

GEL-3006 Systèmes de communications
Examen de mi-session (automne 2020)

Enseignant : Jean-Yves Chouinard

Durée : 3 heures

Remarques importantes : le matériel permis est :

- Manuel de cours : Lathi, Modern Digital and Analog Communication Systems, 5ème édition
- Une (1) feuille aide-mémoire recto-verso manuscrite.
- Calculatrice approuvée par la FSG.

Les cellulaires, les tablettes numériques et les portables sont interdits.

Question 1 : (20 points)

Soit le signal suivant :

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} \cos [2\pi f_c t + 2\pi f_m t + \varphi] u(t)$$

où $u(t)$ est la fonction échelon et $f_m \ll f_c$. Donnez les expressions de :

- la représentation complexe en bande de base de $x(t)$, soit $\tilde{x}(t)$,
- le module $|\tilde{x}(t)|$ et la phase $\angle \tilde{x}(t)$ de $\tilde{x}(t)$, et
- la composante en phase $\tilde{x}_I(t)$ et la composante en quadrature $\tilde{x}_Q(t)$ de $\tilde{x}(t)$.

Question 2 : (20 points)

Le signal $m(t) = 10 \cos(1000\pi t)$ est modulé en modulation AM conventionnelle avec un indice de modulation AM : $m_{AM} = 65\%$.

- Écrivez l'expression du spectre d'amplitude du signal $M(f)$.
- Écrivez l'expression du signal modulé $s_{AM}(t)$ en indiquant clairement les valeurs numériques pour une amplitude $A_c = 1$ [v] et une fréquence $f_c = 1$ [MHz] de la porteuse AM.
- Donnez le spectre du signal modulé $S_{AM}(f)$ et tracez-le.
- Déterminez la densité spectrale de puissance $\mathcal{P}_{AM}(f)$ (en Watts par Hertz).
- L'efficacité en puissance η_{AM} de la modulation AM est définie par le rapport de la puissance des bandes latérales sur la puissance totale du signal AM :

$$\eta_{AM} = \frac{P_{\text{bandes latérales}}}{P_{\text{totale}}}.$$

Quelle est la valeur de l'efficacité de puissance η_{AM} du signal AM ?

Question 3 : **(20 points)**

Le format des disques audio numériques DVD-audio (DVD-A) consiste en deux signaux (gauche et droit pour la stéréophonie) échantillonnés chacun à 192 kiloéchantillons par seconde (192 kHz). Un convertisseur analogique-numérique quantifie chaque échantillon et les encode avec des mots de 24 bits.

- Sachant que le rapport signal à bruit de quantification pour une sinusoïde couvrant toute la plage dynamique est $SQNR = \frac{3}{2}L^2$, L étant le nombre de niveaux de quantification, quelle est la valeur numérique du rapport signal à bruit de quantification en dB, i.e. $SQNR_{dB}$ pour un DVD-A ?
 - Quel est le débit binaire résultant R_b ? Tenez compte des deux canaux (gauche et droit).
 - Le système doit pouvoir enregistrer 70 minutes de musique en stéréo. Quel sera alors le nombre total d'octets (mots de 8 bits) inscrits sur le disque DVD-A ?
-

