

Prosjektoppgave i Matematikk 2

Jakob Lønnerød Madsen
Sabine Seljeseth
Marius Torbjørnsen
Sivert Utne

16. April 2020

Innhold

1 Innledning	1
1.1 Teori	1
1.2 Metode	3
2 Resultater	4
2.1 Oppgave 1	4
2.1.1 Oppgave 5.1.21	4
2.1.2 Oppgave 5.1.22a	5
2.2 Oppgave 2	8
2.3 Oppgave 3	8
2.4 Oppgave 4	9
2.4.1 Deloppgave a	9
2.4.2 Deloppgave b	9
2.4.3 Deloppgave c	9
2.4.4 Deloppgave d	10
2.5 Oppgave 5	11
2.6 Oppgave 6	12
2.6.1 Deloppgave a	12
2.6.2 Deloppgave b	13
2.6.3 Deloppgave c og d	14
2.6.4 Deloppgave e	15
2.6.5 Deloppgave f	15
2.7 Oppgave 7	16
3 Konklusjon	17
Referanser	18
Vedlegg	19

1 Innledning

Denne rapporten vil dreie seg om hvordan vi løste en rekke oppgaver ved hjelp av Euler-Bernoullibjelke modellen. Denne modellen er for materialer som bøyes under belastning, dette inkluderer egenvekten til bjelken. Spesifikt vil vi se på et stupebrett av douglasgran, altså et stupebrett av solid tre. I våre beregninger vil vi operere med konstantene gitt under, [1, p.104].

Stupebrett av Douglasgran

Lengde	=	2meter	(L)
Bredde	=	30cm	(w)
Tykkelse	=	3cm	(t)
Tetthet	=	480kg/m ³	(d)
Youngs modul	=	1.3 * 10 ¹⁰ Newton/m ²	(E)
Treghetsmoment	=	wd ³ /12	(I)

En stor del av oppgavene går ut på å jobbe med diskretisering og hvordan dette påvirker resultatet. Diskretisering er når vi løser partielle differensiallikninger ved hjelp av numeriske metoder for å estimere en løsning. Siden vi estimerer løsningen vil det følge med en regnefeil. Dette vil få konsekvenser for utregningene gjort, noe man får se i dette prosjektet.

1.1 Teori

Euler-Bernoulli bjelke modell er en modell for bøyning av materiell under last [1, p.102], den legger grunnlaget for hele dette prosjektet. Likningen for Euler-Bernoulli ser slik ut [1, 2.27 p.102]

$$EIy^{(4)} = f(x) \quad (1)$$

der E er Young's modulus av materialet og I er det annet arealmoment, som er avbøyningen under last [4], i dette tilfellet for et stupebrett. $f(x)$ er den påførte lasten og egenvekten til bjelken. $y(x)$ er hvor mye bjelken bøyer seg[1, p.102].

For å approksimere $y^{(4)}(x)$ brukes diskretisering og Taylorsformel med restledd. Taylors formel med rest ledd er definert slik[1, p.21]:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x - x_0)}{3!}(x - x_0^3) \\ & + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} \end{aligned} \quad (2)$$

Diskretisering fører til en diskretiserings feil, i dette tilfellet er den lik restleddet til Taylor formelen.[1, p.244]. Diskretiserings feilen blir oppgitt med store O notasjon. Store O notasjon blir brukt for å forklare vekst rater [5]. Den representerer det verste tilfellet for veksten. Store O notasjon ignorerer konstanter og tar det verste tilfellet hvis det er flere store O uttrykk [6]. En approksimering av $y^{(4)}(x)$ er [1, 2.28 p.103]

$$y^{(4)} \approx \frac{y(x - 2h) - 4y(x - h) + 6y(x) - 4y(x + h) + y(x + 2h)}{h^4} \quad (3)$$

Erstatter man $y^{(4)}(x)$ i (1) med resultatet fra (3) og setter inn y_i istedenfor $y(x_i)$ får man en ny likning. [1, 2.29 p.103]

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI}f(x_i) \quad (4)$$

Et problem med (4) er at hvis man setter inn $i = 1$ får man

$$y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{h^4}{EI}f(x_1) \quad (5)$$

I likning (5) er ikke y_{-1} definert. Man bruker derfor en alternativ approksimering til $y^{(4)}(x)$ når $i = 1$ slik at man unngår dette problemet.

$$y^{(4)}(x_i) \approx \frac{16y(x_i) - 9y(x_1 + h) + \frac{8}{3}y(x_1 + 2h) - \frac{1}{4}y(x_1 + 3h)}{h^4} \quad (6)$$

Likning (6) gir samme diskretisering feil som likning (3) dette betyr at likning (6) også er gyldig. Likning (6) har et krav da og det er at $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ må være oppfylt. Setter man inn $i = 1$ og setter det inn i likning (1) ser vi at alle leddene er definert.

$$16y_1 - 9y_2 + \frac{8}{3}y_3 - \frac{1}{4}y_4 = \frac{h^4}{EI}f(x_i) \quad (7)$$

Likning (6) blir brukt når $i = 1$, dette er i starten av stupebrettet. Enden av stupebrettet trenger også andre approksimeringer av $y^{(4)}(x)$. Disse blir oppgitt i [1, 2.32 og 2.33 p.103]

$$y^{(4)}(x_{n-1}) \approx \frac{-28y_n + 72y_{n-1} - 60y_{n-2} + 16y_{n-3}}{17h^4} \quad (8)$$

$$y^{(4)}(x_n) \approx \frac{72y_n - 156y_{n-1} + 96y_{n-2} - 12y_{n-3}}{17h^4} \quad (9)$$

