2017 E1 Pr1 avec propriétés

Friday, October 20, 2017 4:36 PM

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = e^{-jt\pi/2}\,\mathrm{Rect}\left(\frac{t-3}{2}\right)$.

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau\, Sa\,\frac{\omega\tau}{2}$$

$$\mathrm{Rect}\left(\tfrac{t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\, Sa\, \omega$$

Avec une décalage temporelle

$$f(t+a) \Leftrightarrow e^{j\omega a} F(\omega)$$

donc

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) \Leftrightarrow e^{-3j\omega} \cdot 2\, Sa\, \omega$$

Maintenant, nous ajutons une modulation par un exponentiel complexe:

$$e^{jbt} f(t) \Leftrightarrow F(\omega - b)$$

$$e^{-j\frac{t\pi}{2}} \cdot \mathrm{Rect}\,\frac{t-3}{2} \Leftrightarrow e^{-3j\omega}\, 2 \cdot Sa(\omega)\Big|_{\omega = \omega + \pi/2}$$

$$\boxed{e^{-3j(\omega+\frac{\pi}{2})}\, 2\, Sa\left(\omega + \pi/2\right)}$$

$$e^{-3j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\tfrac{-3\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\tfrac{3\pi}{2}\right)$$
$$= 0 + j(+1) = +j$$

$$2j\, e^{-3j\omega} \sin(\omega + \pi/2) \cdot \frac{1}{\omega + \pi/2}$$

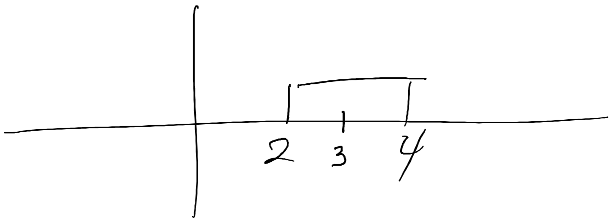
$$\sin\left(\omega + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\omega$$

$$\boxed{\frac{2j\, e^{-3j\omega} \cos\omega}{\omega + \pi/2}}$$

2017 E1 Pr1 avec l'équation d'analyse

Friday, October 20, 2017 4:36 PM

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = e^{-jt\pi/2}\,\mathrm{Rect}\left(\dfrac{t-3}{2}\right)$.



$$F(\omega) = \int_2^4 e^{-jt\frac{\pi}{2}} e^{-j\omega t}\,dt = \int_2^4 e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)t}\,dt$$

$$= \frac{e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)t}}{-j\left(\omega+\pi/2\right)}\Bigg|_2^4 = \frac{j}{\omega+\frac{\pi}{2}}\left[e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)4} - e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)2}\right]$$

$$= \frac{j}{\omega+\frac{\pi}{2}}\, e^{-j\omega 3}\left[e^{-j\omega - j2\pi} - e^{j\omega - j\pi}\right]$$

$$e^{-j2\pi} = \cos 2\pi - j\,\mathrm{sen}\,2\pi = 1 - j\cdot 0 = 1$$

$$e^{-j\pi} = \cos\pi - j\,\mathrm{sen}\,\pi = -1$$

$$F(\omega) = \frac{j}{\omega+\pi/2}\, e^{-j\omega 3}\left[e^{-j\omega} + e^{j\omega}\right]$$

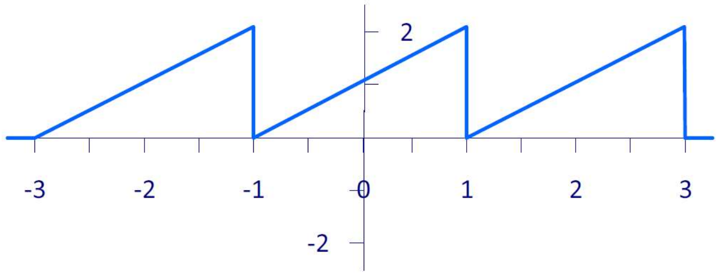
$$= \frac{2j\,e^{-j3\omega}\cos\omega}{\omega+\pi/2}$$

2017 E1 Pr2 avec une dérivation

Friday, October 20, 2017 4:34 PM

12 minutes

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction périodique suivante :



$$f_p(t) = t+1 \quad -1 \le t < 1$$

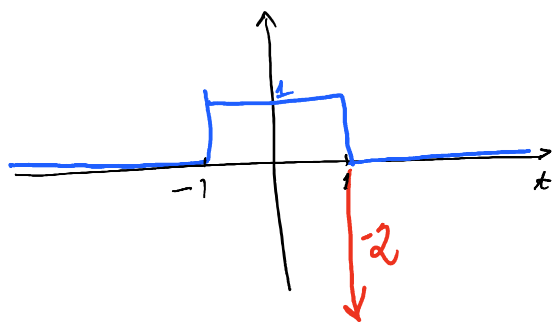
$$f_p(t) = f_p(t-2n) \quad \text{pout tout } n$$

Commençons avec la restriction de $f_p(t)$

$$f_r(t) = \begin{cases} t+1 & -1<t<1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Utilisons l'approche de dérivée pour chercher la transformée de Fourier de $f_r(t)$

