

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Facultad de Ciencias

Grado de Física

Trabajo Fin de Grado

Criticidad auto-organizada: estudio del modelo de pilas de arena

Código del TFG: **FS23-31-FSC**

Tipo de TFG: **Trabajo teórico-práctico general**

Autor: Juan Luis Salas Montoro



21 de abril de 2025

Agradecimientos

Quisiera comenzar expresando mi más sincero agradecimiento a todas las personas que me he cruzado en la Universidad, ya que todas me han enseñado algo. En especial a mis compañeros y profesores.

Me gustaría también mencionar, de forma especialmente afectuosa, a mi gran amigo y compañero Martín, que durante los últimos cuatro años siempre ha estado a mi lado, además de Fran y Dani, que este último curso se han convertido en personas fundamentales para mí.

Además, agradezco a Jorge Hidalgo Aguilera por ser mi tutor en la ejecución y redacción de este trabajo. Sin su ayuda, todo lo aquí mostrado habría sido, con total seguridad, mucho más deficiente. Gracias Jorge, no solo por acompañarme en este último paso, sino también por enseñarme toda esta física, nueva para mí, que me ha parecido fascinante.

También me gustaría agradecer a mi familia y amigos por darme siempre su apoyo, durante la realización de este trabajo y a lo largo de toda mi trayectoria académica.

Por último, me gustaría agradecer a mi profesor de matemáticas del instituto, Dr. Don Juan Castilla Ayllón, por despertar en mí la curiosidad y el interés en la física y las matemáticas. Sin sus ánimos, explicaciones y, sobre todo, sin esas charlas tan enriquecedoras, probablemente nunca habría llegado hasta aquí. Gracias maestro por hacerme ver la belleza detrás de cada ecuación y por lograr que me pregunte cosas.

Índice general

Índice general	3
Índice de figuras	5
Resumen. Palabras clave	6
Abstract. Keywords	7
1. Introducción	8
1.1. Escalas “heavy-tailed” en la naturaleza	8
1.1.1. Conexión con la criticidad	10
1.1.2. Ejemplos	11
2. Objetivos	14
3. Materiales y métodos	15
3.1. Métodos Montecarlo	15
3.1.1. Generación de números pseudoaleatorios	15
3.2. Entorno de programación	16
3.2.1. Python y VS code	16
3.2.2. Fortran	16
4. Modelo de las pilas de arena	17
4.1. Modelo matemático escogido	18
4.1.1. Reglas de toppling	18
4.1.2. Condiciones de contorno	19
5. Resultados I: Fronteras abiertas	21
5.1. Distribuciones estadísticas	21
5.2. Escalado de tamaño finito ("finite size scaling", F.S.S.)	23
5.2.1. Exponentes obtenidos	23
5.2.2. Colapsos	26
5.2.3. Correlación de exponentes en F.S.S.	28
5.3. Otros casos de interés	29
5.3.1. Distribuciones de área	29
5.3.2. Distintas reglas de toppling	31
6. Resultados II: Fronteras cerradas	33
6.1. Mecanismo de SOC	33
6.1.1. Transición de fase de 2 ^o orden	33
6.1.2. Procesos de carga y descarga	36

6.2. Aplicación en sistemas naturales	37
6.2.1. Sistemas geológicos	37
6.2.2. Redes neuronales	37
6.2.3. Comportamientos colectivos	38
Conclusiones	39
Conclusions	40
Bibliografía	41
Anexo: Demostración de exponente de correlación	43

Índice de figuras

1.1.	Comparación de la forma funcional de algunas distribuciones del tipo “Heavy-tailed”: Pareto ($\beta = 1.5$), Log-normal ($\mu = 1, \sigma = 3$) y Log-Cauchy ($\mu = 80, \sigma = 5$).	9
1.2.	Estados del sistema y estadísticas medidas en el modelo de Ising para distintos valores de temperatura, [24].	10
1.3.	Distribución acumulativa complementaria de magnitudes de terremotos en Taiwán, [13].	11
1.4.	Función de distribución para erupciones solares, [14].	12
1.5.	Distribuciones de tamaños de avalanchas neuronales, bajo distintas condiciones, [15]. Arriba, escala doble logarítmica. Abajo, escala lineal.	13
4.1.	Ilustración intuitiva del modelo de la pila de arena, créditos a Dctolosav [3].	17
4.2.	Ilustración del proceso de toppling, en el caso de umbral = 4 y distribución de arena en patrón de cruz.	19
4.3.	Comportamiento de distintas condiciones de contorno, en la esquina superior derecha de una rejilla 4×4 , en el caso de umbral = 4 y distribución de arena en patrón de cruz.	20
5.1.	Distribuciones de tamaños de avalancha para rejillas cuadradas de lado L .	22
5.2.	Distribuciones de duraciones de avalancha para rejillas cuadradas de lado L .	22
5.3.	Ajuste para estimar el exponente de tamaños τ_s .	24
5.4.	Ajuste para estimar el exponente de duraciones τ_t .	24
5.5.	Ajuste para estimar el exponente de tamaños D_s .	25
5.6.	Ajuste para estimar el exponente de duraciones D_t .	25
5.7.	Colapso de los datos de tamaños de avalancha bajo la premisa de F.S.S.	27
5.8.	Colapso de los datos de duraciones de avalancha bajo la premisa de F.S.S.	27
5.9.	Gráfico de dispersión de tamaños frente a duraciones para distintos valores de L . Línea de tendencia esperada según expresión 5.7.	28
5.10.	Distribuciones de áreas de avalancha para rejillas cuadradas de lado L .	29
5.11.	Ajuste para estimar el exponente de áreas τ_a .	30
5.12.	Ajuste para estimar el exponente de áreas D_a .	31
5.13.	Distribuciones de tamaños de avalancha para rejillas cuadradas de lado L , caso umbral = 8, ordenado.	32
5.14.	Distribuciones de tamaños de avalancha para rejillas cuadradas de lado L , caso umbral = 8, aleatorio.	32
6.1.	Actividad medida en cada frame, simulación precargada con fronteras cerradas, $L = 32$ y umbral = 12.	34

6.2.	Transición de fase, simulación precargada con fronteras cerradas, $L = 32$ y umbral = 12.	35
6.3.	Mecanismo de S.O.C. en el modelo, procesos simultáneos de carga y descarga.	36
6.4.	Estados de sistemas de neuronas a lo largo del tiempo, arriba zona super-crítica, abajo zona subcrítica, [19].	37

Resumen

Este trabajo se enfoca en el modelo de las pilas de arena, un paradigma clásico para estudiar la criticidad auto-organizada (S.O.C.) en sistemas complejos. El modelo de pilas de arena ilustra cómo un sistema puede auto-organizarse hasta alcanzar un estado crítico sin necesidad de parámetros de ajuste finos, mostrando distribuciones “heavy-tailed” en la duración y magnitud de las avalanchas encontradas. El análisis teórico-práctico abarca la dinámica y las propiedades estadísticas del modelo, con énfasis en las distribuciones de probabilidad de tipo ley de potencias, que describen los eventos extremos observados. Utilizando simulaciones computacionales en Fortran, se implementan y analizan diversas configuraciones del modelo, evaluando cómo las distribuciones heavy-tailed emergen de la dinámica interna del sistema. Los resultados destacan la robustez de estos fenómenos y su relevancia para entender comportamientos críticos en sistemas físicos y biológicos. Además, se discuten las aplicaciones prácticas del modelo de las pilas de arena en la comprensión de eventos extremos como terremotos y erupciones solares, o diversos sistemas biológicos como las avalanchas neuronales o el comportamiento colectivo en animales. Este trabajo proporciona una perspectiva integral y multidisciplinaria sobre el rol de la criticidad auto-organizada en la naturaleza y la investigación científica contemporánea.

Palabras clave: criticidad auto-organizada; modelo de las pilas de arena; distribuciones “heavy-tailed”; simulación computacional

Abstract

This work focuses on the sandpile model, a classic paradigm for studying self-organized criticality (S.O.C.) in complex systems. The sandpile model illustrates how a system can self-organize to reach a critical state without the need for fine-tuned parameters, showing heavy-tailed distributions in the duration and magnitude of avalanches encountered. The theoretical-practical analysis covers the dynamics and statistical properties of the model, emphasizing power-law probability distributions that describe observed extreme events. Using Fortran computational simulations, various configurations of the model are implemented and analyzed to evaluate how heavy-tailed distributions emerge from the internal dynamics of the system. The results highlight the robustness of these phenomena and their relevance for understanding critical behaviors in physical and biological systems. Furthermore, practical applications of the sandpile model are discussed in the context of extreme events such as earthquakes and solar eruptions, as well as in biological systems like neuronal avalanches or collective behavior in animals. This work provides a comprehensive, multidisciplinary perspective on the role of self-organized criticality in nature and contemporary scientific research.

Keywords: self-organized criticality; sandpile model; heavy-tailed distributions; computational simulation

Introducción

De forma habitual, al estudiar sistemas complejos uno encuentra propiedades o comportamientos que no podrían ser explicados limitándose solo al estudio de sus constituyentes, sino que surgen de interacciones locales entre estos. En general, el sistema puede ser descrito mediante estas reglas emergentes, mucho más sencillas que el estudio de cada constituyente y sus interacciones con los demás.

1.1. ESCALAS “HEAVY-TAILED” EN LA NATURALEZA

Las distribuciones de probabilidad del tipo “heavy-tailed” son uno de los fenómenos emergentes más observados al estudiar sistemas complejos presentes en el mundo que nos rodea. Hay distintas distribuciones matemáticas que se consideran de este tipo, como la distribución de Lèvy, la de Cauchy o la de Weibull, teniendo todas en común que decaen más lentamente que la distribución normal o exponencial.

El ejemplo extremo de distribución de cola gruesa es la ley de potencias. En general, se llama ley de potencias a aquella función que toma la forma:

$$f(x) \propto x^\alpha \quad (1.1)$$

Incluyendo una constante de proporcionalidad C , se puede observar que al tomar logaritmos en ambos lados, se obtiene una relación lineal entre $\ln(f(x))$ y $\ln(x)$:

$$\ln(f(x)) = \ln(Cx^\alpha) = \ln(C) + \ln(x^\alpha) = \ln(C) + \alpha \ln(x) \quad (1.2)$$

Además, vemos que el exponente α juega el papel de pendiente, mientras que $\ln(C)$ será la ordenada en el origen. De esta forma, la ley de potencias representada en escala doble logarítmica aparece como una línea recta. También, vemos como la pendiente de dicha recta será independiente de la base elegida para el logaritmo, algo que no ocurre con la ordenada en el origen.

Otra propiedad de interés de las leyes de potencias es la llamada invariancia de escala. Esto es, para toda constante k , multiplicar el argumento de $f(x)$ por esta, es equivalente a multiplicar toda la función por k^α :

$$f(kx) = C(kx)^\alpha = k^\alpha Cx^\alpha = k^\alpha f(x) \propto f(x) \quad (1.3)$$

En general, no todas las distribuciones “heavy-tailed” son leyes de potencias, estrictamente, solo la distribución de Pareto lo es. Sin embargo, muchas de las distribuciones observadas en la naturaleza, al representarse en escala log-log, sí presentan una cierta tendencia lineal (figura 1.1).

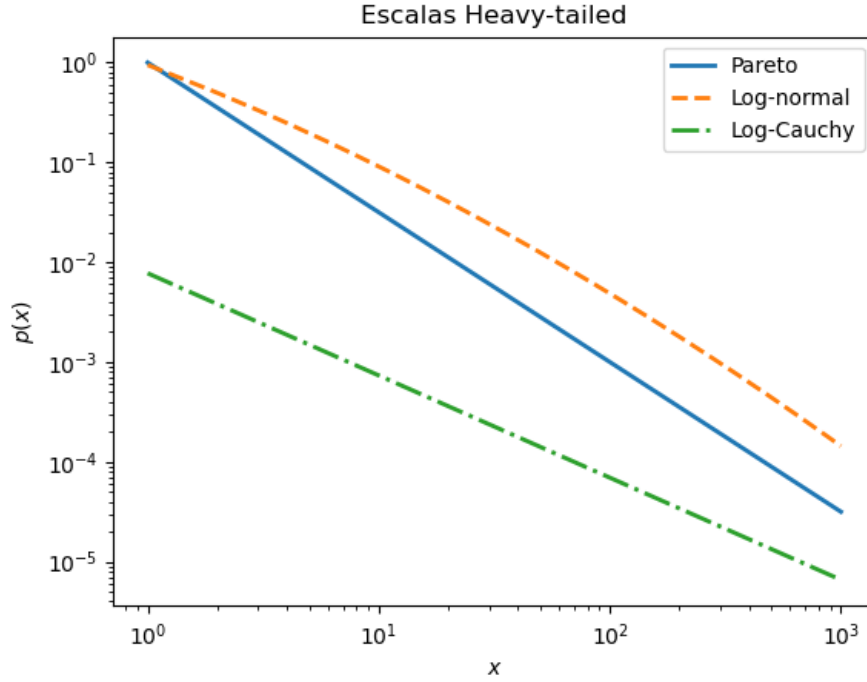


Figura 1.1: Comparación de la forma funcional de algunas distribuciones del tipo “Heavy-tailed”: Pareto ($\beta = 1.5$), Log-normal ($\mu = 1$, $\sigma = 3$) y Log-Cauchy ($\mu = 80$, $\sigma = 5$).

Las distribuciones de probabilidad mostradas se definen como:

■ **Pareto [22] [23]:**

$$p(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}} \propto x^{-\beta} \quad \text{con} \quad \beta = \alpha + 1 \quad (1.4)$$

para $x \geq x_m$, donde $x_m > 0$ y α son parámetros.

■ **Log-normal [23]:**

$$p(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \propto \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.5)$$

para $x > 0$ y los parámetros son $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

■ **Log-Cauchy [23]:**

$$p(x) = \frac{1}{x\pi\sigma \left[1 + \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right]} \propto \frac{1}{x \left[1 + \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right]} \quad (1.6)$$

con las mismas condiciones que la anterior: $x > 0$, $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

De ellas solo nos va a interesar su forma funcional, es decir, a qué expresión es proporcional cada distribución.

1.1.1. CONEXIÓN CON LA CRITICIDAD En el caso de encontrar, como es habitual, este tipo de distribuciones en la naturaleza, lo más común es utilizar la de Pareto y estudiar el sistema con leyes de potencias. En este caso, hablaremos de sistemas críticos.

La criticidad se relaciona habitualmente con las transiciones de fase de 2º orden. En general, se define un parámetro de orden que oscila entre cero en una fase y distinto de cero en otra, dependiendo de un cierto parámetro de control que es necesario ajustar finamente. En el llamado punto crítico la sensibilidad del parámetro de orden diverge. Un ejemplo habitual de esta casuística en el modelo de Ising para el ferromagnetismo.

El modelo de Ising, en su versión 2D, consiste en una rejilla cuadrada cuyos elementos representan partículas con su espín apuntando hacia arriba o hacia abajo [24]. El parámetro de orden será la magnetización del sistema, si los espines apuntan aleatoriamente hacia arriba o hacia abajo la magnetización será nula. Por otro lado, si todas las partículas apuntan hacia una misma dirección el sistema tendrá una magnetización total distinta de cero.