Ser på bjelken som en union av n deler med lengde h . Nå skal vi bruke alle disse formelene for å lage en $n \times n$ matrise som skal representere bøyningen til de ulike delene av bjelken, fra første punkt som er ved starten av stupebrettet helt til punkt n som er ved den frie enden. Den blir seende slik ut [1, 2.34 p.102]

$$\begin{bmatrix} 16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} \\ & & & & & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} \\ & & & & & & \frac{72}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{h^4}{EI} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Hver rad kommer fra en av de likningene som har blitt forklart tidligere. Vi tar ikke med y_0 fordi denne er 0. Den første raden er fra likning (7). Vi bruker denne på den første raden fordi da skal man finne y_1 altså $i = 1$, da får vi ikke definerte verdier hvis vi hadde brukt likning (4) som vi har sett i likning (5). På resten av radene fra y_2 og opptil y_{n-2} brukes likning (4) siden da er alle verdiene definert. Når man kommer til slutten altså den frie enden trengs det andre likninger igjen. Raden med y_{n-1} bruker likning (8) på og den siste raden likning (9).

Feil

Når vi regner ut forskyving vil beregningen inneholde feil. For å finne denne feilen regner vi ut foroverfeil, relativ foroverfeil, relativ bakoverfeil og feilforstørrelsesfaktor.

Foroverfeilen kan vi finne ved å bruke formelen:

$$\|x - x_a\|_\infty$$

Denne feilen gir oss hvor stor feilen er i verdien x . Relativ Foroverfeil kan vi finne ved å ta relativ forover feil delt på $\text{norm}(x)$

$$\frac{\|x - x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

Den relative bakoverfeilen: ϵ_{mach}

Feilfortørringsfaktoren kan vi finne ved å dele den relative foroverfeilen på den relative bakoverfeilen.

$$\frac{\frac{\|x-x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}}{\epsilon_{mach}}$$

Kondisjonstall

I mange av oppgavene skal man sammenligne feil med kondisjonstallet. Kondisjonstallet, eller condition number, er definert som den maksimale feilforstørrelsen som blir gjort på input endringer. Altså hvor sensitiv problemet er for endringer i inputen.

Om kondisjonstallet til et problem er stort, vil dette problemet være ”ill-conditioned”. Men om et problem har et lavt kondisjonstall, vil det være ”well-conditioned”

For å finne kondisjonstallet til en matrise brukes formelen:

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

1.2 Metode

I de fleste beregningene ble MATLAB brukt. MATLAB er et utmerket verktøy for store matrise beregninger. Bevisoppgavene ble gjort for hånd. For å rapportere funnene våre ble L^AT_EX brukt, siden det er bra verktøy for matematiske rapporter.

2 Resultater

2.1 Oppgave 1

Oppgave 1 handler om å bevise noen av likningene i teori delen. For å gjøre dette er er likning (2), Taylor formel med restledd brukt.

2.1.1 Oppgave 5.1.21

I oppgave 5.1.21 fra [1, p.253] skal man bevise at formel (3) stemmer.

$$f^{(4)} = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2) \quad (11)$$

Begynner ved å regne ut Taylor polynomet til de forskjellige x verdiene; $x-2h$, $x-h$, $x+h$ og $x+2h$.

Begynner med $x+h$ der $x_0 = x-h$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(c)$$

$x-h$ der $x_0 = x+h$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(c)$$

$x+2h$ der $x_0 = x-2h$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{8h^3}{6}f'''(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{32h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{64h^6}{720}f^{(6)}(c)$$

$x-2h$ der $x_0 = x+2h$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \frac{8h^3}{6}f'''(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{32h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{64h^6}{720}f^{(6)}(c)$$

Deretter setter man dette inn i likning (11). Regner først $f(x-2h) + f(x+2h)$

$$\begin{aligned} f(x-2h) + f(x+2h) &= \\ f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \frac{8h^3}{6}f'''(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{32h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{64h^6}{720}f^{(6)}(c) \\ &+ f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{8h^3}{6}f'''(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{32h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{64h^6}{720}f^{(6)}(c) \\ &= 2f(x) + 4h^2f''(x) + \frac{4h^4}{3}f^{(4)}(x) + \frac{8h^6}{45}f^{(6)}(c) \end{aligned}$$

Deretter $-4f(x-h) - 4f(x+h)$

$$\begin{aligned}
& -4f(x-h) - 4f(x+h) = \\
& -4(f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(c)) \\
& -4(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(c)) \\
& = -4(2f(x) + h^2f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + \frac{h^6}{360}f^{(6)}(c)) \\
& = -8f(x) - 4h^2f''(x) - \frac{h^4}{3}f^{(4)}(x) - \frac{h^6}{45}f^{(6)}(c)
\end{aligned}$$

Setter man disse to del beregningene inn får man

$$\begin{aligned}
f^{(4)} &= \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2) \\
&= \frac{2f(x) + 4h^2f''(x) + \frac{4h^4}{3}f^{(4)}(x) + \frac{8h^6}{45}f^{(6)}(c) - 8f(x) - 4h^2f''(x) - \frac{h^4}{3}f^{(4)}(x) - \frac{h^6}{45}f^{(6)}(c) + 6f(x)}{h^4} + O(h^2) \\
&= \frac{h^4f^{(4)} + \frac{7h^6}{45}f^{(6)}(c)}{h^4} + O(h^2) \\
&= f^{(4)} + O(h^2) + O(h^2) \\
&= f^{(4)} + O(h^2) \quad \square
\end{aligned}$$

Har nå bevist at formelen stemmer og har også funnet diskretiserings feilen for approksimeringen som er $O(h^2)$.

