MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
Département de génie électrique et de génie informatique

Enseignant : Dominique Beaulieu
Durée : 1 heure et 50 minutes
Date : jeudi, 19 décembre 2019
Heure : 13h30 à 15h20
Local : PLT-3928
Pondération : 35 %

INSTRUCTIONS IMPORTANTES

1. **Documentation permise : une feuille manuscrite recto-verso de format lettre.**
2. **Cet examen comporte 10 questions**
3. **La question 1 est une question bonus de 10 points à répondre dans le cahier (calculs non exigés). La note maximale pour cet examen est donc 110 %.**
4. **Les questions 2 à 7 valent 20 points chacune et doivent être répondues manuellement dans le cahier en développant les étapes de calculs (voir le point 6).**
5. **Les questions 8 à 10 sont à faire en Matlab à partir des fichiers fournis pour chaque question et valent 20 points chacune (voir le point 6).**
6. **En plus de la question bonus, vous devez répondre à 5 questions au choix avec les contraintes suivantes :**
   (a) **Au minimum une question Matlab : 1 bonus + 4 manuelles + 1 Matlab.**
   OU
   (b) **Au maximum deux questions Matlab : 1 bonus + 3 manuelles + 2 Matlab.**
7. **Ne perdez pas votre temps à essayer toutes les questions. Commencez par les plus faciles.**
8. **Si vous avez le temps de répondre à plus de questions que demandées, le tout sera corrigé et optimisé à la hausse (les moins bonnes seront enlevées).**
9. **Les points ne sont pas transférables d'une question à l'autre (exemple : 2 questions à moitié répondues ne donnent pas une question répondue).**
10. **Fermez et rangez dans votre sac votre téléphone cellulaire.**

1. **(10 points) BONUS - QUESTIONS DE COMPRÉHENSION** : 1 point par bonne réponse, 10, 11 ou 12 bonnes réponses sur 12 donnent 10 points. **Les calculs ne sont pas exigés.**

   (a) Si le déterminant d'une matrice est égal à 4, que sera le déterminant d'une nouvelle matrice obtenue en interchangeant 2 colonnes de la première?

   (b) Soit une matrice A dont le déterminant est 4. Si la matrice B est obtenue en multipliant une ligne de la matrice A par 3, quel sera le déterminant de la matrice B?

   (c) Une matrice est inversible si son déterminant est différent de ____ (un nombre).

   (d) Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est égal à ____ (un nombre).

   (e) Quel est le déterminant de la matrice A :

   $$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix}$$

   (f) Quelles sont les valeurs propres de la matrice précédente?

   (g) Quel est le déterminant de la matrice A :

   $$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2a & a \\ 3 & 6 & 2a & a \\ 3 & 1 & 2a & a \\ 7 & 2 & 2a & a \end{bmatrix}$$

   (h) Si le déterminant de la matrice A est -1 et le déterminant de la matrice B est 8, quel est le déterminant B^2A^{-1}?

   (i) Quel est le déterminant de A^9?

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

   (j) Qui suis-je? Je suis une matrice toujours diagonalisable, dont les valeurs propres sont toujours réelles et toujours diagonalisable orthogonalement. Je suis une matrice ______ (un mot).

   (k) Complétez. La factorisation QR d'une matrice A nécessite une base ortho______ (un mot) du sous-espace engendré par les vecteurs de A.

   (l) Qui suis-je? En transposant cette matrice, on obtient la matrice adjointe. Je suis la matrice des ______ (un mot).

2. **(20 points) DÉTERMINANTS (manuel)**

   (a) (4 points) Soit le parallélogramme dont les sommets sont (0,0), (4,0), (6,2), et (2,2).

      i. (2 points) Utilisez le déterminant pour calculer l'aire.

      ii. (2 points) Utiliser le déterminant pour calculer la nouvelle aire si on applique la transformation représentée par la matrice T?

   $$T = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) (6 points) Résoudre le système A**x**=**b** avec la méthode de Cramer.

   $$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) (10 points) Inverse d'une matrice : soit la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

i. (2 points) Calculez le déterminant de A.
ii. (4 points) Calculez la matrice des cofacteurs de A.
iii. (2 points) Donnez la matrice adjointe de A, adj(A).
iv. (2 points) Calculez l'inverse de A à l'aide des éléments que vous venez de calculer.

