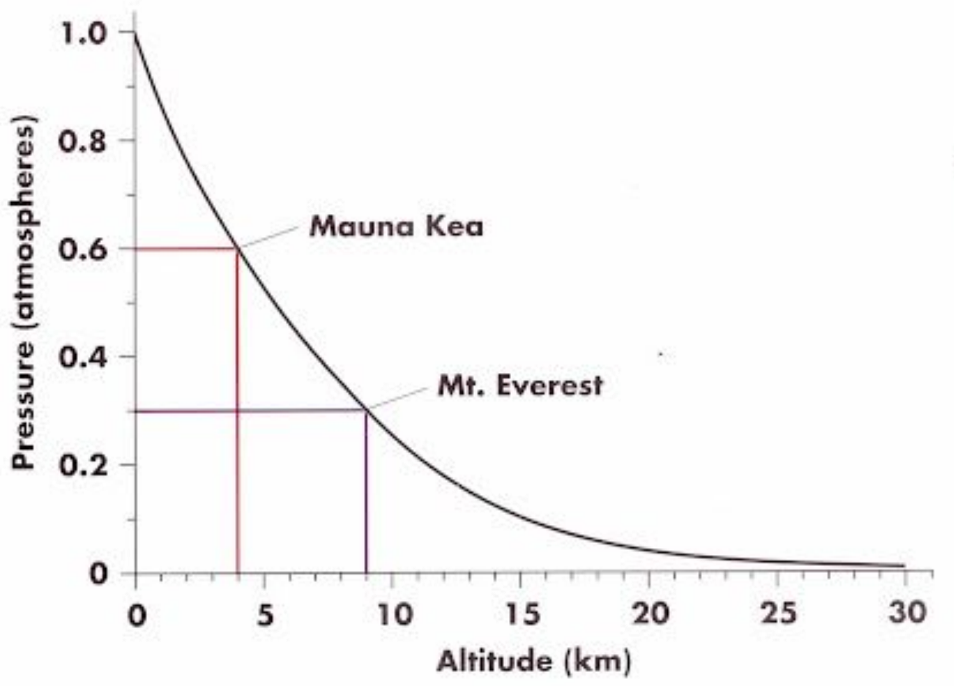
equation of state

Primero recordemos cómo resolver una ecuación diferencial

Ecuación hidrostática: ecuación diferencial ordinaria, lineal de primer grado que relaciona la presión y la altura geométrica.

$$g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

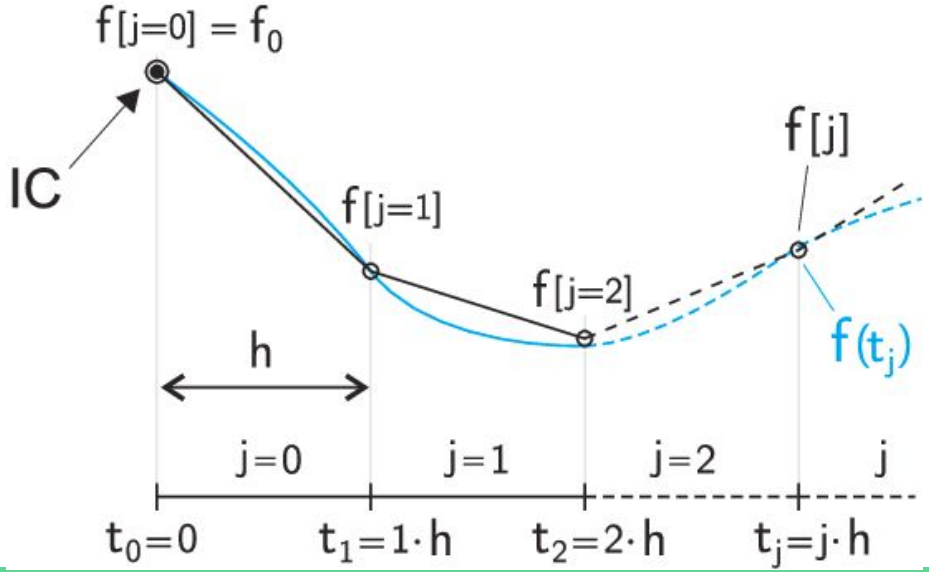
$$p = p_0 e^{-\frac{zg}{R_d T_c}}$$



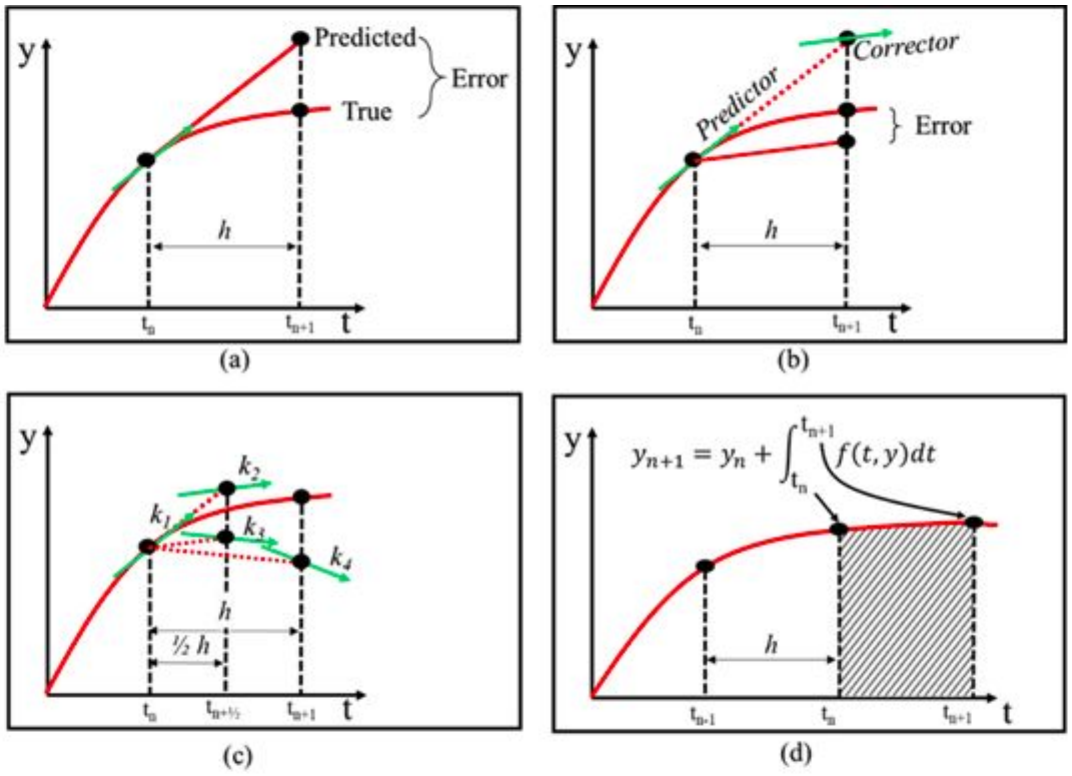
¿Qué quiere decir discretizar una ecuación?

Elementos finitos: convertir un dx en un Δx.

Pasar de funciones definidas con un número infinito de puntos a un número finito de puntos. De esta manera, podemos aproximar la función con las líneas entre cada punto j donde evaluamos nuestra función.



El ejercicio de aproximar numéricamente trae retos



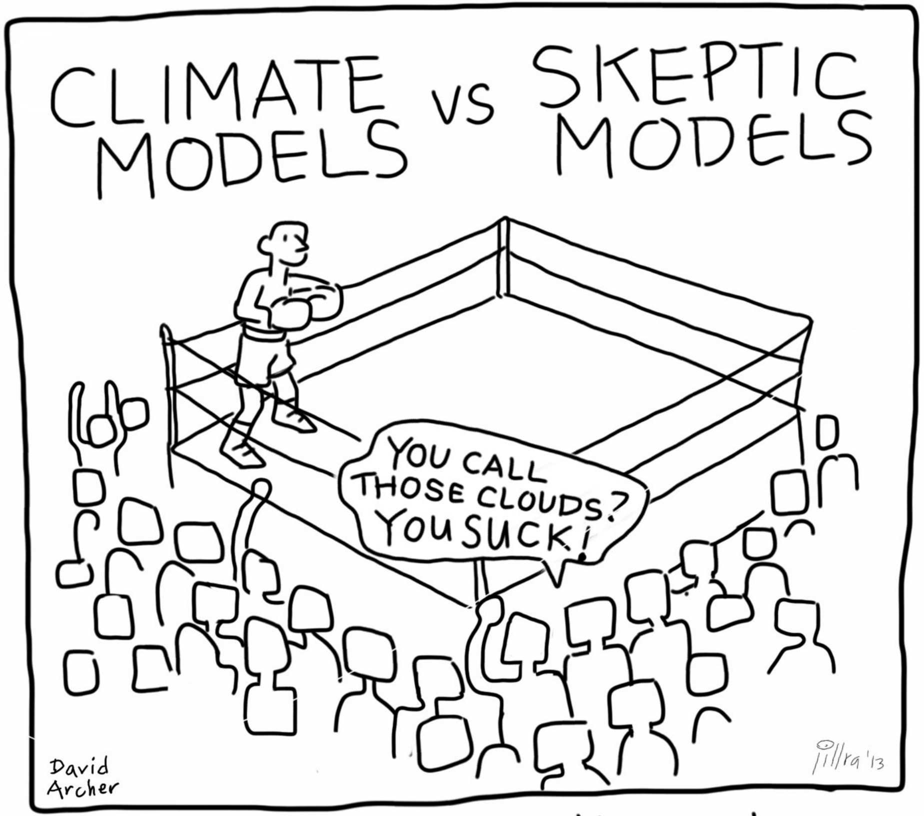
A diferencia de las soluciones analíticas, las cuáles son correctas o incorrectas, las soluciones nuḿericas son **aproximaciones**.