$\dfrac{d f_r(t)}{dt}$



$f_r(t)$ a une discontinuité d'hauteur -2 à $t=1$

$$\frac{d f_r(t)}{dt} = \mathrm{Rect}\,\frac{t}{2} - 2\,\delta(t-1)$$

décalage temporelle

$TF\{\delta(t)\}$

Prenons la transformée de Fourier des deux cotés

$$j\omega F_r(\omega) = \tau\, Sa \frac{\omega\tau}{2}\Big|_{\tau=2} + e^{-j\omega\cdot 1}\cdot(-2)\cdot(1)$$

$$= 2\, Sa\,\omega - 2e^{-j\omega}$$

$$F_r(\omega) = \frac{2}{j\omega}\left[Sa\,\omega - e^{-j\omega}\right]$$

$$F(n) = \left.\frac{F_r(\omega)}{T_0}\right|_{\omega = n\omega_0} \qquad T_0 = 2, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$$

$$= \frac{1}{2}F_r(n\pi)$$

$$= \frac{1}{jn\pi}\cdot\left[Sa\,n\pi - e^{-jn\pi}\right]$$

pas defini pour $n=0$

Cherchons à simplifier

$$e^{-jn\pi} = (-1)^n$$

feuille de notes

$$Sa\,n\pi = \frac{\sin n\pi}{n\pi} = 0 \quad \forall n \neq 0$$

$$F(n) = \frac{-(-1)^n}{jn\pi} = \frac{j}{n\pi}(-1)^n \quad \forall n \neq 0$$

$$F(0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,2\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$F(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\,\delta(\omega - n\pi)$$

$$= 2\pi\sum^{\infty} j\frac{(-1)^n}{\ldots}\,\delta(\omega - n\pi) + 2\pi\cdot\frac{1}{2}\,\delta(\omega)$$

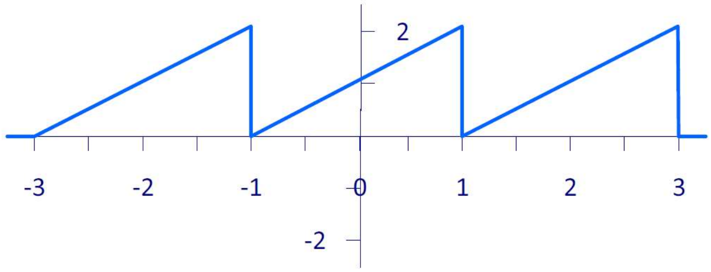
$$n=-\infty \quad n\pi$$
$$n\neq 0$$

$$= 2j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \delta(\omega - n\pi) + \pi\delta(\omega)$$

2017 E1 Pr2 avec deux dérivations

Friday, October 20, 2017 4:34 PM

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction périodique suivante :



$$f_p(t) = t + 1 \quad -1 \le t < 1$$

$$f_p(t) = f_p(t - 2n) \quad \text{pout tout } n$$

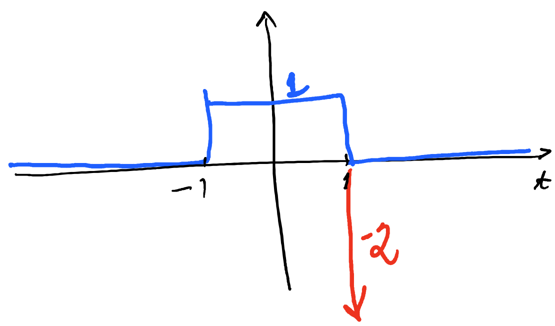
Commençons avec la restriction de $f_p(t)$

$$f_r(t) = \begin{cases} t+1 & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

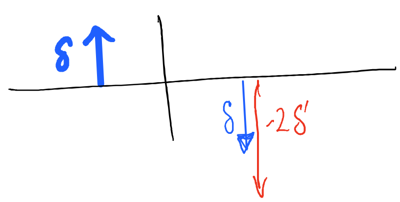
Utilisons l'approche de dérivée pour chercher la transformée de Fourier de $f_r(t)$

$f_r(t)$ a une discontinuité d'hauteur -2 à $t = 1$

$$\frac{d f_r(t)}{dt}$$



$$\frac{d^2 f_r(t)}{dt}$$



$$= \delta(t+1) - \delta(t-1) - 2\delta'(t-1)$$

Prenons la transformée de Fourier des deux cotés

$$(j\omega)^2 F_r(\omega) = e^{j\omega} - e^{-j\omega} - 2j\omega e^{-j\omega}$$

$$F_r(\omega) = \frac{2j \,\text{sen}\, \omega - 2j e^{-j\omega}}{-\omega^2}$$

$$F(n) = \left.\frac{F_r(\omega)}{T_0}\right|_{\omega = n\omega_0} \qquad T_0 = 2, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$$

$$= \frac{1}{2} F_r(n\pi)$$

$$= \frac{2j \cancel{\sin n\pi}^{\,0}}{2(n\pi)^2} - \frac{2j\, e^{-jn\pi}}{2(n\pi)^2}$$

pas défini pour $n=0$

Cherchons à simplifier

$e^{-jn\pi} = (-1)^n$ feuille de notes

$\sin n\pi = 0 \quad \forall n$

$$F(n) = -\frac{(-1)^n}{jn\pi} = \frac{j}{n\pi}(-1)^n \qquad \forall n \neq 0$$

$$F(0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\, 2 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\,\delta(\omega - n\pi)$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} j\frac{(-1)^n}{n\pi}\,\delta(\omega - n\pi) + 2\pi\cdot\frac{1}{2}\,\delta(\omega)$$