3. **(20 points) VALEURS PROPRES (manuel)**

(a) (4 points) Quel est le polynôme caractéristique de A?

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (4 points) Quelles sont les valeurs propres de la matrice précédente?

(c) (12 points) Soit la matrice A. Déterminez, pour la valeur propre λ = -5, une base du sous-espace propre associé.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

4. **(20 points) ORTHOGONALITÉ ET FACTORISATION QR (manuel)**

(a) (10 points) Gram-Schmidt. Utilisez la méthode de Gram-Schmidt pour déterminer une base **orthogonale** de l'espace représenté par les col(A).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (10 points) Factorisation QR. W est une base **orthogonale** de col(A) obtenue avec la méthode de Gram-Schmidt. Déterminez une matrice Q et une matrice R tel que A = QR.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. **(20 points) DIAGONALISATION (manuel)**

(a) (10 points) La diagonalisation d'une matrice consiste à trouver une matrice P et une matrice D tel que A=PDP^{-1}. Calculer P et D pour la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (10 points) Soit la matrice A dont les valeurs propres sont λ_1=-4 et λ_2=2. Une base pour λ_1 est $\mathbf{v_1}$ et une base pour λ_2 est $\mathbf{v_2}$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

À partir de ces informations, utilisez la diagonalisation pour calculer A^4.

6. **(20 points) MOINDRES CARRÉS (manuel)**

   Soit les points (x,y) mesurés suivants : (1,2), (3,2), (5,3) et (7,5). Trouvez la solution $\hat{\mathbf{x}}$ au sens des moindres carrés qui approxime l'équation d'une droite de forme y=a+bx où :

   $$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

7. **(20 points) DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES (manuel)**

   Déterminez une décomposition en valeurs singulières de la matrice A :

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

8. **(20 points) MATLAB : Méthode de la puissance décalée**

   Implémentez l'algorithme de la puissance décalée pour calculer la 2ème valeur propre λ_2 de la matrice A. On fournit la valeur de λ_1 et $\mathbf{x_0}$. Faites 5 itérations. À chaque itération **k**, affichez dans un vecteur $\mathbf{x_k}$ les valeurs propres, le vecteur $\mathbf{y_k}$ normalisé par rapport à la valeur propre la plus importante, ainsi que la valeur propre la plus importante $\mathbf{m_k}$. À la toute fin, affichez la 2ème valeur propre $\boldsymbol{\lambda_2}$ de la matrice A. **Insérez votre code dans le fichier puissance.m à l'endroit indiqué.**

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 4.4 \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9. **(20 points) MATLAB : Classement des équipes sportives**

   La matrice P (fournie dans le fichier **equipes.m**) donne le pointage de chaque équipe, A à E. Construisez la matrice d'adjacence A où les a_{ij} valent $(p_{ij}$ - $p_{ji})$ si l'équipe i bat l'équipe j, 0 autrement. Affichez la matrice V des vecteur propres, la matrice D des valeurs propres et le vecteur propre approprié pour procéder au classement. Donnez l'ordre de classement de l'équipe la plus forte à l'équipe la plus faible.

   $$\text{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 7 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   À titre indicatif, pour i=2 et j=3, on a P(2,3) = 7, ce qui indique que l'équipe B a marqué 7 points en jouant contre l'équipe C, et on a P(3,2) = 4, ce qui indique que l'équipe C a marqué 4 points en jouant contre l'équipe B. On aura donc A(2,3) = 7 - 4 = 3 et inversement, A(3,2) = 0. Pour cette question, le hardcoding est accepté. **Insérez votre code dans le fichier equipes.m à l'endroit indiqué.**