El parámetro de control será la temperatura, a temperaturas bajas los espines consiguen aparearse, consiguiendo una magnetización uniforme del material, que presenta ferromagnetismo. A temperaturas altas los espines se desaparean, dando lugar a una desaparición de la magnetización.

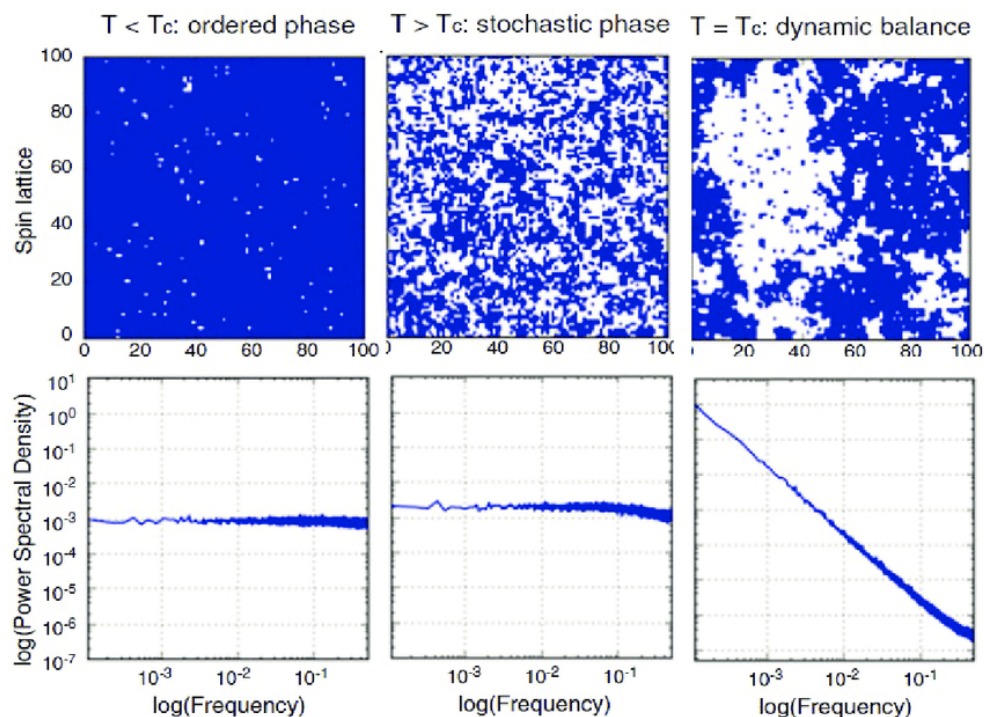


Figura 1.2: Estados del sistema y estadísticas medidas en el modelo de Ising para distintos valores de temperatura, [24].

Se encuentra una temperatura crítica T_c en la que se produce el cambio de fase, y la susceptibilidad magnética diverge. Es en este punto dónde encontramos leyes de potencias en la estadística del sistema (figura 1.2).

Por tanto, de aquí en adelante hablaremos de criticidad como la aparición de leyes de potencias en las distribuciones estadísticas. Los exponentes encontrados reciben el nombre de exponentes críticos, y son observables robustos. Si varios sistemas, aunque sean muy diferentes, presentan exponentes similares, decimos que pertenecen a la misma clase de

universalidad.

Además, aparecen fenómenos como la divergencia de la longitud de correlación, la pérdida de la ergodicidad y la ya mencionada invariancia de escala [22].

1.1.2. EJEMPLOS Un ejemplo de distribuciones de este tipo encontradas en el mundo que nos rodea son las magnitudes de terremotos [13]. Que como se muestra en la figura 1.3, su distribución acumulativa complementaria parece seguir una ley de potencias.

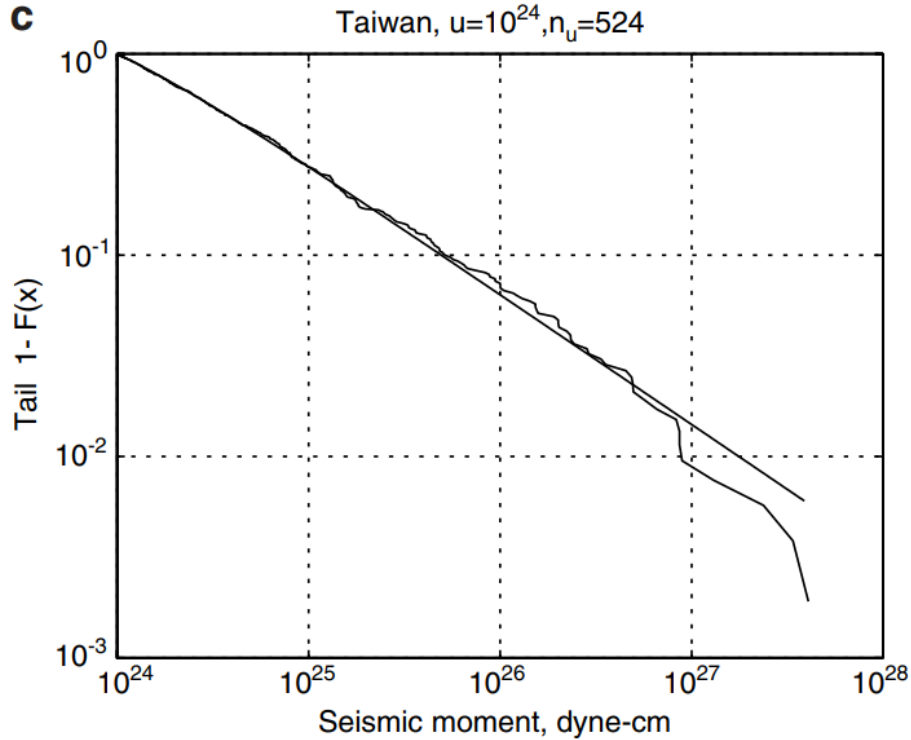


Figura 1.3: Distribución acumulativa complementaria de magnitudes de terremotos en Taiwán, [13].

Otro caso de interés, donde también se han encontrado este tipo de escalas es en la intensidad de erupciones solares [14]. En la figura 1.4 se muestra un histograma normalizado, esto es, la tasa de aparición para distintos valores, equivalente a una función de densidad de probabilidad.

Por último, presentamos un tercer caso dónde se ha encontrado este comportamiento. La distribución de tamaños de avalanchas neuronales en las redes corticales parece seguir una distribución tipo ley de potencias [15], con un exponente cercano a -1.5 , figura 1.5. Además, se observan invariancias espaciales de escala limitadas por el tamaño del sistema. Este mismo escenario nos llevará más adelante al estudio y aplicación del escalado de tamaño finito (finite size scaling) [1].

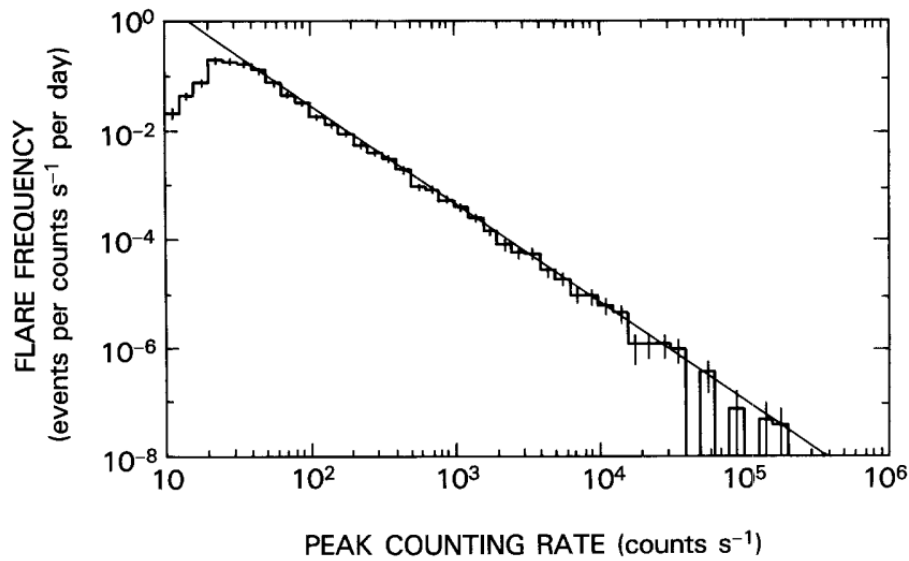


Figura 1.4: Función de distribución para erupciones solares, [14].

Estos y más casos que han sido reportados sugieren que ciertos sistemas presentan un comportamiento crítico de forma espontánea. Es este hecho lo que promueve el nacimiento de la idea de criticidad auto-organizada (S.O.C.) [4], en contraposición al concepto habitual de punto crítico, que necesita de un parámetro de ajuste para llevar al sistema a dicho estado.

Suscita especial interés el tercer caso al tratarse de un sistema biológico. Este hecho ha dado pie a la hipótesis de que la naturaleza, mediante el mecanismo de selección natural, en ciertas ocasiones busca la criticidad, [2]. Ya que así podría sacar provecho de sus propiedades. Por tanto, como veremos más adelante, el mecanismo de S.O.C. ha sido ampliamente estudiado para justificar la aparición de sistemas biológicos críticos.

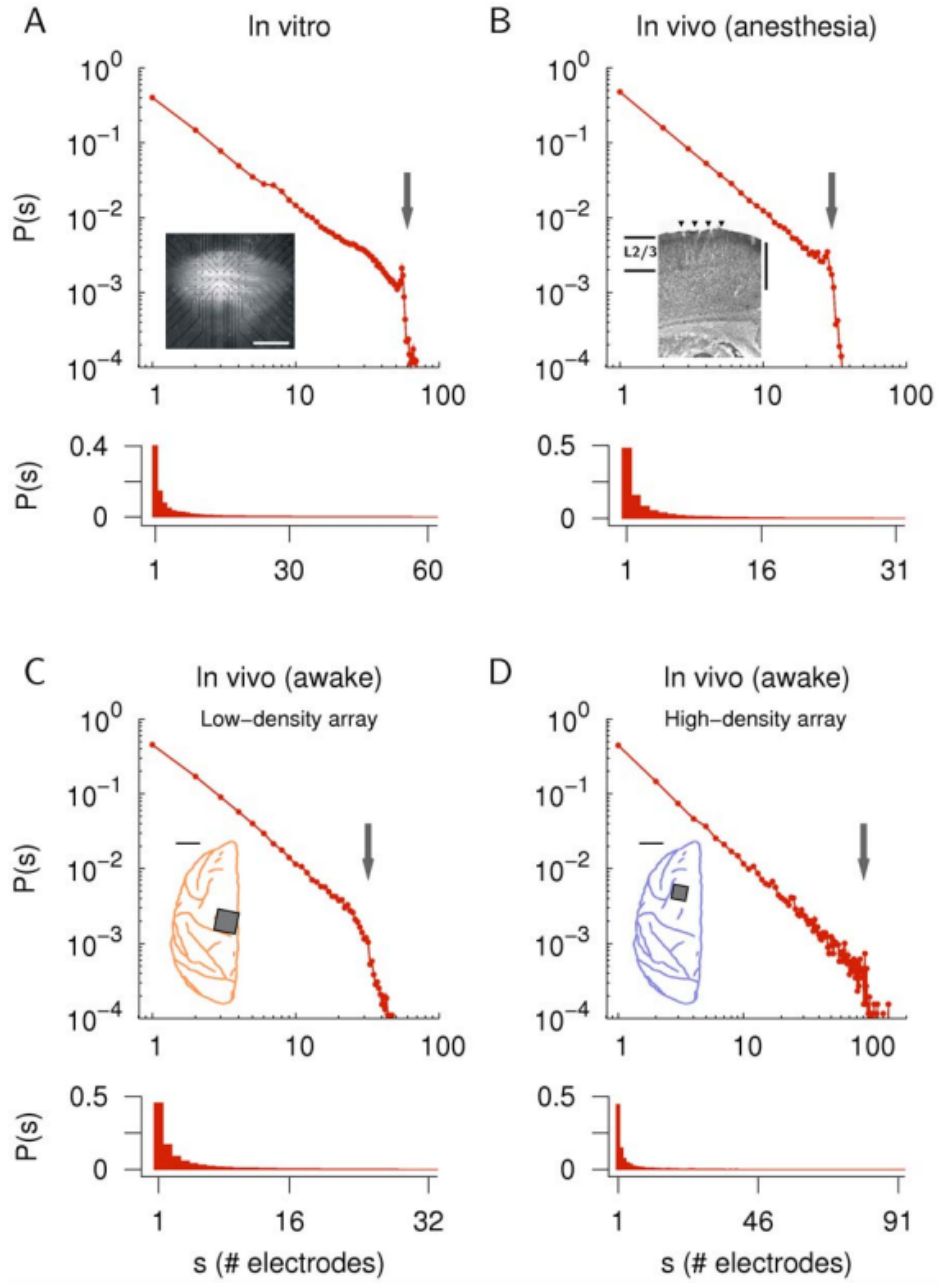


Figura 1.5: Distribuciones de tamaños de avalanchas neuronales, bajo distintas condiciones, [15]. Arriba, escala doble logarítmica. Abajo, escala lineal.

Objetivos

Los objetivos a cumplir durante la realización de este trabajo han sido:

■ **Estudio teórico sobre los siguientes temas:**

- Mecanismo de criticidad auto-organizada.
- Modelo de pilas de arena.
- “Finite size scaling” en sistemas críticos.

■ **Aspectos prácticos:**

- Programación desde cero de los programas utilizados.
- Desarrollo del modelo en Fortran para la generación de series temporales.
- Prototipado y análisis de datos con Python.
- Obtención de exponentes en distribuciones “heavy-tailed”.
- Introducción de variaciones al modelo computacional.
- Obtención de diagramas de transición de fase.

Materiales y métodos

3.1. MÉTODOS MONTECARLO

A lo largo de la ejecución del modelo se ha hecho uso de números aleatorios para determinar la posición en la que se tiraba la arena. Al ser nuestro modelo estadístico y no determinista, y usarse para describir o simular un proceso físico podemos considerar que hemos usado un método de Montecarlo.

Estos métodos tratan de aproximar expresiones o situaciones complejas haciendo uso de la estadística y los números aleatorios.

3.1.1. GENERACIÓN DE NÚMEROS PSEUDOALEATORIOS En el mundo de la computación debemos ser cautos al hablar de aleatoriedad. Ya que, en realidad, exceptuando algunos generadores especiales, lo que normalmente utilizamos son números pseudoaleatorios [12]. Estos son llamados así ya que en realidad no son aleatorios, solo lo parecen.

Cada número es, en realidad, parte de una secuencia, que se basa en los números generados previamente. La secuencia es completamente determinista si se conocen ciertos parámetros, en específico la llamada semilla. Si nosotros repetimos un programa sin cambiar la semilla obtendremos los mismos números una y otra vez.

Como trabajo previo, para entender como funcionan estos generadores, se desarrollaron dos módulos en Python: `rlgc.py` y `rfibo.py`, de random linear congruential generator y random lagged fibonacci generator respectivamente.

