GEL-3003 – Signaux et systèmes discrets :
Examen 1
(correction sur 100 points, pondération de 27.5%)
Mardi 22 Octobre 2019
Durée : 15h30 à 17h30 - 2h00

Le présent examen est un examen de cours. Il vise à vous évaluer sur la compréhension du cours. Les consignes sont les suivantes :

— Répondez aux questions sur le formulaire
— Aucune documentation ou note de cours n'est permise
— L'examen compte 4 questions pour un total de 100 points.
— Laissez des traces de vos raisonnements et justifiez vos résultats.
— Calculatrice autorisée.

L'examen comporte 11 pages dont une page de formulaire. Vérifiez qu'aucune est manquante. Comme indiqué lors des séances magistrales et des laboratoires, la méthodologie et l'analyse rapportent la majorité des points pour les exercices 2 à 4. Les autres points quantifient les résultats. Enfin, si vous êtes bloqués à une question, passez à la suivante et revenez à la fin si le temps vous le permet.

Bon courage à toutes et à tous ! ! !

Nom, Prénom et matricule : ________________________________

Série géométrique : $\sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ $\qquad$ $\sum_{k=1}^{N} a^k = \frac{a(1-a^N)}{1-a}$

Relations d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ $\qquad$ $\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$

Convolution : $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_m x(m)h(n-m) = \sum_m h(m)x(n-m)$

Corrélation : $r_{ab}(n) = a(n) ** b(n) = a(n) * b(-n)$ $\quad$ on cherche $b(n)$ dans $a(n)$

Transformée en Z : $X(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$

TFTD :

$X(e^{j\omega}) = \sum_n x(n)e^{-j\omega n}$ $\qquad$ $X(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega+2\pi m)}\right)$

$x(n) * y(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ $\qquad$ $x(n)y(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega})]$

$u(n) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$ $\qquad$ $e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

Régime transitoire RII : $\rho^{n_{eff}} = \epsilon$ $\qquad$ où $\rho = \max_i |p_i|$

Dél. de phase et de groupe : $d(\omega) = -\frac{\angle H(\omega)}{\omega}$ $\qquad$ $d_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega}[\angle H(\omega)]$

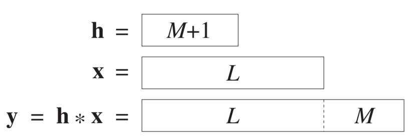

Fig. 4.1.1 Relative lengths of filter, input, and output blocks.

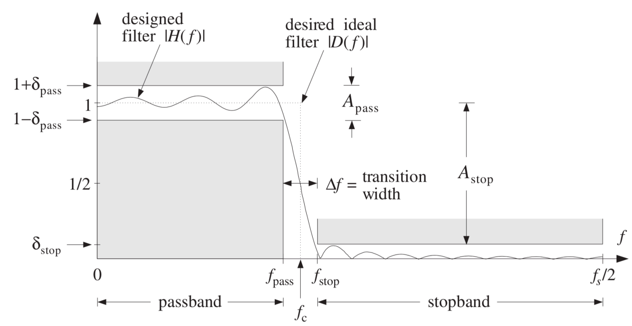

Fig. 10.2.1 Magnitude response specifications for a lowpass filter.

- 10.2.5 $\qquad \delta_{pass} = \dfrac{10^{A_{pass}/20}-1}{10^{A_{pass}/20}+1} \qquad \delta_{stop} = 10^{-A_{stop}/20}$
- 10.2.6-7 $\qquad \delta = \min(\delta_{pass}, \delta_{stop})$
- Table 10.2.1

Window	δ	A_{stop}	A_{pass}	D
Rectangular	8.9%	21 dB	1.55 dB	0.92
Hamming	0.2%	54 dB	0.03 dB	3.21
Kaiser	variable δ	$-20\log_{10}\delta$	17.372δ	$(A-7.95)/14.36$

$$\rightarrow D = \begin{cases} \frac{A-7.95}{14.36}, & A > 21 \\ 0.922, & A \le 21 \end{cases}$$

- Si Kaiser (10.2.10)

$$\alpha = \begin{cases} 0.1102(A-8.7), & A \ge 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & 21 < A < 50 \\ 0, & A \le 21 \end{cases} \qquad A = -20\log_{10}\delta$$

- 10.2.1 $\qquad \Delta f = f_{stop} - f_{pass} \qquad f_c = \frac{1}{2}(f_{pass} + f_{stop}) \qquad \omega_c = 2\pi f_c / f_s$
- 10.2.11 $\qquad N = 1 + \dfrac{Df_s}{\Delta f}$ (arrondir à entier impair supérieur) $\rightarrow M = \dfrac{N-1}{2}$
- 10.2.14 $\qquad h(n) = w_i(n-M, N) \cdot \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}[n-M]\right) \qquad 0 \le n \le N-1$

18

1. (25 points) Question de cours

(a) (8 points) Que pouvez-vous dire sur les pôles et les zéros d'un

i. (2 points) Système stable ?

Cf cours

ii. (2 points) Filtre à réponse impulsionnelle finie ?

Cf cours

iii. (2 points) Système causal ?

Cf cours

iv. (2 points) Filtre à phase linéaire ?

Cf cours

(b) (8 points) Un système discret représenté par l'équation entrée-sortie :

$$y(n) = 5 + \sum_{i=-1}^{1} b_i x(n-i) \tag{1}$$

i. (5 points) Est-ce que le système est linéaire ? Prouvez.

terme constant donc non linéaire.