El error de estas aproximaciones depende del método, sus parámetros e incluso a veces hasta de la computadora en la que se resuelvan.

Todas nuestras soluciones están sujetas a errores numéricos, de aquí al final del curso.

Tipos de error numérico

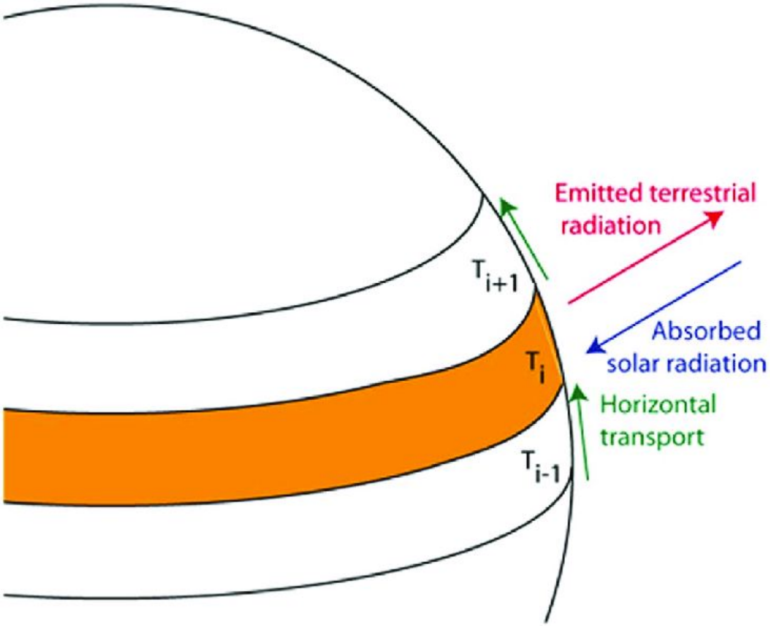
- Error de redondeo:
  - Las computadoras representan los números a través de bits y bytes finitos. Es decir, hay un número finito de cifras significativas que se representan en la computadora. Hay un error entre el número verdadero, por ejemplo, π, y los dígitos que utiliza Python para representar a este número. Cuando uno tiene que resolver una ecuación con π muchas veces, el error por redondeo empieza a crecer y en algunos casos llega a ser significativo.
- Error de truncamiento (truncation error):
  - Error asociado a la aproximación numérica. Al discretizar, aproximamos una función continua como discreta y esto implica caer en un error.
  - Aumentar la resolución, o el número de elementos con los que aproximamos, usualmente mejora este error.
- Error de modelo
  - Error de nuestra aproximación abstracta de la realidad. Por ejemplo, asumir que una vaca es esférica para aproximar su volumen, implica que habrá un error entre el cálculo estimado y la realidad inherente a la acción de modelar el problema.



The scientific debate on climate change

El modelo de Budyko-Sellers

Modelos de balance de energía



Por lo general son de 1 dimensión (1D: latitud).

Buscan encontrar la temperatura superficial, entonces ignoran la variación de la temperatura con la vertical.

El balance es entre energía entrante y energía saliente, debido a que la insolación, como promedio diario, se distribuye de manera uniforme sobre la longitud, esta dimensión no es contemplada. ¿En la realidad, qué hace que sí haya variaciones longitudinales?

Este tipo de modelos tiene un número pequeño de parámetros: albedo, efecto invernadero (emisividad), irradiancia y a veces, transporte meridional.

Modelo de Budyko

Mikhail Ivanovich Budyko fue un físico ruso, pionero de la climatología física.

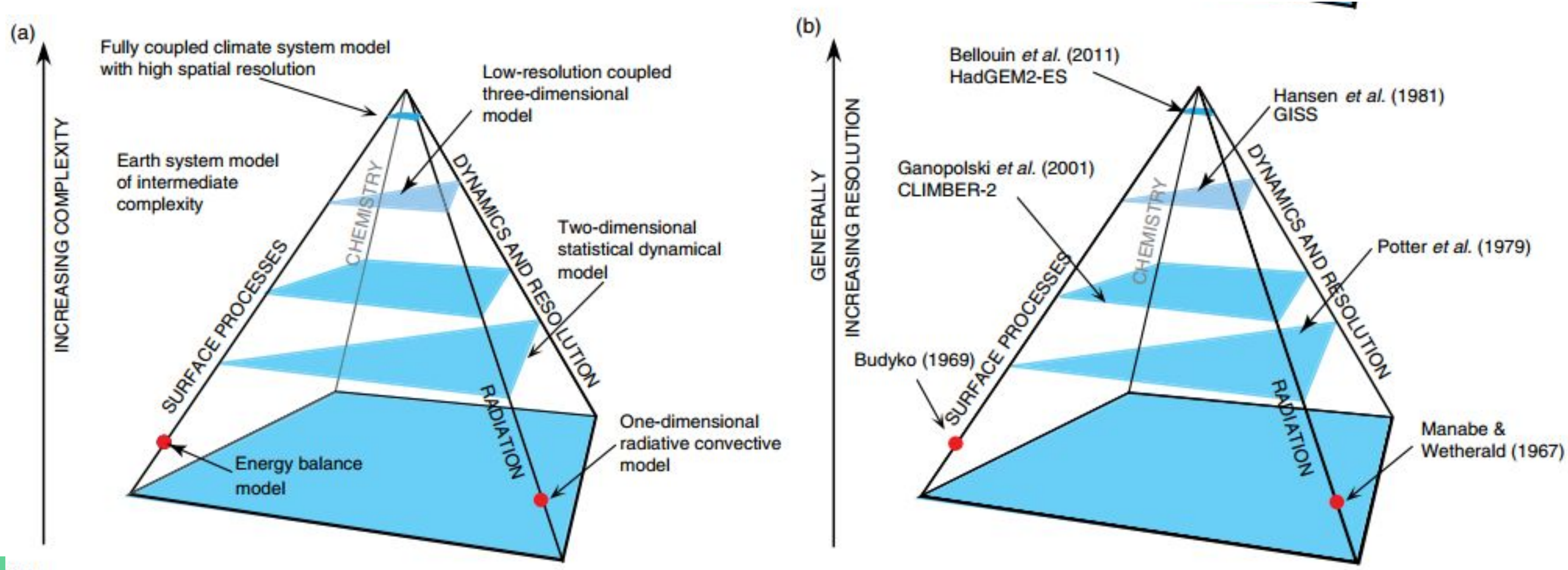
En 1969, propone un modelo de balance de energía con el fin de explicar la retroalimentación del hielo-albedo y su rol en la amplificación Ártica y los períodos de Snowball de la historia terrestre.

Explica la distribución latitudinal de la temperatura terrestre promedio con el albedo parametrizado en una función por pasos o discontinua. Si la temperatura de una región está por debajo del punto de congelación entonces es hielo y tiene mucho albedo. Si la temperatura está lo suficientemente arriba del punto de congelación entonces no tiene hielo y tiene un albedo bajo.

El balance del presupuesto de energía disponible global, dados algunos parámetros superficiales y astronómicos, es una primer aproximación. Permite entender conceptos fundamentales sobre el clima terrestre cómo el de las retroalimentaciones, bifurcaciones y interacciones entre componentes del sistema.

Un modelo de balance de energía simple

Los modelos de Budyko y Sellers se encuentran abajo en la pirámide de la complejidad y buscan entender procesos superficiales, más que procesos de dinámica.



Modelos de aqua planetas.

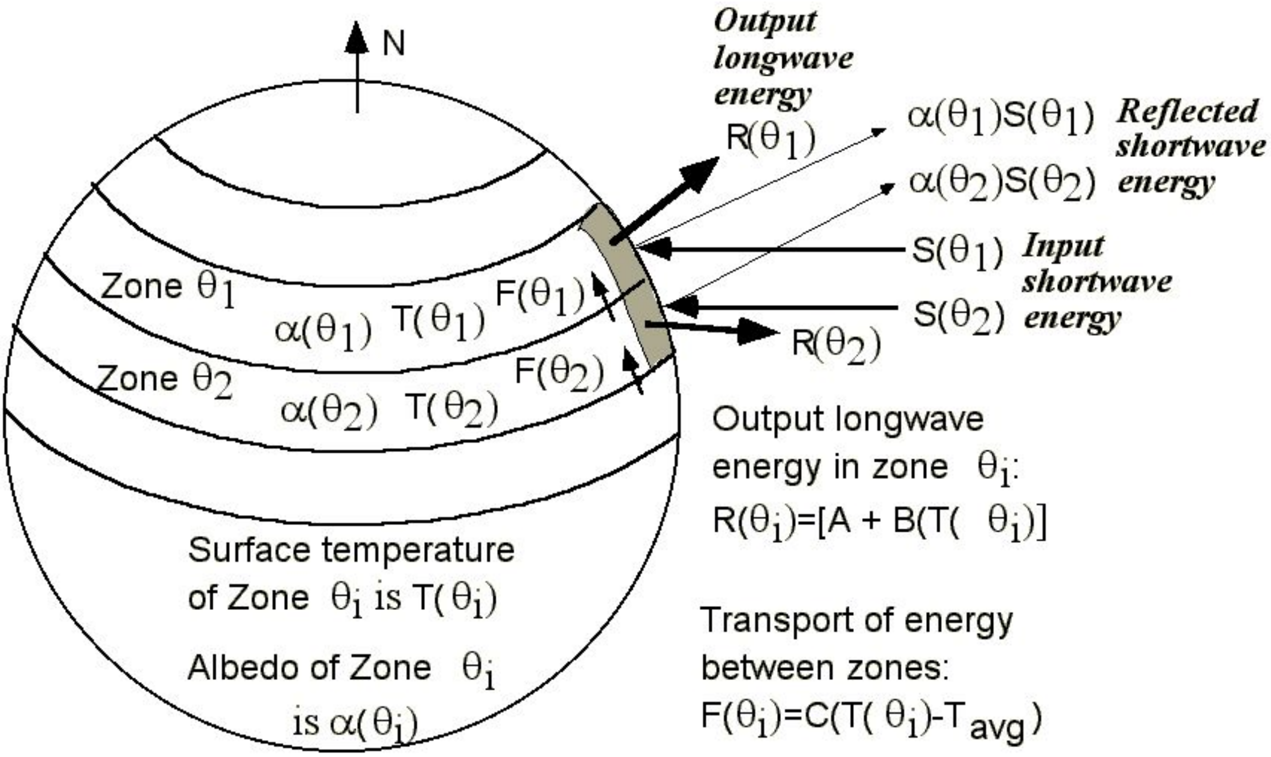
Estos modelos que veremos hoy no tienen superficie continental. Al menos no en la configuración que le daremos en este curso.

