图论学习笔记（1）- 图的介绍 An introduction to graphs

大PPP
留学划水党 押井厨

注：本文是针对NTU MH3300 Graph Theory的学习笔记，相对来说比较基础，需要离散数学和线性代数知识作为前置

本系列会在理论内容中穿插一些例子用来更直观地理解~

本文为第一章，目录如下

笔者是在学习过程边学边写，因此很多后面的知识暂时还没有学到，文章或将随时更改

因为知乎排版问题，网页版知乎阅读效果更好哦～

1.1 基础内容

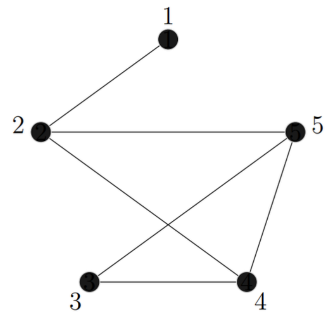
图（Graph）是用于表示物体与物体之间存在某种关系的结构。我们将所谓的“物体”称作**节点**（vertex 复数vertices），节点间的相关关系则称作**边**（edge）

图 G **节点的集合**记为 $V(G)$ （**vertex set**），那么节点的数量为 $|V(G)|$

图 G **边的集合**记为 $E(G)$ （**edge set**），那么边的数量为 $|E(G)|$

我们一般用 $G=(V,E)$ 表示一个图，其中 V 为节点的集合， G 为边的集合

例子1.1



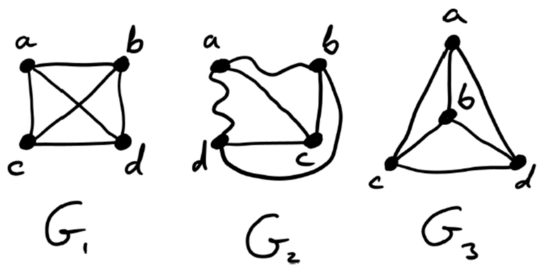
对于这个图，有

$V(G)=\{1,2,3,4,5\},|V(G)|=5$

$E(G)=\{12,24,25,34,35,45\},|E(G)|=6$

图的形状，或者说点的位置是不重要的，我们只在意哪些点是相连的

所以下面三个图即使看上去形状不同但实际上是相同的图



若两个节点 x,y 是邻接的

- 我们用 $x\sim y$ 表示， x,y 分别为对方的**邻居（neighbor）**
- 若 e 是连接 x,y 的边，我们用 $e=xy$ 或 $e=yx$ 表示，节点 x,y 是边 e 的**端点**（endpoint）

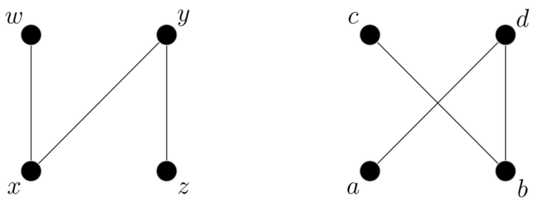
一个**自环（loop）**是一条端点为同一个点的边，**多重边（multiple edges）**为有同一对端点的边，如下图

a loop　　　　multiple edges

一个简单图（simple graph）是没有自环和多重边的图。

两个图 G, H 是**相同的（identical）** 若 $V(G) = V(H)$ 且 $E(G) = E(H)$ 。

但是对于图来说，即使不是相同的图（比如节点的顺序不同），也仍然可能是同一个样子的图像，例子如下



对于这样的图，我们称之为**图同构⁺（Graph Isomorphism）**

定义 1.2 图同构（Graph Isomorphism）

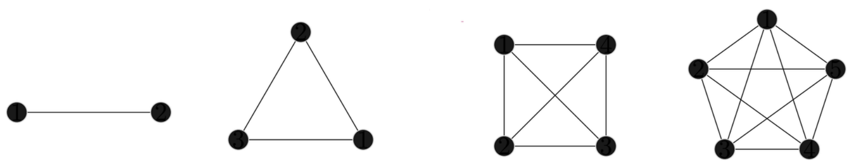
令 G, H 为简单图，从 G 到 H 的同构为一个双射 $f: V(G) \to V(H)$ 满足 $uv \in E(G)$ 当且仅当 $f(u)f(v) \in E(H)$

