Mardi le 23 octobre 2018 Durée : 15h30-17h30

GEL-3003 – Signaux et systèmes discrets : Examen 2 (correction sur 100, 30% de la note finale)

Signature : ______________________________

Répondez sur le questionnaire.
Aucune documentation permise.
L'examen compte 5 questions de 20 points.
Laissez des traces de vos démarches.

Question 1 (20 pts)

a) 10 pts) Vrai (V) ou faux (F)? Répondez dans l'encadré. Justification facultative.

	Un filtre RIF est nécessairement stable.
	Une séquence à droite est nécessairement causale.
	$y(n) = 2x(-n)$ est l'équation entrée-sortie d'un système LIT.
	Un pôle de module supérieur à l'unité implique une séquence instable.
	Il est possible qu'un filtre RIF ait une phase non-linéaire.
	Une filtre à phase linéaire a nécessairement un délai de groupe nul.
	La RDC d'une séquence mixte stable a une forme annulaire (anneau).
	$(-1)^n h(n) \leftrightarrow H(e^{j\omega} e^{j\pi})$.
	Une équation entrée-sortie avec vecteur $a = [1, -1]$ implique un système RII.
	Le filtre inverse de $H(z) = \frac{z^2+0.64}{(z-0.2)(z+0.4)}$ est causal et stable (séquence à droite).

b) (3 pts) Donnez la définition **générale** d'un système causal (pas nécessairement LIT).

c) (3 pts) Donnez la définition d'un système LIT causal (condition sur réponse impulsionnelle).

d) (4 pts) Calculez la transformée en Z du signal $x(n) = (0.5)^n[u(n) - u(n-4)]$ et donnez la région de convergence.

Question 2 (20 pts)

a) (17 pts) Utilisez la méthode de conception par fenêtrage pour obtenir la **réponse impulsionnelle** d'un filtre **passe-haut** et **causal** respectant les contraintes suivantes :

- $f_{stop} = 70$ kHz
- $A_{stop} = 20$ dB
- $f_{pass} = 80$ kHz
- $A_{pass} = 0.1$ dB
- $f_s = 200$ kHz

La réponse impulsionnelle doit être **la plus courte possible** et être associée à un délai de groupe minimal. Votre réponse finale doit utiliser le symbole $w_i(n, N)$ pour faire référence à une fenêtre de N points **centrée à l'origine**. Utilisez l'indice $i = R$ pour rectangulaire, H pour Hamming ou K pour Kaiser (dans ce dernier cas, donnez aussi la valeur de α).

b) (3 pts) Quel est le délai de groupe du filtre? Justifiez brièvement.

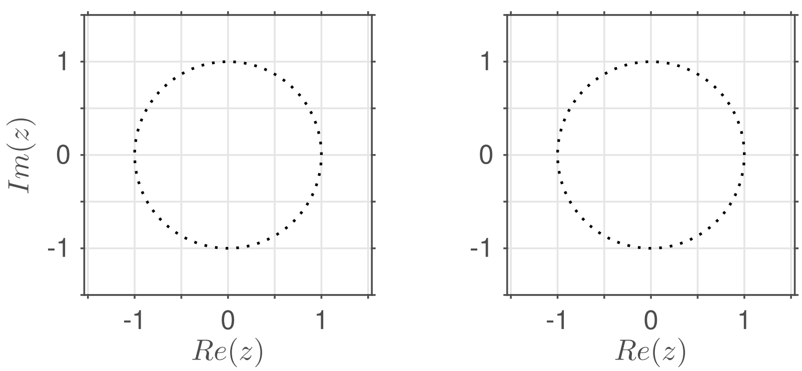
N’oubliez pas de répondre à la sous-question b).

Question 3 (20 pts)

Un signal analogique est échantillonné à f_s = 300 Hz. Immédiatement avant l'échantillonnage, le signal est contaminé par un « bruit 60 Hz » (signal parasite répétitif dont la période est 1/60 secondes) provenant d'un redresseur mal découplé. Ce bruit ne respecte pas nécessairement le critère de Nyquist et n'est pas préfiltrable.

a) (8 pts) En assumant d'abord que le bruit est une sinusoïde de fréquence 60 Hz, concevez un filtre permettant d'**annuler** ce bruit tout en changeant le moins possible le spectre du signal aux autres fréquences. Votre filtre doit être **causal, stable et réel** et sa constante de temps à 1% (régime transitoire) ne doit pas excéder 0.1 seconde. Donnez votre réponse finale via l'équation aux différences (entrée-sortie) du filtre en format $y(n) = \cdots$ et avec coefficients réels.
b) (4 pts) Est-ce que votre filtre en a) est à phase linéaire? Justifiez brièvement.
c) (4 pts) Quel est le gain DC de votre filtre?
d) (4 pts) En assumant plutôt que le bruit est une **onde carrée** à 60 Hz (ajout d'harmoniques à 180 Hz, 300 Hz, 420 Hz, etc.), modifiez votre filtre afin d'éliminer toutes les composantes parasites **après échantillonnage**. Utilisez les mêmes critères de conception qu'en a), mais donnez **uniquement la fonction de transfert** du filtre.