Los modelos de aqua planetas son muy útiles para entender procesos específicos como la convección.

En este caso queremos entender balances radiativos y una retroalimentación simple entre dos procesos.

Una visualización de un modelo de aqua planetas para entender procesos meteorológicos.

Formulación del modelo de Budyko

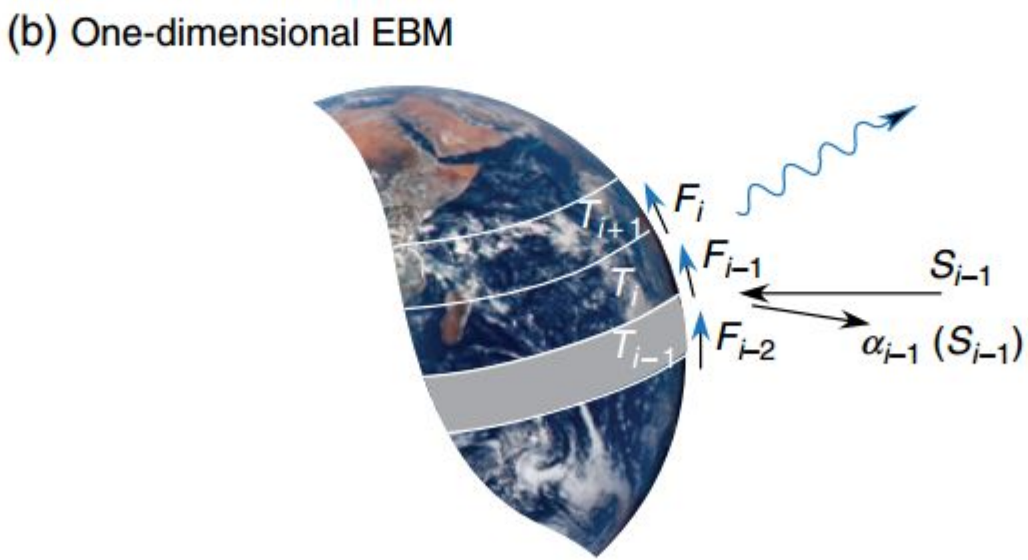


- Balance de energía en cada latitud (entradas-salidas).
- Parametrización del albedo y del efecto invernadero.
- Cálculo de la insolación para cada latitud.
- Ecuación de calor, prognóstica.
- Transporte.

El modelo de Sellers

Al mismo tiempo que Budyko, Sellers en la Universidad de Arizona, publicó un modelo de balance de energía muy parecido, pero con ecuaciones un poco más sofisticadas, especialmente para describir el transporte de energía meridional.

Sellers define bandas de latitud, de cierto espesor (10 grados, típicamente) en las cuáles hace un balance exactamente igual al de Budyko, pero con formulaciones matemáticas diferentes. La física es la misma, pero las aproximaciones no.



Formulación del modelo de Sellers

La parametrización de efecto invernadero.

$$OLR = \sigma T^4[1 - m\,tanh(\gamma T^6)]$$

donde γ es una constante que vale 19×10^{-16} y m es un coeficiente de atenuación que Sellers toma como 0.5 (sin unidades

La parametrización de albedo.

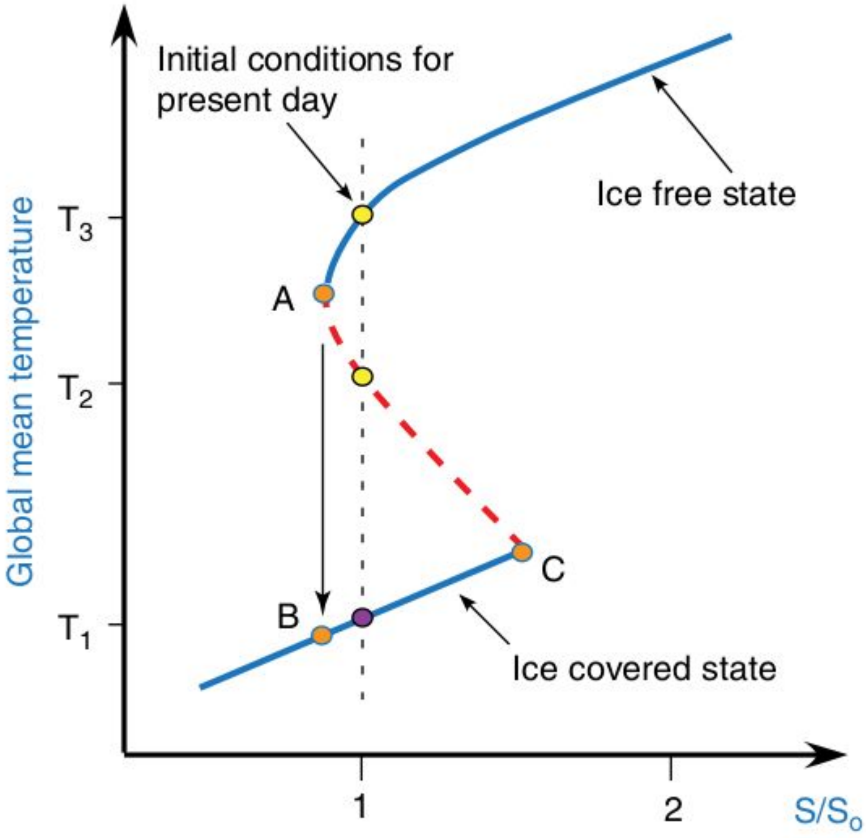
$$\alpha(\lambda, T) = \begin{cases} b(\lambda) - 0.009T & \text{si } T > 283K \\ b(\lambda) - 2.548 & \text{si } T \geq 283K \end{cases}$$

La parametrización de transporte.

$$F = D\nabla^2 T = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} - tan(\phi)\frac{\partial T}{\partial \phi}\right]$$

El transporte meridional energía está parametrizado como función de la distancia entre cada banda de latitud. El objetivo es el mismo, calcular la temperatura superficial resolviendo la ecuación de calor para estas condiciones.

La bifurcación del sistema: retroalimentación hielo-albedo



Las soluciones del sistema tienen 2 estados de equilibrio estables.

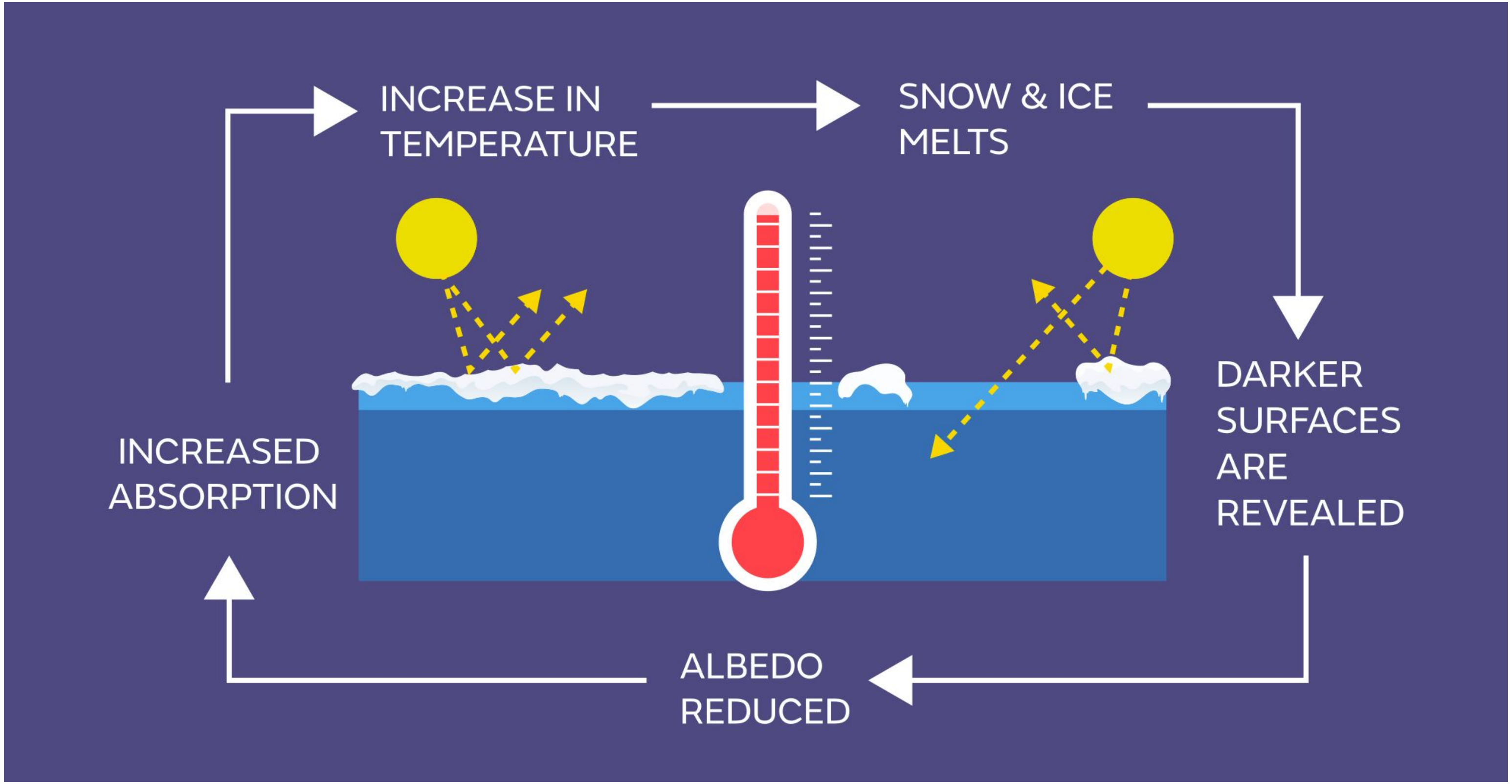
1. Condiciones de hielo.
2. Condiciones sin hielo.