2.1.2 Oppgave 5.1.22a

Bevis hvis $f(x) = f'(x) = 0$ da [1, p.253]

$$f^{(4)}(x+h) - \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2) \quad (12)$$

Oppgaven gir oss et hint om at vi først burde bevise det rett under.

Bevis hvis $f(x) = f'(x) = 0$ da

$$f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = O(h^6) \quad (13)$$

Begynner ved å regne ut $x+3h$ og $x+4h$

$x+3h$ der $x_0 = x-3h$

$$f(x+3h) = f(x) + 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2}f''(x) + \frac{27h^3}{6}f'''(x) + \frac{81h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{243h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{729h^6}{720}f^{(6)}(c)$$

$x+4h$ der $x_0 = x-4h$

$$f(x+4h) = f(x) + 4hf'(x) + \frac{16h^2}{2}f''(x) + \frac{64h^3}{6}f'''(x) + \frac{256h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{1024h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{4096h^6}{720}f^{(6)}(c)$$

Setter vi inn dette

$$\begin{aligned}
& f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = \\
& \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(c) \\
& - 10\left(\frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(c)\right) \\
& + 5\left(2h^2f''(x) + \frac{8h^3}{6}f'''(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{32h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{64h^6}{720}f^{(6)}(c)\right) \\
& - \frac{5}{3}\left(\frac{9h^2}{2}f''(x) + \frac{27h^3}{6}f'''(x) + \frac{81h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{243h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{729h^6}{720}f^{(6)}(c)\right) \\
& + \frac{1}{4}\left(\frac{16h^2}{2}f''(x) + \frac{64h^3}{6}f'''(x) + \frac{256h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{1024h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{4096h^6}{720}f^{(6)}(c)\right) \\
& = \left(\frac{1}{2} - 5 + 10 - \frac{15}{2} + 2\right)h^2f''(x) \\
& + \left(-\frac{1}{6} + \frac{20}{3} - \frac{5}{3} - \frac{15}{2} + \frac{8}{3}\right)h^3f'''(x) \\
& + \left(\frac{1}{24} - \frac{5}{12} + \frac{10}{3} - \frac{45}{8} + \frac{8}{3}\right)h^4f^{(4)}(x) \\
& + \left(-\frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{4}{3} - \frac{27}{8} + \frac{32}{15}\right)h^5f^{(5)}(x) \\
& + \left(\frac{1}{720} - \frac{1}{72} + \frac{4}{9} - \frac{27}{16} + \frac{64}{45}\right)h^6f^{(6)}(c) \\
& = \frac{h^6f^{(6)}(c)}{6} = O(h^6) \quad \square
\end{aligned}$$

Har nå bevist hintet, fortsetter på den opprinnelige oppgaven som var å bevise likning (12).

Setter man inn $x = x + h$ i likning (11) får man

$$f^{(4)}(x+h) = \frac{f(x-h) - 4f(x) + 6f(x+h) - 4f(x+2h) + f(x+3h)}{h^4} = O(h^2) \quad (14)$$

skriver om likning (13)

$$f(x-h) = 10f(x+h) - 5f(x+2h) + \frac{5}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h) + O(h^6)$$

og setter det inn for $f(x-h)$ i likning (14) får man

$$\begin{aligned}
& f^{(4)}(x+h) = \\
& \frac{10f(x+h) - 5f(x+2h) + \frac{5}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h) + O(h^6) - 4f(x) + 6f(x+h) - 4f(x+2h) + f(x+3h)}{h^4} \\
& + O(h^2)
\end{aligned}$$

Legger man alt sammen blir det

$$\begin{aligned}
& f^{(4)}(x+h) = \\
& \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} + O(h^2) \quad (15)
\end{aligned}$$

Tar man da likning (15) og setter inn i likning (12) får vi

$$\begin{aligned}
& f^{(4)}(x+h) - \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h))}{h^4} = \\
& \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} + O(h^2) \\
& - \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h))}{h^4} \\
& = O(h^2) \quad \square
\end{aligned}$$

Har nå bevist at dette også stemmer og at diskretiserings feilen er lik som i 5.1.21. Det at de har samme diskretiserings feil betyr at vi kan bruke begge i det samme regnestykket uten at det ødelegger for oss, slik vi gjør i likning (10).

2.2 Oppgave 2

For å lage matrise (10) bruker vi Matlab funksjonen: `spdiags()`.
Hvis vi skal ha 10 intervaller vil n bli 10, dette vil da gi oss en 10 x 10 matrise.

Matlab koden for denne oppgaven ligger under funksjonen `lagA` som vedlegg.