我们说 G 和 H 同构，写为 $G \cong H$

（同构的两个图有相同数目的边和相同数目的顶点，且它们有着一一对应的关系，对应的顶点具有相同的连接性）

1.2 一些特殊的图

1. 一个**空图（empty/null graph）**是没有边的图（注意，这说明空图可以有很多个节点哦）
2. 一个**完全图（complete graph）**是一个简单图，满足任意两个不同的节点都由一条边相连。对于包含 n 个节点的图，只有一个完全图，表示为 K_n



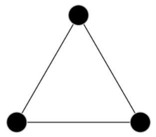
K_2　　K_3　　K_4　　K_5

K_1就是单独的一个节点

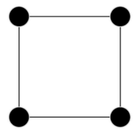
3. **路径（path）**是一个简单图，其节点可以按顺序写成一个列表，其中两个节点是邻接的当且仅当他们在列表中位置是相邻

P_2 P_3 P_4 P_5

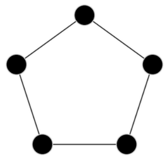
4. **环（cycle）**是一个节点和边数量相同的简单图，其中它的节点可以被放在一个圈中，其中两个节点是邻接的当且仅当他们在圈中位置是相邻的。对于包含 n 个节点的图，只有一个环，表示为 C_n



C_3



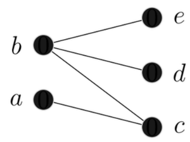
C_4



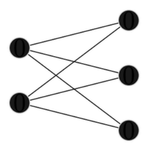
C_5

5. **k部图（k-partite）**（答主os：不如翻译成k分图吧，正好和二分图⁺是一类）是一个图 $G=(V,E)$ 满足节点集合 V 可以被写成 k 个完全不相交的子集 $V_1,\ldots,V_k$（称为partite set）的并集，且对于在同一子集的任意一对节点，都不存在连接这对节点的边。

6. **二分图（2-partite graph / bipartite graph）**，记为 $G=(A,B,E)$ 其中 A,B 为两个partite set，E 为边的集合。



7. **完全二分图（complete bipartite graph）**为一个二分图，其两个节点是邻接的当且仅当他们在不同的partite set中。对于partite set节点数量分别为 r,s 的完全二分图，只存在一个，记为 $K_{r,s}$



$K_{2,3}=K_{3,2}$

对于一个图 $G=(V,E)$，我们用 $v(G)=|V|$ 表示节点的数量，$e(G)=|E|$ 表示边的数量，我们有：

例子1.3

$v(P_n)=n$，$e(P_n)=n-1$

$v(C_n)=n$，$e(C_n)=n$

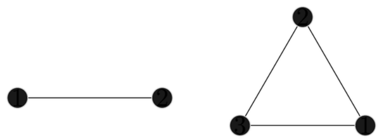
$v(K_n)=n$，$e\left(K_n\right)=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

$v(K_{r,s})=r+s$，$e(K_{r,s})$

union）得到一个新的图，写为 $G \cup H$，节点的集合为 $V \cup W$，边的集合为 $E \cup F$

例子 1.4

K_2, K_3 的不交并为



1.3 邻接矩阵⁺和关联矩阵⁺

到现在为止，我们都是画出一个图，那么有没有其他的表示方式吗？

这里我们给出两种用来表示图的矩阵

定义 1.5（邻接矩阵 Adjacency Matrix）

令 G 为一个无自环的图，且有节点集合 V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}

G 的邻接矩阵，表示为 A(G) 是一个 n\times n 矩阵，元素 a_{ij} 等于 G 中以 \{v_i,v_j\} 为端点的边的数量

定义 1.6（关联矩阵 Incident Matrix）

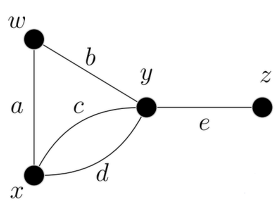
令 G 为一个无自环的图，且有节点集合 V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}和边的集合 E(G)=\{e_1,e_2,...,e_m\}

G 的关联矩阵，表示为 M(G) 是一个 n\times m 矩阵，元素 m_{ij} 等于 1 若 v_i 是 e_j 的一个端点，否则等于 0

我们给一个例子

例子 1.7

按照节点顺序 w, x, y, z 和边的顺序 a, b, c, d, e 给出下图的邻接矩阵和关联矩阵



A(G)=\begin{array}{c} w \quad x \quad y \quad z \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{aligned} & w \\ & x \\ & y \\ & z \end{aligned} \end{array}\tag{1.7.1} M(G)=\begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 &0\\ 1 & 0 & 1 & 1& 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 &1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1