El punto intermedio entre los dos estados estables está fuertemente afectado por la retroalimentación de hielo-albedo y eventualmente, un punto en este estado inestable será forzado a moverse hacia alguno de los dos estados estables.

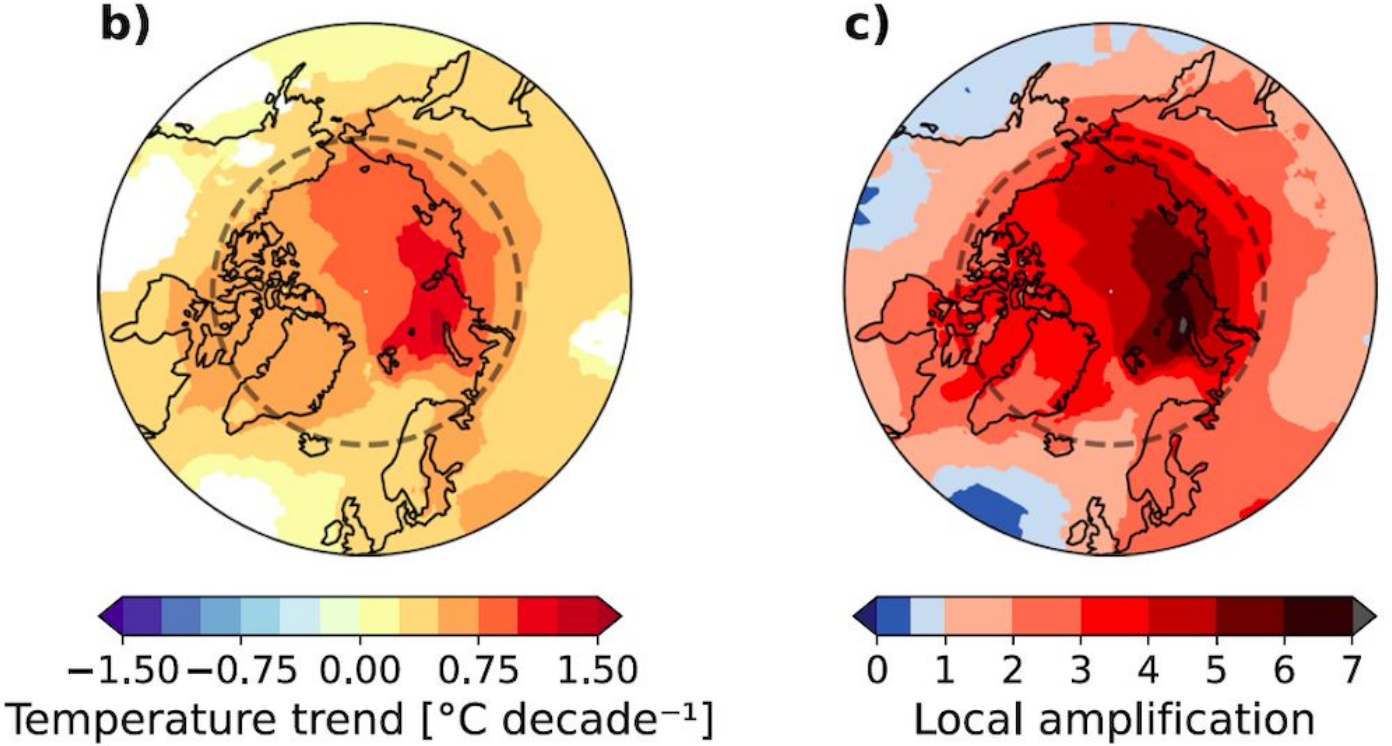
De hecho en este estado intermedio pueden haber procesos matemáticamente correctos pero físicamente poco realistas, como una disminución de la temperatura a pesar de tener mayor energía entrando al sistema.

Retroalimentación del hielo/albedo

UK Met Office



La amplificación del Ártico



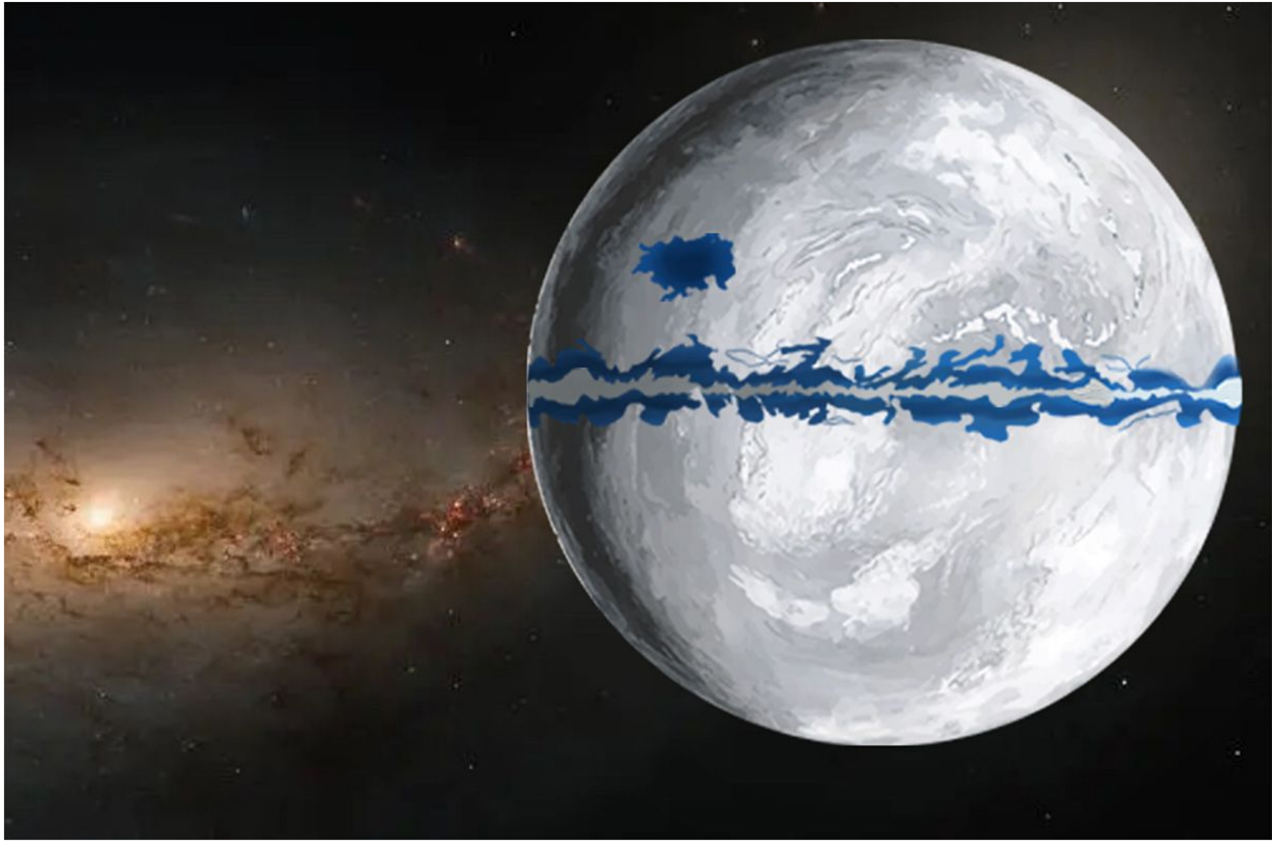
b) es la tendencia de temperatura y c) es la amplificación local, medida como la tasa de calentamiento local dividida por el calentamiento global.

Snowball Earth

La Tierra estuvo congelada, en latitudes tropicales, según estudios paleoclimáticos.

¿Cómo sobrevivió la vida aquí y cómo podemos usar este conocimiento para pensar en vida fuera de nuestro planeta?

¿Qué evita que esto suceda?



Europa

Una luna con la superficie congelada pero que se sospecha tiene agua por debajo.

¿Puede tener vida?