Da vi kjører koden med n lik 10 vil vi få denne matrisen:

$$\begin{bmatrix} 16 & -9 & 8/3 & -1/4 & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & & 1 & -4 & 6 \\ & & & & & & & & 16/17 & -60/17 & 72/17 & -28/17 \\ & & & & & & & & -12/17 & 96/17 & -156/17 & 72/17 \end{bmatrix}$$

2.3 Oppgave 3

Vi er nå klare til å finne forskyvningen av bjelken med kun egenmassen. For å finne løsningen y_c ved å bruke 10 intervaller løser vi ligningen:

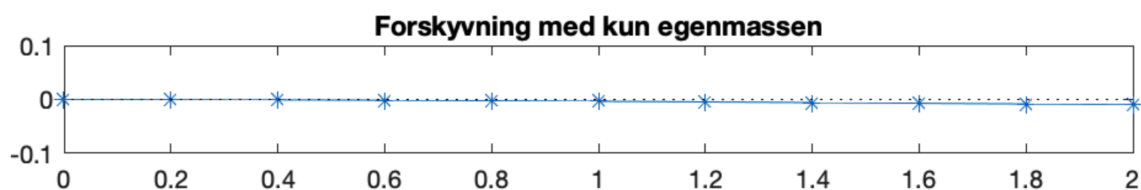
$$Ay = b \Rightarrow y = \frac{A}{b}$$

Fra oppgave 2 har vi MATLAB koden for å opprette A-matrisen, og med 10 intervaller bruker vi matrisen funnet i Oppgave 2 for A. Deretter finner vi b med formelen:

$$b = h^4 \frac{f}{EI} = \left(\frac{L}{n}\right)^4 \frac{f}{EI}$$

Ved å kjøre MATLAB koden $y = \frac{A}{b}$ får vi resultatet:

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.000180563057231 \\ -0.000674617055179 \\ -0.001416502700308 \\ -0.002348285321846 \\ -0.003419754871795 \\ -0.004588425924923 \\ -0.005819537678769 \\ -0.007086053953641 \\ -0.008368663192615 \\ -0.009655778461538 \end{bmatrix}$$



For fullstendig kode med resultater se vedlegg "Prosjekt.pdf".

2.4 Oppgave 4

2.4.1 Deloppgave a

Vi starter med å derivere ligningen 4 ganger og ser om fjerdederivert er lik Euler-Bernoulli-bjelke ligningen (3).

$$y(x) = \frac{f}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$$

$$y'(x) = \frac{f}{24EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 12L^2x)$$

$$y''(x) = \frac{f}{24EI}(12x^2 - 24Lx + 12L^2)$$

$$y'''(x) = \frac{f}{24EI}(24x - 24L)$$

$$y^{(4)}(x) = \frac{f}{EI}$$

Hvis vi sammenligner denne formelen med Euler-Bernoulli-bjelke ligningen (3) vil vi se at de tilsvarer det samme.

$$y^{(4)}(x) = \frac{f}{EI} \iff EIy^{(4)} = f(x)$$

2.4.2 Deloppgave b

Vi skal vise at den korrekte løsningen for $y^{(6)}(c) = 0$.

I deloppgave a) har vi vist at:

$$y^{(4)}(x) = \frac{f}{EI}$$

Da får vi den femtederiverte:

$$y^{(5)}(x) = 0$$

Vi ser her at femtederiverte er lik 0, da vil også sjettederiverte bli 0.

$$y^{(6)}(x) = 0$$

Det vil da si at for den sjettederiverte vil alle verdier av c , vil y være 0. Vi ser altså at den numeriske løsningen for den sjettederiverte vil være eksakt, ettersom både den eksakte og numeriske løsningen alltid vil være 0.

2.4.3 Deloppgave c

Vi skal finne y_c og de fjerdederiverte. For å finne y_c bruker vi formelen

$$y(x) = \frac{f}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$$

Ved å bruke x verdiene $[0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0]$ får vi matrisen

$$\begin{bmatrix} -0.000180563057231 \\ -0.000674617055179 \\ -0.001416502700308 \\ -0.002348285321846 \\ -0.003419754871795 \\ -0.004588425924923 \\ -0.005819537678769 \\ -0.007086053953641 \\ -0.008368663192615 \\ -0.009655778461538 \end{bmatrix}$$

Ved å bruke denne matrisen i formelen $\frac{1}{h^4} Ay_c$ får vi en ny matrise for den numeriske fjerdederiverte

$$\begin{bmatrix} -0.004827889230770 \\ -0.004827889230768 \\ -0.004827889230770 \\ -0.004827889230770 \\ -0.004827889230764 \\ -0.004827889230770 \\ -0.004827889230768 \\ -0.004827889230769 \\ -0.004827889230766 \\ -0.004827889230778 \end{bmatrix}$$

2.4.4 Deloppgave d

Foroverfeil:

$$\|r - x_a\|_{\infty} = 9.249545573908335e - 15$$

Relativ foroverfeil:

$$\frac{\|r - x_a\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = 1.915857040576069e - 12$$

med relativ bakoverfeil $\epsilon_{mach} = 2^{-52}$ er formelen for feilforstøringsfaktor:

$$\frac{\frac{\|x - x_a\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}}}{\epsilon_{mach}} = 8.628253054033525e + 03$$

For å finne kondisjonstallet bruker vi Matlab funksjonen `condst()`. Vi ser da at kondisjonstallet er lik 33254,37. Hvis vi sammenligner dette med feilforstøringsfaktoren som er 8628 ser vi at

$$33254/8628 = 3.85$$

Vi ser at kondisjontallet er 3.8 ganger større enn feilforstøringsfaktoren. Det vil si at vårt estimat er rimelig.