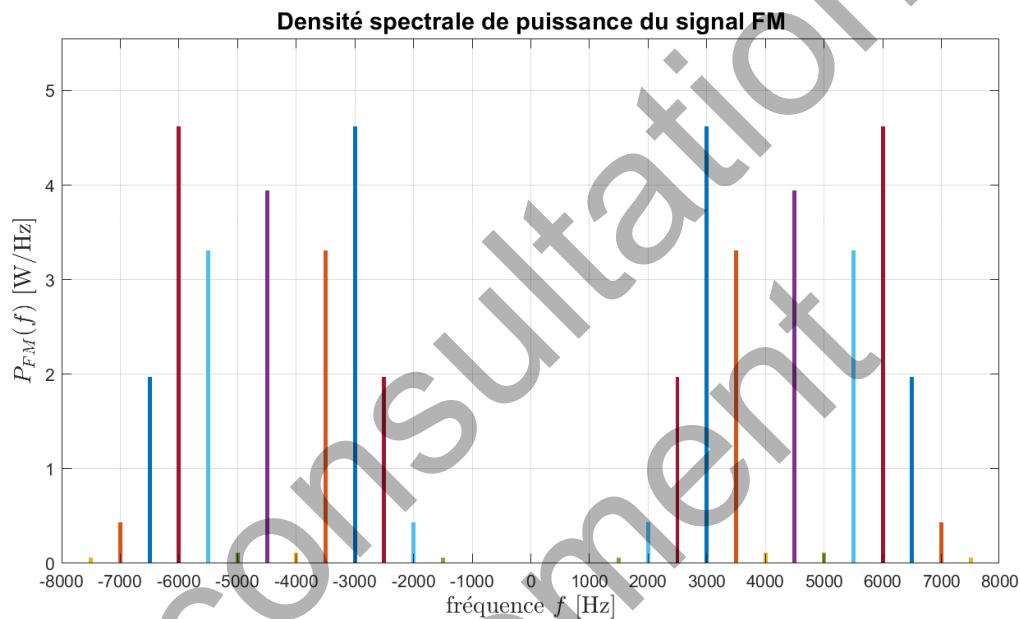
Question 4 : **(20 points)**

Indiquez (clairement) un avantage et un désavantage de chacune des modulations suivantes :

- Modulation d'amplitude AM conventionnelle.
 - Modulation d'amplitude à bande latérale double DSB.
 - Modulation d'amplitude à bande latérale simple SSB.
 - Modulation d'amplitude QAM analogique.
 - Modulation d'amplitude à bande résiduelle VSB.
-

Question 5 :**(20 points)**

Un signal FM est modulé par le message $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$. Sa densité spectrale du puissance, $P_{FM}(f)$ en [W/Hz], est montrée ci-dessous :



- Quelle est la fréquence porteuse f_c ? Justifiez votre réponse.
- Quelle est la fréquence du message f_m ? Justifiez votre réponse.
- Sachant que sa déviation maximale de fréquence est 2 000 Hz, quel est l'indice de modulation β_{FM} ? S'agit-il d'un signal à bande étroite ou à large bande ?
- En utilisant la formule de Carson, estimatez la largeur de bande de transmission, B_T , du signal FM.
- Quelle est la puissance, P_{FM} , en [W] de ce signal FM ?

①

Question 1

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos[2\pi f_c t + 2\pi f_m t + \phi] u(t)$$

$f_m \ll f_c$ et $u(t)$ est la fonction échelon

a)

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{x}(t) e^{j 2\pi f_c t} \}$$

$$\text{Donc } x(t) = A e^{-\alpha t} \operatorname{Re} \{ e^{j [2\pi f_c t + 2\pi f_m t + \phi]} \} u(t)$$

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ A e^{-\alpha t} e^{j [2\pi f_m t + \phi]} u(t) e^{j 2\pi f_c t} \}$$

$$\rightarrow \boxed{\tilde{x}(t) = A e^{-\alpha t} e^{j [2\pi f_m t + \phi]} u(t)}$$

$$\text{b)} \boxed{| \tilde{x}(t) | = A e^{-\alpha t} u(t)}$$

$$\angle \tilde{x}(t) = (2\pi f_m t + \phi) u(t)$$

$$\text{c)} \boxed{\tilde{x}_I(t) = A e^{-\alpha t} \cos(2\pi f_m t + \phi) u(t)}$$

$$\boxed{\tilde{x}_Q(t) = A e^{-\alpha t} \sin(2\pi f_m t + \phi) u(t)}$$

(1)