一些关于邻接矩阵的特点

1. 一个邻接矩阵由节点的顺序决定，第 i 个节点对应第 i 行第 i 列
2. 每个邻接矩阵都是对称矩阵
3. 若 G 是一个简单图， A(G) 的元素是 0 或 1
4. 若 G 没有自环，则矩阵对角线上的值都是 0
5. 第 i 行的元素和是连接到第 i 个节点的变的数量

一些关于关联矩阵的特点

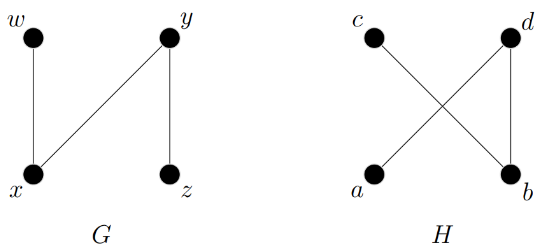
1. 一个邻接矩阵由节点和边的顺序决定，第 i 个节点对应第 i 行，第 j 条边对应第 j 列（之前有笔误，感谢知友 @jho 提醒！）
2. M(G) 的元素都是 0,1
3. 每列都有正好两个 1 ， 因为每条边都有正好两个端点
4. 第 i 行的 1 的数量是连接到第 i 个节点的变的数量

这个矩阵的表示可以用来做什么呢?

我们给出一个例子看看

例子 1.8

考虑下面两个图



对图 G ， 用下列两种节点顺序作邻接矩阵

1. w, x, y, z
2. w, y, z, x

对于图 H ， 用顺序 a,b,c,d 作邻接矩阵

解:

对于 G ，

1. w, x, y, zA(G)=\left(\begin{array}{llll} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\tag{1.8.1}
2. w,y,z,xA(G)=\left(\begin{array}{llll} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\tag{1.8.2}

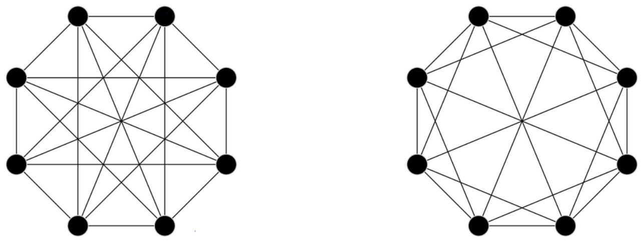
对于 H

1. a,b,c,dA(H)=\left(\begin{array}{llll} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\tag{1.8.3}

对于这种情况，若两个图可以找到一些节点排列顺序使得作出的邻接矩阵相同（只要找到一对就行），即说明两个图同构。

除了这种检验邻接矩阵的方式，我们还有另一种方法来判断是否为同构（当然也可以选择一个节点一个节点去match，也是可以的），以下面的为例

例子 1.9



G H

判断这两个图是否为同构

解：

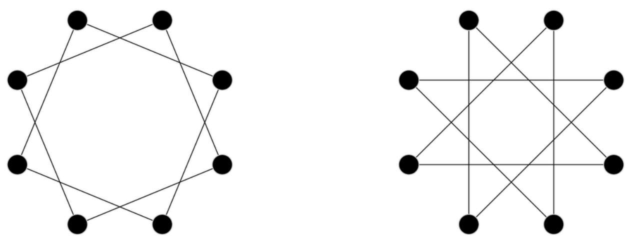
画这个邻接矩阵很复杂，那么我们另一个方面来想

我们考虑他们的**补图（complement）**

和集合里面的补类似，对于一个简单图 G=(V,E) 来说，它的补 \bar{G} 有节点集合 V(G)，边 uv\in E(\bar{G}) 当且仅当 uv\not \in E(G)，注意到一个图 G 是完全由其补图决定的，反之亦然。

所以若补图同构则原图也同构，补图不同构则原图也不同构

对于上图，他们的补如下



$\overline{G}$ $\overline{H}$

我们看出 \bar{G} 由两个长度为 4 的环构成， 而 \bar{H} 则有一个长度为 8 的环，显然不同构

因为 G,H 也不同构

1.4 子图和诱导子图

一个图 H 是 G 的**子图（subgr**

若 H 为 G 的子图，那么我们写为 H ⊆ G

G 的生成子图（Spanning Subgraph）是一个子图 H 且 V (H) = V (G)