Prouver avec méthode slide 18 → section 1.

ii. (3 points) Est-ce que le système discret est-il causal ? Justifiez

Non, commence à l'indice -1

donc dépend du futur

(c) (3 points) Définissez la causalité pour tout système discret (donc pas limité aux systèmes linéaires et invariants).

cf cours.

(d) (3 points) Soit un système discret linéaire et invariant. Comment peut-on déterminer si ce système est causal uniquement avec la connaissance de sa réponse à l'impulsion $h(n)$?

cf section 1.

(e) (3 points) Donnez la définition de stabilité pour un système discret (pas nécessairement linéaire et invariant).

cf section 1

2. (25 points) Analyse d'un filtre Considérez le filtre à temps discret linéaire-invariant en temps (LIT) avec $x(n)$ en entrée et $y(n)$ en sortie décrit par :

$$y(n) = k_1 x(n) + k_2 x(n-1) - k_2 x(n-2) - k_1 x(n-3) \tag{2}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes à valeurs réelles positives.

(a) (3 points) S'agit-il d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou à réponse impulsionnelle infinie (RII) ? Justifiez

RIF car $h(n) = \underbrace{[k_1, k_2, -k_2, -k_1]}_{\text{finie}}$.

(b) (4 points) Générer les trois premiers termes de la réponse impulsionnelle (pour n allant de 0 à 2). En déduire quelles sont les conditions initiales et leurs valeurs.

$y(0) = k_1 x(0) + k_2 x(-1) - k_2 x(-2) - k_1 x(-3)$

donc $x(-1) = x(-2) = x(-3) = 0$.

Conditions initiales nulles.

(c) (8 points) Donnez la fonction de transfert dans le domaine en z et déterminez la région de convergence.

$H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = k_1 + k_2 z^{-1} - k_2 z^{-2} - k_1 z^{-3}$

RDC $|z| > 0$

(d) (4 points) Donnez la réponse en fréquence à temps discret du filtre.

$H(\omega) = k_1 + k_2 e^{-j\omega} - k_2 e^{-2j\omega} - k_1 e^{-3j\omega}$

$= k_1 (1 - e^{-3j\omega}) + k_2 (e^{-j\omega} - e^{-2j\omega})$.

$= e^{-3/2 j\omega} (k_1 e^{3j\omega/2} + k_2 e^{j\omega/2} - k_2 e^{-j\omega/2} - k_1 e^{-3j\omega/2})$

$= 2j \left[k_1 \sin\left(\frac{3}{2}\omega\right) + k_2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] e^{-\frac{3}{2}j\omega}$.

(e) (6 points) Déterminez la réponse de phase et le délai de groupe. Le filtre a-t-il une phase linéaire sur toutes les fréquences ? Justifiez.

$j = e^{j\pi/2}$

$\angle H(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega$

Délai de groupe $\Rightarrow$ $d_g(\omega) = \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ phase linéaire

3. (25 points) Dimensionnement d'un filtre numérique Considérons la réalisation d'un filtre passe-bande satisfaisant au gabarit suivant, avec une fréquence d'échantillonnage à 10kHz : La région de transition doit être la plus

Bande arrêt/passante	fréquence	Atténuation
première bande d'arrêt	1.8kHz	45dB
bande passante	1.9kHz ... 2.1kHz	0 dB
deuxième bande d'arrêt	2.2kHz	50dB

faible et la fenêtre choisie doit offrir l'atténuation souhaitée . Votre réponse finale doit utiliser le symbole $w_i(n, N)$ pour faire référence à une fenêtre de N points centrée à l'origine. Utilisez l'indice i = R pour rectangulaire, H pour Hamming ou K pour Kaiser (dans ce dernier cas, donnez aussi la valeur de α).

fenêtre de Kaiser car 50dB
et fenêtre courte.

→ voir exemple fait en cours.

4. (25 points) Filtre et filtre inverse.
Soit le système global discret représenté sur la FIGURE 1. On considère

$$H_2(z) = \frac{z}{z^2+1}, |z| > 1 \qquad (3)$$

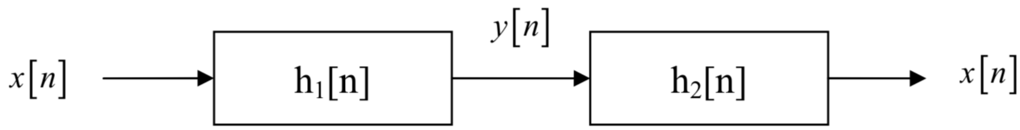

FIGURE 1 – Système global

(a) (10 points) Calculez $h_2[n]$ et donnez l'équation aux différences.

$$H_2(z) = \frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z-j)(z+j)}$$

Décomposition en fractions partielles

$$H_2(z) = \frac{A}{(z-j)} + \frac{B}{(z+j)}.$$

$$A \left| \frac{z}{z-j} \right|_{z=-j} = \frac{-j}{-2j} = +\frac{1}{2}.$$

$$B \left| \frac{z}{z+j} \right|_{z=+j} = \frac{j}{j+j} = \frac{1}{2}.$$

$$h_2(n) = \frac{1}{2}(-j)^n u(n) + \frac{1}{2}(j)^n u(n).$$

(b) (15 points) Calculez $H_1(z)$. Le filtre est-il RIF ou RII ? Le filtre est-il causal ?

$$H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1+z^2}{z}$$

$$= z^{-1} + z$$

$\rightarrow$ Filtre RIF, non causal.