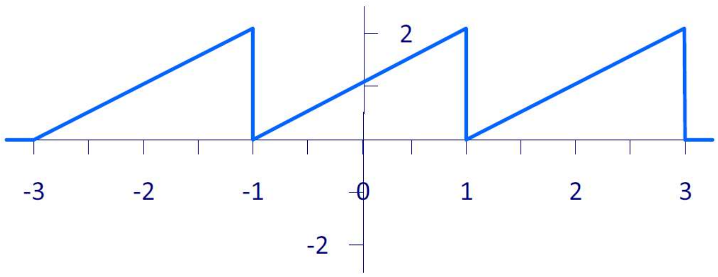
$$= 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}} [\text{illegible}] \frac{[\text{illegible}]}{n\pi}\, \delta(\omega - n\pi) + [\text{illegible}] \frac{[\text{illegible}]}{2}$$

$$= 2j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, \delta(\omega - n\pi) + \pi\, \delta(\omega)$$

2017 E1 Pr2 avec l'équation d'analyse F(n)

Friday, October 20, 2017 4:34 PM

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction périodique suivante :



$$f_p(t) = t + 1 \quad -1 \le t < 1$$

$$f_p(t) = f_p(t - 2n) \quad \text{pout tout } n$$

$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \qquad T_0 = 2 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1+t)\, e^{-jn\pi t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-jn\pi t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\, e^{-jn\pi t}\, dt$$

$$= \frac{e^{-jn\pi t}}{2n\pi j}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{-jn\pi} - \frac{1}{(-jn\pi)^2}\right) e^{-jn\pi t}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{e^{-jn\pi} - e^{jn\pi}}{2n\pi j} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-jn\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\right] e^{-jn\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{jn\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\right] e^{jn\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\underbrace{\cancel{\sin n\pi}}_{0} - \frac{1}{2jn\pi}\left[e^{-jn\pi} + e^{jn\pi}\right] + \frac{1}{2n^2\pi^2}\left[e^{-jn\pi} - e^{jn\pi}\right]$$

$$= -\frac{1}{jn\pi}\cos n\pi + \frac{j}{n^2\pi^2} \cdot -\underbrace{\cancel{\sin n\pi}}_{0}$$

$$= -\frac{1}{jn\pi}(-1)^n \quad \forall n \neq 0$$

$$= \frac{j}{n\pi}(-1)^n$$ pas defini pour $n=0$

$$F(0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,2\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\,\delta(\omega - n\pi)$$

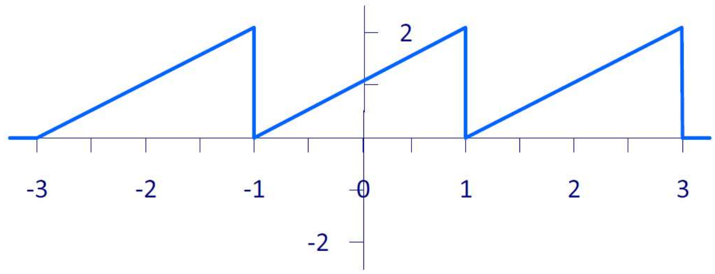
$$= 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} j\frac{(-1)^n}{n\pi}\,\delta(\omega - n\pi) + 2\pi\cdot\frac{1}{2}\,\delta(\omega)$$

$$= 2j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,\delta(\omega - n\pi) + \pi\,\delta(\omega)$$

2017 E1 Pr2 avec l'équation d'analyse F(ω)

Friday, October 20, 2017 4:34 PM

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction périodique suivante :



$$f_p(t) = t + 1 \quad -1 \le t < 1$$

$$f_p(t) = f_p(t - 2n) \quad \text{pout tout } n$$

$$F_R(\omega) = \int_{-1}^{1} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad T_0 = 2 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1+t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{e^{-j\omega t}}{2\omega j}\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{-j\omega} - \frac{1}{(j\omega)^2}\right)e^{-j\omega t}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{e^{-j\omega} - e^{j\omega}}{2\omega j} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-j\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right]e^{-j\omega} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right]e^{j\omega}$$

$$= \frac{1}{\omega}\sin\omega - \frac{1}{2j\omega}\left[e^{-j\omega} + e^{j\omega}\right] + \frac{1}{2\omega^2}\left[e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right]$$

$$= \frac{1}{\omega}\sin\omega - \frac{1}{j\omega}\cos\omega - \frac{\sin\omega}{\omega^2}$$

$$F(n) = \left.\frac{F_r(\omega)}{T_0}\right|_{\omega = n\omega_0} \qquad T_0 = 2 \quad \omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$$

$$= \frac{1}{2} F_r(n\pi)$$

$$= \cancel{\frac{1}{n\pi}\sin n\pi}^{\,0} - \frac{1}{jn\pi}\cos n\pi - \cancel{\frac{\sin n\pi}{(n\pi)^2}}^{\,0}$$

$$= \frac{j}{n\pi}\cos n\pi$$

$$= \frac{j}{n\pi}(-1)^n \quad \forall n \neq 0$$

$$= \frac{j}{n\pi}(-1)^n$$ pas defini pour $n=0$

$$F(0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,2\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\,\delta(\omega - n\pi)$$

$$= 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} j\frac{(-1)^n}{n\pi}\,\delta(\omega - n\pi) + 2\pi\cdot\frac{1}{2}\,\delta(\omega)$$

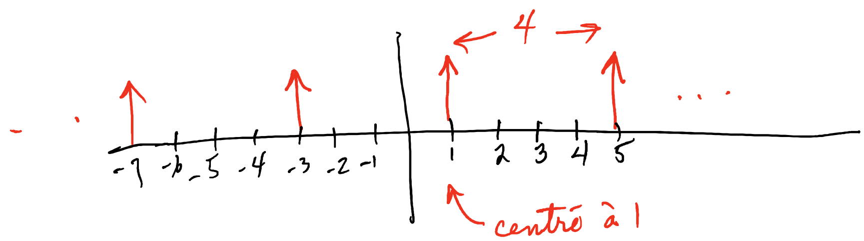
$$= 2j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \delta(\omega - n\pi) + \pi \delta(\omega)$$