假设 U ⊆ V 为图 G = (V, E) 节点集合的一个子集，我们用 G[U] 表示一个子图，满足其节点集合为 U，边集合包含所有两个端点都在 U 中的边。我们说 G[U] 为 G 的一个诱导子图。

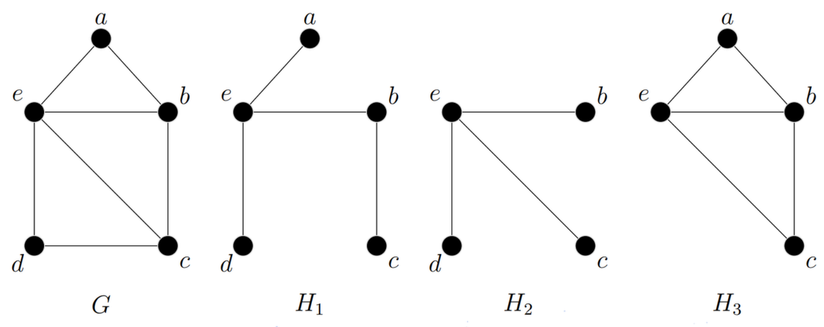
反过来，若 H 为 G 的一个**诱导子图（Induced Subgraph）**，那么 H=G[U]\tag{1.4.1}

其中 U=V(H)

也就是说， G 中任何一个两个端点都在 V(H) 里的边都是 H 的一条边。

例子 1.12

考虑下面的几个图



1. H_1 是 G 的子图，且是一个生成子图，因为包含了 G 的所有节点。但它并不是一个诱导子图，因为 ab, dc, ec \not∈ E(H_1)
2. H_2 是 G 的子图，但不是一个生成子图，因为并没有包含 G 的所有节点。它也不是一个诱导子图，因为 cd, bc \not∈ E(H_2)
3. H_3 是 G 的子图，但不是一个生成子图，因为并没有包含 G 的所有节点。但它是一个诱导子图， H_3 = G[U] 其中 U = \{a, b, c, e\}

1.4.1 度求和公式

图 G 中一个节点 v 的**度（degree）**定义为与该节点连接的边的数量，记为 d_G(v)

1. 一个**奇节点（odd vertex）**是度数为奇数的节点
2. 一个**偶节点（even vertex）**是度数为偶数的节点

我们用 \delta(G),\Delta(G) 分别表示 G 的最小和最大度数，即 δ(G) = min\{d(v) : v ∈ V (G)\}\tag{1.4.1.1}\Delta(G) = max\{d(v) : v ∈ V (G)\}\tag{1.4.1.2}

已知这个定义，我们给出图论中基础但重要的公式之一

定理 1.13（度求和公式 Degree-Sum Formula）

若 G = (V, E) 是一个没有自环，有 m 条边的图，那么 \sum_{v\in V} d(v) = 2m\tag{1.13}

（即一个图度数的和等于边数的二倍）

两种证明方式：

法2：考虑关联矩阵 $M(G)$

我们用两种方法来数关联矩阵中 1 的个数

1. 按列加：每列有正好两个 1 ，共有 m 列，所以一共 2m 个 1
2. 按行加：每行有 $d(v)$ 个 1 ，总共 $\sum_{v\in V} d(v)$ 个

我们来应用一下

例子 1.14

假设一个图有 100 个节点，每个节点的度数为 5 ，共有多少条边?

解： $\frac{5 \times 100}2 = 250\tag{1.14}$

例子 1.15

存在只有一个奇节点的图吗?