Vous pouvez utiliser les plans Z suivants pour vous aider dans la conception.



Question 4 (20 pts)

Pour mesurer l'emplacement d'un objet immobile distant, un LIDAR (radar laser) génère un signal discret $s_e(n) = -2\delta(n) + 2\delta(n-2)$ qui est converti en signal analogique puis modulé par une porteuse optique se propageant, évidemment, à 3×10^8 m/s. La lumière réfléchie par l'objet est reçue par le LIDAR, démodulée et échantillonnée **au taux initial** (même taux que la génération). Ainsi, le signal discret reçu est $s_r(n) = [-2, 1, -3, 1, -1, -2, 1]$ pour $103 \leq n \leq 109$. Ce signal est plus long que le signal envoyé en raison de réflexions parasites et de divers bruits.

a) (12 pts) Calculez la corrélation $s_r(n) ** s_e(n)$ par la méthode de superposition et addition (*overlap-add*) en utilisant des blocs du signal reçu $s_r(n)$ de longueur $L = 3$. Donnez les **sorties intermédiaires** ainsi que la **sortie finale**.
b) (4 pts) Quel est l'axe indiciel de la **sortie finale**? Justifiez brièvement.
c) (4 pts) Sachant que le taux d'échantillonnage est 1 GHz, quelle est la meilleure estimation de la distance entre l'instrument et l'objet? Négligez le délai dû à l'instrument.

Vous pouvez utiliser le quadrillé suivant pour vous aider à faire votre calcul.

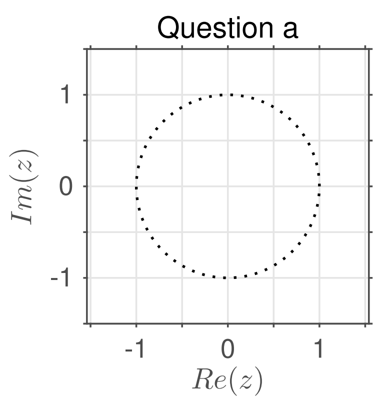
Question 5 (20 pts)

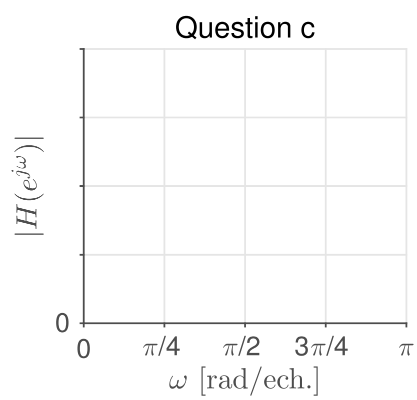
Dans Matlab, la fonction `diff()` permet de calculer la différence entre les éléments adjacents d'un vecteur. Dans certaines conditions, la sortie `y = fs*diff(x)`, où `fs` représente le taux d'échantillonnage f_s [Hz] et où `x` est un signal discret issu de l'échantillonnage de $x_a(t)$, constitue une bonne approximation de la dérivée en temps continu $y_a(t) = \frac{dx_a(t)}{dt}$.

Sachant que la fonction `diff()` donne la même sortie qu'un système LIT « H » dont la réponse impulsionnelle est $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$, répondez aux questions suivantes :

a) (4 pts) Identifiez tous les pôles et tous les zéros de la fonction de transfert du filtre H et placez-les dans le diagramme fourni.
b) (4 pts) Donnez la réponse impulsionnelle $g(n)$ du filtre **inverse causal**. S'agit-il d'un filtre stable, instable ou marginalement stable?
c) (6 pts) Donnez l'expression du module de la réponse en fréquence du filtre H. Tracez aussi votre réponse dans le graphique fourni et **graduez l'axe des ordonnées**.
d) (6 pts) Comparez l'amplitude (en régime permanent) de $y_a(t)$ et de `y` lorsque le signal traité est $x_a(t) = \cos(2\pi f_0 t + \pi/3)$, $-\infty < t < \infty$, avec $f_0 = \left\{0, \frac{f_s}{100}, \frac{f_s}{10}, \frac{f_s}{2}\right\}$. Répondez dans le **tableau fourni**. Expliquez dans quelles conditions il est justifié d'assumer `y` $\approx y_a\left(\frac{n}{f_s}\right)$ et faites le lien avec votre graphique obtenu en c).