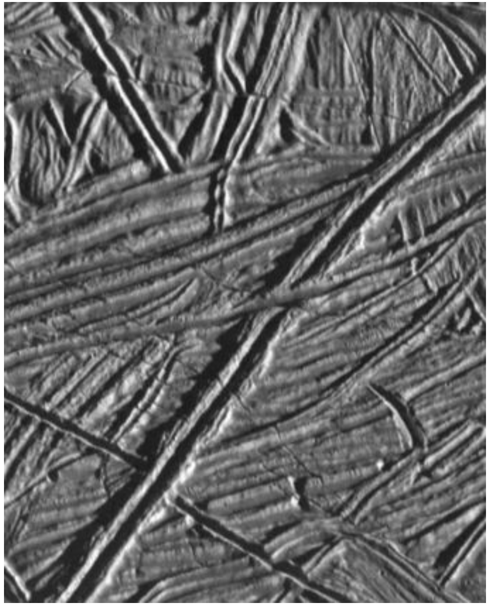
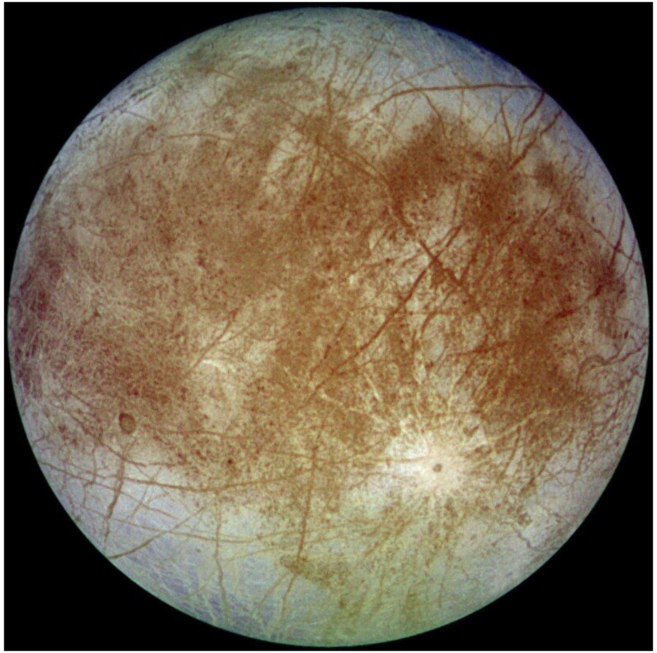


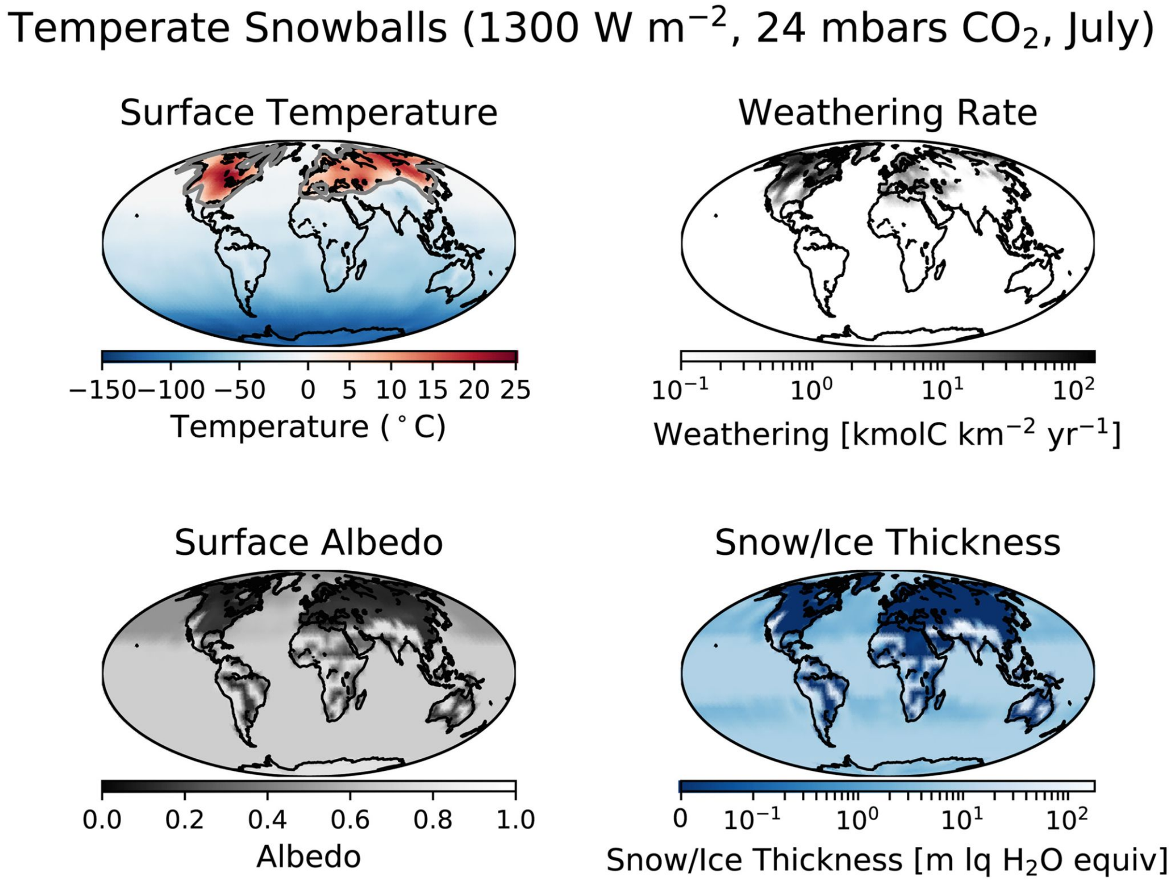
Foto tomada por la sonda Galileo de la superficie de Europa que se supone ha sido cuarteada por el efecto de un océano en su interior.



¿Qué sucedió con la vida en nuestro cuando estuvo congelada?

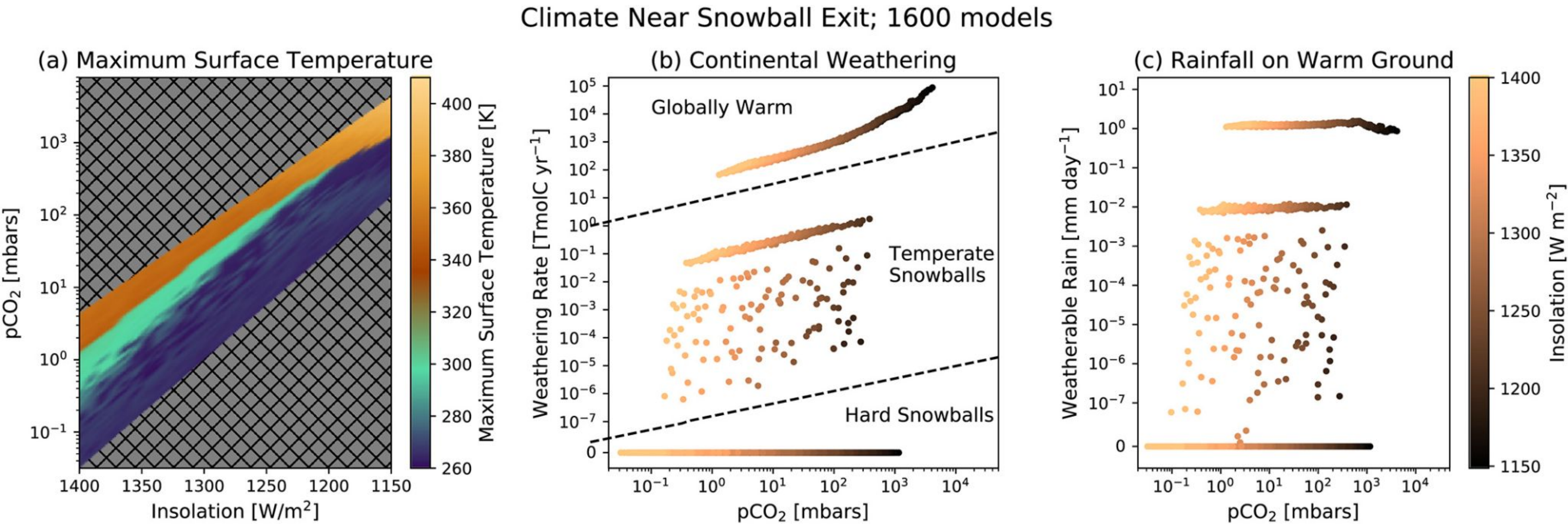
¿Cómo puede un cuerpo celeste congelado escapar de un estado así siendo tan fuerte la retroalimentación de hielo albedo?

El estudio de los mundos congelados



La insolación es capaz de mantener la temperatura sobre el continente por encima del punto de congelación, incluso en una situación de Snowball. Paradise et al., (2019).

El estudio de los mundos congelados



La tasa de erosión depende de la temperatura. En un planeta congelado no hay casi erosión, eso aumenta sustancialmente la cantidad de CO2 en la atmósfera. Paradise et al., (2019).