10. **(20 points) MATLAB : Compression d'image avec la SVD**

    Le fichier **drapeau.m** lit et convertit l'image **drapeau.bmp** pour la stockez dans la variable A. Compressez l'image en utilisant la décomposition en valeurs singulières en ne gardant que les 7 valeurs singulières les plus grandes. Vous pouvez utiliser, au choix, la commande **svd()** ou la commande **svds()**. Si vous utilisez la commande svd(), vous devrez générer vous-même les nouvelles matrices U, S et V à partir de celles fournies par la commande svd(). Construisez une image compressée A2. La commande **imshow(A2/255)** est déjà dans le fichier. Pour cette question, le hardcoding est accepté. **Insérez votre code dans le fichier drapeau.m à l'endroit indiqué.**

Joyeux Noël et bonne année 2020!

The End.

MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
Département de génie électrique et de génie informatique

Enseignant : Dominique Beaulieu
Durée : 1 heure et 50 minutes
Date : jeudi, 19 décembre 2019
Heure : 13h30 à 15h20
Local : PLT-3928
Pondération : 35 %

INSTRUCTIONS IMPORTANTES

1. **Documentation permise : une feuille manuscrite recto-verso de format lettre.**
2. **Cet examen comporte 10 questions**
3. **La question 1 est une question bonus de 10 points à répondre dans le cahier (calculs non exigés). La note maximale pour cet examen est donc 110 %.**
4. **Les questions 2 à 7 valent 20 points chacune et doivent être répondues manuellement dans le cahier en développant les étapes de calculs (voir le point 6).**
5. **Les questions 8 à 10 sont à faire en Matlab à partir des fichiers fournis pour chaque question et valent 20 points chacune (voir le point 6).**
6. **En plus de la question bonus, vous devez répondre à 5 questions au choix avec les contraintes suivantes :**
   (a) **Au minimum une question Matlab : 1 bonus + 4 manuelles + 1 Matlab.**
   OU
   (b) **Au maximum deux questions Matlab : 1 bonus + 3 manuelles + 2 Matlab.**
7. **Ne perdez pas votre temps à essayer toutes les questions. Commencez par les plus faciles.**
8. **Si vous avez le temps de répondre à plus de questions que demandées, le tout sera corrigé et optimisé à la hausse (les moins bonnes seront enlevées).**
9. **Les points ne sont pas transférables d'une question à l'autre (exemple : 2 questions à moitié répondues ne donnent pas une question répondue).**
10. **Fermez et rangez dans votre sac votre téléphone cellulaire.**

REMARQUES

Les étudiants pouvaient garder le questionnaire de cet examen. Le questionnaire et le corrigé détaillé de cet examen ont été mis à la disposition des étudiants via le site du cours et la banque d'examens, et par conséquent, ils doivent être présumés comme étant publics.

Dans les questions manuelles, la démarche est évaluée. Les erreurs de calculs sont peu ou pas pénalisées (selon leur nombre). Si une partie de la démarche est bonne, on accorde les points au prorata du nombre total de points de la question.

Dans les questions Matlab, si une partie du code est bon, on accorde les points au prorata du nombre total de points de la question.

Sources :