2.5 Oppgave 5

I denne oppgaven skulle vi repetere samme utregning som ble gjort i oppgave 3, altså finne ut hvor mye bjelken bøyer seg uten ekstra masse. Denne gangen er bjelken inndelt i intervallet $n = [20, 40, \dots, 20480]$. Deretter skulle vi lage en oversikt over feilen vi fikk når $x = L$

For å finne feilen brukte vi formelen fra oppgave 3 ($y = \frac{A}{b}$) for å estimere verdien og trekker fra den korrekte ligningen

$$y = \frac{f}{24EI}x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)$$

Ved å bruke matlab koden vist i vedlegg Prosjekt.mlx, får vi ut denne tabellen

n	Error	Conditional Number
20	1.3762×10^{-14}	5.3030×10^5
40	1.4733×10^{-13}	8.4493×10^6
80	6.6636×10^{-13}	1.3482×10^8
160	8.6100×10^{-12}	2.1539×10^9
320	1.7288×10^{-10}	3.4435×10^{10}
640	8.3195×10^{-10}	5.5073×10^{11}
1280	2.2285×10^{-8}	8.8099×10^{12}
2560	1.0388×10^{-7}	1.4094×10^{14}
5120	1.6656×10^{-6}	2.2549×10^{15}
10240	4.3695×10^{-5}	3.6072×10^{16}
20480	3.1851×10^{-5}	5.7702×10^{17}

Ut i fra resultatene ser vi at feilen er minst når $n = 20$, og at den bare fortsetter å øke jo mer n øker. Vi ser også at kondisjonstallet til matrisa A øker jo mer n øker. Siden kondisjonstallet øker indikerer dette at matrisa blir dårlig betinger (ill conditioned). Altså at matrisa blir mer sensitiv for endringer og feil. Jo større kondisjonstallet er jo mindre nøyaktighet får vi på grunn av avrundingsfeil. Dette er det som forårsaker at feilen stiger med n , siden kondisjonstallet også stiger med n .

2.6 Oppgave 6

I denne oppgaven skal vi legge en sinusformet belastning gitt ved

$$s(x) = -pg \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

på stupebrettet og se hvordan denne belastningen påvirker stupebrettet. Dette betyr at den sinusformede belastning blir lagt til belastningen av egenvekten til bjelken (f). Vi kommer også til å sammenligne vår numeriske løsning mot en eksakt løsning for å se nærmere på hvordan feilen endrer seg i den numeriske løsningen ved å dele bjelken i forskjellige antall med intervaller (n).

2.6.1 Deloppgave a

Vi blir gitt likningen

$$y(x) = \frac{f}{24EI}x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2) - \frac{pgL}{EI\pi}\left(\frac{L^3}{\pi^3}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) - \frac{x^3}{6} + \frac{Lx^2}{2} - \frac{L^2x}{\pi^2}\right) \quad (16)$$

som vi skal vise oppfyller betingelsene for en Euler–Bernoulli bjelke med den sinusformede belastningen. Altså ønsker vi å vise at (16) kan skrives om til:

$$EIy''''(x) = f + s(x) \Rightarrow EIy^{(4)}(x) = f - pg \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

samt at ligningen oppfyller randbetingelsene for en bjelke festet i den ene enden:

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$$

Vi vil vise dette ved å regne ut de deriverte av (16) og verifisere at alle betingelsene er møtt. For å gjøre dette gjør vi først likningen enklere å derivere ved å gange ut og finne fellesnevner. Det er viktig å nevne her at $f = dwt(-g) = 480wt(-g)$ og er en konstant over kraften fra egenmassen til bjelken.

$$y(x) = \frac{1}{24EI\pi}(fx^4\pi - 4fLx^3\pi + 6fL^2x^2\pi - 24pg\frac{L^4}{\pi^3}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 4pgLx^3 - 12pgL^2x^2 + 24pg\frac{L^3}{\pi^2}x)$$

Deriverer så dette uttrykket fire ganger:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{24EI\pi}(4fx^3\pi - 12fLx^2\pi + 12fL^2x\pi - 24pg\frac{L^3}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 12pgLx^2 - 24pgL^2x + 24pg\frac{L^3}{\pi^2}) \\ y''(x) &= \frac{1}{24EI\pi}(12fx^2\pi - 24fLx\pi + 12fL^2\pi + 24pg\frac{L^2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 24pgLx - 24pgL^2) \\ y'''(x) &= \frac{1}{24EI\pi}(24fx\pi - 24fL\pi + 24pgL\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 24pgL) \\ y^{(4)}(x) &= \frac{1}{24EI\pi}(24f\pi - 24pg\pi\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)) \\ &= \frac{24\pi(f - pg\sin(\frac{\pi}{L}x))}{24\pi EI} \\ &= \frac{f - pg\sin(\frac{\pi}{L}x)}{EI} \\ EIy^{(4)}(x) &= f - pg\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

Som er det vi ønsket å vise.

Verifiserer så at randbetingelsene er møtt:

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{f}{24EI} 0^2 (0^2 - 4L0 + 6L^2) - \frac{pgL}{EI\pi} \left(\frac{L^3}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi}{L} 0\right) - \frac{0^3}{6} + \frac{L \cdot 0^2}{2} - \frac{L^2 \cdot 0}{\pi^2} \right) \\ &= 0 - \frac{pgL}{EI\pi} (0 - 0 + 0 - 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= \frac{1}{24EI\pi} (4f \cdot 0^3 \pi - 12fL \cdot 0^2 \pi + 12fL^2 \cdot 0\pi - 24pg \frac{L^3}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{L} 0\right) + 12pgL \cdot 0^2 - 24pgL^2 \cdot 0 + 24pg \frac{L^3}{\pi^2}) \\ &= \frac{1}{24EI\pi} (0 - 0 + 0 - 24pg \frac{L^3}{\pi^2} + 0 - 0 + 24pg \frac{L^3}{\pi^2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(L) &= \frac{1}{24EI\pi} (12fL^2\pi - 24fL^2\pi + 12fL^2\pi + 24pg \frac{L^2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{L} L\right) + 24pgL^2 - 24pgL^2) \\ &= \frac{1}{24EI\pi} (24fL^2\pi - 24fL^2\pi + 0 + 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'''(L) &= \frac{1}{24EI\pi} (24fL\pi - 24fL\pi + 24pgL \cos\left(\frac{\pi}{L} L\right) + 24pgL) \\ &= \frac{1}{24EI\pi} (0 - 24pgL + 24pgL) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Som vi ser er alle randbetingelsene også oppfylt, og vi har dermed en eksakt løsning som vi kan sammenligne vår numeriske løsning med.

