Matemáticas Actuariales del Seguro de Personas II

Jorge Luis Reyes García

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

jorgeluis.reyes@ciencias.unam.mx

Diciembre 2021

Prólogo

Este trabajo ha sido el resultado de un esfuerzo constante por más 10 años en mi labor como docente impartiendo las materias de Matemáticas Actuariales del Seguro de Personas I y II.
El objetivo de las notas es facilitar la comprensión y entendimiento de las matemáticas actuariales aplicadas los seguros de vida bajo tres enfoques:

- Clásico: a partir de tablas de mortalidad y valores conmutados.
- Probabilístico: Considerando variables aleatorias discretas y continuas.
- Estocástico: a partir de cadenas de Markov en tiempo discreto y tiempo continúo.

En cada capítulo encontrarán explicaciones, demostraciones y aplicaciones.

Contenido

Estatus de último sobreviviente

Es la combinación de un conjunto de personas y se define que el estatus se mantiene vigente hasta la última muerte del grupo de personas. Es decir, el estatus se rompe cuando muera la última persona.

Definición: El tiempo futro de vida del estatus de ultimo sobreviviente $(\overline{xy})$, se define como:

$$T_{(\overline{xy})} = T_{\overline{xy}} = max(T_x, T_y)$$

En general para un conjunto de m vidas.

$$T_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = max(T_{x_1} T_{x_2} \ldots T_{x_m})$$

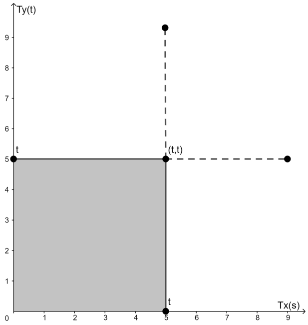
Estatus de último sobreviviente

El tiempo futuro de vida del estatus del último sobreviviente puede interpretarse como estadístico de orden máximo.

Nuevamente, si T_x y T_y tienen función de densidad conjunta $f_{T_x T_y}(s,t)$, nos interesa conocer del estatus de último sobreviviente su densidad, distribución de sobrevivencia y fuerza de mortalidad.

Estatus de último sobreviviente

Para función de densidad, tenemos:



$$f_{T_{\overline{xy}}}(t) = \int_0^t f_{TxTy}(t, v)dv + \int_0^t f_{TxTy}(u, t)du$$

Estatus de último sobreviviente

Supongamos que T_x y T_y son independientes:

$$\begin{aligned} f_{T_{\overline{xy}}}(t) &= \int_0^t f_{Tx}(t) f_{Ty}(v)dv + \int_0^t f_{Tx}(u) f_{Ty}(t)du \\ &= f_{Tx}(t)\int_0^t f_{Ty}(v)dv + f_{Ty}(t)\int_0^t f_{Tx}(u)du \\ &= f_{Tx}(t)F_{Ty}(t) + f_{Ty}(t)F_{Tx}(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f_{T_{\overline{xy}}}(t) = f_{Tx}(t)F_{Ty}(t) + f_{Ty}(t)F_{Tx}(t)$$

En notación actuarial, tenemos:

$$f_{T_{\overline{xy}}}(t) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot {}_tq_y + {}_tp_y \cdot \mu_{y+t} \cdot {}_tq_x$$

Estatus de último sobreviviente

Además, simplificando tenemos:

$$
\begin{aligned}
f_{T_{\overline{xy}}}(t) &= {}_tp_x\mu_{x+t}(1 - {}_tp_y) + {}_tp_y\mu_{y+t}(1 - {}_tp_x) \\
&= {}_tp_x\mu_{x+t} + {}_tp_y\mu_{y+t} - {}_tp_x\,{}_tp_y\mu_{x+t} - {}_tp_x\,{}_tp_y\mu_{y+t} \\
&= {}_tp_x\mu_{x+t} + {}_tp_y\mu_{y+t} - {}_tp_x\,{}_tp_y(\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \\
&= {}_tp_x\mu_{x+t} + {}_tp_y\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\mu_{x+t:y+t}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