1. https://yzhang1616.github.io/algebra19spring/algebra.html Question 1-h tirée de HW10-2-b. Consulté le 6 janvier 2020.
2. Pierre Leroux, Algèbre linéaire, une approche matricielle. Modulo Éditeur, 1983. Question 6 tirée de l'exemple 9.12, pp. 349 à 351.
3. David C. Lay, Algèbre linéaire et applications. Pearson, 4ème édition, 2012 (version française). Question 2-b tirée de l'exercice 3.3-1, p. 198. Question 2-c tirée de l'exercice 3.3-16 p. 198. Question 3-a tirée de l'exercice 5.2-2, p. 300. Question 3-c tirée de l'exercice 5.1-10, p. 292. Question 5-a tirée de l'exercice 7.1-14, p. 428.
4. David Poole, Linear Algebra, A Modern Introduction. Cengage Learning, 4th Edition, 2015. Question 4-a tirée de l'exercice 5.3-10, p. 395. Question 4-b partiellement tirée de l'exercice 5.3-4, p. 395. Question 5-b, partiellement tirée de l'exercice 5.4-2, p. 407. Question 8 tirée de l'exercice 4.5-32, p. 324.
5. Question 9 librement inspirée du TP4, problème 1.
6. Question 2-a librement inspirée des diapos 4-28 à 4-34 sur le calcul des aires et des volumes.
7. Question 10 librement inspirée de la diapo 7-52, application 2 - troncature du spectre, exemple 2.
8. Question 10 : notre drapeau national a été tiré de Wikipédia, converti en format BMP, échantillonné à 1 pixel sur 2, dans chaque direction et converti en intensité de gris (RVB $\Rightarrow$ G). L'intensité de gris a été ajustée.

1. **(10 points) BONUS - QUESTIONS DE COMPRÉHENSION** : 1 point par bonne réponse, 10, 11 ou 12 bonnes réponses sur 12 donnent 10 points. **Les calculs ne sont pas exigés.**

   (a) Si le déterminant d'une matrice est égal à 4, que sera le déterminant d'une nouvelle matrice obtenue en interchangeant 2 colonnes de la première?

   Rép. : -4

   (b) Soit une matrice A dont le déterminant est 4. Si la matrice B est obtenue en multipliant une ligne de la matrice A par 3, quel sera le déterminant de la matrice B?

   Rép. : 12

   (c) Une matrice est inversible si son déterminant est différent de ____ (un nombre).

   Rép. : 0

   (d) Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est égal à ____ (un nombre).

   Rép. : 0

   (e) Quel est le déterminant de la matrice A :

   $$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix}$$

   Rép. : aehj (car la matrice est triangulaire)

   (f) Quelles sont les valeurs propres de la matrice précédente?

   Rép. : a, e, h et j (car la matrice est triangulaire)

   (g) Quel est le déterminant de la matrice A :

   $$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2a & a \\ 3 & 6 & 2a & a \\ 3 & 1 & 2a & a \\ 7 & 2 & 2a & a \end{bmatrix}$$

   Rép. : 0 (car le colonne 3 est un multiple de la colonne 4)

   (h) Si le déterminant de la matrice A est -1 et le déterminant de la matrice B est 8, quel est le déterminant B^2A^{-1}?

   Rép. : -64

   (i) Quel est le déterminant de A^9?

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

   Rép. : $(-ab)^9$ ou $-(ab)^9$ ou $-a^9b^9$

   (j) Qui suis-je? Je suis une matrice toujours diagonalisable, dont les valeurs propres sont toujours réelles et toujours diagonalisable orthogonalement. Je suis une matrice ______ (un mot).

   Rép. : symétrique

   (k) Complétez. La factorisation QR d'une matrice A nécessite une base ortho______ (un mot) du sous-espace engendré par les vecteurs de A.

   Rép. : orthonormée

   (l) Qui suis-je? En transposant cette matrice, on obtient la matrice adjointe. Je suis la matrice des ______ (un mot).

   Rép. : cofacteurs (ou comatrice)

2. **(20 points) DÉTERMINANTS (manuel)**

   (a) (4 points) Soit le parallélogramme dont les sommets sont (0,0), (4,0), (6,2), et (2,2).

   i. (2 points) Utilisez le déterminant pour calculer l'aire.

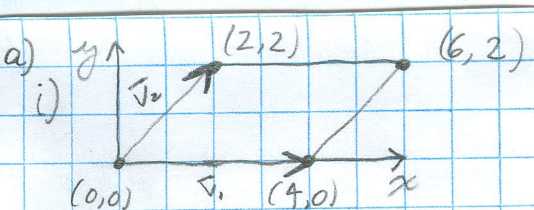
   ii. (2 points) Utiliser le déterminant pour calculer la nouvelle aire si on applique la transformation représentée par la matrice T?