Por último, cabe destacar que ninguno de esos generadores se usó directamente en las simulaciones ya que los lenguajes de programación suelen tener integradas alternativas mucho mejores. En este caso se usó la subrutina `RANDOM_NUMBER` de Fortran [8], que implementa el generador `xoshiro256**` y devuelve valores entre 0 y 1. Dicha rutina se implementó como standard en la versión Fortran 90, que es la utilizada en este trabajo.

3.2. ENTORNO DE PROGRAMACIÓN

A la hora de realizar un trabajo computacional como este, es muy importante elegir las herramientas adecuadas que puedan facilitarnos el trabajo lo máximo posible.

3.2.1. PYTHON Y VS CODE Para la realización del trabajo de programación se ha hecho uso de Visual Studio Code, un software gratuito ofrecido por Microsoft. Con el uso de los plugins adecuados se convierte en un entorno de desarrollo ligero pero bastante completo.

El lenguaje de programación elegido inicialmente para desarrollar el modelo fue Python. En él se hizo el prototipado de la algoritmia utilizada para simular la pila de arena. Esta opción finalmente fue descartada debido a la relativamente baja potencia del lenguaje frente a opciones compiladas.

Finalmente, Python se utilizó para crear un programa principal para cada simulación, además de gestionar y organizar los ficheros de datos. Por último y más importante, el principal motivo para elegir Python fue la posibilidad de usar potentes librerías para el análisis y representación de los datos. En este caso esas librerías son NumPy [9] y matplotlib [10] respectivamente.

3.2.2. FORTRAN El programa de prototipado creado en Python funcionaba bien, y se usó al principio del desarrollo del trabajo. Sin embargo, al ir aumentando tanto el tamaño de las simulaciones como la cantidad de arena por celda añadida al sistema, los tiempos de cómputo se disparaban a varias horas.

Entonces, se decidió pasar toda la simulación a Fortran, cuyo buen desempeño es muy conocido en labores de esta índole. Esos programas que tardaban horas pasaron a ejecutarse en escasos minutos.

Es importante recalcar que Python se siguió utilizando para las labores indicadas anteriormente. Lo que se hizo con Fortran fue compilar un programa que contiene varias subrutinas como un módulo que somos capaces de importar y usar en Python pero que se ejecuta mucho más rápido. Todo eso fue posible gracias al módulo f2py [11].

Finalmente, las simulaciones más grandes también tardaron horas incluso ejecutándose en Fortran, aunque no cabe la menor duda de que en Python habrían tardado mucho más.

Modelo de las pilas de arena

El modelo de las pilas de arena es el ejemplo clásico de criticidad auto-organizada o S.O.C. (del inglés: self-organized criticality) [4]. Consiste en la idea intuitiva de un montoncito de arena, como el que se forma en un reloj de arena cuando los granos caen poco a poco [3]. Aunque parezca un modelo “de juguete”, su aplicabilidad va más allá de su concepción original y resulta de gran utilidad en otros ámbitos, por lo que merece la pena estudiarlo en detalle.

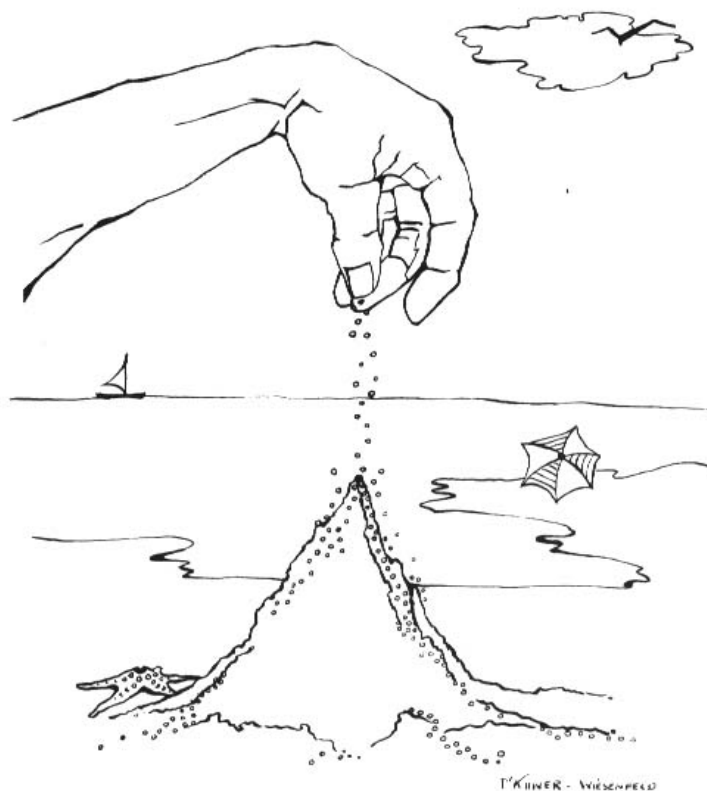


Figura 4.1: Ilustración intuitiva del modelo de la pila de arena, créditos a Dctolosav [3].

Al ir introduciendo arena al sistema, la pendiente de la pila comenzará a crecer, hasta un punto tal que el sistema ya no se encuentre en equilibrio y la arena colapse hacia los puntos adyacentes. En ese momento la pendiente en el punto dónde se produjo el colapso decrecerá.

La pendiente máxima que puede darse en el sistema antes de un colapso juega el papel de un umbral. Es importante notar que, después de un proceso de colapso, al que llamaremos toppling, la pendiente en el punto bajará por debajo del umbral, de forma que será necesario añadir más arena en ese punto para que vuelva a activarse.

Una condición importante que debemos exigir al sistema es la conservación local de arena, es decir, que al darse un toppling la cantidad de arena que cae en los puntos vecinos, en total, sea la misma que la cantidad perdida en el toppling. Esta condición es equivalente a la conservación local de energía, que como veremos es fundamental para describir sistemas con S.O.C.

Aunque parezca un modelo demasiado simple, uno debe darse cuenta de que, al producirse un proceso de toppling, los puntos adyacentes en los que cae la arena pueden encontrarse parcialmente cargados, de forma que al desplazarse la arena hacia ellos, se alcance el umbral y vuelva a producir otro toppling. Si este proceso se repite sucesivamente, puede dar lugar a una avalancha.

El estudio estadístico de ciertas variables que caracterizan dichas avalanchas es lo que nos ocupará en la mayor parte del trabajo.

4.1. MODELO MATEMÁTICO ESCOGIDO

Para simular la situación descrita anteriormente pueden usarse varios métodos, con variaciones entre ellos. Ejemplos de distintos modelos que han surgido a lo largo de los años son: el modelo BTW (Bak, Tang y Wiesenfeld) [4] planteado originalmente, el estudiado por Zhang [5] que es continuo y el propuesto por Manna [6] que estudia el caso estocástico.

El modelo escogido en este trabajo funciona como una autómatas celular, esto es, un sistema dinámico que evoluciona en pasos discretos, a los que llamaremos frames. Es ideal para describir sistemas formados por muchos objetos que interactúan localmente unos con otros.

Comenzamos creando una rejilla, en este caso cuadrada de lado L , que computamos como una matriz. A cada elemento de la rejilla le asignamos un valor discreto que simula la cantidad de arena apilada en ese punto. Podemos inicializar la matriz como nula o con una distribución aleatoria de arena, en el caso de este trabajo, se utilizó la primera opción.

A continuación, vamos añadiendo granos de arena. Sin embargo, en contraposición a lo mostrado en la figura 4.1, en lugar de añadir la arena en el centro, lo hacemos en puntos aleatorios de la rejilla. Siempre añadiremos un grano de arena en el frame siguiente al cese de la actividad, hasta alcanzar un valor máximo de arena añadida, que escogemos proporcional al número de celdas en el modelo: L^2 .

4.1.1. REGLAS DE TOPPLING La regla de toppling elegida, recurriendo al concepto de “energía” o “tensión” almacenada en un punto, la definimos según la cantidad de arena que se encuentra en cada celda, resultando este caso más sencillo que el cálculo de la pendiente. Si dicha cantidad es superior o igual al umbral, se produce un toppling y la arena se esparce a los puntos adyacentes. Este proceso se muestra en la figura 4.2.

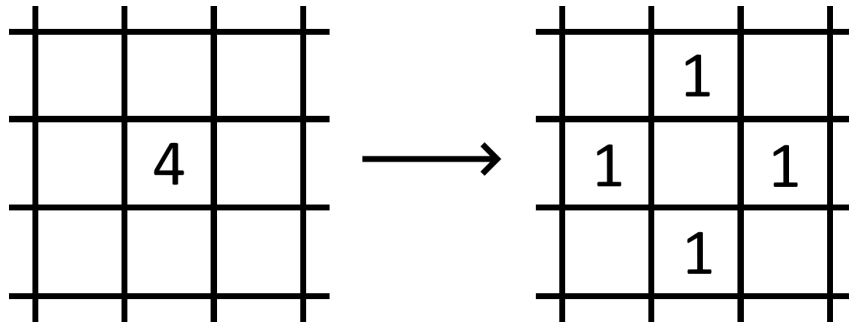


Figura 4.2: Ilustración del proceso de toppling, en el caso de umbral = 4 y distribución de arena en patrón de cruz.

Otros posibles casos para la distribución de arena contemplados en el modelo programado son:

- Repartiendo la arena de uno en uno, casos ordenados:
 - Umbral = 5, patrón de cruz incluyendo la celda de origen.
 - Umbral = 8, distribución a todos los alrededores.
 - Umbral = 9, distribución a todos los alrededores incluyendo el origen.
- Posibilidad de caer uno o más granos de arena en una misma celda, caso aleatorio:
 - Umbral = cte $\in \mathbb{N}$, reparto aleatorio entre todos los alrededores incluyendo el origen.

4.1.2. CONDICIONES DE CONTORNO Qué hacer con la arena en caso de toppling en un lateral o esquina de nuestra rejilla es una cuestión decisiva a la hora de implementar nuestro modelo. Las posibles condiciones de contorno usadas en este trabajo pueden verse en la figura 4.3 y son las siguientes.

Si gracias a un toppling la arena intenta caer en una posición fuera de la rejilla:

- Conservación de la cantidad total de arena, útiles para estudiar cambios de fase:
 - Condiciones cerradas: simplemente acaba cayendo a la celda más próxima perteneciente a la rejilla, es decir, la celda de origen.
 - Condiciones cíclicas: la arena cae en el extremo contrario de la rejilla.
- No conservación de la cantidad total de arena, el sistema presenta criticidad auto-organizada:
 - Condiciones abiertas: la arena que cae fuera de la rejilla desaparece y por tanto se trata de una dinámica no conservativa. Esta será precisamente la primera que estudiemos.

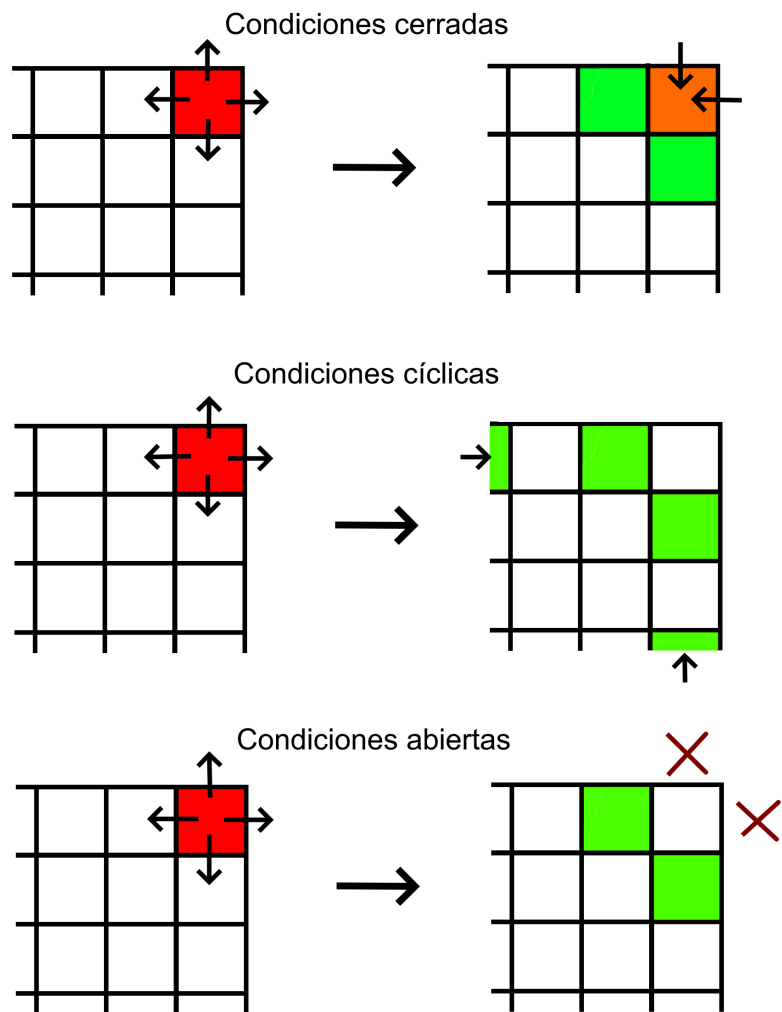


Figura 4.3: Comportamiento de distintas condiciones de contorno, en la esquina superior derecha de una rejilla 4×4 , en el caso de umbral $= 4$ y distribución de arena en patrón de cruz.

Resultados I: Fronteras abiertas

5.1. DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS

Comenzamos realizando una primera tanda de simulaciones (archivos `simulacion1.py` y `analisis1.ipynb` [7]), todas ellas con las mismas reglas de toppling y condiciones de contorno. La regla de toppling será $\text{umbral} = 3$ y distribución aleatoria, con condiciones de contorno abiertas. Se hará una simulación por cada valor de $L \in \{4, 8, 16, 32\}$.

El objetivo de esta primera parte será el estudio de las distribuciones asociadas a ciertas variables que caracterizan las avalanchas. Estos observables, en el estudio llevado a cabo en este trabajo han sido los siguientes.

- Tamaño (s): número de celdas dónde ha habido un toppling durante la avalancha. Aunque a lo largo de una avalancha, la misma celda puede activarse varias veces, por tanto lo definiremos como el número de topplings que ha habido desde el inicio de la avalancha hasta el final.
- Duración (t): cantidad de frames que ha tardado la avalancha desde que se tiró el grano de arena hasta el cese de la actividad en el modelo.
- Área (a): cantidad de celdas que han recibido arena a lo largo de la avalancha. Se usará más adelante en las variaciones.

Para obtener las distribuciones estadísticas, el programa de análisis lee los datos de los ficheros generados en las simulaciones y selecciona todos aquellos con $s > 0$. Ya que, por cómo guarda la información el modelo, una adición de arena que no genere avalancha ha tenido 0 topplings y se guarda con tamaño nulo, distorsionando la estadística. Después, se calcula el histograma de cada observable y se normaliza.