2017 E1 Pr3A

Friday, October 20, 2017 4:35 PM

En sachant que $\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$

A. (10 points) Donnez une esquisse de $f(t) = \delta_4(t-1)$ et trouvez sa transformée de Fourier.



$T_0 = 4$

$\omega_0 = \pi/2$

Nous trouvons dans la table

$$\delta_4(t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\pi/2)$$

et

$$f(t+a) \Leftrightarrow e^{j\omega a} F(\omega)$$

donc

$$\delta_4(t-1) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} e^{j\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega} \delta(\omega - n\pi/2) = \boxed{\frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty} e^{-jn\pi/2} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right)}$$

$$e^{jn\pi/2} = \begin{cases} (-1)^{n/2} & n \text{ paire} \\ j(-1)^{(n-1)/2} & n \text{ impaire} \end{cases}$$

$$\delta_4(t-1) = \boxed{\frac{\pi}{2} \sum_{n \text{ pair}} (-1)^{n/2} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} j \sum_{n \text{ impair}} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right)}$$

2017 E1 Pr3B

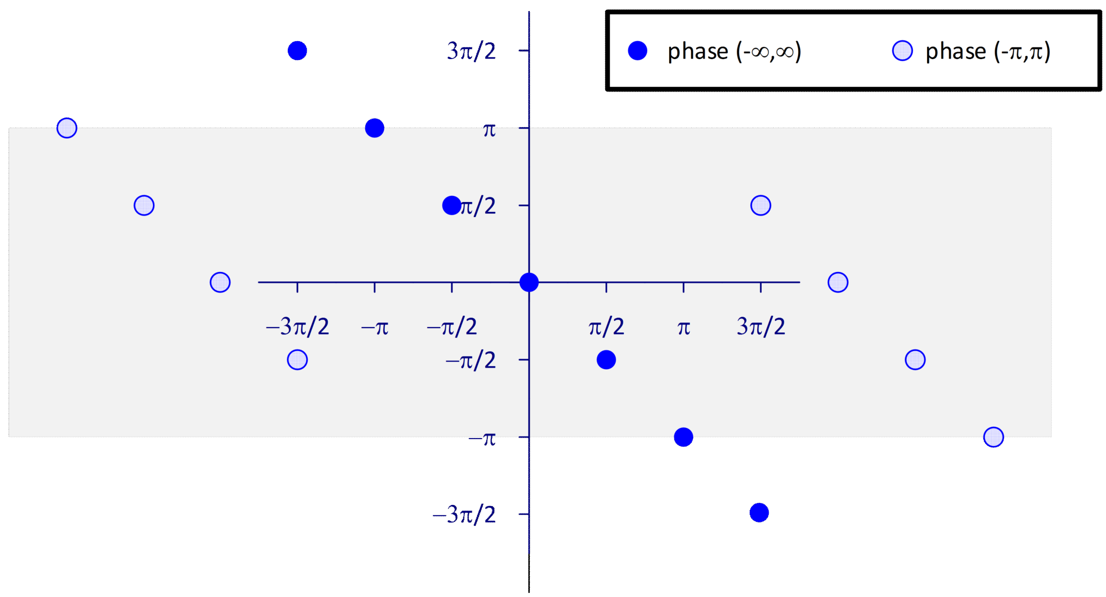
Friday, October 20, 2017 4:35 PM

En sachant que $\delta_{T_0}(t) = \sum^{+\infty} \delta(t - nT_0)$

B. (10 points) Donnez une esquisse du spectre de phase de $f(t) = \delta_4(t-1)$ pour $-5 < \omega < 5$.

Vous pouvez supposer une phase entre moins infini et infini, ou une phase modulo 2π.

B. Phase de $\frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\pi/2} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right)$ $\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{n\pi}{2} & \omega = \frac{n\pi}{2}. \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



2017 E1 Pr3C

Friday, October 20, 2017 4:35 PM

En sachant que $\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$

C. (10 points) Trouvez la transformée de Fourier $g(t) = \delta_4''(t)$, soit la deuxième dérivée de $\delta_4(t)$.

C. Dans le table nous avons

$$\delta_4(t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \sum \delta(\omega - n\pi/2)$$

et

$$\frac{d^n}{dt^2} f(t) \Leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

$$\delta_4''(t) \Leftrightarrow (j\omega)^2 \frac{\pi}{2} \sum \delta(\omega - n\pi/2)$$

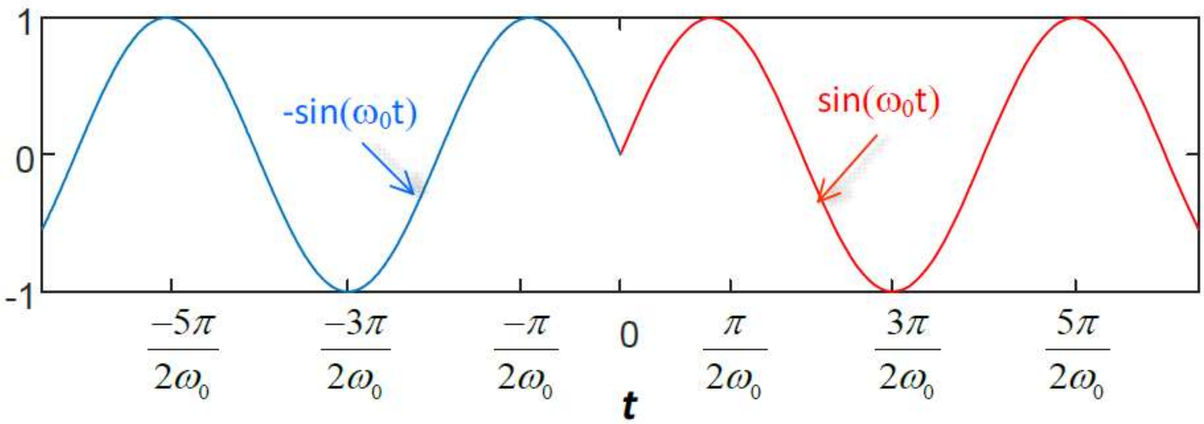
$$= \frac{-\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega^2 \delta(\omega - n\pi/2)$$