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) (6 points) Résoudre le système A**x**=**b** avec la méthode de Cramer.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) i)



Un des sommets est déjà à l'origine, aucun besoin de translater.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \det(A) = 4 \times 2 - 2 \times 0 = 8$$

ii) $T = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(T) = 1 \times 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$8 \times \frac{1}{2} = 4$

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 5 \times 4 - 7 \times 2 = 6$

$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_1) = 3 \times 4 - 7 \times 1 = 5$

$B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_2) = 5 \times 1 - 3 \times 2 = -1$

$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)} = \frac{5}{6}$ $\qquad x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)} = \frac{-1}{6}$

(c) (10 points) Inverse d'une matrice : soit la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

i. (2 points) Calculez le déterminant de A.
ii. (4 points) Calculez la matrice des cofacteurs de A.
iii. (2 points) Donnez la matrice adjointe de A, adj(A).
iv. (2 points) Calculez l'inverse de A à l'aide des éléments que vous venez de calculer.

2-c) i) Il y a 2 zéros dans la colonne 1 et la ligne 3. Il est logique de calculer le déterminant selon la colonne 1 ou la ligne 3.

$$\det(A) = 1[-3\times 3 - 1\times 0] = -9$$

ii) $C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9$ $\quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$ $\quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$ $\quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 14$ $\quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$

$$C = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 14 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

iii) La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs.

$$\mathrm{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} -9 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

iv)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} -9 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & -14/9 \\ 0 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

3. **(20 points) VALEURS PROPRES (manuel)**

   (a) (4 points) Quel est le polynôme caractéristique de A?

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) (4 points) Quelles sont les valeurs propres de la matrice précédente?

   (c) (12 points) Soit la matrice A. Déterminez, pour la valeur propre λ = -5, une base du sous-espace propre associé.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

3-a) $\det(A - \lambda I) = 0$ $\quad \det\left(\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} (-4-\lambda) & -1 \\ 6 & (1-\lambda) \end{bmatrix}\right)$

$(-4-\lambda)(1-\lambda) - (-6) = 0 \Rightarrow -4 + 4\lambda - \lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

b) $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$: $\lambda_1 = \dfrac{-3+1}{2} = -1 \quad \lambda_2 = \dfrac{-3-1}{2} = -2$

ou $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$

c) Il faut résoudre le système $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \left(-5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ La variable libre est x_2. $x_2 = s$

$x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + 2s = 0 \Rightarrow x_1 = -2s$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Une base est $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. (20 points) **ORTHOGONALITÉ ET FACTORISATION QR** (manuel)

(a) (10 points) Gram-Schmidt. Utilisez la méthode de Gram-Schmidt pour déterminer une base **orthogonale** de l'espace représenté par les col(A).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

L'étape de vérifier si les 3 colonnes sont linéairement indépendantes n'est pas exigée pour l'examen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_3+L_1 \\ L_4-L_1}}{\overset{L_2-L_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_4+2L_2}{\overset{L_3+L_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{L_4-L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_3/2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les colonnes sont linéairement indépendantes et donc, forment une base de l'espace colonne.

$$\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{matrix} = 4 \qquad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} = 4$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{array}$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{x}_3 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{24}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = 4 \qquad \vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{matrix} = 0 \qquad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 16 \end{matrix} = 24$$

(b) (10 points) Factorisation QR. W est une base **orthogonale** de col(A) obtenue avec la méthode de Gram-Schmidt. Déterminez une matrice Q et une matrice R tel que A = QR.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice Q est calculée à partir de la matrice W. La factorisation QR nécessite une base ortho$\boxed{\text{normée.}}$ On normalise donc les vecteurs colonnes de W.