Al calcular las distribuciones de dichos observables, en este caso s y t , uno esperaría, al tratarse de distribuciones "heavy-tailed", encontrar leyes de potencias puras:

$$p_x(x) \propto x^{-\tau_x}. \quad (5.1)$$

Estas, al representarse con ambos ejes en escala logarítmica, aparecen como rectas cuya pendiente corresponde al exponente τ_x , sin importar el tamaño del sistema. Sin embargo,

como se muestra en las figuras 5.1 y 5.2, no conseguimos obtener rectas completas, si no que están “capadas” y a partir de un cierto valor decaen drásticamente hasta cero. Además, vemos que la forma de las distribuciones sí depende de L .

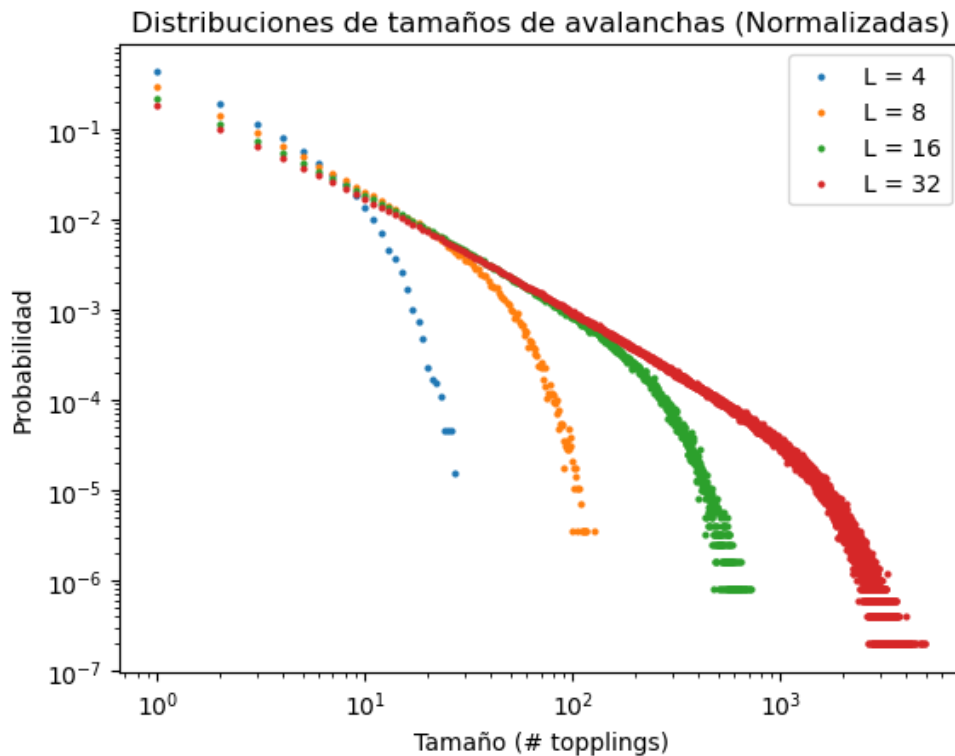


Figura 5.1: Distribuciones de tamaños de avalancha para rejillas cuadradas de lado L .

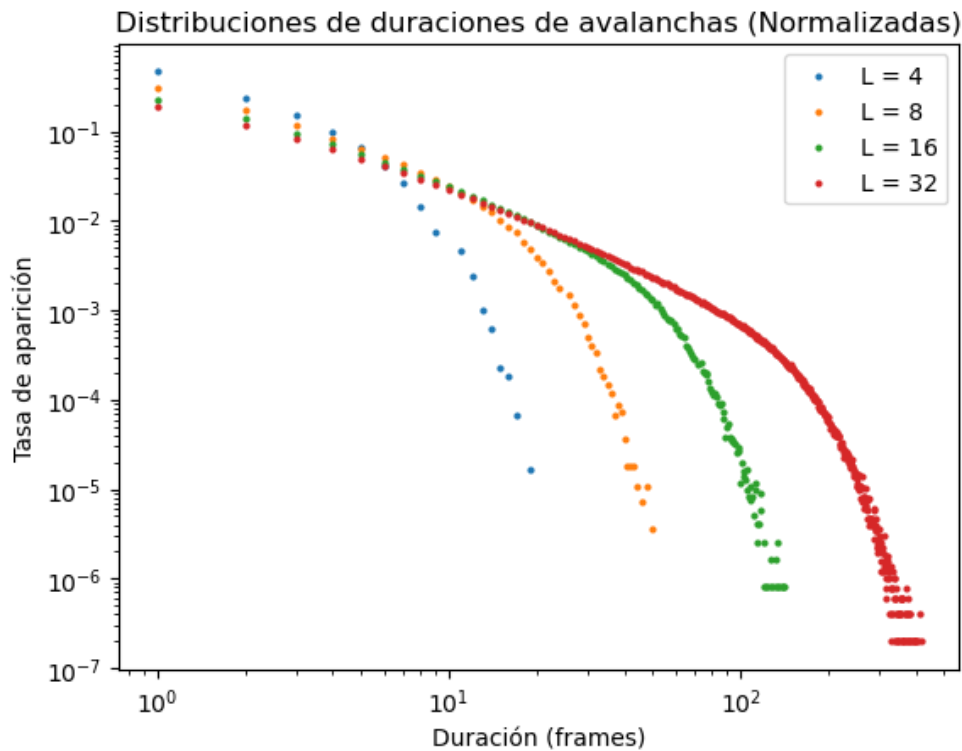


Figura 5.2: Distribuciones de duraciones de avalancha para rejillas cuadradas de lado L .

5.2. ESCALADO DE TAMAÑO FINITO ("FINITE SIZE SCALING", F.S.S.)

A aquella zona dónde la probabilidad decae la llamaremos “cut-off”, y al valor del observable x que actúa como cota superior le llamaremos $x_c(L)$.

Se observa que si $x \ll x_c$, estamos en la zona de ley de potencias. Por otro lado, si x empieza a ser apreciable frente a x_c , entramos en el “cut-off”, hasta que llegamos al valor $x = x_c$ donde la probabilidad se anula. Este comportamiento se puede modelar mediante la siguiente ecuación, que proponemos como solución al problema:

$$p_x(x|L) = x^{-\tau_x} F\left(\frac{x}{x_c(L)}\right). \quad (5.2)$$

Dónde F modula la expresión 5.1 según el comportamiento descrito anteriormente, es decir:

$$F(y) = \begin{cases} cte & \text{si } y \ll 1 \\ 0 & \text{si } y \approx 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Además, se puede apreciar cómo los valores de x_c , en las gráficas, están equiespaciados. Si nos damos cuenta, los valores de L son sucesivas potencias de 2. Esto, junto al hecho de que la escala en las figuras es logarítmica, nos lleva a pensar que la relación entre x_c y L también es del tipo ley de potencias:

$$x_c = L^{D_x}. \quad (5.4)$$

A este conjunto de proposiciones se le llama hipótesis de escalado de Widom, que pudo ser demostrada analíticamente en ciertos sistemas gracias a técnicas avanzadas basadas en grupo de renormalización [25].

5.2.1. EXPONENTES OBTENIDOS En nuestro caso, la forma de medir los exponentes τ_x y D_x es la siguiente. Para medir τ_x , nos quedamos con la zona donde el comportamiento parece completamente una ley de potencias, y hacemos una regresión lineal al logaritmo de los datos. Este procedimiento se ilustra en la figura 5.3 y figura 5.4. Véase que se ha escogido la simulación de mayor tamaño L para que la zona donde aplicar la regresión sea lo más amplia posible y conseguir la máxima precisión.

Por otro lado, para estimar el exponente D_x simplemente vemos el valor de x con mínima probabilidad según las distribuciones obtenidas. Este valor, frente a los demás, puede considerarse con probabilidad nula, por tanto será el x_c para un tamaño dado del sistema. Después, se hace una regresión lineal al logaritmo de x_c según el logaritmo de L , figuras 5.5 y 5.6. La pendiente obtenida será D_x .

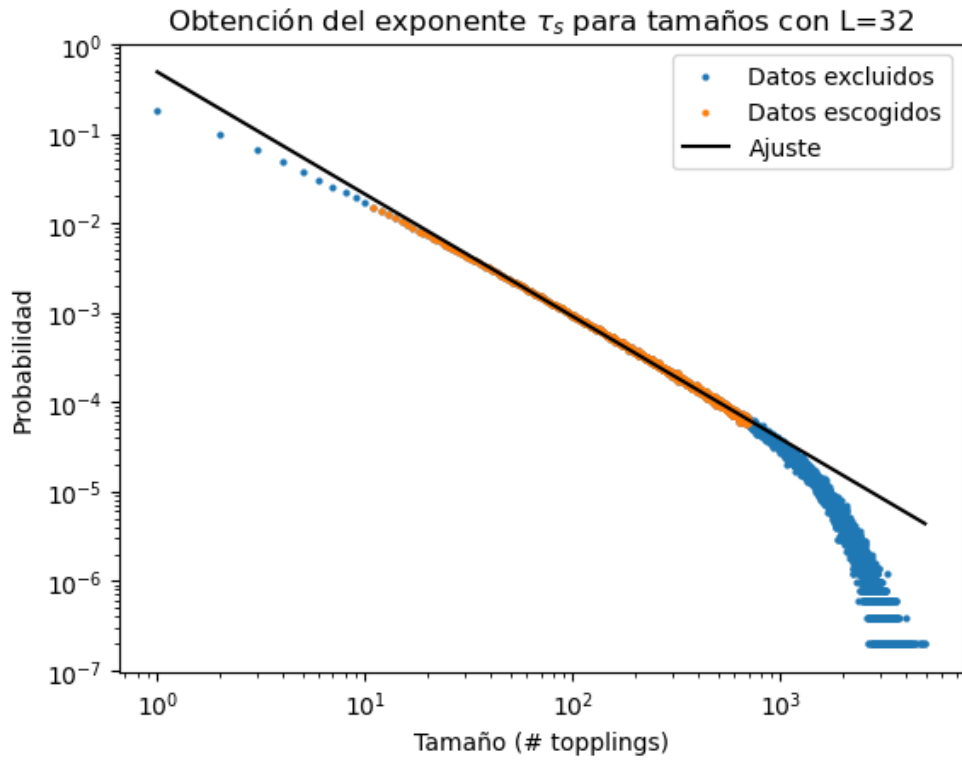


Figura 5.3: Ajuste para estimar el exponente de tamaños τ_s .

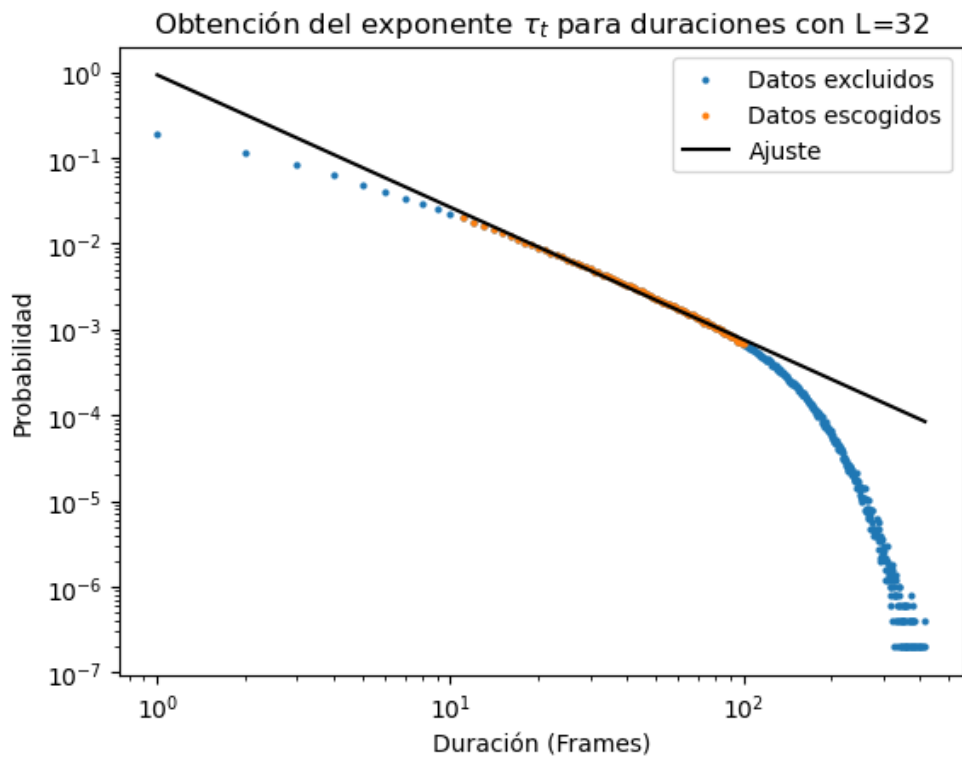


Figura 5.4: Ajuste para estimar el exponente de duraciones τ_t .

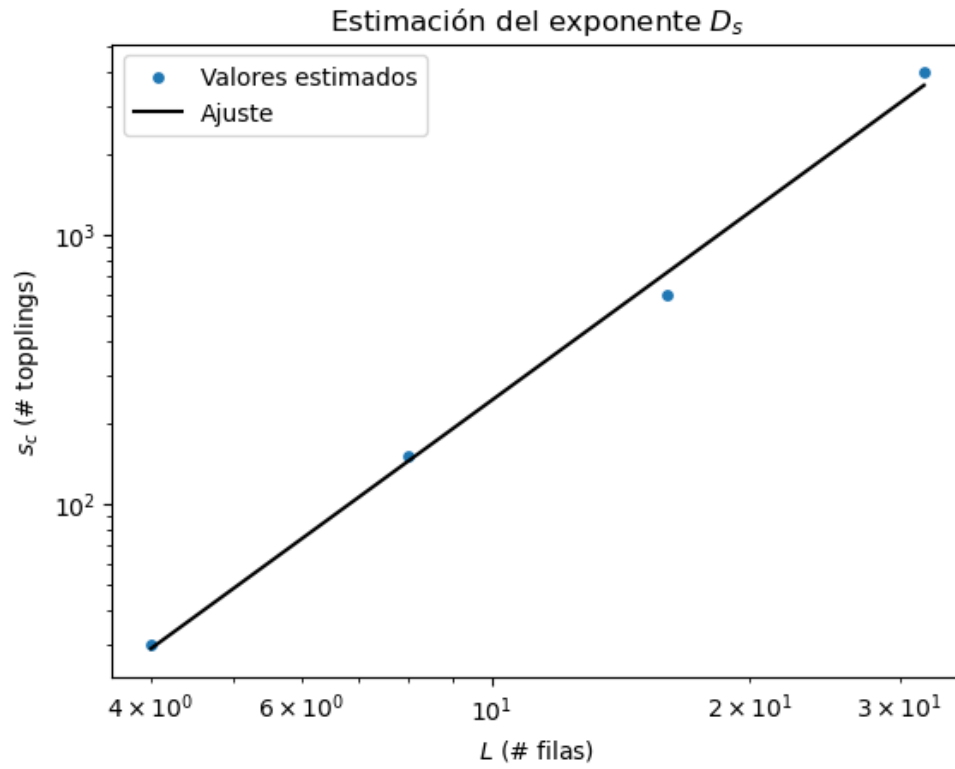


Figura 5.5: Ajuste para estimar el exponente de tamaños D_s .