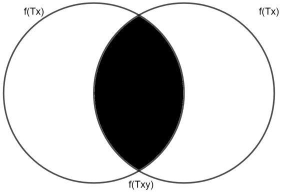
$$
\begin{aligned}
f_{T_{\overline{xy}}}(t) &= {}_tp_x\mu_{x+t} + {}_tp_y\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\mu_{x+t:y+t} \\
&= f_{T_x}(t) + f_{T_y}(t) - f_{T_{xy}}(t)
\end{aligned}
$$

Estatus de último sobreviviente

Relación de equivalencia:

$$f_{T_{\overline{xy}}}(t) = f_{T_x}(t) + f_{T_y}(t) - f_{T_{xy}}(t)$$

$$T_{(\overline{xy})} = T_x + T_y - T_{xy}$$



Estatus de último sobreviviente

Para la función de distribución tenemos:

$$F_{T_{\overline{xy}}}(t) = F_{T_xT_y}(t,t) = \mathbb{P}(T_x < t, T_y < t) = \int_0^t \int_0^t f_{T_xT_y}(u,v)dudv$$

Estatus de último sobreviviente

Supongamos que T_x y T_y son independientes:

$$\begin{aligned} F_{T_{\overline{xy}}}(t) &= \int_0^t \int_0^t f_{T_x}(u) f_{T_y}(v) du dv = \int_0^t f_{T_y}(v) \int_0^t f_{T_x}(u) du dv \\ &= \int_0^t f_{T_y}(v) F_{T_x}(t) dv = F_{T_x}(t) \int_0^t f_{T_y}(v) dv \\ &= F_{T_x}(t)\ F_{T_y}(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$F_{T_{\overline{xy}}}(t) = F_{T_x}(t)\ F_{T_y}(t)$$

En notación actuarial,

$$F_{T_{\overline{xy}}}(t) = {}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x\, {}_tq_y$$

Estatus de último sobreviviente

Otra forma de encontrar la función de densidad del estatus de último sobreviviente es derivar la función de distribución.

$$
\begin{aligned}
f_{T_{\overline{xy}}}(t) &= \frac{d}{dt} F_{T_{\overline{xy}}}(t) = \frac{d}{dt}\ {}_tq_{\overline{xy}} \\
&= \frac{d}{dt}\ {}_tq_x\,{}_tq_y = (\frac{d}{dt}\ {}_tq_x)({}_tq_y) + ({}_tq_x)(\frac{d}{dt}\ {}_tq_y) \\
&= {}_t\ p_x\ \mu_{x+t}\ {}_tq_y + {}_tp_y\ \mu_{y+t}\ {}_tq_x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
f_{T_{\overline{xy}}}(t) = {}_tp_x\mu_{x+t}\,{}_tq_y + {}_tp_y\mu_{y+t}\,{}_tq_x
$$

Estatus de último sobreviviente

Para la funcion de sobrevivencia, tenemos:

$$S_{T_{\overline{xy}}(t)} = 1 - F_{T_{\overline{xy}}(t)}$$

Supongamos que T_x y T_y son independientes.

$$S_{T_{\overline{xy}}(t)} = 1 - F_{T_{x}(t)} F_{T_{x}(t)}$$

En notacion actuarial, tenemos:

$$\begin{aligned} S_{T_{\overline{xy}}(t)} &= {}_t\, p_{\overline{xy}} = 1 - {}_t\, q_{\overline{xy}} = 1 - {}_t\, q_x\, {}_t q_y \\ &= 1 - (1 - {}_t\, p_x)(1 - {}_t\, p_y) = 1 - (1 - {}_t\, p_x - {}_t\, p_y + {}_t\, p_x\, {}_t p_y) \\ &= {}_t\, p_x + {}_t\, p_y - {}_t\, p_{xy} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$${}_t p_{\overline{xy}} = {}_t\, p_x + {}_t\, p_y - {}_t\, p_{xy}$$