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = Q^T \times A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

5. **(20 points) DIAGONALISATION** (manuel)

(a) (10 points) La diagonalisation d'une matrice consiste à trouver une matrice P et une matrice D tel que A=PDP^{-1}. Calculer P et D pour la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour la matrice D, il faut calculer les valeurs propres.
Pour la matrice P, il faut calculer la base correspondant à chaque valeur propre, puis la normaliser.

Valeurs propres:

$$\det([A-\lambda I]) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} (1-\lambda) & 5 \\ 5 & (1-\lambda) \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 5\times 5 = 1-\lambda-\lambda+\lambda^2-25 = \lambda^2-2\lambda-24=0$$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{2\pm\sqrt{4+96}}{2} = 1\pm 5 \qquad \lambda_1 = 6 \qquad \lambda_2 = -4$$

Base: $\lambda_1 = 6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -5 & 5 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Variable libre $x_2 \Rightarrow x_2 = s$
$-x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = s$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{NORMALISATION}: \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(NON NÉCESSAIRE)

$\lambda_2 = -4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Variable libre $x_2 \Rightarrow x_2 = s$
$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -s$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{NORMALISATION}: \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(NON NÉCESSAIRE)

Donc $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ et $P = [\vec{V}_1\ \vec{V}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $\left(\text{ou } P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$

REMARQUE: A est symétrique donc diagonalisable.
REMARQUE: poser $\lambda_1 = -4$ et $\lambda_2 = 6$ aurait fonctionné.

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (10 points) Soit la matrice A dont les valeurs propres sont λ_1=-4 et λ_2=2. Une base pour λ_1 est $\mathbf{v_1}$ et une base pour λ_2 est $\mathbf{v_2}$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

À partir de ces informations, utilisez la diagonalisation pour calculer A^4.

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^4 = PD^4P^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow D^4 = \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \quad \frac{\vec{V_1}}{|\vec{V_1}|}^{*} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \frac{\vec{V_2}}{|\vec{V_2}|}^{*} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Inverse de P : $\det(P) = 1/\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det\left|1/\sqrt{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \det\left|\frac{-1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \det\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \det\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad adj(P) = C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} adj(P) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Première multiplication : $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 256 & 16 \\ -256 & 16 \end{bmatrix}$

Deuxième multiplication : $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 256 & 16 \\ -256 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 256 & 16 \\ -256 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 256+16 & -256+16 \\ -256+16 & 256+16 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 272 & -240 \\ -240 & 272 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136 & -120 \\ -120 & 136 \end{bmatrix}$$

* La normalisation n'est pas nécessaire. Dans ce cas :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

6. **(20 points) MOINDRES CARRÉS (manuel)**

Soit les points (x,y) mesurés suivants : (1,2), (3,2), (5,3) et (7,5). Trouvez la solution $\hat{\mathbf{x}}$ au sens des moindres carrés qui approxime l'équation d'une droite de forme y=a+bx où :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_1^1 \\ x_2^0 & x_2^1 \\ x_3^0 & x_3^1 \\ x_4^0 & x_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{et } \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 84 \end{bmatrix} \quad (A^T A)^{-1} = \frac{1}{\det(A^T A)} \operatorname{adj}(A^T A)$$

$$\det(A^T A) = 4 \times 84 - 16 \times 16 = 336 - 256 = 80$$

$$\operatorname{Cof}(A^T A): \; C_{11} = (-1)^{1+1} |84| = 84 \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} |16| = -16$$
$$C_{21} = (-1)^{2+1} |16| = -16 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} |4| = 4$$

$$\operatorname{Cof}(A^T A) = \begin{bmatrix} 84 & -16 \\ -16 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\operatorname{adj}(A^T A)}{\det(A^T A)} = \frac{(\operatorname{Cof}(A^T A))^T}{\det(A^T A)} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 84 & -16 \\ -16 & 4 \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1}$$

Remarque : au lieu de faire $(A^T A)^{-1} A^T$, il est plus rapide de commencer par $A^T b$ et ensuite $\underbrace{(A^T A)^{-1}}\underbrace{A^T b}$.