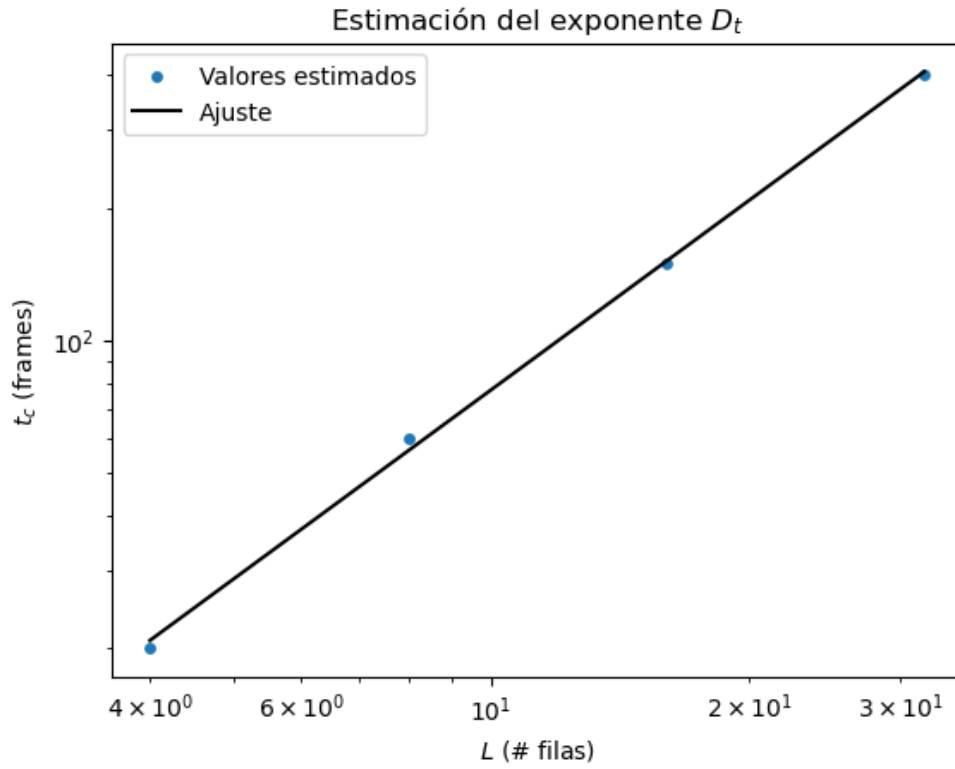


Figura 5.6: Ajuste para estimar el exponente de duraciones D_t .

Los resultados obtenidos han sido:

- **Tamaños:**

$$\tau_s = 1.366 \pm 0.003, \text{ con } R^2 = 0.998.$$

$$D_s = 2.32 \pm 0.14, \text{ con } R^2 = 0.996.$$

- **Duraciones:**

$$\tau_t = 1.542 \pm 0.013, \text{ con } R^2 = 0.996.$$

$$D_t = 1.43 \pm 0.05, \text{ con } R^2 = 0.998.$$

5.2.2. COLAPSOS Por último, si los exponentes obtenidos son correctos, podemos hacer un colapso de los datos. De la ecuación 5.2, aislamos F :

$$x^{\tau_x} p_x(x) = F\left(\frac{x}{L^{D_x}}\right). \quad (5.5)$$

De esta forma, si representamos $x^{\tau_x} p(x)$ frente al cociente $xL^{-D_x} = x/x_c$, obtendremos la forma funcional de F , es decir, las gráficas deberían solaparse independientemente del valor de L . Podemos considerar esto como un método para ajustar mejor los exponentes. Si usamos los resultados del apartado anterior como punto de partida, los iremos variando poco a poco hasta conseguir que los colapsos salgan lo mejor posible. Los exponentes modificados son:

- **Tamaños:**

$$\tau_s = 1.358 \pm 0.003.$$

$$D_s = 2.51 \pm 0.14.$$

- **Duraciones:**

$$\tau_t = 1.487 \pm 0.013.$$

$$D_t = 1.46 \pm 0.05.$$

Véase que hemos mantenido los errores anteriores, ya que no hay forma de calcularlos con este método. Sin embargo, tomaremos estos exponentes como resultado final, ya que, mientras que los anteriores solo ajustaban una región de la distribución, estos consiguen cuadrar todos los datos. Igualmente, el resultado no es perfecto, ya que en general los datos con $L = 4$ no colapsan bien, el gráfico de tamaños es demasiado ancho (figura 5.7) y el de duraciones no consigue ajustar bien los datos con $t \ll 1$, solo coinciden los valores de decaimiento (figura 5.8). Este resultado también es apreciado por [1], ya que este modelo presenta correcciones a la función de escalado aquí planteada.

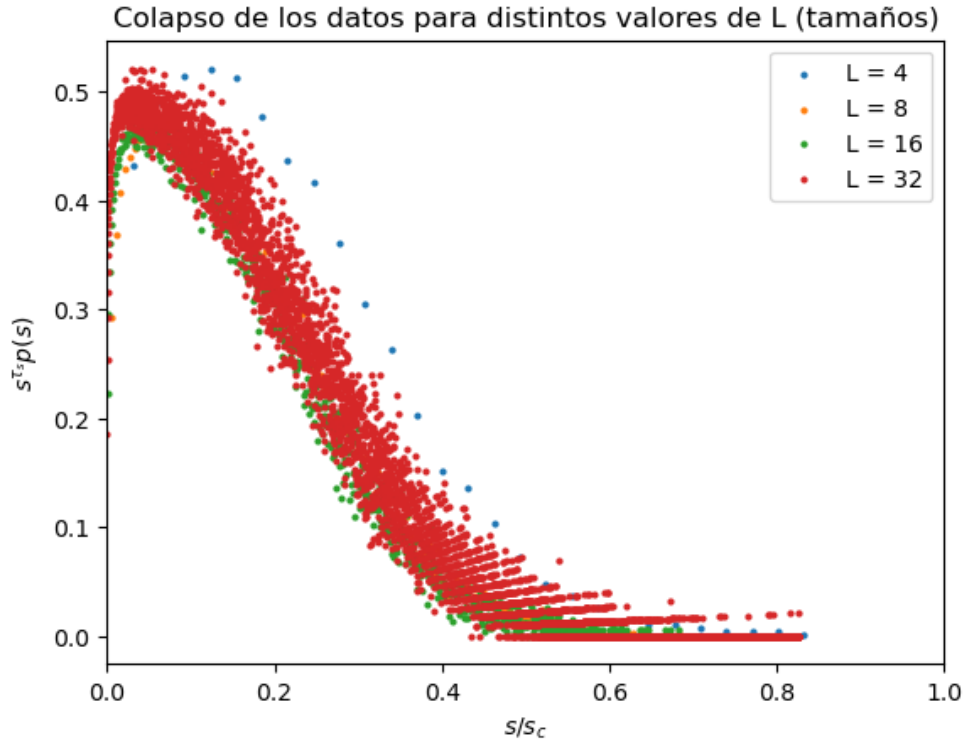


Figura 5.7: Colapso de los datos de tamaños de avalancha bajo la premisa de F.S.S.

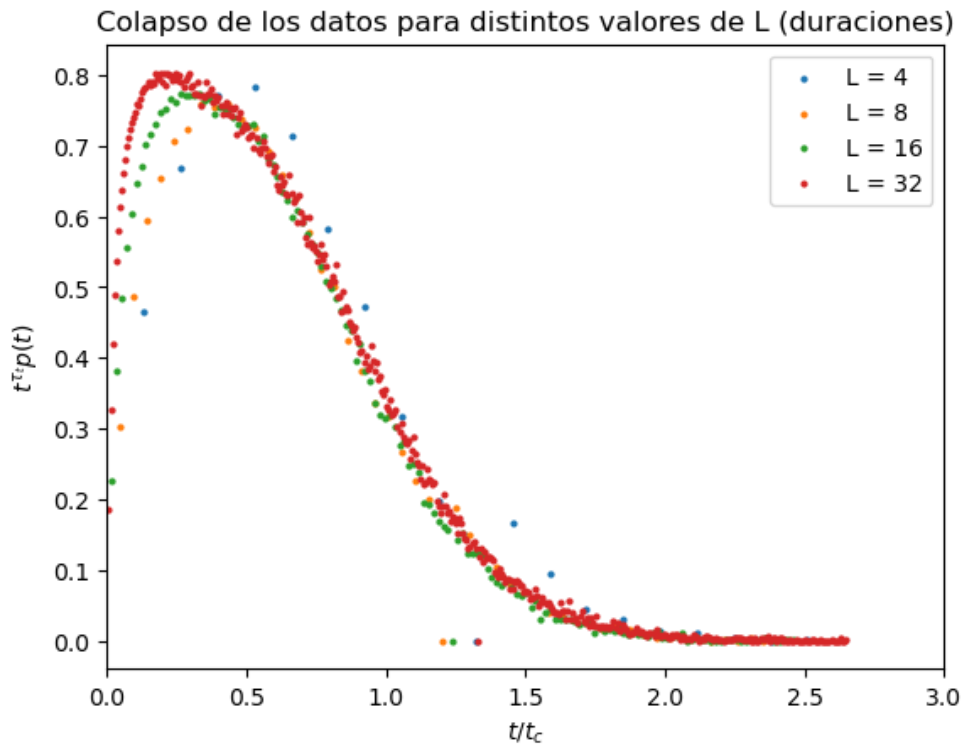


Figura 5.8: Colapso de los datos de duraciones de avalancha bajo la premisa de F.S.S.

A pesar de no conseguir colapsos perfectos, se puede ver en las figuras 5.7 y 5.8 que la forma de F es consistente con el comportamiento esperado según 5.3. Tiene una forma tal que, para valores inferiores a la unidad se comporta de forma más o menos constante,

mientras que para valores cada vez más cercanos a uno la función decae rápidamente. Además, se puede observar un comportamiento no predicho por la definición de $F(x)$ en la proposición de F.S.S. Para valores de $x \rightarrow 0$ también aparece un decaimiento, muy pronunciado, que altera las distribuciones desviándolas de la ley de potencias pura.

5.2.3. CORRELACIÓN DE EXPONENTES EN F.S.S. Otro resultado interesante del escalado de tamaño finito es que, cuando $L \rightarrow \infty$, podemos encontrar la siguiente relación entre observables cualesquiera.

$$x' \sim x^{\gamma_{x'x}}. \quad (5.6)$$

En el anexo 6.2.3 se obtiene una expresión para el exponente $\gamma_{x'x}$ en función de los exponentes críticos de cada variable:

$$\gamma_{x'x} = \frac{\tau_x - 1}{\tau_{x'} - 1}. \quad (5.7)$$

En este caso, escogemos $x' = s$ y $x = t$. Sustituyendo los valores de τ_s y τ_t obtenidos previamente, el resultado es $\gamma_{st} = 1.36 \pm 0.04$. Podemos hacer un gráfico de dispersión de los tamaños de avalancha frente a su duración para comprobar que se cumple dicha correlación, figura 5.9.

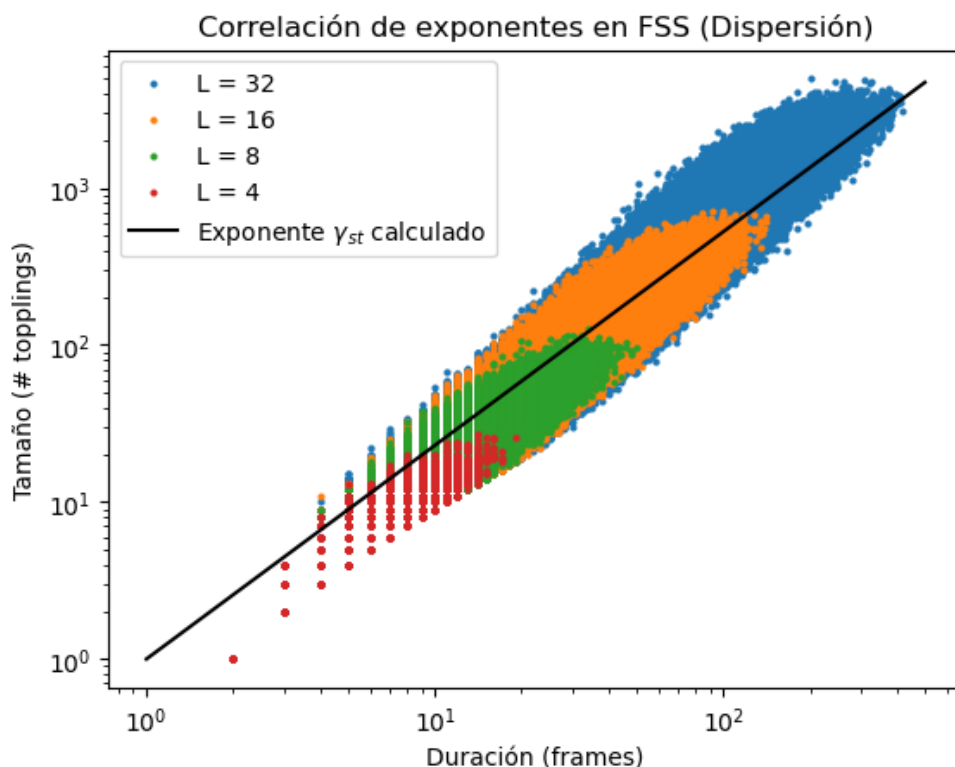


Figura 5.9: Gráfico de dispersión de tamaños frente a duraciones para distintos valores de L . Línea de tendencia esperada según expresión 5.7.

Se puede observar que la tendencia de los datos es generalmente lineal (en escala log-log). Por tanto la expresión 5.6 queda comprobada. Por otro lado, también se aprecia como el exponente calculado es capaz de ajustar los datos de forma bastante correcta.

5.3. OTROS CASOS DE INTERÉS

Aunque los resultados y discusión obtenidos en los apartados 5.1 y 5.2 son bastante representativos, podemos aprovechar que el modelo está programado de forma que soporte distintas reglas de toppling y sea capaz de medir áreas para jugar un poco más. En este caso estudiaremos las distintas opciones contempladas y realizaremos un análisis menos extenso sobre las diversas distribuciones obtenidas.

5.3.1. DISTRIBUCIONES DE ÁREA En esta simulación vamos a medir el tercer observable presentado y que no se ha usado hasta ahora: el área de la avalancha. En cierto modo, el área es una mejor medida de la dimensión espacial de la avalancha que el “size”, definido y usado anteriormente. Sin embargo, no tiene en cuenta el caso en el que la avalancha pasa por la misma celda varias veces.

En este sentido, el área está mucho más limitada por el tamaño del sistema y por tanto, se espera ver cortes más bruscos en la distribución estadística.

Esta segunda simulación, al tener que contar y sumar elementos de matrices cada frame, es bastante más costosa de ejecutar. Por tanto la cantidad de arena total añadida al sistema por celda es 10 veces menor que en la simulación principal, además, las reglas de toppling, condiciones de contorno y tamaños elegidos son idénticos (salvo un valor de $L = 64$). Por tanto, las distribuciones estadísticas de s y t serán omitidas, ya que son iguales en forma pero con peor resolución.