$$\frac{d}{da}\cos(b) = -\sin(b)\frac{db}{da}$$





Question d

f_0	Amplitude de $y_a(t)$	Amplitude de y	Rapport des amplitudes
0			
$\frac{f_s}{100}$			
$\frac{f_s}{10}$			
$\frac{f_s}{2}$			

N'oubliez pas d'expliquer dans quelles conditions l'approximation est bonne.

Espace supplémentaire

Série géométrique : $\sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ $\qquad \sum_{k=1}^{N} a^k = \frac{a(1-a^N)}{1-a}$

Relations d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ $\qquad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$

Convolution : $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_m x(m)h(n-m) = \sum_m h(m)x(n-m)$

Corrélation : $r_{ab}(n) = a(n) ** b(n) = a(n) * b(-n)$ on cherche $b(n)$ dans $a(n)$

Transformée en Z : $X(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$

TFTD :

$X(e^{j\omega}) = \sum_n x(n) e^{-j\omega n}$ $\qquad X(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega+2\pi m)}\right)$

$x(n) * y(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ $\qquad x(n)y(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega})]$

$u(n) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$ $\qquad e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

Régime transitoire RII : $\rho^{n_{eff}} = \epsilon$ où $\rho = \max_i |p_i|$

Dél. de phase et de groupe : $d(\omega) = -\frac{\angle H(\omega)}{\omega}$ $\qquad d_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega}[\angle H(\omega)]$

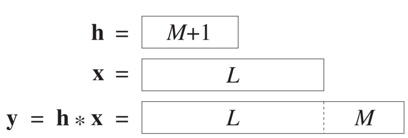


Fig. 4.1.1 Relative lengths of filter, input, and output blocks.

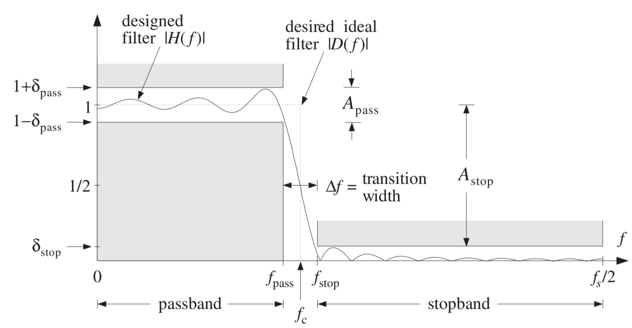


Fig. 10.2.1 Magnitude response specifications for a lowpass filter.

- 10.2.5 $\qquad \delta_{pass} = \frac{10^{A_{pass}/20} - 1}{10^{A_{pass}/20} + 1}$ $\qquad \delta_{stop} = 10^{-A_{stop}/20}$
- 10.2.6-7 $\qquad \delta = \min(\delta_{pass}, \delta_{stop})$
- Table 10.2.1

Window	δ	A_{stop}	A_{pass}	D
Rectangular	8.9%	21 dB	1.55 dB	0.92
Hamming	0.2%	54 dB	0.03 dB	3.21
Kaiser	variable δ	$-20\log_{10}\delta$	17.372δ	$(A-7.95)/14.36$

$\rightarrow D = \begin{cases} \frac{A-7.95}{14.36}, & A > 21 \\ 0.922, & A \le 21 \end{cases}$

  - Si Kaiser (10.2.10) $\qquad \alpha = \begin{cases} 0.1102(A-8.7), & A \ge 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & 21 < A < 50 \\ 0, & A \le 21 \end{cases}$ $\qquad A = -20\log_{10}\delta$

- 10.2.1 $\qquad \Delta f = f_{stop} - f_{pass}$ $\qquad f_c = \frac{1}{2}(f_{pass} + f_{stop})$ $\qquad \omega_c = 2\pi f_c / f_s$
- 10.2.11 $\qquad N = 1 + \frac{D f_s}{\Delta f}$ (arrondir à entier impair supérieur) $\rightarrow M = \frac{N-1}{2}$
- 10.2.14 $\qquad h(n) = w_i(n-M, N) \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}[n-M]\right) \qquad 0 \le n \le N-1$

18