Finalmente, podemos calcular su funcion de mortalidad

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \mu_{\overline{x+t:y+t}} = \frac{-d}{dt} ln({}_tp_{\overline{xy}}) = \frac{f_{T_{\overline{xy}}}(t)}{{}_tp_{T_{\overline{xy}}}}$$
$$= \frac{{}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot_t q_y +_t p_y \cdot \mu_{y+t} \cdot_t q_x}{{}_tp_x +_t p_y -_t p_{xy}}$$
$$= \frac{{}_tp_x \cdot \mu_{x+t} +_t p_y \cdot \mu_{y+t} +_t p_{xy} \cdot \mu_{x+t:y+t}}{{}_tp_x +_t p_y -_t p_{xy}}$$

Por lo tanto,

$$\mu_{\overline{x+t:y+t}} = \frac{{}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot_t q_y +_t p_y \cdot \mu_{y+t} \cdot_t q_x}{{}_tp_x +_t p_y -_t p_{xy}}$$

.

Estatus de último sobreviviente

En conclusion, siempre y cuando T_x y T_y sean independientes:

- $f_{T_{\overline{xy}}(t)} = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot_t q_y +_t p_y \cdot \mu_{y+t} \cdot_t q_x$
- ${}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x \; {}_tq_y$
- ${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y$ - ${}_tp_{xy}$
- $\mu_{\overline{x+t:y+t}} = \dfrac{{}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot_t q_y +_t p_y \cdot \mu_{y+t} \cdot_t q_x}{{}_tp_x +_t p_y -_t p_{xy}}.$

Resultados importantes:

${}_{t|u}q_{\overline{xy}} = {}_tp_{\overline{xy}}$ - ${}_{t+u}p_{\overline{xy}}$

Nota: Las siguientes igualdades no son ciertas:

${}_{t+u}p_{\overline{xy}} \neq {}_tp_{\overline{xy}} \; {}_up_{\overline{x+t:y+t}}$

${}_{t+u}q_{\overline{xy}} \neq {}_tp_{\overline{xy}} \; {}_uq_{\overline{x+t:y+t}}$

Estatus de último sobreviviente

Ahora nos interesa conocer las caracteristicas de la variable aleatoria $T_{\overline{xy}}$ como son: esperanza, varianza y desviacion estandar.

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \mathrm{E}(T_{\overline{xy}}) = \int_0^\infty {}_tp_{\overline{xy}} dt = \int_0^\infty {}_tp_x +_t p_y -_t p_{xy} \; dt = \int_0^\infty {}_tp_x \; dt + \int_0^\infty {}_tp_y \; dt - \int_0^\infty {}_tp_{xy} \; dt$$
$$= \mathring{e}_x + \mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy}$$

Otra forma de ver este resultado es:

$$\mathrm{E}(T_{\overline{xy}}) = \mathrm{E}(T_x + T_y - T_{xy}) = \mathrm{E}(T_x) + \mathrm{E}(T_y) - \mathrm{E}(T_{xy}) = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy}$$

Por lo tanto[1] :

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy}$$

[1] El inifito de la integral va hasta $min(w - x, w - y)$

Estatus de último sobreviviente

Para el segundo momento, tenemos:

$$
\begin{aligned}
{}^2\mathring{e}_{\overline{xy}} = \mathrm{E}(T_{\overline{xy}}^2) &= \int_0^\infty 2t\,{}_tp_{\overline{xy}}dt = \int_0^\infty 2t({}_tp_x +_t p_y -_t p_{xy})\ dt \\
&= \int_0^\infty 2t\,{}_tp_x\ dt + \int_0^\infty 2t\,{}_tp_y\ dt - \int_0^\infty 2t\,{}_tp_{xy}\ dt =^2 \mathring{e}_x +^2 \mathring{e}_y -^2 \mathring{e}_{xy}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
{}^2\mathring{e}_{\overline{xy}} =^2 \mathring{e}_x +^2 \mathring{e}_y -^2 \mathring{e}_{xy}
$$

Finalmente, para la varianza tenemos:

- $\mathrm{Var}(T_{\overline{xy}}) = {}^2\mathring{e}_{\overline{xy}}$ - $(\mathring{e}_{\overline{xy}})^2$
- $\sigma_{T_{\overline{xy}}} = \sqrt{{}^2\mathring{e}_{\overline{xy}} - \mathring{e}_{\overline{xy}}^2}$

Estatus de último sobreviviente

Para la esperanza temporal n años, tenemos:

- $\mathring{e}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \mathrm{E}(min(n, T_{\overline{xy}})) = \int_0^n {}_tp_{\overline{xy}}dt = \mathring{e}_{x:\overline{n}|} + \mathring{e}_{y:\overline{n}|}$ - $\mathring{e}_{xy:\overline{n}|}$
- ${}^2\mathring{e}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \mathrm{E}(min(n, T_{\overline{xy}})^2) = \int_0^n (2t)_tp_{\overline{xy}}dt = {}^2\mathring{e}_{x:\overline{n}|} + {}^2\mathring{e}_{y:\overline{n}|}$ - ${}^2\mathring{e}_{xy:\overline{n}|}$
- $\mathrm{Var}(\min(T_{\overline{xy}}, n)^2) = {}^2\mathring{e}_{\overline{xy}:\overline{n}|} - (\mathring{e}_{\overline{xy}:\overline{n}|})^2$
- $\sigma_{min(T_{\overline{xy}},n)} = \sqrt{{}^2\mathring{e}_{\overline{xy}:\overline{n}|} - (\mathring{e}_{\overline{xy}:\overline{n}|})^2}$

Estatus de último sobreviviente

Para la esperanza truncada, tenemos:

- $e_{\overline{xy}} = \mathrm{E}(K_{\overline{xy}}) = \sum_{k=1}^{\infty = max(w-x,w-y)} {}_kp_{\overline{xy}} = e_x + e_y - e_{xy}$
- ${}^2e_{\overline{xy}} = \mathrm{E}(K_{\overline{xy}}^2) = \sum_{k=1}^{\infty = max(w-x,w-y)} (2k-1)_kp_{\overline{xy}} = {}^2e_x + {}^2e_y - {}^2e_{xy}$
- $Var(K_{\overline{xy}}) = {}^2e_{\overline{xy}} - e_{\overline{xy}}^2$
- $\sigma_{K_{\overline{xy}}} = \sqrt{{}^2e_{\overline{xy}} - e_{\overline{xy}}^2}$

Estatus de último sobreviviente

Para la esperanza truncada, temporal n años, tenemos:

- $e_{\overline{xy}:\overline{n}|} = E[min[K_{\overline{xy}}, n]] = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_{\overline{xy}} = e_{x:\overline{n}|} + e_{y:\overline{n}|} - e_{xy:\overline{n}|}$
- ${}^2e_{\overline{xy}:\overline{n}|} = E[min[K_{\overline{xy}}, n]^2] = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\,{}_kp_{\overline{xy}} = {}^2e_{x:\overline{n}|} + {}^2e_{y:\overline{n}|} - {}^2e_{xy:\overline{n}|}$
- $Var[min[K_{\overline{xy}}, n]] = {}^2e_{\overline{xy}:\overline{n}|} - [e_{\overline{xy}:\overline{n}|}]^2$
- $\sigma_{min(K_{\overline{xy}},n)} = \sqrt{{}^2e_{\overline{xy}:\overline{n}|} - [e_{\overline{xy}:\overline{n}|}]^2}$

Contenido

Bibliografia

- Título: Models for Quantifying Risk. Autor: Stephen Camilli
- Título: Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks. Autor: David Dickson
- Título: Actuarial Mathematics. Autor: Newton Bowers
- Título: Basic Life Insurance Mathematics Autor: Ragnar Norberg
- Título: Actuarial Mathematics and Life-Table Statistics Autor: Eric Slud
- Título: Life Contingencies Autor: Chester Wallace Jordan
- Título: Matemáticas Actuariales y Operaciones de Seguros Autor: Sandoya

Matemáticas Actuariales del Seguro de Personas II

Jorge Luis Reyes García

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

jorgeluis.reyes@ciencias.unam.mx

Diciembre 2021