La distribución de áreas obtenida puede verse en la figura 5.10. En ella se ve como aparece una anomalía en la gráfica. Donde los valores de área igual a 1 y 2 tienen una probabilidad sustancialmente más baja originando un pico.

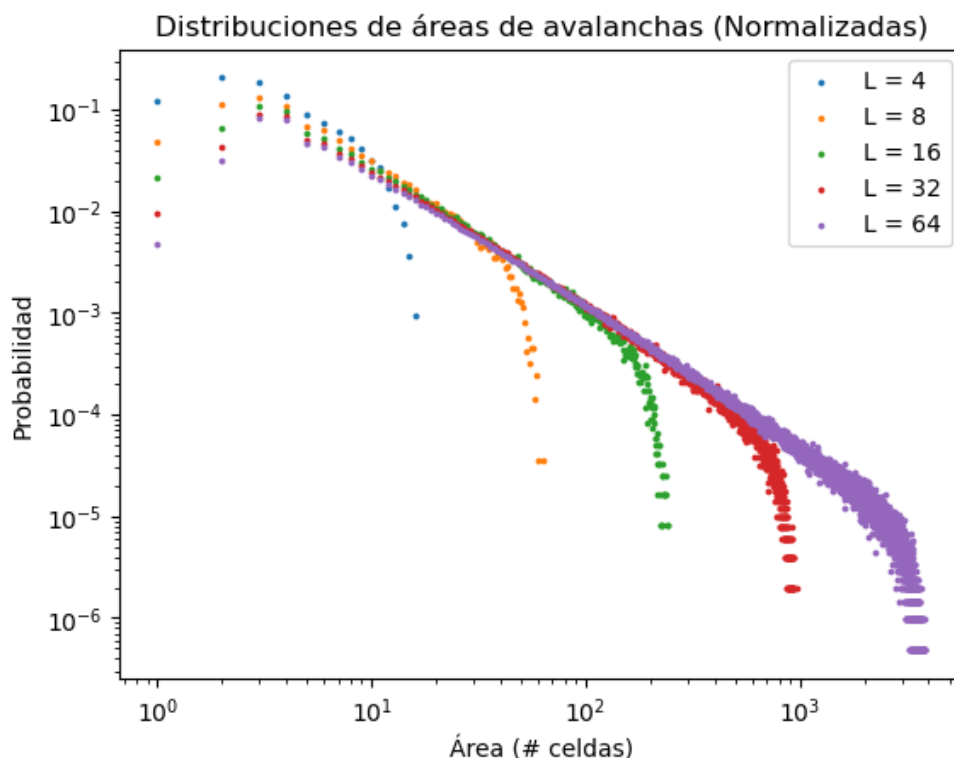


Figura 5.10: Distribuciones de áreas de avalancha para rejillas cuadradas de lado L .

Esto puede achacarse al hecho de que, al estar trabajando con un umbral $= 3$, la cantidad de arena que se tira a los vecinos es ese mismo valor. Por tanto, lo más probable es que, por toppling, el área de celdas afectadas sea 3 excepto en dos casos: que estemos en un borde, y por tanto cierta cantidad de arena puede caer fuera de la rejilla o que, al ser la distribución de arena aleatoria, una misma celda reciba varios granos. Estos dos casos concuerdan con lo que se ve en la gráfica, donde los valores de $a = 1$ son más improbables que los de $a = 2$, y estos a su vez también menos probables que los de $a = 3$, donde se considera que empieza la distribución inalterada.

Para medir el exponente τ_a haremos una regresión al caso de mayor tamaño $L = 64$ en el rango desde $a > 2$ hasta dónde se aprecie comportamiento lineal.

En la figura 5.11 se observa dicho procedimiento. Obteniendo los siguientes resultados:

- $\tau_a = -1.378 \pm 0.004$, con $R^2 = 0.996$.
- $D_a = 1.93 \pm 0.07$, con $R^2 = 0.998$

Para estimar el valor de D_a se ha utilizado el mismo método que en la sección anterior, figura 5.12. Este último exponente concuerda bastante bien con la discusión sobre como el área está más limitada por L , ya que el valor de D_a es menor que su homólogo encontrado para los tamaños.

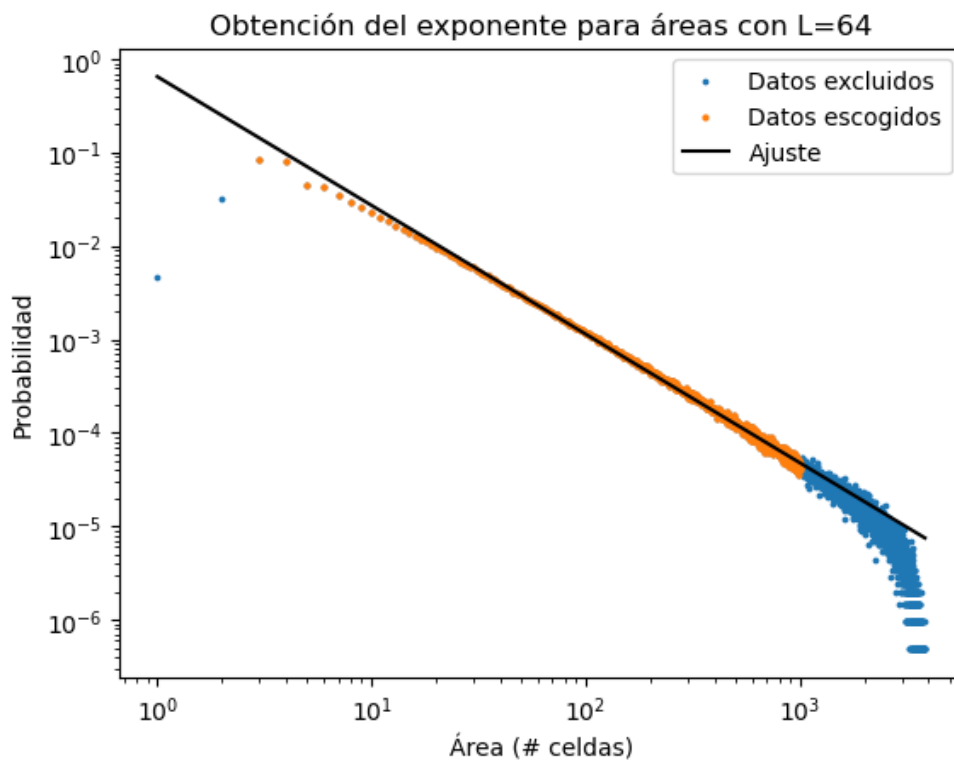


Figura 5.11: Ajuste para estimar el exponente de áreas τ_a .

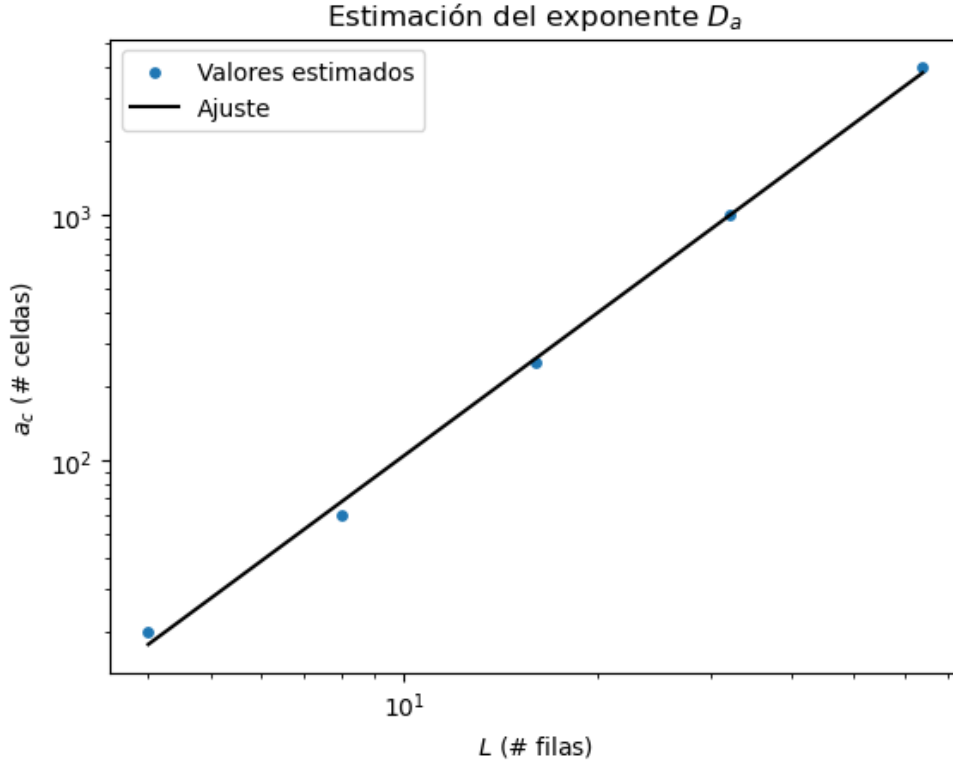


Figura 5.12: Ajuste para estimar el exponente de áreas D_a .

5.3.2. DISTINTAS REGLAS DE TOPPLING En este caso, vamos a explorar las diferentes distribuciones y exponentes que se obtienen en un caso de toppling ordenado frente a uno aleatorio. Para esta tercera simulación se han escogido unos valores de umbral de 8 y 5.

La idea es, a parte de observar la influencia de la aleatoriedad en el sistema, ver si hay un cambio al cambiar el valor umbral y si afecta a los resultados incluir o no la celda de origen.

■ **Simulaciones con umbral = 8:**

Caso ordenado: $\tau_s = 1.133$, $\tau_t = 1.089$

Caso aleatorio: $\tau_s = 1.289$, $\tau_t = 1.249$

■ **Simulaciones con umbral = 5:**

Caso ordenado: $\tau_s = 1.084$, $\tau_t = 0.977$

Caso aleatorio: $\tau_s = 1.294$, $\tau_t = 1.249$

Resulta llamativa la diferencia de exponentes encontrada entre el caso ordenado y el aleatorio, sin embargo, no se aprecia una diferencia tan apreciable al cambiar el valor numérico del umbral ni al incluir o no la celda de origen. Estos resultados sugieren que, el hecho de tirar la arena de forma aleatoria u ordenada cambia la clase de universalidad del sistema, mientras que los otros parámetros no lo hacen.

Las distribuciones obtenidas, son muy similares a los apartados anteriores, por tanto, la mayoría serán omitidas excepto las figuras 5.13 y 5.14, que muestran la única característica interesante encontrada en este estudio a parte del cambio de clase de universalidad. Los decaimientos producidos por el tamaño finito del sistema son más bruscos en el caso ordenado que en el caso aleatorio, dónde se observa cómo aparecen suavemente.

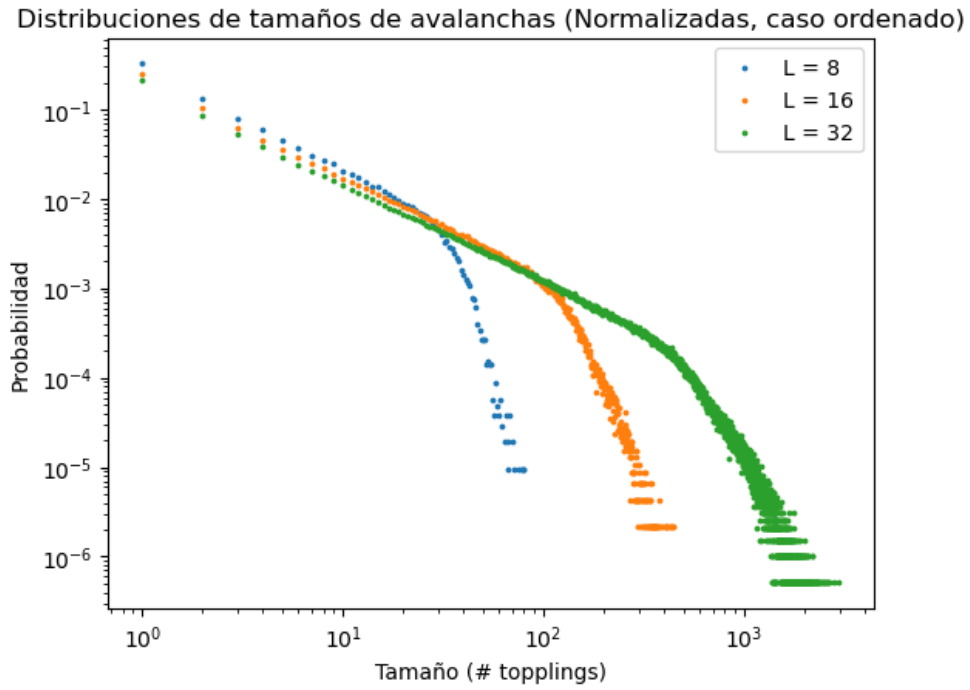


Figura 5.13: Distribuciones de tamaños de avalancha para rejillas cuadradas de lado L , caso umbral = 8, ordenado.

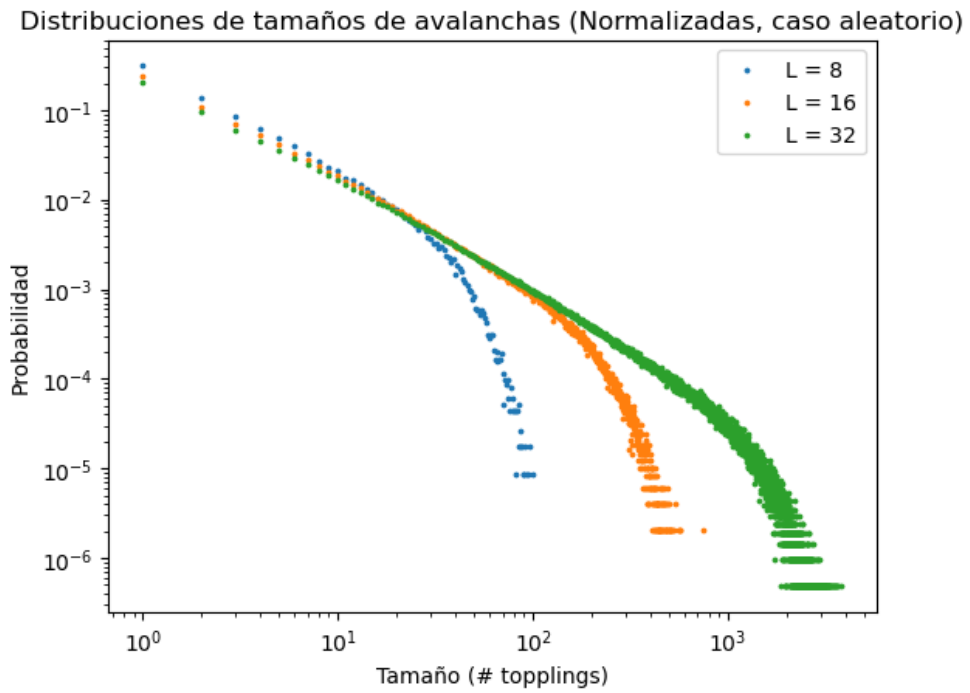


Figura 5.14: Distribuciones de tamaños de avalancha para rejillas cuadradas de lado L , caso umbral = 8, aleatorio.