Questions 2

$m(t) = 10 \cos(1000\pi t) \Rightarrow A_m = 10 \text{ et } f_m = 500 \text{ Hz}$
 modulation AM conventionnelle (DSB-SC)

indice de modulation = $M_{AM} = 65\%$

a) $M(f) = \mathcal{F}[m(t)]$

$$M(f) = \mathcal{F}[10 \cos(1000\pi t)]$$

$$\boxed{M(f) = 5 [\delta(f-500) + \delta(f+500)]}$$

b) $A_c = 1 \text{ V}$ et $f_c = 1 \text{ MHz}$

$$s_{AM}(t) = A_c [1 + R_{AM} m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Pour $M_{AM} = 0.65 = \frac{A_{MAX} - A_{MIN}}{A_{MAX} + A_{MIN}} = \frac{1.65 - 0.35}{1.65 + 0.35} = 0.65$

où $A_{MAX} = 1 + 0.65$ et $A_{MIN} = 1 - 0.65$
 $A_{MAX} = 1.65$ $A_{MIN} = 0.35$

Pour $m(t) = 10 \cos(1000\pi t)$ $A_{MAX} = 1.65$
 On a : $A_{MIN} = 0.35$

$$\max(|R_{AM} m(t)|) = 0.65$$

$$\Rightarrow R_{AM} = \frac{0.65}{\max(m(t))} = \frac{0.65}{10} = 0.065$$

$$\boxed{s_{AM}(t) = [1 + 0.065(10 \cos(1000\pi t))] \cos(2\pi \cdot 10^6 t)}$$

$$\boxed{s_{AM}(t) = [1 + 0.65 \cos(1000\pi t)] \cos(2 \cdot 10^6 \pi t)}$$

a)

$$\text{c) } S_{Am}(f) = \mathcal{F}[S_{Am}(t)]$$

$$S_{Am}(f) = \mathcal{F}\left[1 + \frac{0.65}{\cos(1000\pi t)}\right] \cos(2 \cdot 10^6 \pi t)$$

$$S_{Am}(f) = \mathcal{F}[\cos(2\pi 10^6 t)] + \mathcal{F}[0.65 \cos(1000\pi t)] \cos(2\pi 10^6 t)$$

$$S_{Am}(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - 10^6) + \delta(f + 10^6)]$$

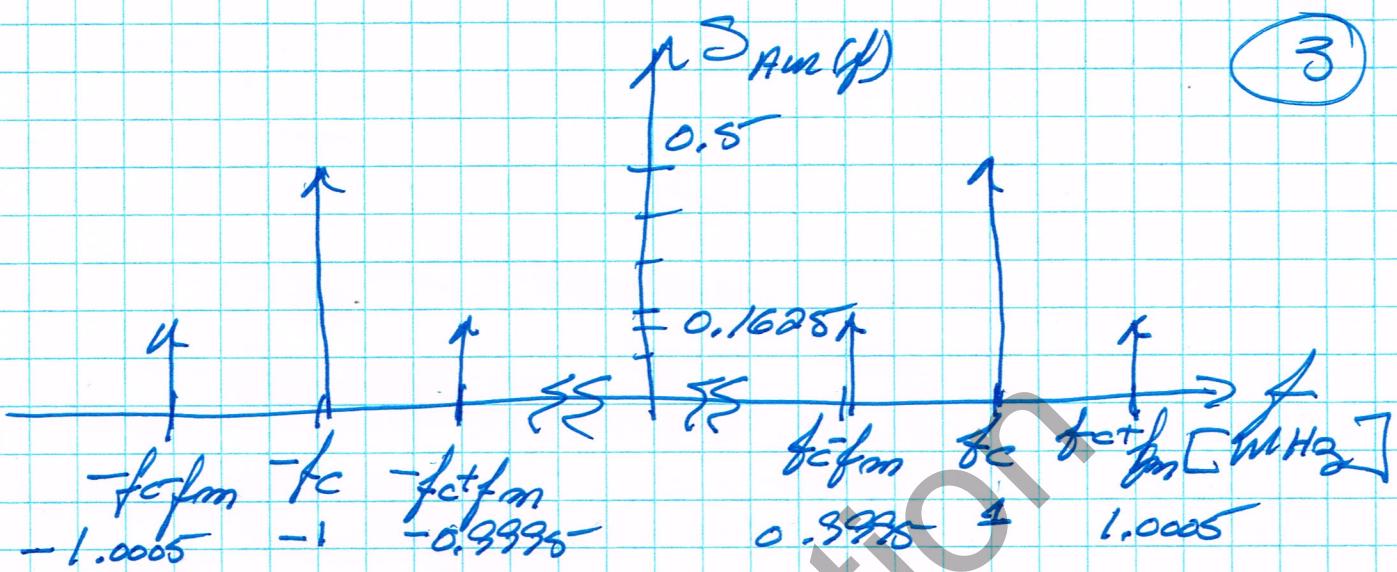
$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (0.65) [\delta(f - f_c - fm) + \delta(f - f_c + fm) + \delta(f + f_c + fm) + \delta(f + f_c - fm)] \right]$$