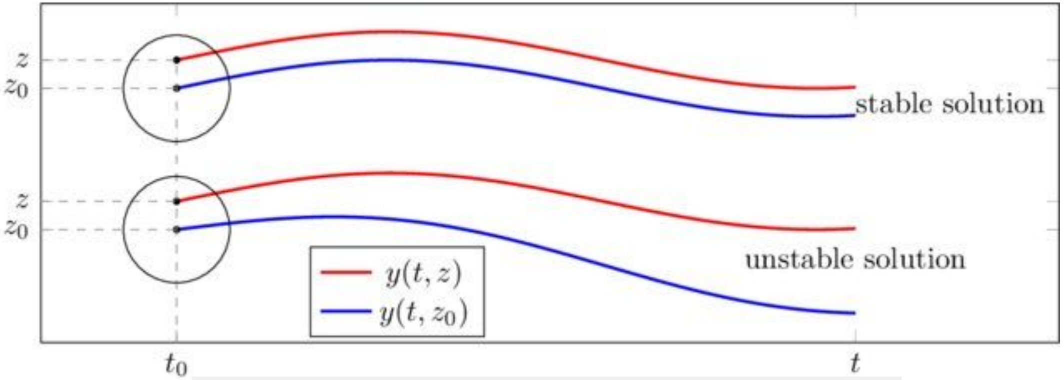
Bifurcaciones en el sistema climático

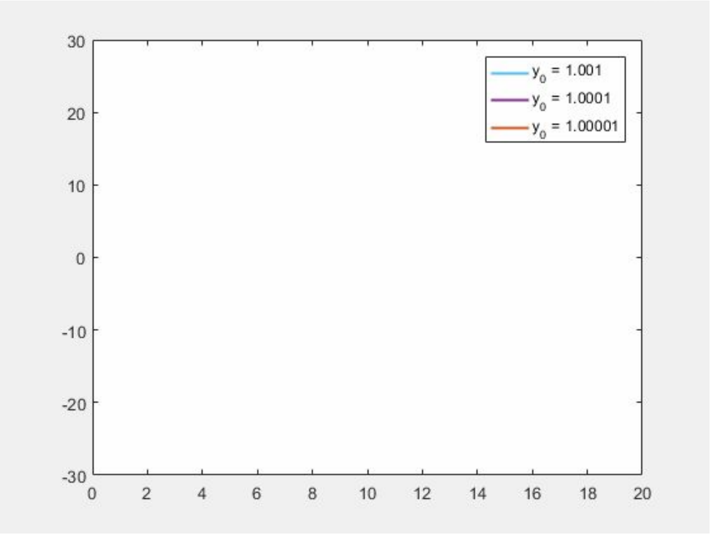
El análisis de estabilidad

Algunas soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales pueden explotar, i.e., crecer infinitamente la solución.

Esto se puede deber a:

- Condiciones iniciales
- Esquema o método de solución
- Paso de tiempo o resolución





Algunas soluciones tienden al equilibrio, otras no tanto. Arriba vemos soluciones a las ecuaciones de Lorenz con 3 condiciones iniciales diferentes.

¿Cómo medimos si algo es estable?

La estabilidad es la convergencia de una solución para un número finito de parámetros de la solución.

Los métodos de estabilidad buscan evaluar qué factores hacen que una solución “explote” o no.

Hay ecuaciones que naturalmente tienden a disminuir o aumentar perpetuamente. Por ejemplo, la ecuación hidrostática tiende a la presión =0 a cierta altura pero la ecuación de Clausius Clapeyron sugeriría que la presión de vapor como función de la temperatura seguirá aumentando infinitamente.

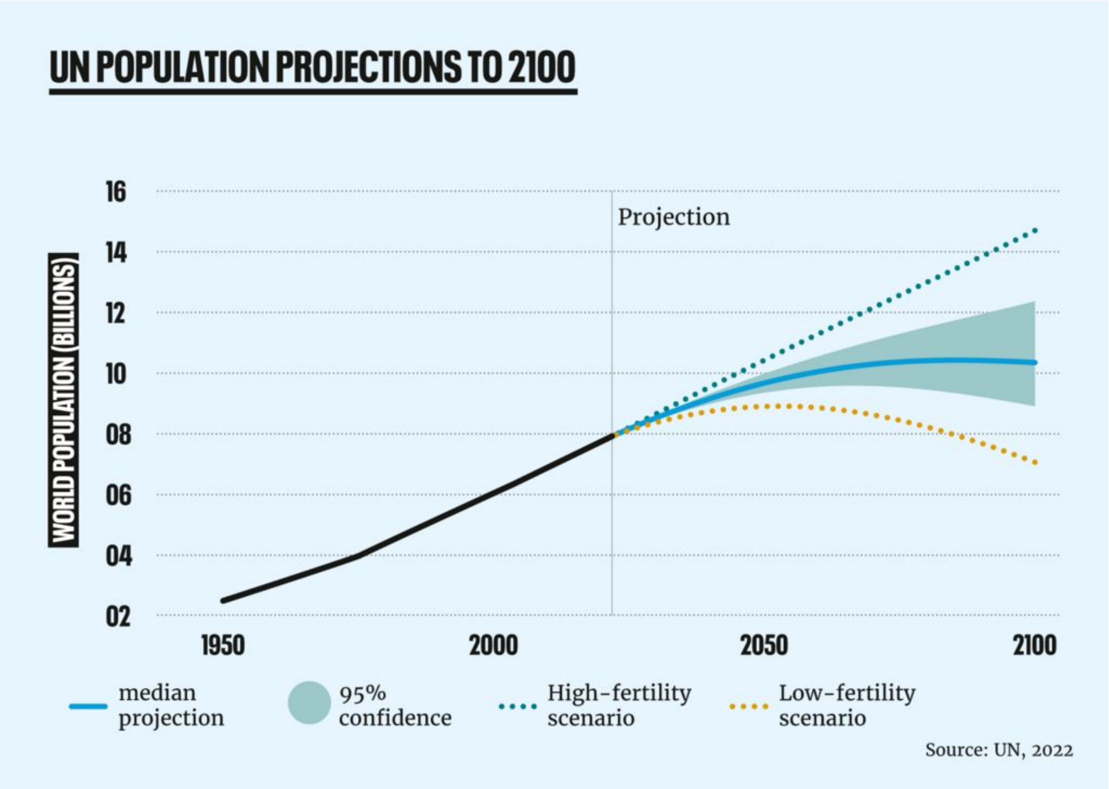
Entonces un método de estabilidad debe saber discernir cuándo una solución aumenta “naturalmente” y cuando explota artificialmente por la inestabilidad numérica.

Ecuaciones del crecimiento poblacional

¿Cuáles son los principios fundamentales que rigen cómo crece una población?

¿Podemos predecir el crecimiento de una población y si sí, qué forma tomaría esta función de predicción?

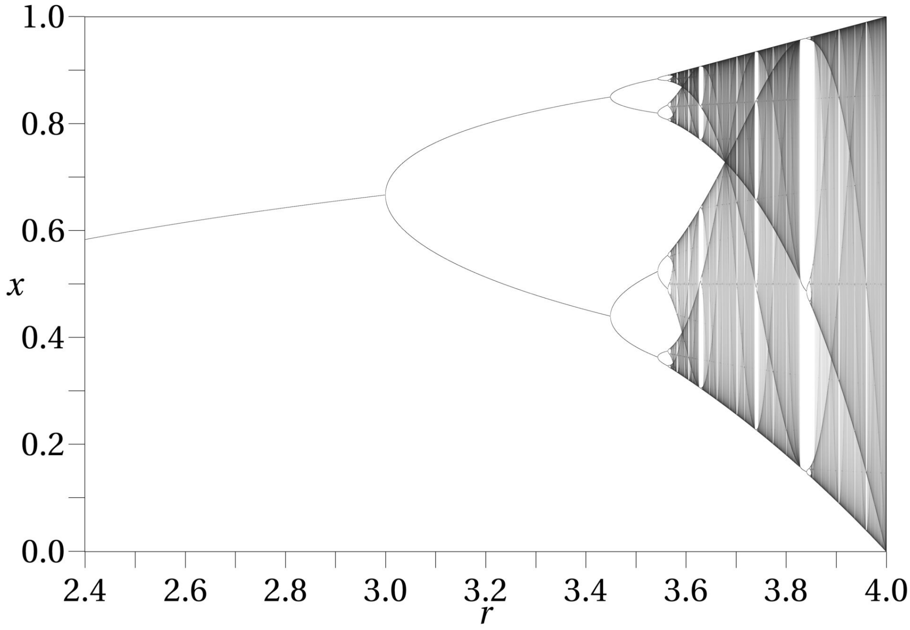
¿Es posible saber con certeza la dinámica de poblaciones?