Resultados II: Fronteras cerradas

6.1. MECANISMO DE SOC

En la naturaleza es común encontrar sistemas que presentan distribuciones del tipo “heavy-tailed”, en concreto, del tipo ley de potencias. Un ejemplo de esto es la existencia de ruido $1/f$, encontrado al estudiar diversos sistemas físicos, por ejemplo: resistencias, un reloj de arena, el flujo del río Nilo o la luminosidad de las estrellas [4].

El término ruido $1/f$ es usado para describir cualquier ruido con una distribución en términos de potencia, del tipo:

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\alpha}. \quad (6.1)$$

En su artículo de 1987 [4], Bak, Tang y Wiesenfeld asocian este comportamiento a un concepto, que ellos mismos llaman “self-organized criticality”. Su idea es que todos estos sistemas, aunque se rijan bajo distintas leyes y conceptos, tiene en común que, por su propia estructura y dinámica, evolucionan hacia un estado que presenta un comportamiento crítico de forma natural.

En contraposición a esta idea, se encuentran otro tipo de sistemas críticos, los cuales también presentan un comportamiento con distribuciones del tipo ley de potencias, pero solo lo hacen cuando se encuentran en el llamado punto crítico. Que estos sistemas se encuentren o no en dicho punto, va a depender de un parámetro externo de control. El ejemplo clásico de sistemas con puntos críticos son los cambios de fase de 2º orden en termodinámica o ferromagnetismo, donde el parámetro de control normalmente es la temperatura [16].

En esta sección, vamos a hacer uso de estos dos conceptos para ver por qué el modelo de las pilas de arena presenta criticidad auto-organizada. Y lo que es más importante, veremos el papel fundamental que juegan las condiciones de contorno en este aspecto.

6.1.1. TRANSICIÓN DE FASE DE 2º ORDEN Comenzamos considerando un sistema cerrado, por tanto, sin intercambio de materia con el medio. En nuestro modelo, esto se

traduce en utilizar condiciones de contorno que conserven la cantidad total de arena en el sistema: cerradas o cíclicas.

A continuación, vamos a puntualizar algo muy importante que además, nos servirá, en cierta manera, para poder extrapolar los resultados obtenidos a otros sistemas. Es relativamente fácil establecer una equivalencia entre la arena en nuestro modelo y alguna forma de energía almacenada en cualquier sistema físico.

En nuestro modelo, la cantidad de arena en una celda nos daba la idea intuitiva de la altura de un montoncito en dicha posición. Además, al alcanzarse un valor umbral, toda esa arena, o una parte de ella, caía a los puntos de alrededor. La altura del montoncito puede verse como una forma de energía potencial y el proceso de toppling o colapso, como una forma de disipación o transferencia de energía a los elementos adyacentes que sólo se da alcanzado un umbral, es decir, es la dinámica de nuestro sistema.

Gracias a esta equivalencia, nuestro sistema cerrado también será aislado, ya que tampoco existe transferencia de energía con el medio exterior.

Definiremos la actividad en nuestro sistema como, $s(t)/L^2$, siendo $s(t)$ el número de topplings en un cierto frame t .

Si simulamos un sistema aislado, con una cierta cantidad de arena (a partir de ahora energía) inicial en su interior, y lo dejamos evolucionar, como sabemos de termodinámica, eventualmente alcanzará el equilibrio. En ese momento, salvo pequeñas fluctuaciones, la actividad en el modelo debería mantenerse constante (Estrictamente, al tratarse de un sistema no ergódico, no se alcanza el equilibrio real. En algún caso la actividad podría caer a cero y el sistema no pasaría a un siguiente estado).

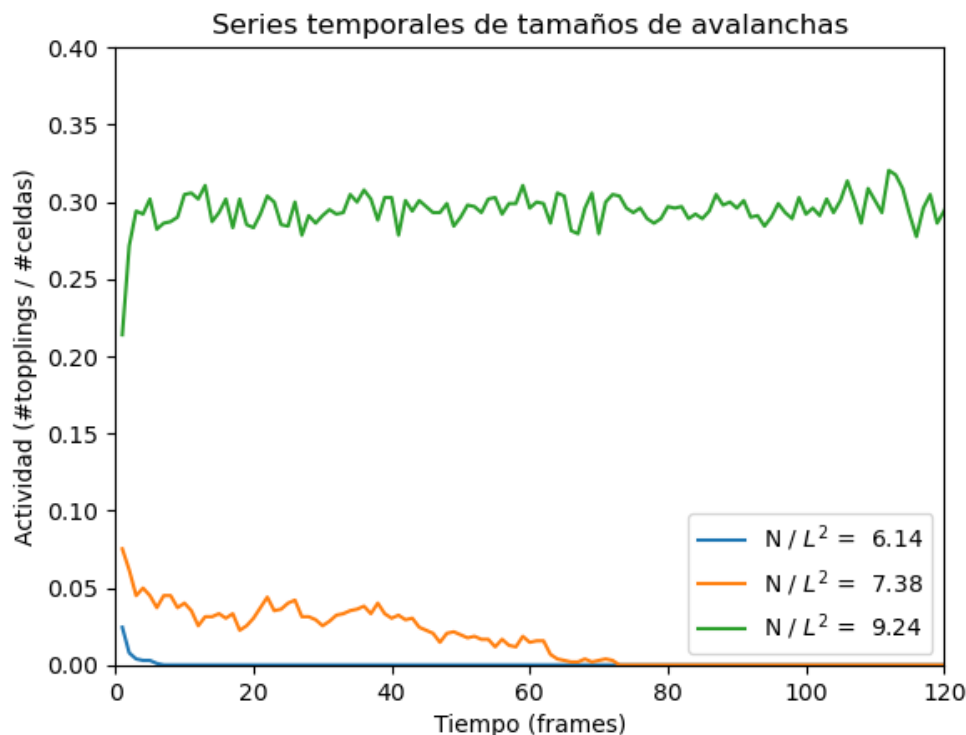


Figura 6.1: Actividad medida en cada frame, simulación precargada con fronteras cerradas, $L = 32$ y umbral = 12.

Es importante mencionar que, al contrario que en el resto del trabajo, en este caso no vamos añadiendo arena al modelo tras terminar las sucesivas avalanchas, sino que, inicializamos un modelo con una cantidad de arena fija en su interior y después simulamos la

dinámica durante una cierta cantidad de frames (archivos simulacion4.py y analisis4.ipynb [7]). Este proceso puede observarse en la figura 6.1.

Además, como el sistema es aislado, ese valor de actividad media a largo plazo sólo dependerá de la cantidad de energía en el sistema, y de las interacciones que tengan lugar a nivel local en este. Es decir, la cantidad de energía será, en este caso, el parámetro de control.

En este sentido, podemos recrear los diagramas de transición de fase vistos en termodinámica, para ello estudiamos el promedio temporal de actividad tras alcanzar el equilibrio para distintos valores de energía en el sistema. Si representamos esta actividad media frente a dicha energía, obtenemos la figura 6.2.

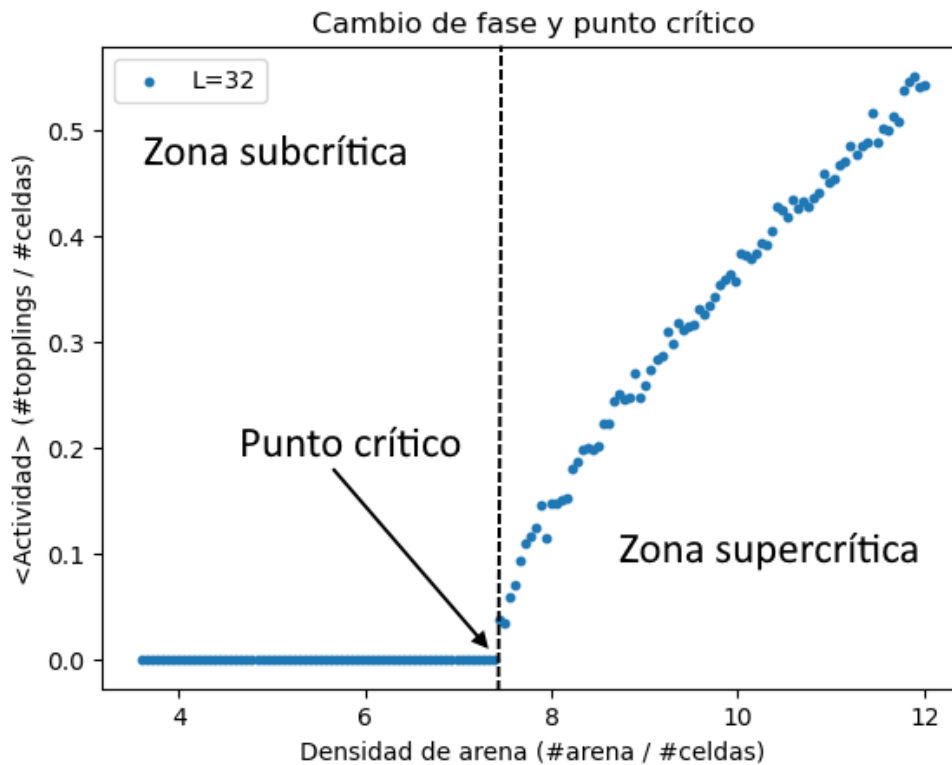


Figura 6.2: Transición de fase, simulación precargada con fronteras cerradas, $L = 32$ y umbral = 12.

En la transición de fase se distinguen tres regiones de interés:

- **Zona subcrítica:** Para estos valores del parámetro de ajuste, aunque en un principio durante el régimen transitorio puede haber actividad, esta decae exponencialmente hasta cero alcanzando un estado estacionario. En el modelo de la pila de arena se traduce en avalanchas poco frecuentes, pequeñas y muy cortas. Se dice que el sistema está en un estado absorbente.
- **Zona supercrítica:** En este caso, tras un breve régimen transitorio, la actividad se estabiliza entorno a un valor medio alcanzando el “equilibrio”. Normalmente, salvo una fluctuación demasiado grande, el sistema nunca alcanza un valor nulo de actividad, en este sentido, el modelo de pilas de arena nunca llega a estabilizarse y la avalancha tendría duración y tamaño infinito. El sistema está en un estado activo.
- **Punto crítico:** En su entorno, encontramos el comportamiento crítico del sistema,

es decir, invariancias de escala tanto temporales como espaciales. En el modelo de las pilas de arena, es aquí donde encontramos las distribuciones tipo ley de potencias.

Los valores de densidad de energía representados en la figura 6.1 no son casuales. Las líneas azul, verde y naranja corresponden a valores en la zona subcrítica, zona supercrítica y en el entorno de punto crítico respectivamente.

6.1.2. PROCESOS DE CARGA Y DESCARGA Como se ha mencionado previamente en el trabajo, el modelo de las pilas de arena, en su versión con fronteras abiertas, presenta criticidad auto-organizada. Para entender cómo sucede esto debemos tener en cuenta dos fenómenos que ocurren simultáneamente en nuestro modelo.

En primer lugar, como las fronteras son abiertas, si el sistema se adentra demasiado en la zona supercrítica, comenzarán a aparecer avalanchas de gran tamaño. De esta forma, la densidad de energía en el sistema decrecerá muy rápidamente al derramarse la arena por los bordes. A este fenómeno le llamamos proceso de descarga. Esto sucederá hasta que el sistema se estabilice y cesen las avalanchas. Sin embargo, esto significaría que se ha alcanzado un equilibrio con actividad nula, es decir, que el sistema acabaría en la zona subcrítica.

Es aquí donde entra en juego el segundo proceso, al que llamaremos carga. Al ir añadiendo arena repetidamente al modelo, estamos incrementando la densidad de energía en el sistema. Por tanto, lo estamos acercando de nuevo a la zona supercrítica.

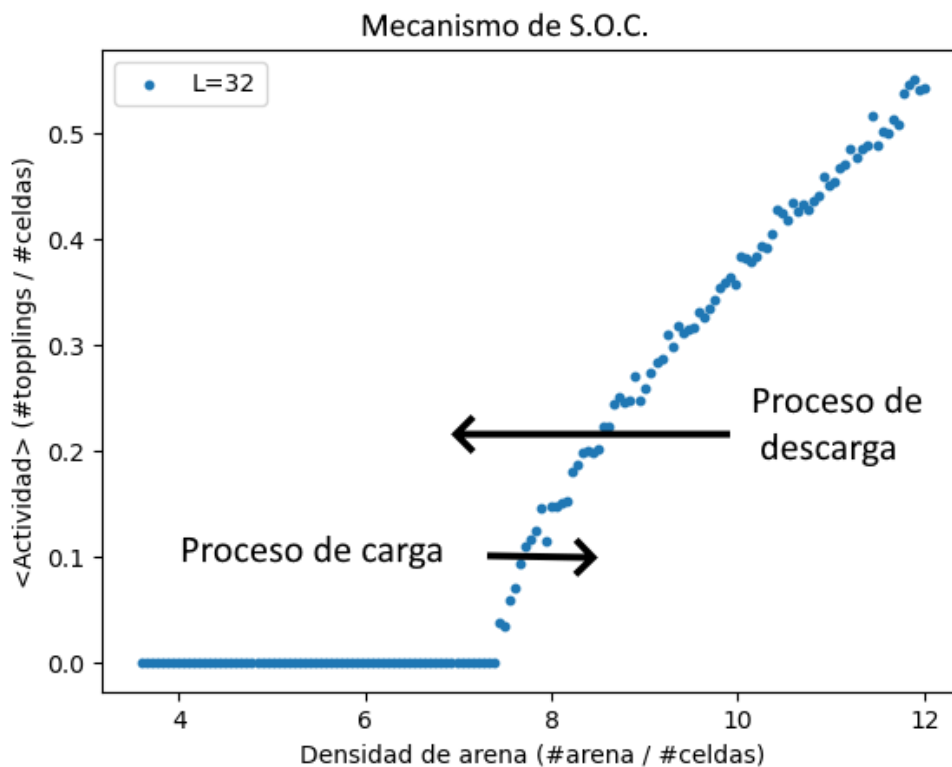


Figura 6.3: Mecanismo de S.O.C. en el modelo, procesos simultáneos de carga y descarga.

Es la combinación de estos dos procesos (figura 6.3) lo que compone el mecanismo de S.O.C. del modelo. Para que esta combinación de procesos funcione correctamente y el sistema esté lo más cerca posible del punto crítico en todo momento, es importante mantener una diferencia de escala temporal entre el proceso de carga y de descarga.

Mientras que la carga se produce lentamente, añadiendo un grano de arena cada frame solo si el sistema está en un estado absorbente, la descarga se produce mucho más rápido, en un mismo frame una gran cantidad de energía puede ser disipada en los bordes.

