

Matemáticas Actuariales del Seguro de Personas II

Jorge Luis Reyes García

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

jorgeluis.reyes@ciencias.unam.mx

Noviembre 2021

Este trabajo ha sido el resultado de un esfuerzo constante por más 10 años en mi labor como docente impartiendo las materias de Matemáticas Actuariales del Seguro de Personas I y II.

El objetivo de las notas es facilitar la comprensión y entendimiento de las matemáticas actuariales aplicadas los seguros de vida bajo tres enfoques:

- Clásico: a partir de tablas de mortalidad y valores conmutados.
- Probabilístico: Considerando variables aleatorias discretas y continuas.
- Estocástico: a partir de cadenas de Markov en tiempo discreto y tiempo continuo.

En cada capítulo encontrarán explicaciones, demostraciones y aplicaciones.

Contenido

1 Vidas Múltiples

Función de densidad conjunta

Ejemplo: Supongamos que dos vidas (x) y (y) , con tiempos de vida T_x y T_y , son independientes e idénticamente distribuidas

$$f_{T_x}(t) = 0.02(10 - t) \quad 0 < t < 10$$

Calcular $F_{T_x}(t)$, $S_{T_x}(t)$, μ_{x+t} , $f_{T_x T_y}(s, t)$, $F_{T_x T_y}(s, t)$ y $S_{T_x T_y}(s, t)$

Función de densidad conjunta

Solución:

De forma marginal, para T_x tenemos:

$$\begin{aligned} F_{T_x}(t) &= \int_0^t f_{T_x}(s) ds = \int_0^t 0.02(10 - s) ds \\ &= 0.02 \left[\frac{-(10 - s)^2}{2} \right]_0^t = \frac{0.02}{2} [-(10 - t)^2 + 10^2] \\ &= 0.01 [10^2 - (10 - t)^2] = 0.01 [10^2 - (10^2 - 20t + t^2)] \\ &= 0.2t - 0.01t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{T_x}(t) &= 1 - F_{T_x}(t) = 1 - (0.2t - 0.01t^2) \\ &= 1 - 0.2t + 0.01t^2 = 0.01(10 - t)^2 \end{aligned}$$

Función de densidad conjunta

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln(S_{T_x}(t)) = \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)} = \frac{0.02(10-t)}{0.01(10-t)^2} = \frac{2}{10-t}$$

Por lo tanto,

- $f_{T_x}(t) = 0.02(10-t)$
- $F_{T_x}(t) = 0.2t - 0.01t^2$
- $S_{T_x}(t) = 0.01(10-t)^2$
- $\mu_{x+t} = \frac{2}{10-t}$

Las funciones son las mismas para (y), ya que son idénticamente distribuidas.

Función de densidad conjunta

Para las funciones conjuntas, tenemos:

$$\begin{aligned}f_{T_x T_y}(s, t) &= f_{T_x}(s) f_{T_y}(t) \\&= [0.02(10 - s)] [0.02(10 - t)] \\&= 0.02^2(10 - s)(10 - t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{T_x T_y}(s, t) &= F_{T_x}(s) F_{T_y}(t) \\&= (0.2s - 0.01s^2) (0.2t - 0.01t^2) \\&= 0.2^2 (s - 0.05s^2) (t - 0.05t^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{T_x T_y}(s, t) &= S_{T_x}(s) S_{T_y}(t) \\&= [0.01(10 - s)^2] [0.01(10 - t)^2] \\&= (0.01)^2 (10 - s)^2 (10 - t)^2\end{aligned}$$

Función de densidad conjunta

Por lo tanto,

$$f_{T_x T_y}(s, t) = \begin{cases} (0.02)^2(10 - s)(10 - t) & \text{si } 0 < s, t < 10 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$F_{T_x T_y}(s, t) = \begin{cases} (0.2)^2(s - 0.05s^2)(t - 0.05t^2) & \text{si } 0 < s < 10, 0 < t < 10 \\ F_{T_x}(s) = 0.2s - 0.01s^2 & \text{si } 0 < s < 10, t > 0 \\ F_{T_y}(t) = 0.2t - 0.01t^2 & \text{si } s > 10, 0 < t < 10 \\ 1 & \text{si } s > 10, t > 10 \end{cases}$$

$$S_{T_x T_y}(s, t) = \begin{cases} (0.01)^2(10 - s)^2(10 - t)^2 & \text{si } 0 < s < 10, 0 < t < 10 \\ S_{T_x}(s) = (0.1)(10 - s)^2 & \text{si } 0 < s < 10, t > 0 \\ S_{T_y}(t) = (0.1)(10 - t)^2 & \text{si } s > 10, 0 < t < 10 \\ 0 & \text{si } s > 10, t > 10 \end{cases}$$

Contenido

1 Vidas Múltiples

- Título: Models for Quantifying Risk. Autor: Stephen Camilli
- Título: Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks. Autor: David Dickson
- Título: Actuarial Mathematics. Autor: Newton Bowers
- Título: Basic Life Insurance Mathematics Autor: Ragnar Norberg
- Título: Actuarial Mathematics and Life-Table Statistics Autor: Eric Slud
- Título: Life Contingencies Autor: Chester Wallace Jordan
- Título: Matemáticas Actuariales y Operaciones de Seguros Autor: Sandoya

Matemáticas Actuariales del Seguro de Personas II

Jorge Luis Reyes García

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

jorgeluis.reyes@ciencias.unam.mx

Noviembre 2021