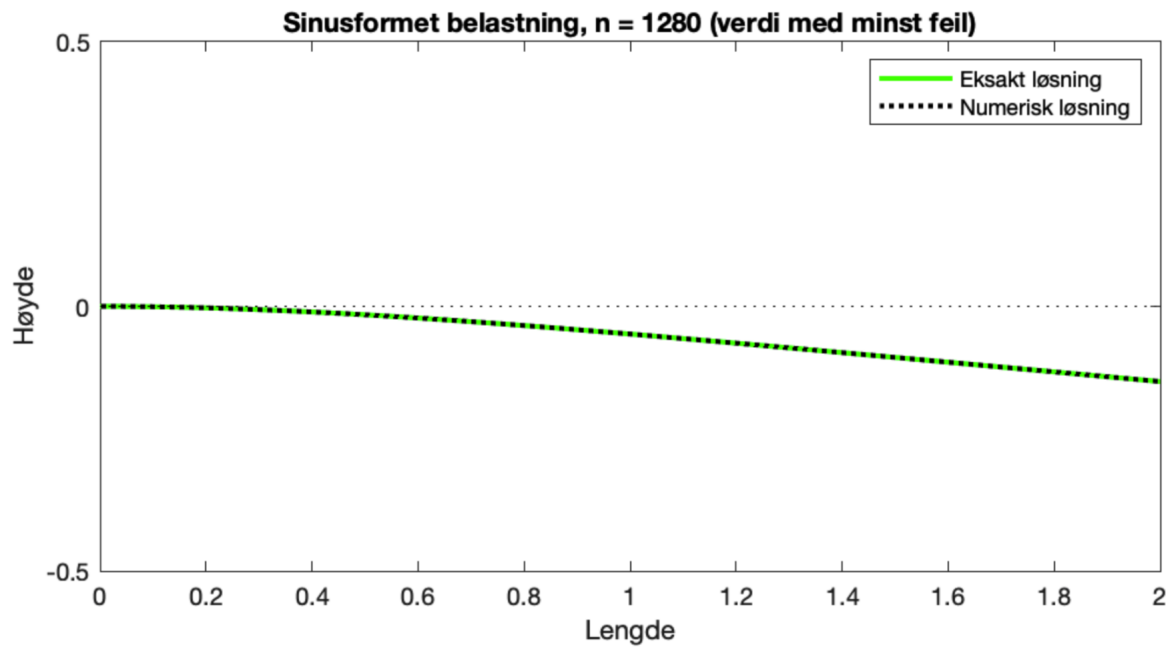
2.6.2 Deloppgave b

Resten av utregningene i denne oppgaven blir gjort i MATLAB, se vedlegg "Prosjekt.pdf" for fullstendig kode med resultater.

Ved kjøring av utregningen fra oppgave 5 med den sinusformede belastningen og $p = 100$ får vi:

n	Forskyvning ved enden av stupebrettet	Feil fra eksakt løsning
20	-0.1422967	5.3770×10^4
40	-0.1418945	1.3456×10^6
80	-0.1417929	3.3931×10^5
160	-0.1417675	8.4869×10^6
320	-0.1417612	2.1194×10^6
640	-0.1417596	5.4294×10^7
1280	-0.1417595	4.5913×10^7
2560	-0.1417576	1.4881×10^6
5120	-0.1417343	2.4717×10^5
10240	-0.1424090	6.4995×10^4
20480	-0.1423235	5.6448×10^4

Her sammenligner vi den numeriske løsningen med en eksakte løsningen (likningen bevist i a). Og vi ser at den minste feilen er ved $n = 1280$. Vi plotter så den numeriske løsningen mot den eksakte løsningen med denne n-verdien.