$$S_{Am}(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - 10^6) + \delta(f + 10^6)] + \frac{0.65}{4} [\delta(f - 10^6 + 500) + \delta(f - 10^6 - 500) + \delta(f + 10^6 + 500) + \delta(f + 10^6 - 500)]$$

$$S_{Am}(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - 10^6) + \delta(f + 10^6)] + 0.1625 [\delta(f - 1.0005 \times 10^6) + \delta(f - 0.9995 \times 10^6) + \delta(f + 1.0005 \times 10^6) + \delta(f + 0.9995 \times 10^6)]$$

d)

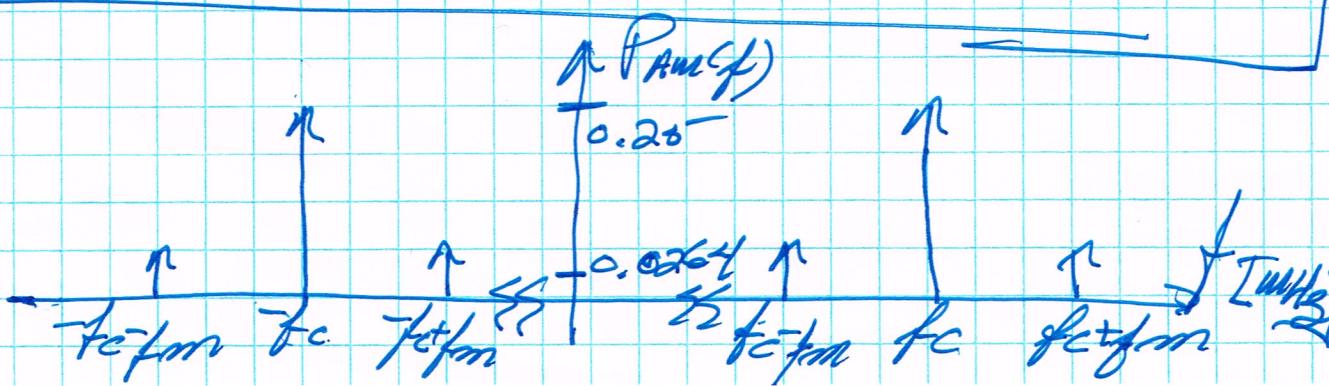
3



d) Densité spectrale de puissance

$$P_{Am}(f) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 [\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)] + \left(\frac{0.65}{4}\right)^2 [\delta(f-f_{cfm}) + \delta(f-f_{cfm}) + \delta(f+f_{cfm}) + \delta(f+f_{cfm})]$$

$$P_{Am}(f) = (0.25) [\delta(f-10^6) + \delta(f+10^6)] + (0.0264) [\delta(f-1.0005 \cdot 10^6) + \delta(f-0.9995 \cdot 10^6) + \delta(f+1.0005 \cdot 10^6) + \delta(f+0.9995 \cdot 10^6)]$$



e) efficacité en puissance

$$\eta_{AM} = \frac{P_{bordures latérales}}{P_{TOTALE}}$$

Donc

$$\eta_{AM} = \frac{4 \times (0.0264)}{(2 \times 0.05) + (4 \times 0.0264)}$$

$$\eta_{AM} = \frac{0.1056}{0.6056} = 0.1744$$

$$\boxed{\eta_{AM} = 17.44\%}$$

Question 3 :