解：不存在，假设 v_1 为奇数节点，其他节点均为偶节点，那么 $d(v_1)$ 为奇数， $d(v_2)+\cdots+d(v_n)$ 为偶数，因此他们的和一定是奇数，与度求和公式矛盾。

例子 1.16

假设有一个图有 7 个节点， $\delta(G) = 3, \Delta(G)=5$ ，证明至少要有 12 条边

解:

至少有一个节点的度是 5 ，最多有 6 个节点的度是 3 ，所以有 $23=\underbrace{3+\cdots+3}_{6 \text { times }}+5 \leq d\left(v_1\right)+\cdots+d\left(v_7\right)=2 m \tag{1.16}$所以 $m\geq 12$

1.5 路径，环，轨迹和链

定义 1.19 轨迹和链（trail and walk）

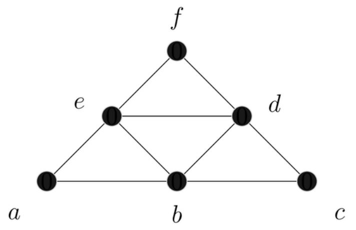
1. **链（walk）** W 是 G 节点和边构成的一个序列 $(v_0, e_1, v_1, . . . , e_k, v_k)$ ，边 e_i 有端点 v_{i-1},v_i 。 v_0 为开始节点， v_k 为结束节点。我们可以反转一个链，得到 W^{-1} ，即 $(v_k, e_k, . . . , e_1, v_0)$ 。注意，**链可以有重复的边和节点。**
2. **轨迹（trail）**为一个**没有重复边**的链（注：可以有重复的节点）
3. **路径（path）**为一个**没有重复边和节点**的链
4. **环（cycle）**为一个没有重复边和节点的链 $(v_0, e_1, v_1, . . . , e_k, v_k)$ ，除了**第一个和最后一个节点相同**，即 $v_0=v_k$

通过强调第一个和最后一个节点，我们用 uv- walk 表示一个开始节点为 u ，结束节点为 v 的链

一个链或者轨迹是**closed（封闭）**的若第一个节点和最后一个节点相同，反之则为**open（开放）**的

一个路径，环，轨迹和链长度（length）等于其包含的边的数量

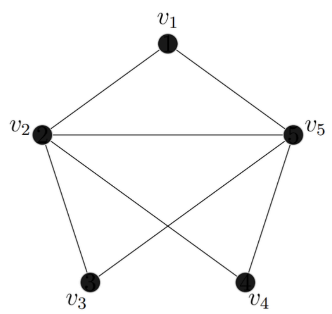
例子 1.20



1. 一个open walk： abedef dcbe， 长度 9
2. 一个closed walk： abedef dcbea， 长度 10
3. 一个open trail： abedbc， 长度 5
4. 一个closed trail： abedfea， 长度 6
5. 一个路径： aef dbc， 长度 5
6. 一个环： bcdeb， 长度 4

例子 1.21

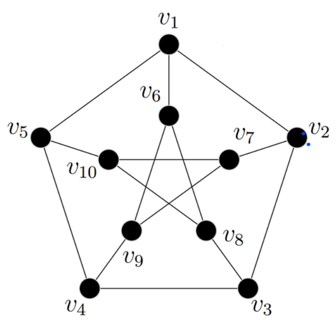
下图中为什么不存在长度为 5 的环



解：假设存在，那么这个环必须包含所有的节点（因为总共就只有五个节点），特别地，其必须包含节点 v_3,v_4， 所以必须含有边 v_2v_3, v_3v_5, v_2v_4,v_4v_5， 但这四条边已经生成了一个长度为 4 的环，所以不能有长度为 5 的环。

例子 1.22

找到下图中所有的长度为 5 的环



解：我们叫 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 为外圈的点，其他的为内圈的点

一个 5-环的出现有四种情况

1. 这个环所有的节点都在外圈 -

$v_2, \quad v_3 v_4 v_5 v_{10} v_8 v_3, \quad v_4 v_5 v_1 v_6 v_9 v_4, \quad v_5 v_1 v_2 v_7 v_{10} v_5$

4. 同理，有正好三个节点在内圈 - 五个环 $v_1 v_2 v_7 v_9 v_6 v_1, \quad v_2 v_3 v_8 v_{10} v_7 v_2, \quad v_3 v_4 v_9 v_6 v_8 v_3, \quad v_4 v_5 v_{10} v_7 v_9 v_4 , \quad v_5 v_1 v_6 v_8 v_{10} v_5$

因此共有 12 个

最后我们再给出几个零散的定义

定义 1.23（连通性 connectedness）

一个图 G 是连通的（connected）若 G 中任意两个节点都可以被一份路径相连，即总能找到一个uv-path，反之 G 是不连通的（disconnected）