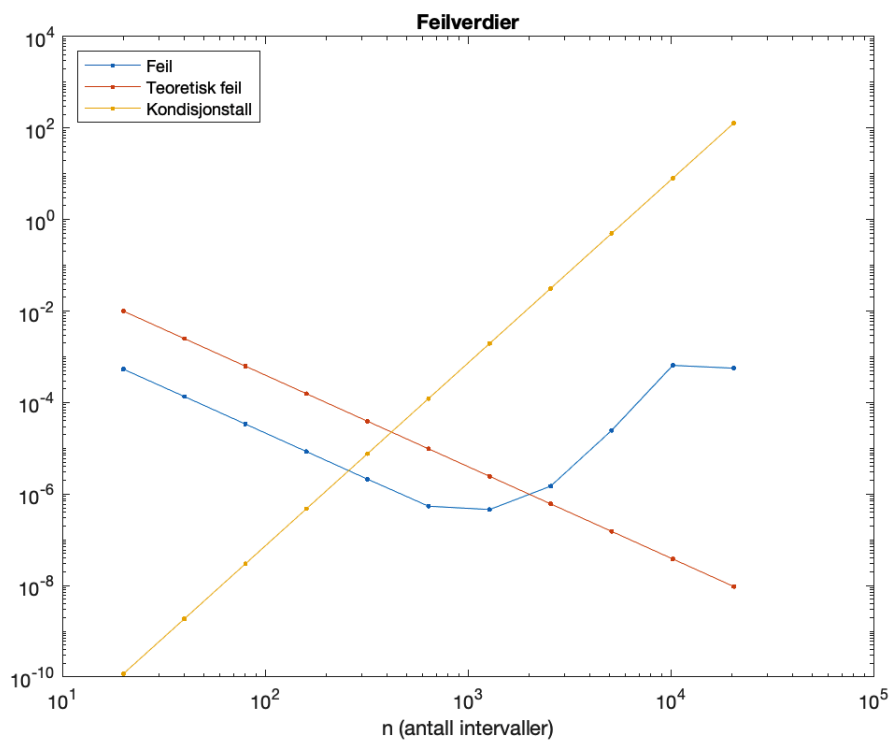


Vi ser at de to løsningene ligger svært tett opp mot hverandre, hvor vi ved kanten av stupebrettet ($x = 2$) har forskyvningene:

- eksakte løsning: -0.141759047 meter
- numerisk løsning: -0.141759506 meter

2.6.3 Deloppgave c og d

Vi skal nå se på utviklingen av feilen, og hvordan den utvikler seg med den teoretiske feilen og kondisjonstallet for den numeriske løsningen ved økende antall intervaller n .



Vi observerer som forventet at den teoretiske feilen minker for høyere n , mens kondisjonstallet øker. Mindre forventet er at den faktiske feilen for det første begynner lavere enn den teoretiske, og for det andre, at feilen etterhvert øker med større n . Her er det logisk å forventet at feilen skulle følge den teoretiske feilen nedover, ettersom flere intervaller burde bety mer nøyaktighet.

2.6.4 Deloppgave e

Resultatene vi observerer i forrige deloppgave kan forklares ved hjelp av kondisjonstallet til A . Som forklart i teoridelen vil et stort kondisjonstall fortelle oss at resultatene er svært sensitiv for små endringer i inputverdier.

I praksis betyr dette at usikkerheten i resultatene øker med kondisjonstallet, ettersom at en svært stor matrise vil inneholde mange flere avrundinger. Vi ser derfor i starten at den reelle feilen minker i takt med den teoretiske feilen fordi kondisjonstallet fortsatt er lavt. Etter at matrisen blir dårlige og dårligere kondisjonert (kondisjonstallet blir større), øker feilen igjen da summen av avrundingsfeilene blir store.

2.6.5 Deloppgave f

Som vist i deloppgave b) er det mest optimale antall intervaller $n = \mathbf{1280}$. Her har vi en feil fra den eksakte løsningen på kun $4.591316 \cdot 10^{-7} \approx \mathbf{0.46}$ mikrometer ved kanten av stupebrettet

2.7 Oppgave 7

I denne oppgaven skal vi finne ut hvor mye stupebrette bøyer seg med en person som veier 50kg og som har 30cm lange føtter plassert oppå brettet. Fra tidligere oppgaver vet vi at egenvekten til stupebrettet er lik funksjonen

$$f(x) = -g480wt \quad 0m \leq x \leq 2m$$

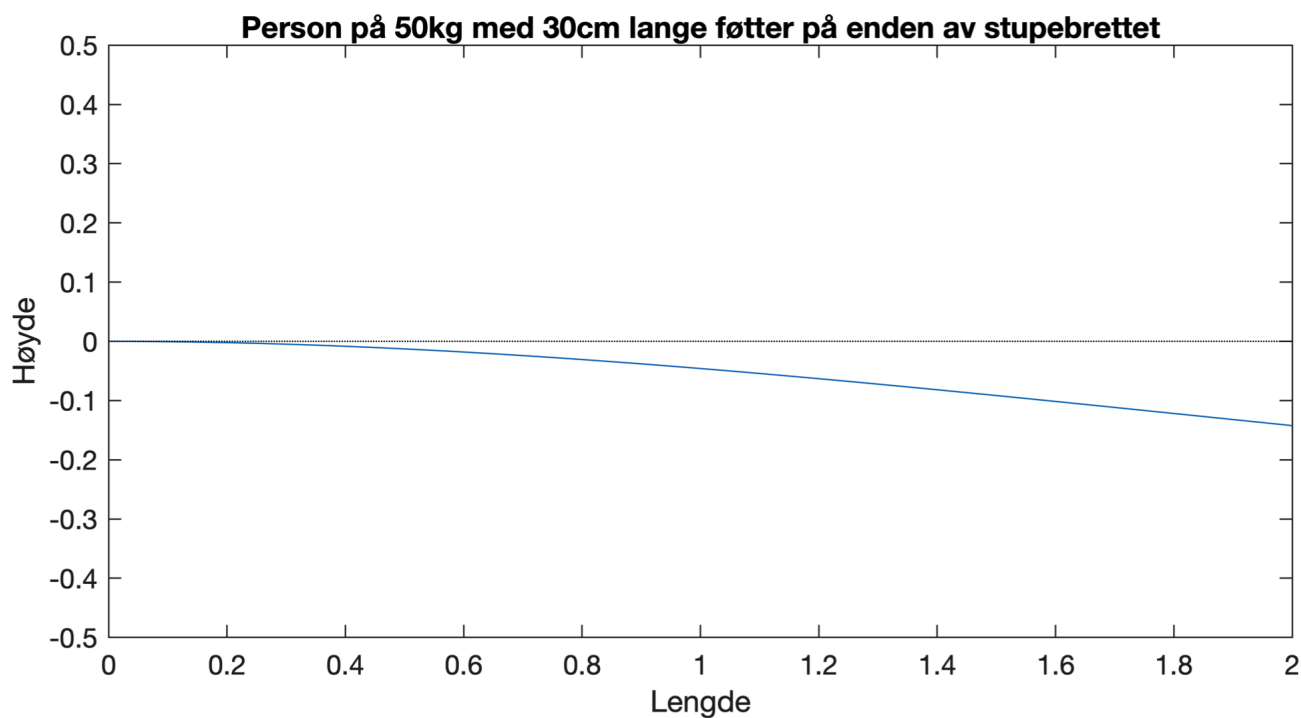
I oppgaven får vi et likningsett for vekta til en person på stupebrettet