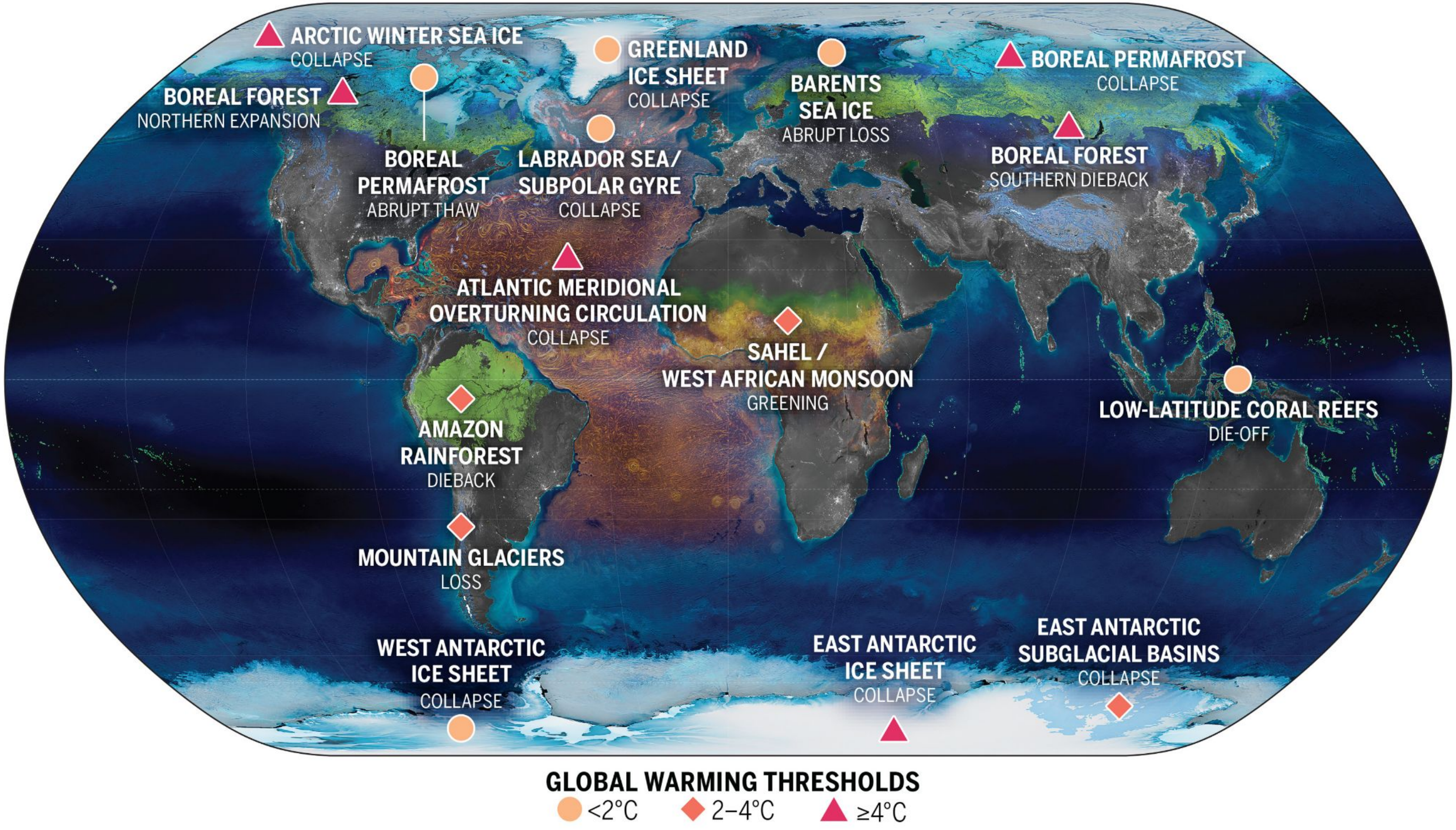
Bifurcaciones de las poblaciones

Las poblaciones crecen según una tasa de crecimiento r. Uno pensaría que entonces uno podría saber con cierto grado de certeza qué pasará con la población después del tiempo t.

Sin embargo, resulta que la población total puede variar considerablemente después de cierto tiempo si escogemos valores ligeramente diferentes de r.



Bifurcaciones en el sistema climático



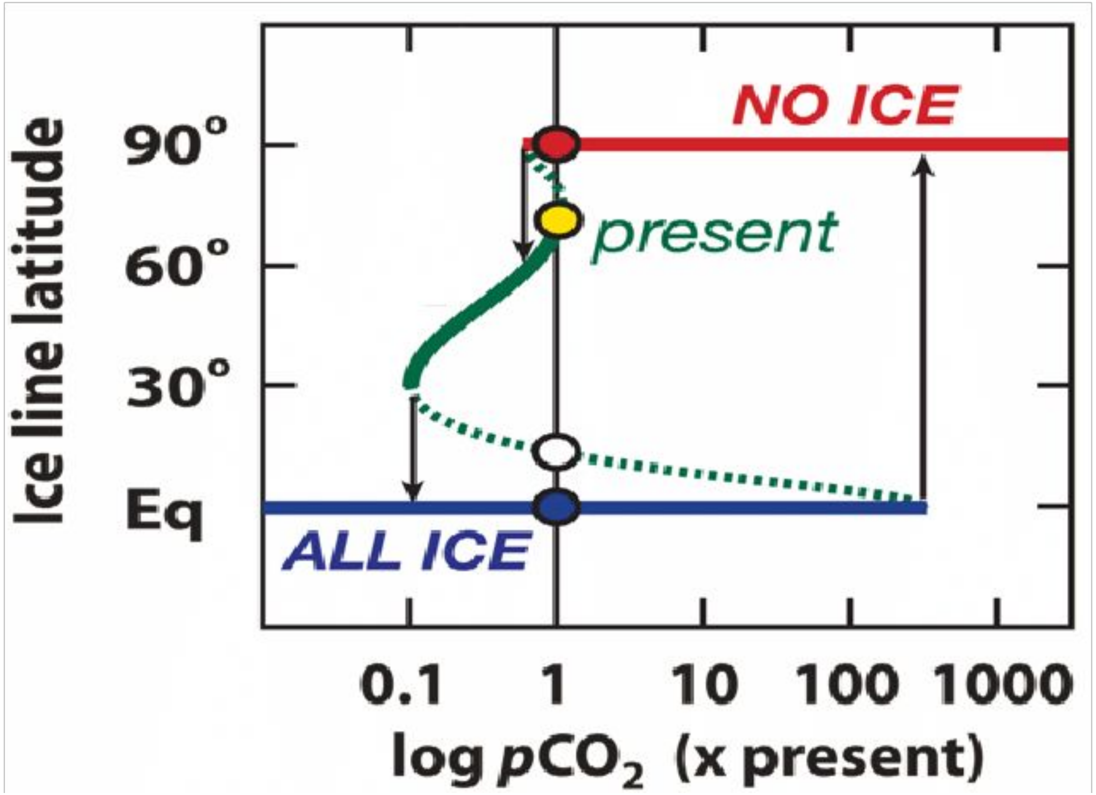
Bifurcación la retroalimentación de hielo

La extensión de la línea de hielo es también descrita por una bifurcación o un punto sin retorno.

Una tierra, inicialmente congelada requiere que aumentemos la cantidad de CO2 presente en la atmósfera hasta valores enormes comparados a los valores actuales.

¿Cómo es que la Tierra puede permanecer congelada con tanto efecto invernadero?

El modelo de Budyko-Sellers sirve entender estos procesos.

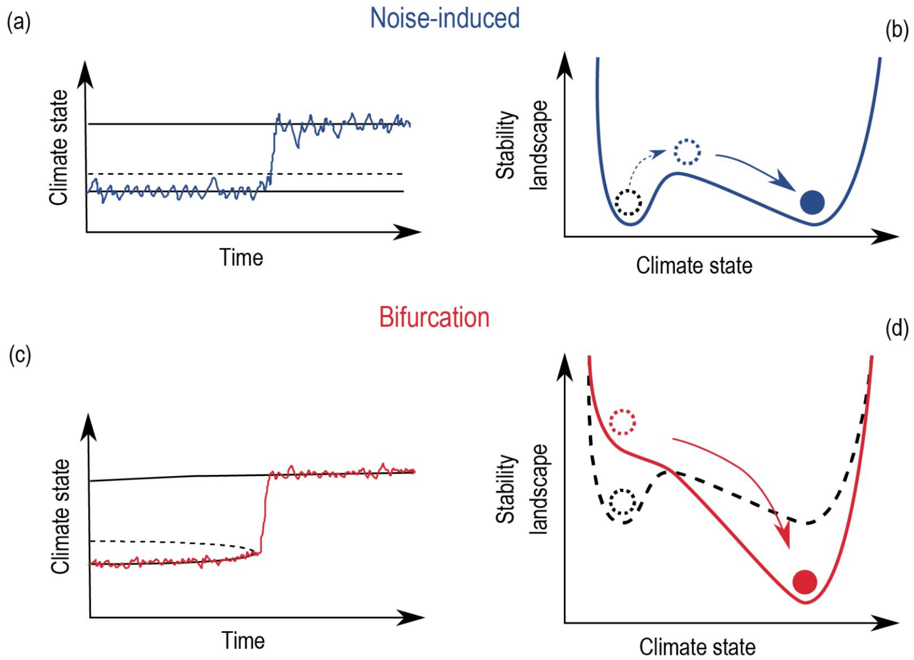


Punto sin retorno, tipping point

Proceso irreversible o parte de una función por pedazos que salta.

Puede ser una bifurcación, como en el caso de la AMOC.

Entre más profundo es el valle o la distancia entre un estado de equilibrio y otro se considera más resiliente al sistema climático. Es decir, toma más energía o salto poder pasar de un estado al otro.