我们将 K_1 （也就是只有一个节点没有边的图）规定为连通的

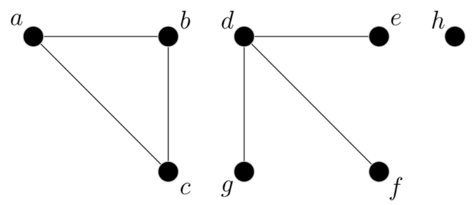
G 的最大连通子图（maximal connected subgraph / component）是一个连通的子图，并且其不包含在任何一个其他的连通子图中。 $w(G)$ 表示 G 中最大连通子图的数量。对于一个无向图，最大连通子图也成为联通分量/分量，为了简单起见我们用分量这个词表示最大连通子图。

一个最大连通子图是平凡的（trivial）若其没有边（也就是 K_1 ）， 反之则是不平凡的（nontrivial）

举个例子

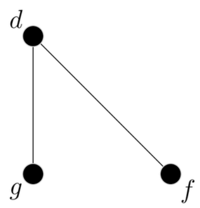
例子 1.24

观察图 G



这个图是不连通的， $G[\{a, b, c\}], G[\{d, e, f, g\}], G[\{h\}]$ 是三个最大连通子图，所以 $w(G)=3$ 。其中 $G[\{h\}]$ 是平凡的，另外两个是不平凡的。

下图虽然是 G 的子图，但并不是一个分量



H

最后我们以另一个重要的定理收

定理1.25

一个图是二分图当且仅当它不包含任何奇数环

证明：

$\Rightarrow$

假设 $G=(V,E)$ 是二分图，有两个部分 (X,Y) 。令 $C = v_0v_1 . . . v_kv_0$ 为一个环。我们假设 $v_0\in X$ ，因为 v_0 与 X 中任何节点都不相连，所以 v_1 一定在 Y 中。同理 $v_2\in X,v_3\in Y$。也就是说 $v_{2i} \in X$ 且 $v_{2i+1} \in Y$ ，所以 $k=2i+1$ ，总共有 $2i+2$ 条边，因此是偶数环。

$\Leftarrow$

我们假设 G 没有奇数环，要证 G 是一个二分图。令 $u\in V$ ，定义 $$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ 是偶数}\}\tag{1.25.1}$$ $$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ 是奇数}\}\tag{1.25.2}$$ 我们证明 (X,Y) 是这个二分图的两个部分

假设 $v,w\in X$ ， P 为最短的 (u,v) 路径， Q 为最短的 (u,w) 路径。设 u_1 为 P,Q 两个路径最后一个相同的节点。因为 P,Q 是最短路径，所以 (u,u_1) 的部分也都是最短的，长度相等。因为 $v,w\in X$ ，所以 P,Q 长为偶数， (u,u_1) 部分长度又一样，那么 P 的 (u_1,v) 部分路径 P_1 和 Q 的 (u_1,w) 部分路径 Q_1 的长度奇偶性是相同的，所以 (v,w) 路径 $P_1^{-1}Q_1$ 是偶数长度。如果 v,w 是邻接的，则 $P_1^{-1}Q_1v$ 生成了一个奇数环，矛盾，因此不可以邻接。

这说明对于 X 中的任意两个节点都是不临街的， Y 中的也同理，所以(X,Y) 是这个二分图的两个部分， G 是一个二分图。

最后的最后，本章节由一个邻接矩阵的有趣小性质结尾

例子1.28

令 A 为简单图 $G=(V,E)$ 的邻接矩阵，有节点顺序 $v_1, v_2, . . ., v_n$

解释为什么**A^2 的 (i,j) 元素等于从节点 v_i 到节点 v_j 长度为 2 的链的数量。**

解： $A=(a_{ij})$ 其中 a_{ij} 为 A 的 (i,j) 元素。那么A^2 的 (i,j) 元素为 $$\sum^n_{k=1}a_{ik}a_{kj}\tag{1.28.1}$$

注意到 $$\begin{gathered} a_{i k} a_{k j}=1 \Longleftrightarrow a_{i k}=1 \text { and } a_{k j}=1 \\ \Longleftrightarrow v_i \sim v_k \text { and } v_k \sim v_j \end{gathered}\tag{1.28.2}$$ 就得到了一个长度为 2 的链 $v_iv_kv_j$ 。所以（1.28.1）等于从节点 v_i 到节点 v_j 长度为 2 的链的数量。

同理，可以推广至 $A^3,A^4,...,A^k$

以上

-FIN-

所属专栏 · 2025-12-07 15:46 更新