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2+3+5 \\ 2+6+15+35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 58 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 84 & -16 \\ -16 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 58 \end{bmatrix} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 84 \times 12 - 16 \times 58 \\ -16 \times 12 + 4 \times 58 \end{bmatrix} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 80 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Donc $y = 1 + \frac{1}{2}x$ REMARQUE : comme les colonnes de A ne sont pas orthogonales, on prend la méthode 1.

7. **(20 points) DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES (manuel)**

Déterminez une décomposition en valeurs singulières de la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On cherche les matrices U, Σ et V tel que $A = U\Sigma V^T$

Σ: on doit trouver les valeurs propres de A^TA

$\det([A^TA - \lambda I]) = 0 \qquad A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^TA - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5-\lambda) & 4 \\ 4 & (5-\lambda) \end{bmatrix}$

$\det([A^TA - \lambda I]) = (5-\lambda)(5-\lambda) - 16 = 25 - 5\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$

$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = 5 \pm 4 \qquad \lambda_1 = 9 \quad \lambda_2 = 1$

$\sigma_1 = \sqrt{9} = 3 \quad \sigma_2 = \sqrt{1} = 1$

V: on calcule les vecteurs propres de A^TA en tant que base orthonormale.

$A^TA - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Variable libre $x_2 = 5$

$-x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (il faut normaliser)

NORMALISATION NÉCESSAIRE

$A^TA - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Variable libre $x_2 = 5$

$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -5$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad V = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ($\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont orthonormaux)

U: $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\vec{u}_2 = \dfrac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_2 = \dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad U = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

REMARQUE : Matlab inverse le signe de V et de U.

$V = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ et $U = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

8. **(20 points) MATLAB : Méthode de la puissance décalée**

Implémentez l'algorithme de la puissance décalée pour calculer la 2ème valeur propre λ_2 de la matrice A. On fournit la valeur de λ_1 et $\mathbf{x_0}$. Faites 5 itérations. À chaque itération **k**, affichez dans un vecteur $\mathbf{x_k}$ les valeurs propres, le vecteur $\mathbf{y_k}$ normalisé par rapport à la valeur propre la plus importante, ainsi que la valeur propre la plus importante $\mathbf{m_k}$. À la toute fin, affichez la 2ème valeur propre λ_2 de la matrice A. **Insérez votre code dans le fichier puissance.m à l'endroit indiqué.**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 4.4 \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$


```
%
% INSCRIVEZ VOTRE NOM ET MATRICULE
%
% NOM :
% MATRICULE :
%
% solution_puissance.m
% MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
% Examen final automne 2019

clear all;
close all;

A   =   [   3   1   0   ;
            1   3   1   ;
            0   1   3   ]

lambda1 = 4.4
x0   =   [   1   1   1]'
K = 5

% INSÉREZ LE CODE ICI
yk = x0
xk = x0
A2 = A - lambda1*eye(3)
for i=1:K
    xk = A2*yk
    absXk = abs(xk);
    maxAbsXk = max(absXk);
    ind = find(maxAbsXk == absXk);
    mk = xk(ind)
    yk = 1/mk*xk
end

lambda2 = lambda1 + mk
```

$\lambda_2 \approx 1,5858$

REMARQUE:
$\lambda_2 \approx 1,5858$ est le résultat du code et le résultat fourni dans le corrigé de l'éditeur et est donc considérée comme la bonne réponse. Cependant, la fonction MATLAB $[V,D]=eig(A)$ fournit $D = \begin{bmatrix} 1,5858 & 0 & 0 \\ 0 & 3,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 4,4142 \end{bmatrix}$ où $\lambda_2 = 3,0000$.

Dans l'exercice 4.5-36 de Poole où on utilise la même matrice avec la puissance inverse pour trouver la plus petite valeur propre, le résultat est $\lambda \approx 1,5858$.