$$s(x) = \begin{cases} 0Nm^{-1}, & 0m \leq x \leq 1.7m \\ -g \cdot \frac{50}{0.3}kgm^{-1}, & 1.7m \leq x \leq 2m \end{cases}$$

Til dette likningsettet må vi legge til egenvekten til stupebrettet, da får vi likningsettet $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} -g \cdot 480wt, & 0m \leq x \leq 1.7m \\ -g(480wt + \frac{50kg}{0.3m}), & 1.7m \leq x \leq 2m \end{cases}$$

Fra oppgave 6 vet vi at n-verdien med minst feil er $n = 1280$. Bruker matlab for å løse likningsettet (ved $y = \frac{A}{b}$) og får at stupebrettet bøyes ned $0.14231m$ eller $14,231cm$. Se kildekoden med løsning i vedlegget "Prosjekt.pdf"



3 Konklusjon

I dette prosjektet har vi undersøkt hvordan et stupebrett bøyes ved hjelp av Euler-Bernoulli bjelke-modellen. Det første som ble gjort var å bevise likning (3) og (6) som er brukt i Euler-Bernoulli ved bruk av Taylors formel og diskretisering. Dette stemte overens med praksis og teori, som forventet.

Da vi regner foroverfeil, relativ foroverfeil, og feilforstøringsfaktor ser vi at dette er ganske bra. Siden kondisjonstallet er større en feilforstøringsfaktoren, vil det si at vårt estimat er rimelig.

Disse formlene ble deretter brukt videre i senere oppgaver, noe som gjorde at vi fikk sett effekten diskretisering har for løsningene. I noen av oppgavene ser vi på hvordan diskretiseringen skaper feil som påvirker resultatet. Oppgave 5 viser at det oppstår en avrundingsfeil når vi bruker en diskretisert likning, og i oppgave 6 ser vi direkte hvordan feilen utvikler seg i forhold til den teoretiske feilen og kondisjonstallet til en matrise. Dette viser at antagelsen i innledningen om at diskretisering av likninger fører til feil stemmer i praksis. Videre har vi sett på hvorfor feilene oppstår, og fått vist ulempene med å utføre beregninger numerisk og digitalt.

Beregningene som ble gjort ble gjort i MATLAB, noe som gjorde at gruppen fikk en bedre forståelse for hvordan MATLAB kan brukes i en akademisk sammenheng. Dette er også et av de første prosjektene gruppa har hatt i matematikk, noe som lærte oss om gruppedynamikk og samarbeid for å løse matematiske problem. Vi lærte også \LaTeX , vi prøvde først å skrive rapporten i google docs. Dette førte fort til problemer når man skulle skrive inn mer avanserte matematiske uttrykk som matriser, derfor byttet vi til \LaTeX .

Videre kunne vi undersøkt hvordan Euler-Bernoulli bjelke-modellen er sammenlignet med både Timoshenko bjelke-modellen [7] og den generaliserte bjelke-modellen [8]. I tillegg hadde det vært interessant å sammenlikne beregningene gjort med et forsøk i virkeligheten. Dette ville vist hvilke av modellene som stemmer best med den virkelige verden.

Referanser

- [1] Sauer, T. 2012. *Numerical Analysis (2. utg.)*. USA: Pearson Education Limited.
- [2] "Condition number". Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Condition_number. (lest 2020, 13.april).
- [3] "Discretization". Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Discretization>. (lest 2020, 13.april).
- [4] "Area Moment of Inertia". WolframMathWorld. <https://mathworld.wolfram.com/AreaMomentofInertia.html>. (lest 2020, 15.April).
- [5] "Big O Notation". Brilliant. <https://brilliant.org/wiki/big-o-notation/>. (lest 2020, 15.April).
- [6] "Complexity and Big-O Notation". Univeristy of Winconsin-Madison. <http://pages.cs.wisc.edu/~paton/readings/Complexity/#bigO>. (lest 2020, 15.April).
- [7] "Timoshenko Beam Theory". Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Timoshenko_beam_theory. (lest 2020, 14.April).
- [8] "Generalised Beam Theory". Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Generalised_beam_theory. (lest 2020, 14.April).

Vedlegg

Navn	Beskrivelse
lagA.m	Matlab funksjonen for å lage A matrisen fra figur 2.34
Prosjekt.mlx	Matlab livescript i som inneholder alle oppgavene og resultat
Prosjekt.pdf	Matlab livescript i PDF form som inneholder alle oppgavene og resultat