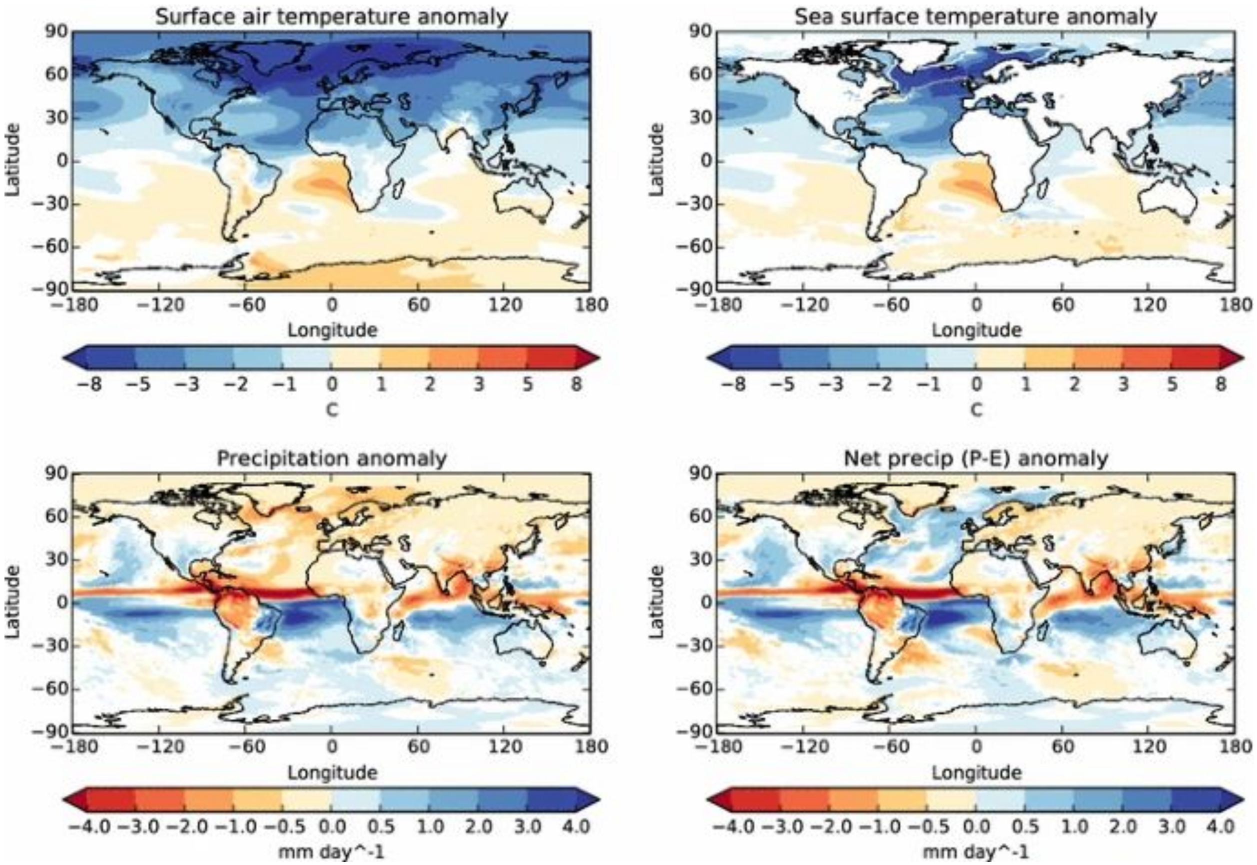
Si colapsa la AMOC

Una gran fracción del hemisferio Norte se enfriará.

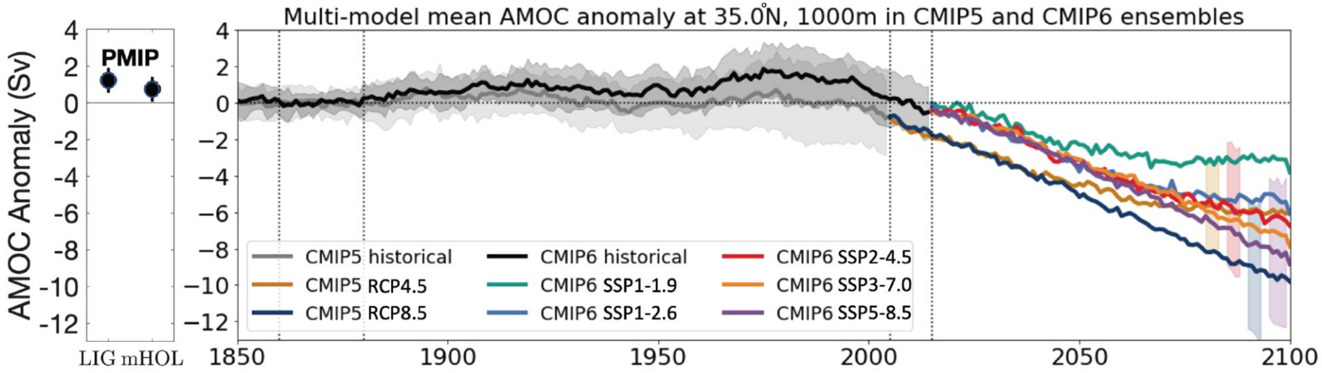
La precipitación tropical se iría hacia el hemisferio norte.

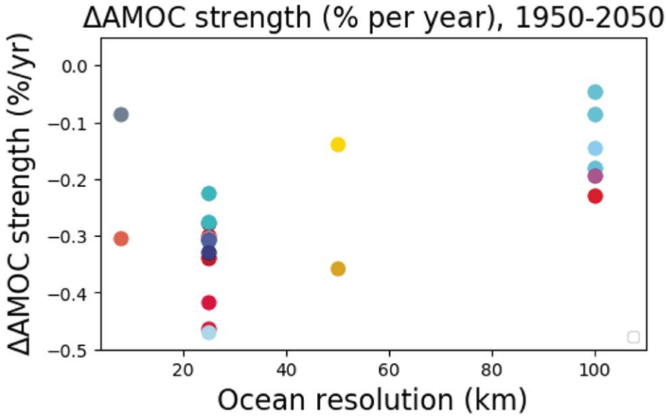
Se generaría un calentamiento superficial leve en el hemisferio sur.

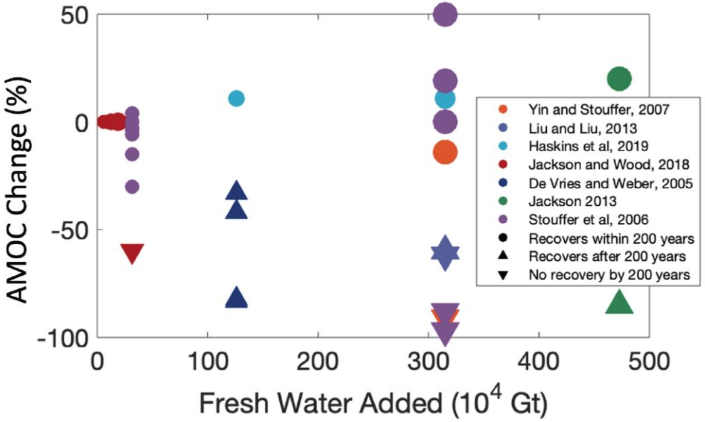
Jackson et al., 2015



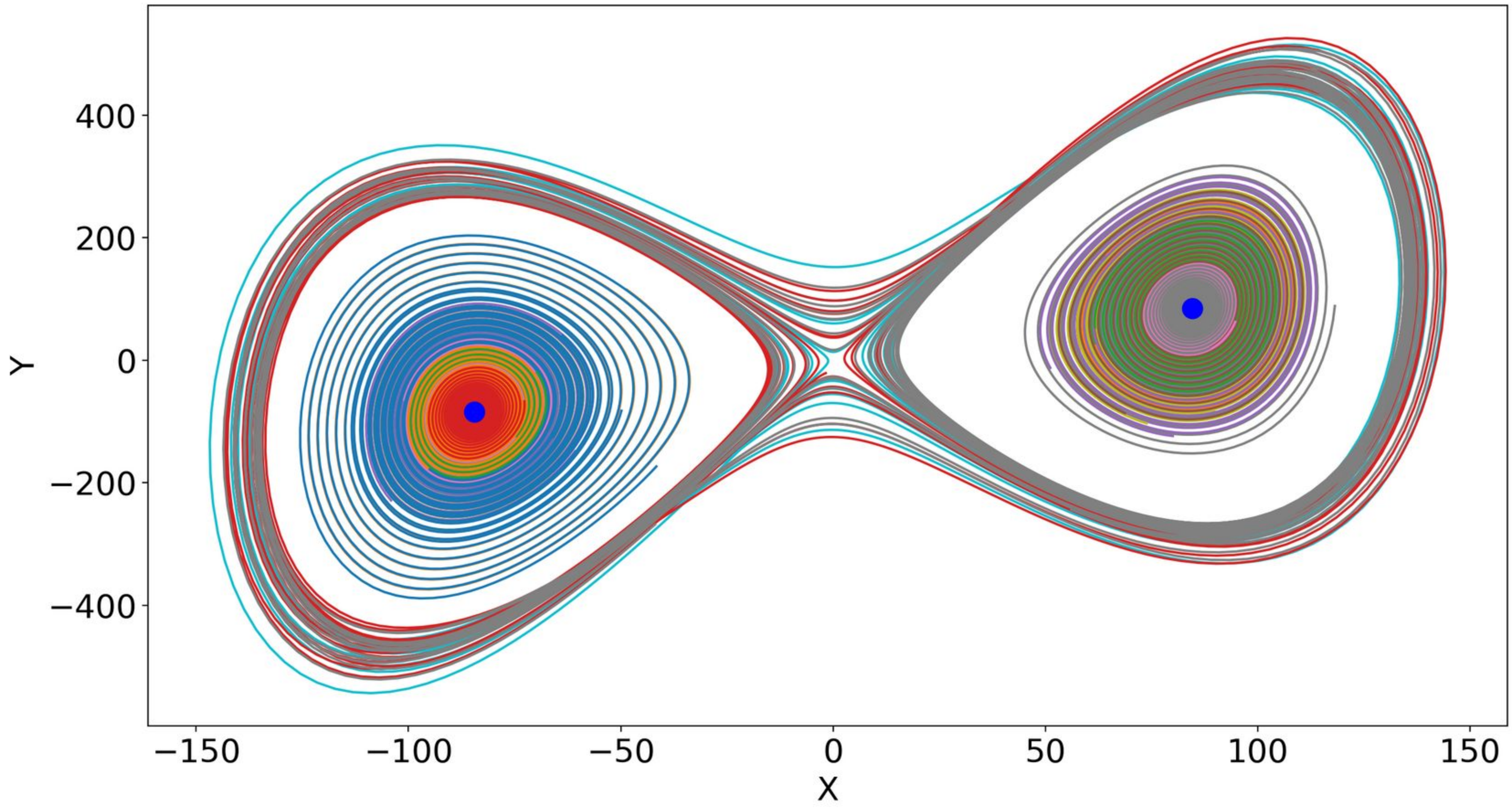
Según muchos escenarios del IPCC esto no sucederá pronto







Las ecuaciones de Lorenz



400
200
0
−200
−400
Y
−150
−100
−50
0
50
100
150
X