$$= -\pi/2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \delta(\omega - n\pi/2)$$

$$= \frac{-\pi^3}{8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \delta(\omega - n\pi/2)$$

2017 E1 Pr4B,C,D

Friday, October 20, 2017 4:37 PM



B. (5 points) Est-ce que la fonction est périodique ? Est-ce que le spectre est discret ?

C. (5 points) Quel est le taux de décroissance de la transformée de Fourier ?

D. (5 points) Est-ce que $f(t)$ est une fonction d'énergie ? Une fonction de puissance ?

Commençons avec les questions

B. La fonction n'est pas périodique. La comportement entre $< t < \pi/2\omega_0$ n'est pas présent ailleurs

La fonction n'est pas périodique, donc nous n'attendons pas à voir un spectre discret.

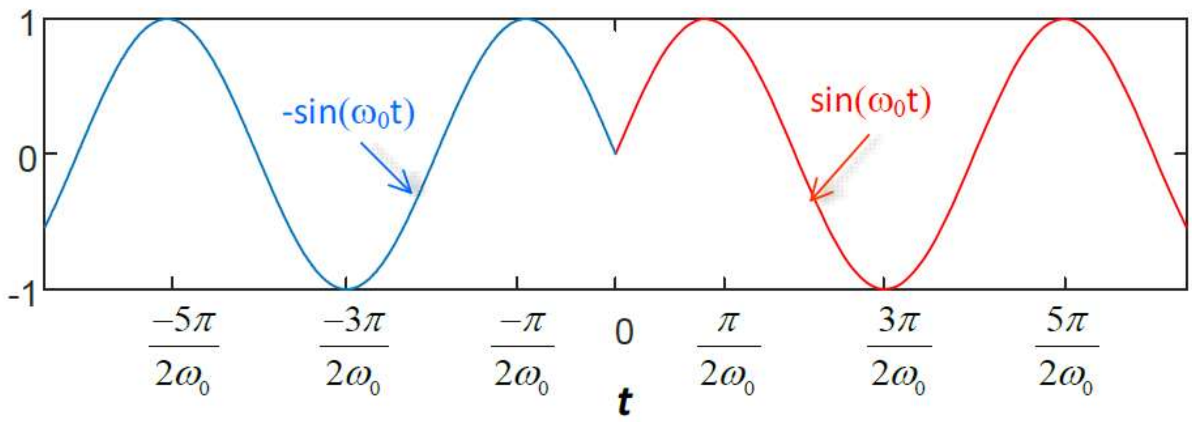
C. La fonction $f(t)$ est continue, mais il y a une discontinuité dans $f'(t)$. Donc la transformée décroît comme $1/\omega^2$

D. La fonction n'est pas intégrable, ni de carré intégrable, donc il n'est pas une fonction d'énergie, mais plutôt une fonction de puissance.

2017 E1 Pr4A sgn * exp complexe

Friday, October 20, 2017 4:37 PM

A. (20 points) Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t)=\begin{cases}\sin(\omega_0 t) & t>0\\ -\sin(\omega_0 t) & t<0\end{cases}$.



A. $f(t) = sgn(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$

$$= sgn(t)\, \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$= \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} sgn(t) - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} sgn(t)$$

$$sgn(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$e^{j\omega_0 t} sgn\, t \Leftrightarrow \frac{2}{j(\omega-\omega_0)} \qquad e^{-j\omega_0 t} sgn(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j(\omega+\omega_0)}$$

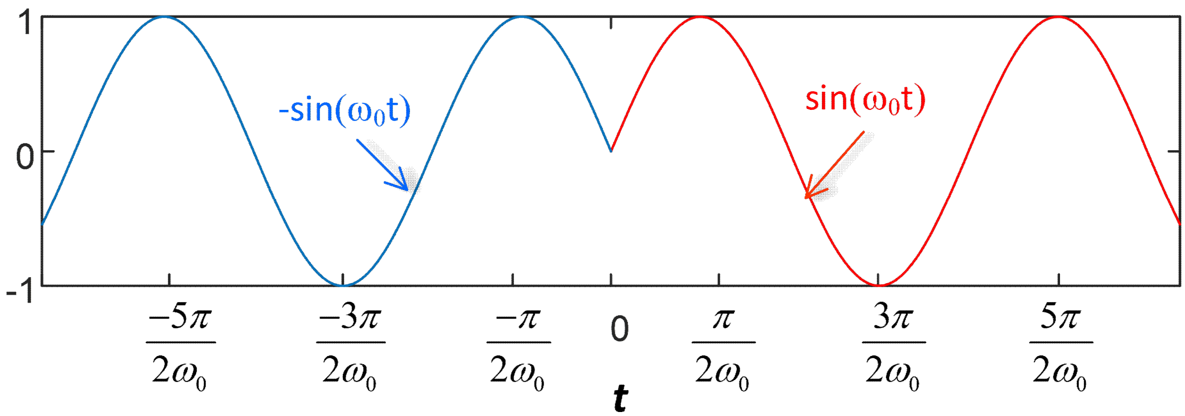
$$F(\omega) = \frac{1}{2j}\,\frac{2}{j(\omega-\omega_0)} - \frac{1}{2j}\,\frac{2}{j(\omega+\omega_0)}$$

$$= \frac{}{\omega-\omega_0} + \frac{1}{\omega+\omega_0} = \frac{-\omega-\omega_0+\omega-\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2} = \frac{-2\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}$$