9. **(20 points) MATLAB : Classement des équipes sportives**

La matrice P (fournie dans le fichier **equipes.m**) donne le pointage de chaque équipe, A à E. Construisez la matrice d'adjacence A où les a_{ij} valent $(p_{ij}$ - $p_{ji})$ si l'équipe i bat l'équipe j, 0 autrement. Affichez la matrice V des vecteur propres, la matrice D des valeurs propres et le vecteur propre approprié pour procéder au classement. Donnez l'ordre de classement de l'équipe la plus forte à l'équipe la plus faible.

$$\mathrm{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 7 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

À titre indicatif, pour i=2 et j=3, on a P(2,3) = 7, ce qui indique que l'équipe B a marqué 7 points en jouant contre l'équipe C, et on a P(3,2) = 4, ce qui indique que l'équipe C a marqué 4 points en jouant contre l'équipe B. On aura donc A(2,3) = 7 - 4 = 3 et inversement, A(3,2) = 0. Pour cette question, le hardcoding est accepté. **Insérez votre code dans le fichier equipes.m à l'endroit indiqué.**

RÉPONSE: EBADC

```
% solution_equipes.m
% MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
% Examen final automne 2019

clear all;
close all;

P    =   [    0    5    5    6    2    ;
              8    0    7    2    7    ;
              2    4    0    4    2    ;
              1    1    3    0    3   ;
              6    8    4    2    0    ];

[M, N] = size(P);
A = zeros(M,N);

for i=1:M
    for j=1:N
        % INSÉREZ LE CODE ICI
        if (P(i,j)) > P(j,i)
            A(i,j) = P(i,j) - P(j,i);
        else
            A(i,j) = 0; % Non nécessaire car initialisation à zéro
        end
    end
end
A=A
% INSÉREZ LE CODE ICI
[V,D] = eig(A)
monVecteurPropre = -V(:,1) % Le vecteur est négatif

% DÉCOMMENTEZ ET METTRE LE VECTEUR PROPRE APPROPRIÉ DANS LA VARIABLE monVecteurPropre
%[c,Equipe]=sort(monVecteurPropre,'descend')
%B = ['A','B','C','D','E']
%BClassement = B(Equipe)
[c,Equipe]=sort(monVecteurPropre,'descend')
B = ['A','B','C','D','E']
BClassement = B(Equipe)
```

10. **(20 points) MATLAB : Compression d'image avec la SVD**

Le fichier **drapeau.m** lit et convertit l'image **drapeau.bmp** pour la stockez dans la variable A. Compressez l'image en utilisant la décomposition en valeurs singulières en ne gardant que les 7 valeurs singulières les plus grandes. Vous pouvez utiliser, au choix, la commande **svd()** ou la commande **svds()**. Si vous utilisez la commande svd(), vous devrez générer vous-même les nouvelles matrices U, S et V à partir de celles fournies par la commande svd(). Construisez une image compressée A2. La commande **imshow(A2/255)** est déjà dans le fichier. Pour cette question, le hardcoding est accepté. **Insérez votre code dans le fichier drapeau.m à l'endroit indiqué.**


```
%
% INSCRIVEZ VOTRE NOM ET MATRICULE
%
% NOM :
% MATRICULE :
%
% solution_drapeau.m
% MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
% Examen final automne 2019

clear all;
close all;

I = imread('drapeau.bmp');
A = double(I);
figure(1)
imshow(A/255);

% INSÉREZ VOTRE CODE ICI ET REMPLACEZ A2 PAR L'IMAGE (MATRICE) COMPRESSÉE
% SOLUTION AVEC LA COMMANDE SVDS()
[U,S,V] = svds(A,7);
A2 = U*S*V';

% SOLUTION AVEC LA COMMANDE SVD()
[U,S,V] = svd(A);
U2 = U(:,1:7);
S2 = S(1:7,1:7);
V2 = V(:,1:7);
A2 = U2*S2*V2';

figure(2)
imshow(A2/255);
imwrite(A2/255, 'drapeau2.bmp', 'bmp');
```