DVD-A : $f_s = 132 \text{ kHz/s}$

$\gamma = 24 \text{ bits}$

2 canaux (gauche et droit)

a) $SQNR = \frac{3}{2} L^2$

$$L = 2^{\gamma} = 2^{24} = 16\ 777\ 216 \text{ micros}$$

$$SQNR = \frac{3}{2} (2^{24})^2 = 4.222 \times 10^{14}$$

$$SQNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{SQNR}{10} = 10 \log_{10} 4.222 \times 10^{14}$$

$SQNR_{dB} = 146.3 \text{ [dB]}$

b) $R_b = n_{\text{CANAUX}} \times f_s \times \gamma$

$$R_b = 2 \times 132 \times 10^3 \times 24$$

$R_b = 9\ 216\ 000 \text{ [bits/s]}$

c) $N_b = 70 \text{ min} \times 60 \text{ s/min} \times 9\ 216\ 000 \text{ [bits/s]}$

$$N_p = 38\ 704\ 000\ 000 \text{ [bits]}$$

$$N_{\text{octets}} = \frac{N_b}{8} = 4\ 838\ 400\ 000 \text{ [octets]}$$

$N_{\text{octets}} = 4\ 838\ 4 \text{ Octets}$

Question 4 (Avantages et désavantages)

a) modulations AM conventionnelle :

AVANTAGE : Récepteur simple (démodulateur d'enveloppe)

DÉSAVANTAGE : inefficacité en puissance

b) modulations DSB :

AVANTAGE : efficace en puissance

DÉSAVANTAGE : Requiert une démodulation cohérente

c) modulation SSFB :

AVANTAGE : efficacité spectrale

DÉSAVANTAGE : transmetteur et récepteur plus complexes (cohérent, élimination d'une bande latérale)

d) modulation QAM analogique :

AVANTAGE : efficacité spectrale, transmission de 2 signaux sur la même bande de fréquence

DÉSAVANTAGE : Requiert une détection cohérente (récepteur avec boucle à asservissement de phase)

e) modulation VSB :

AVANTAGE : efficacité spectrale

DÉSAVANTAGE : Requiert une réception cohérente

Requiert un filtre additionnel VSB

Question 5

Par inspection, le graphique indique :

a) $f_c = 1500 \text{ Hz}$

b) $f_m = 500 \text{ Hz}$

c) $\Delta f_{\max} = 2000 \text{ Hz}$

$$\Rightarrow \beta_{fm} = \frac{\Delta f_{\max}}{f_m} = \frac{2000 \text{ Hz}}{500 \text{ Hz}}$$

$$\boxed{\beta_{fm} = 4}$$

\Rightarrow Signal FM à large bande
car $\beta_{fm} > 1$

d) Largeur de bande (règle de Carson)

$$\boxed{B_T = 2(\beta_{fm} + 1) f_m = 2(4+1) f_m}$$

e) $P_{fm} = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n^2(\beta_{fm})$

$$\frac{A_c^2}{2} I_0^2(4) \approx 3.95 \text{ (graphique)}$$

où $I_0(4) = -0.3971$ (tableau des Bessel)

Pour $\beta = 0$, on a

a

$$P_{FM} = \frac{A_C^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |T_n(0)|^2 = \frac{A_C^2}{2}$$

$\underbrace{\quad}_{\equiv T_0(0)^2 = 1}$

Pour $\beta = 4$, on a à $f = f_0$ et $-f_0$:

$$\frac{A_C^2}{4} - T_0(4)^2 = 4 \quad (\text{graphique})$$

$$\frac{A_C^2}{4} \underbrace{(-0.3371)^2}_{\approx -0.4} = 4$$

$$\frac{A_C^2}{4} \underbrace{(-0.4)^2}_{0.16} = 4$$

$$\Rightarrow A_C^2 = \frac{16}{0.16} = 100$$

et $A_C = 10$

Donc $P_{FM} = \frac{A_C^2}{2} = \frac{100}{2}$

$$\boxed{P_{FM} = 50 \text{ [W]}}$$