2017 E1 Pr4 graphiquement deux dérivations

Friday, November 10, 2017 12:50 PM

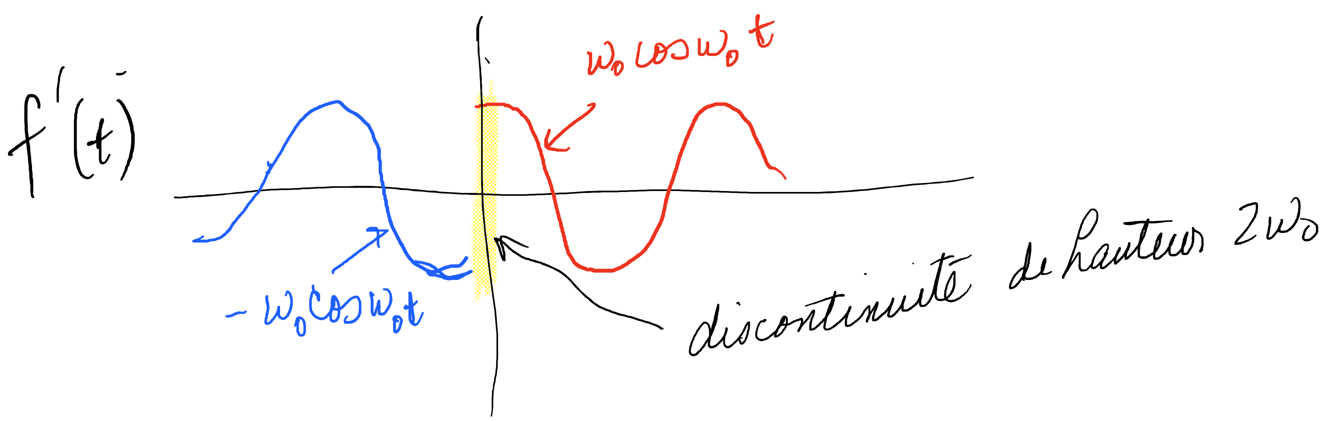
A. Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & t > 0 \\ -\sin(\omega_0 t) & t < 0 \end{cases}$.

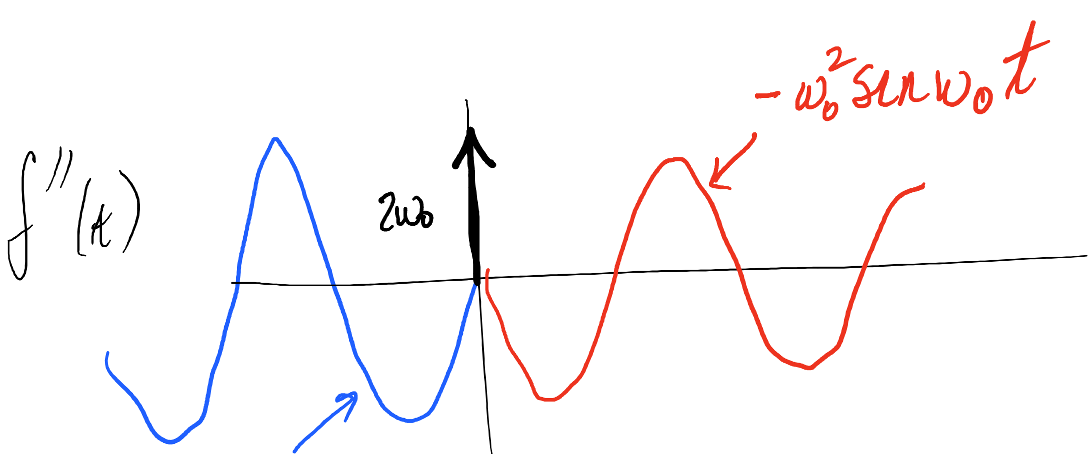


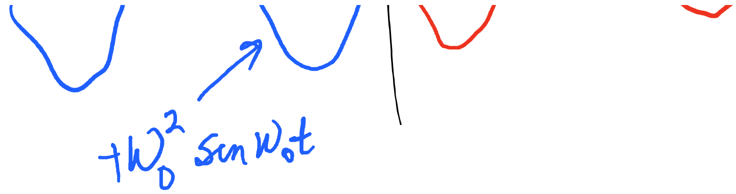
B. Est-ce que la fonction est périodique?