6.2. APLICACIÓN EN SISTEMAS NATURALES

6.2.1. SISTEMAS GEOLÓGICOS Una discusión similar puede explicar cualitativamente por qué encontramos distribuciones “heavy-tailed” en las magnitudes de terremotos [17]. La energía potencial acumulada en el choque de placas tectónicas se libera, formando una reacción en cascada. Además, al existir una fuerza de rozamiento a superar, encontramos un umbral en la dinámica del sistema.

El estado activo se da en el propio sismo, dónde la actividad del sistema es máxima y se produce una gran descarga de la energía acumulada. Por otro lado, en el estado de absorción el sistema acumula energía poco a poco mediante los esfuerzos de cizalladura producidos en las fallas. Además, encontramos una diferencia de escala temporal entre los procesos de carga y descarga. El terremoto puede durar minutos mientras que el estado absorbente suele durar años.

6.2.2. REDES NEURONALES Como se ha mencionado en la introducción, las avalanchas neuronales en redes corticales también presentan un comportamiento crítico [15]. Lo que no se sabe a ciencia cierta es si esta criticidad observada es auto-organizada o no. La criticidad auto-organizada en sistemas biológicos es una cuestión bastante controvertida [18], sobre todo en el ámbito de la neurociencia. Además, en caso de darse, no se sabe qué mecanismo, similar al de carga y descarga en sismos y la pila de arena, da lugar a dicho comportamiento.

Sin embargo, en [19] se presentan argumentos a favor de la criticidad auto-organizada en neuronas. Se expone, mediante el estudio temporal de un parámetro Δp , que mide la desviación de la estadística del sistema respecto a la ley de potencias pura, que el sistema de neuronas tiende espontáneamente a un estado crítico, figura 6.4.

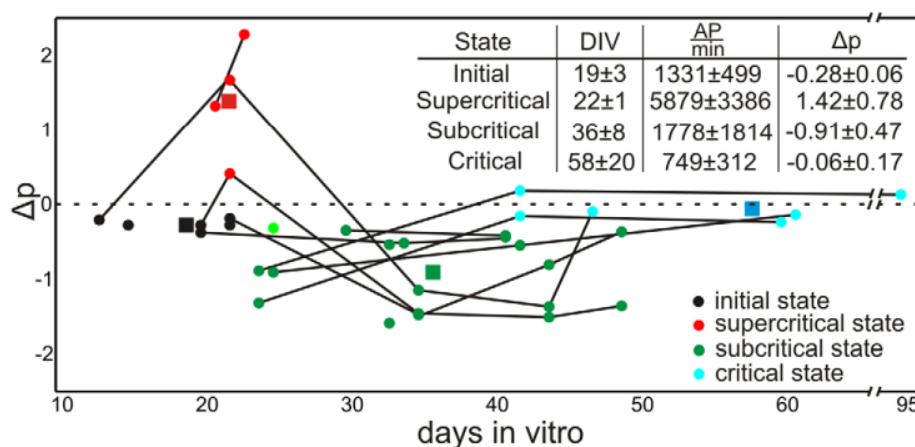


Figura 6.4: Estados de sistemas de neuronas a lo largo del tiempo, arriba zona supercrítica, abajo zona subcrítica, [19].

Por otro lado, en [20] se plantea una dinámica de sinapsis que, asumida en modelos tanto numéricos como analíticos, demuestra la aparición de leyes de potencias con exponentes robustos, sin necesidad de ajuste de ningún parámetro externo.

6.2.3. COMPORTAMIENTOS COLECTIVOS La criticidad también ha sido observada en agrupaciones de animales, como cardúmenes, bandadas de pájaros o enjambres de insectos, como forma de optimizar su capacidad de cálculo colectivo [21]. De cierto modo, son sistemas formados por muchos individuos que interaccionan localmente entre ellos, es decir, son sistemas complejos que pueden ser estudiados desde el punto de vista de la física estadística. Además, podemos definir longitudes de correlación o formas de medir avalanchas de actividad en el sistema.

En [21] se discute sobre la aplicación de conceptos físicos, como las transiciones de fase, a estos sistemas biológicos. Además, se habla de un nuevo enfoque, que sugiere que estos sistemas son capaces de autoajustarse a cierta distancia de la criticidad, y explora los potenciales beneficios de este fenómeno frente a operar exactamente en el punto crítico.

Para entender el siguiente razonamiento, recuperamos forma de identificar puntos críticos vista en la introducción. En primer lugar, definimos un parámetro de orden y buscamos picos de sensibilidad de dicho parámetro frente a perturbaciones externas. El valor del parámetro que presente un máximo de sensibilidad, susceptibilidad en términos de electromagnetismo, nos dará un punto crítico.

Si el sistema se encuentra constantemente en un máximo de sensibilidad (punto crítico), una pequeña perturbación o incluso ruido podría alterar bruscamente todo el grupo. Por tanto, se observa que los sistemas en realidad operan en una zona algo subcrítica, de forma que perturbaciones pequeñas afecten solo de forma local a unos pocos individuos, y perturbaciones más grandes o amenazantes sí consigan influir sobre todo el grupo. De esta forma se consigue un acuerdo entre percepción y robustez, siendo ventajoso desde el punto de vista biológico. Incluso se teoriza que estos grupos podrían ajustar la distancia a la criticidad según el entorno, por ejemplo, teniendo en cuenta la posibilidad de depredación.

Conclusiones

En este trabajo se han desarrollado exitosamente todos los objetivos planteados.

Se ha conseguido comprender en qué consiste la criticidad auto-organizada encontrada en sistemas complejos. Además, se han estudiado e ideado distintas implementaciones del modelo de pilas de arena. De igual forma, se ha llevado a cabo una extensa revisión bibliográfica, en gran parte multidisciplinar, sobre distintos sistemas críticos encontrados en la naturaleza. Por último, se ha proporcionado una explicación lógica a aparición de criticidad auto-organizada en el modelo, extendiendo el razonamiento a otros sistemas.

Desde el punto de vista práctico, se han realizado desde cero varios programas, tanto en Fortran como en Python, ambos lenguajes desconocidos previamente, lo que ha supuesto un reto y un aprendizaje autodidacta. Además, se han obtenido y estudiado diversas distribuciones estadísticas con una cantidad de datos del orden de 10^8 en cada simulación. Posteriormente, se ha hecho uso de métodos ampliamente utilizados en el Grado, como el ajuste lineal, en combinación con técnicas avanzadas de estadística en sistemas críticos, como el escalado de tamaño finito (F.S.S.) o el colapso de datos reescalados.

Por último, los resultados han sido, en general, satisfactorios, lo que permite afirmar que el modelo de pilas de arena es una buena herramienta para estudiar y comprender el mundo que nos rodea. Los exponentes obtenidos son robustos y encajan completamente con el comportamiento esperado, cumpliendo además la correlación exigida entre ellos.

Conclusions

In this work, all the proposed objectives have been successfully achieved.

The understanding of self-organized criticality found in complex systems has been attained. Additionally, various implementations of the sandpile model have been studied and devised. Similarly, an extensive multidisciplinary literature review has been conducted on different critical systems found in nature. Lastly, a logical explanation has been provided for the emergence of self-organized criticality in the model, extending the reasoning to other systems.

From a practical standpoint, several programs have been developed from scratch, using both Fortran and Python, languages previously unfamiliar, which has represented a challenge and self-taught learning experience. Furthermore, various statistical distributions have been obtained and studied with a data quantity of the order of 10^8 in each simulation. Subsequently, widely used methods in the Degree program have been applied, such as linear fitting, in combination with advanced statistics techniques in critical systems, such as finite-size scaling (F.S.S.) or rescaled data collapse.

Finally, the results have been generally satisfactory, allowing us to affirm that the sandpile model is a valuable tool for studying and understanding the world around us. The obtained exponents are robust and completely fit the expected behavior, also fulfilling the required correlation among them.

Bibliografía

- [1] Marković, D., & Gros, C. (2014). Power laws and self-organized criticality in theory and nature. *Physics Reports*, 536(2), 41-74.
- [2] Munoz, M. A. (2018). Colloquium: Criticality and dynamical scaling in living systems. *Reviews of Modern Physics*, 90(3), 031001.
- [3] Dctolosav, Trabajo propio. https://es.wikipedia.org/wiki/Pila_de_arena#/media/Archivo:Fig.intro.jpg
- [4] Bak, P., Tang, C. & Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise. *Physical review letters*, 59(4), 381.
- [5] Zhang, Y. C. (1989). Scaling theory of self-organized criticality. *Physical Review Letters*, 63(5), 470.
- [6] Manna, S. S. (1991). Two-state model of self-organized criticality. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 24(7), L363.
- [7] <https://github.com/JLSM02/SOC>
- [8] https://gcc.gnu.org/onlinedocs/gfortran/RANDOM_005fNUMBER.html
- [9] <https://numpy.org>
- [10] <https://matplotlib.org>
- [11] <https://numpy.org/doc/stable/f2py/>
- [12] James, F. (1990). A review of pseudorandom number generators. *Computer physics communications*, 60(3), 329-344.
- [13] Pisarenko, V. F., & Sornette, D. (2003). Characterization of the frequency of extreme earthquake events by the generalized Pareto distribution. *pure and applied geophysics*, 160, 2343-2364.
- [14] Dennis, B. R. (1985). Solar hard X-ray bursts. *Solar physics*, 100, 465-490.
- [15] Klaus, A., Yu, S., & Plenz, D. (2011). Statistical analyses support power law distributions found in neuronal avalanches. *PloS one*, 6(5), e19779.
- [16] Dong, Q. Y., Zhang, H. W., Sun, J. R., Shen, B. G., & Franco, V. (2008). A phenomenological fitting curve for the magnetocaloric effect of materials with a second-order phase transition. *Journal of Applied Physics*, 103(11).

- [17] Sornette, A., & Sornette, D. (1989). Self-organized criticality and earthquakes. *Europhysics Letters*, 9(3), 197.
- [18] Mora, T., & Bialek, W. (2011). Are biological systems poised at criticality?. *Journal of Statistical Physics*, 144, 268-302.
- [19] Tetzlaff, C., Okujeni, S., Egert, U., Wörgötter, F., & Butz, M. (2010). Self-organized criticality in developing neuronal networks. *PLoS computational biology*, 6(12), e1001013.
- [20] Levina, A., Herrmann, J. M., & Geisel, T. (2007). Dynamical synapses causing self-organized criticality in neural networks. *Nature physics*, 3(12), 857-860.
- [21] Romanczuk, P., & Daniels, B. C. (2023). Phase transitions and criticality in the collective behavior of animals—self-organization and biological function. In *Order, Disorder and Criticality: Advanced Problems of Phase Transition Theory* (pp. 179-208).
- [22] Thurner, S., Hanel, R., & Klimek, P. (2018). *Introduction to the theory of complex systems*. Oxford University Press.
- [23] Olive, D. J. (2008). *Applied robust statistics*. Preprint M-02-006. pp. 86–87.
- [24] Toledo-Roy, J. C., Rivera, A. L., & Frank, A. (2019, September). Symmetry, criticality and complex systems. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2150, No. 1). AIP Publishing.
- [25] Binney, J. J., Dowrick, N. J., Fisher, A. J., & Newman, M. E. (1992). *The theory of critical phenomena: an introduction to the renormalization group*. Oxford University Press.

Anexo: Demostración de exponente de correlación

Si tenemos en cuenta los observables x y x' , bajo la premisa de F.S.S., en general se cumple que en el límite $L \rightarrow \infty$:

$$x' \sim x^{\gamma_{x'x}} \quad (2)$$

dónde la notación “ \sim ” indica proporcionalidad en el límite asintótico. A continuación, trataremos de encontrar una expresión analítica para $\gamma_{x'x}$.

Partimos planteando que la probabilidad de encontrar un cierto valor de un observable, se puede expresar con la probabilidad conjunta al otro observable e integrando todos los posibles valores de este último, es decir:

$$p_{x'}(x') = \int p_{x'x}(x', x) dx. \quad (3)$$

Esa probabilidad conjunta, para sucesos independientes se puede factorizar. Sin embargo, se ve intuitivamente que, por ejemplo, el tamaño de la avalancha está relacionado con su duración y viceversa. Esta influencia de una variable a otra, podemos expresarla en términos de la probabilidad condicionada.

$$p_{x'x}(x', x) = p_{x'x}(x'|x)p_x(x). \quad (4)$$

Dicha probabilidad condicionada, teniendo en cuenta la expresión 2, podemos asumirla como una delta de Dirac:

$$p_{x'x}(x'|x) = \delta(x' - x^{\gamma_{x'x}}). \quad (5)$$

A continuación, usamos la siguiente propiedad de la delta de Dirac:

$$\delta(f(y)) = \sum_n \frac{1}{|f'(y_n)|} \delta(y - y_n) \quad (6)$$

dónde los x_n son aquellos ceros de la función $f(y)$ tales que $f'(y_n) \neq 0$. En este caso, indentificando $y = x$, solo tenemos un cero, y toma el valor de:

$$x_0 = x'^{\frac{1}{\gamma_{x'x}}}. \quad (7)$$

Por tanto, introduciendo este desarrollo en la ecuación 3, queda la siguiente expresión:

$$p_{x'}(x') = \frac{1}{\gamma_{x'x} x'^{\frac{\gamma_{x'x}-1}{\gamma_{x'x}}}} \int \delta(x - x'^{\frac{1}{\gamma_{x'x}}}) p_x(x) dx. \quad (8)$$

Por otro lado, de la hipótesis de F.S.S. 5.2, sabemos que en el límite $L \rightarrow \infty$, también se cumple que:

$$p_x(x) \propto x^{-\tau_x}. \quad (9)$$

Si sustituimos e integramos,

$$p_{x'}(x') = \frac{C}{\gamma_{x'x} x'^{\frac{\gamma_{x'x}-1}{\gamma_{x'x}}}} \int \delta(x - x'^{\frac{1}{\gamma_{x'x}}}) x^{-\tau_x} dx = \frac{C x'^{\frac{-\tau_x}{\gamma_{x'x}}}}{\gamma_{x'x} x'^{\frac{\gamma_{x'x}-1}{\gamma_{x'x}}}} \quad (10)$$

que agrupando constantes y exponentes nos queda como:

$$p_{x'}(x') \propto x'^{\frac{-\tau_x - (\gamma_{x'x}-1)}{\gamma_{x'x}}} = x'^{\frac{-\tau_x+1}{\gamma_{x'x}}-1}. \quad (11)$$

Además, sabemos que en $L \rightarrow \infty$, la expresión 9 también se cumple para x' :

$$p_{x'}(x') \propto x'^{-\tau_{x'}}. \quad (12)$$

Por último, igualando exponentes en 11 y 12, nos queda la siguiente ecuación:

$$-\tau_{x'} = \frac{-\tau_x + 1}{\gamma_{x'x}} - 1 \quad (13)$$

de la cual despejamos el exponente de correlación.

Finalmente, obtenemos una expresión para $\gamma_{x'x}$ en función de los exponentes de escala de cada observable:

$$\gamma_{x'x} = \frac{-\tau_x + 1}{-\tau_{x'} + 1} = \frac{\tau_x - 1}{\tau_{x'} - 1}. \quad (14)$$