C. Est-ce que le spectre est discret ?

D. Quel est le taux de décroissance de la transformée de Fourier?







$$f''(t) = 2\omega_0 \delta(t) - \omega_0^2 f(t)$$

$$(j\omega)^2 F(\omega) = 2\omega_0 - \omega_0^2 F(\omega)$$

$$-\omega^2 F(\omega) = 2\omega_0 - \omega_0^2 F(\omega)$$

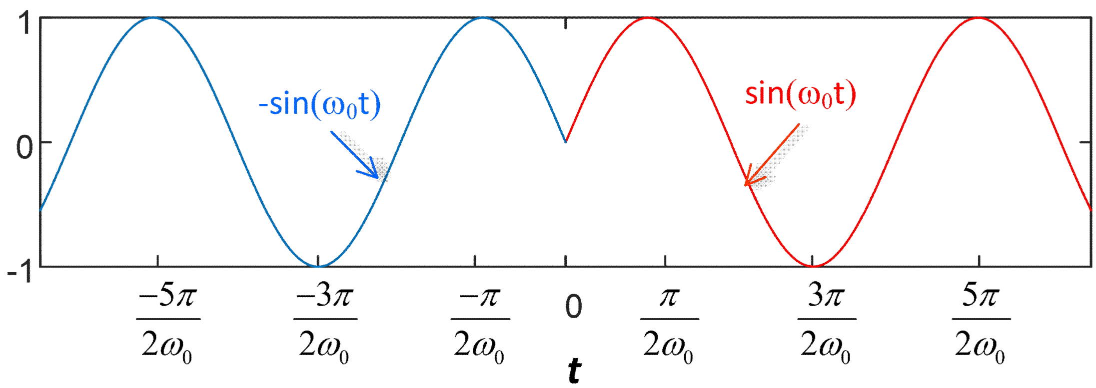
$$F(\omega)\left[\omega_0^2 - \omega^2\right] = 2\omega_0$$

$$F(\omega) = \frac{2\omega_0}{\omega_0 - \omega^2} = \frac{-2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0}$$

2017 E1 Pr4 analytiquement deux dérivations

Friday, November 10, 2017 12:50 PM

A. Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & t > 0 \\ -\sin(\omega_0 t) & t < 0 \end{cases}$.



B. Est-ce que la fonction est périodique?

C. Est-ce que le spectre est discret ?

D. Quel est le taux de décroissance de la transformée de Fourier?

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t) \sin(w_0 t)$$

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\operatorname{sgn}(t) \cdot \sin w_0 t + \operatorname{sgn}(t) \frac{d}{dt} \sin w_0 t$$

$$= 2\delta(t) \sin w_0 t + w_0 \operatorname{sgn}(t) \cos w_0 t$$

$$= 2\delta(t) \cdot 0 + w_0 \operatorname{sgn} t \cos w_0 t$$

$$= w_0 \operatorname{sgn} t \cos w_0 t$$

$$f''(t) = w_0 \frac{d}{dt} \operatorname{sgn}(t) \cdot \cos w_0 t + w_0 \operatorname{sgn}(t) \frac{d}{dt} \cos w_0 t$$

$$= w_0 2\delta(t) \cos w_0 t - w_0^2 \operatorname{sgn}(t) \sin w_0 t$$

$$= \omega_0 \, 2\delta(t) \cdot \cos 0 \; - \; \omega_0^2 \, sgn(t) \sin \omega_0 t$$

$$= 2\omega_0 \delta(t) - \omega_0^2 f(t)$$

$$(j\omega)^2 F(\omega) = 2\omega_0 - \omega_0^2 F(\omega)$$

$$-\omega^2 F(\omega) = 2\omega_0 - \omega_0^2 F(\omega)$$

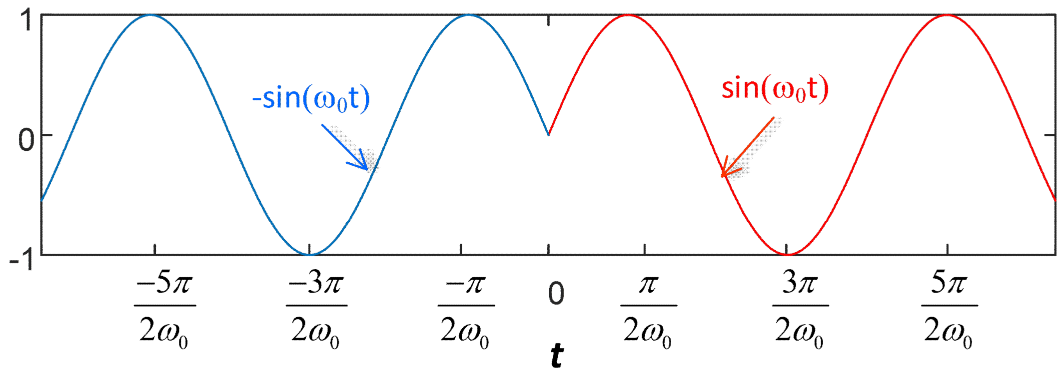
$$F(\omega)\left[\omega_0^2 - \omega^2\right] = 2\omega_0$$

$$F(\omega) = \frac{2\omega_0}{\omega_0 - \omega^2} = \frac{-2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0}$$

2017 E1 Pr4 échelon * exp complexe

Friday, November 10, 2017 12:50 PM

A. Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & t > 0 \\ -\sin(\omega_0 t) & t < 0 \end{cases}$.



B. Est-ce que la fonction est périodique?

C. Est-ce que le spectre est discret ?

D. Quel est le taux de décroissance de la transformée de Fourier?

$$f(t) = U(t)\sin(\omega_0 t) - U(t-1)\sin\omega_0 t$$

$$U(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \qquad U(-t) \Leftrightarrow \frac{-1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

en utilisant $f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

et $\delta(-\omega) = \delta(\omega)$)

$$\sin\omega_0 t\, U(t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} U(t) - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} U(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2j}\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \frac{\pi}{2j}\delta(\omega-\omega_0) - \frac{1}{2j}\frac{1}{j(\omega+\omega_0)} - \frac{\pi}{2j}\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\sin\omega_0 U(-t) \Leftrightarrow \frac{1}{2j}\frac{-1}{j(\omega-\omega_0)} + \frac{\pi}{2j}\delta(\omega-\omega_0) - \frac{1}{2j}\frac{-1}{j(\omega+\omega_0)} - \frac{\pi}{2j}\delta(\omega+\omega_0)$$

$\sin\omega_0 t\, U(t) - \sin\omega_0 t\, U(-t) \Leftrightarrow$

0

$= [\ldots) \quad \delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$

$$\sin \omega_0 t\, u(t) - \sin \omega_0 t\, u(-t) \iff$$

$$\frac{2}{2j\cdot j(\omega-\omega_0)} - \frac{2}{2j\cdot j(\omega+\omega_0)} + \frac{\pi}{2j}\left[\cancel{\delta(\omega-\omega_0)} - \delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$= \frac{-1}{\omega-\omega_0} + \frac{1}{\omega+\omega_0}$$

$$= \frac{-\omega-\omega_0+\omega-\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}$$

$$= \frac{-2\omega_0}{\omega^2-\omega_0}$$

2017 E1 Pr4 méthode invalide

Friday, November 10, 2017 7:17 PM

$$f(t) = sgn(t)\, \sin \omega_0 t$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -\sin\omega_0 t\, e^{j\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} \sin \omega_0 t\, e^{j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{-1}{2j}\int_{-\infty}^{0} \left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) e^{j\omega t}\, dt + \frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} \left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) e^{j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{-1}{2j}\int_{-\infty}^{0} e^{j(\omega+\omega_0)t}\, dt + \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{0} e^{j(\omega-\omega_0)t}\, dt \quad \ldots$$

$$= \frac{-1}{2j}\, \frac{e^{j(\omega+\omega_0)t}}{j(\omega+\omega_0)}\Bigg|_{-\infty}^{0}$$

$e^0 = 1$ mais $e^{-j\infty(\omega+\omega_0)} = ?$

impossible à évaluer

il y a des oscillations

Il n'est pas possible d'evaluer ces integrales

$$e^{-j\infty} \neq 0\ !$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-jx} = \lim_{x\to\infty}\left(\cos x + j \sin x\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \cos x = ?$$

Notons que $-\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{j(\omega+\omega_0)} + \frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \ldots$

fini pour arriver à la bonne réponse, mais c'est un hasard.

Il n'est pas $e^{-j\infty} = 0$ mais plutot des termes que s'annule.

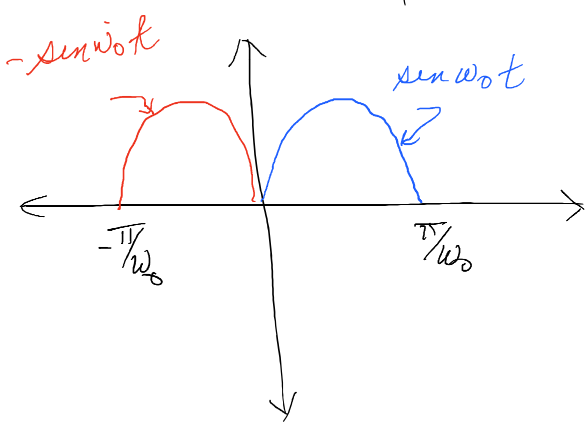
2017 E1 Pr4 méthode invalide

Friday, November 10, 2017 7:17 PM

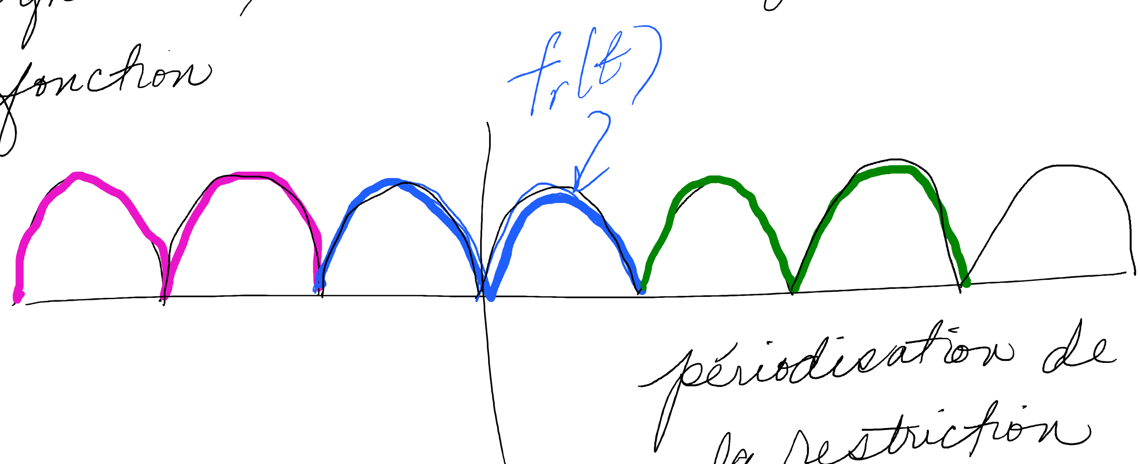
$$f(t) = \operatorname{sgn}(t) \sin \omega_0 t$$

Mauvaise hypothèse que $f(t)$ est périodique :

Définir $f_r(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & 0 < t < \pi/\omega_0 \\ -\sin \omega_0 t & -\pi/\omega_0 < t < 0 \end{cases}$



avec cette construction, vous êtes en ligne de trouver la transformée de Fourier de la fonction



périodisation de la restriction

Il est impossible de trouver la transformée de Fourier avec cette méthode.

On ne peut pas parler de une fonction "périodique sur un intervalle"

La fonction périodique est décrit par

$$f_p(t) = f_p(t+T_0) \quad \boxed{\forall t}$$