Y

1. **(5 points) BONUS - QUESTIONS DE COMPRÉHENSION** : 1 point par bonne réponse, 5, 6 ou 7 bonnes réponses sur 7 donnent 5 points. **Les calculs ne sont pas exigés.** Ni les explications

   (a) Une matrice est inversible si son déterminant est différent de 0 (un nombre).

   (b) Si le déterminant d'une matrice est égal à 4, que sera le déterminant d'une nouvelle matrice obtenue en interchangeant 2 lignes de la première? -4 (un nombre).

   (c) Quelles sont les valeurs **propres** de la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

   a, d et F. Matrice triangulaire, donc les valeurs propres

   (d) Quel est le déterminant de la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   det A = 1
   $L_1 \leftrightarrow L_4$ et $L_2 \leftrightarrow L_3$, on change de signe à chaque permutation. Ensuite $1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

   (e) Pour une diagonalisation, si A = PDP^{-1} implique que A = ADP^{T}, cela veut dire que A est une matrice symétrique (un mot).

   (f) Si le déterminant de la matrice A est égal à 4, quel sera le déterminant d'une nouvelle matrice obtenue en ajoutant à la ligne 3 le double de la ligne 1? 4

   (g) Toute matrice $n \times n$ admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable (un mot).

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020 2/

2. DÉTERMINANTS (15 PTS)

a) (2 PTS) $V = \frac{4}{3}\pi abc$ où $a=4, b=2, c=1$

$\det(T) = 2 \times 4 \times 1 = 8$ $\quad V_2 = V \times \det(T)$

$V = \frac{4}{3}\pi \times 4 \times 2 \times 1 = \frac{32}{3}\pi$ $\quad V_2 = \frac{32}{3}\pi \times 8 = \frac{256}{3}\pi$

ou $85,3333\,\pi$

b) (4 PTS) $\det A = 2 \times 1 - (-3) \times 3 = 2 + 9 = 11$

$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} 17 & -3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} = 17 \times 1 - (-3) \times 9 = 17 + 27 = 44$

$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = 2 \times 9 - 17 \times 3 = 18 - 51 = -33$

$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{44}{11} = 4 \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-33}{11} = -3$

c) i. (1 PT) : Matrice triangulaire $\rightarrow \det A = 3 \times 1 \times 2 = 6$

(4 PTS) ii) $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

$C_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2 \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$C_{31} = +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - (-2) = -1 \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9 \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$Com(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -9 & 3 \end{bmatrix}$ (ou $Cof(A)$)

iii. (2 PTS) $Adj(A) = (Com(A))^T$

$Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

iv. (3 PTS)

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020 3/

3. (15 PTS) VALEURS PROPRES

a) (3 PTS) $\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix}(3-\lambda) & 4 \\ 1 & (3-\lambda)\end{bmatrix}\right)=0$

$(3-\lambda)(3-\lambda)-4 = 9-3\lambda-3\lambda+\lambda^2-4 = \lambda^2-6\lambda+5=0$

$\lambda^2-6\lambda+5=0$ ou $(\lambda-5)(\lambda-1)=0$

b) (4 PTS) $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{6\pm\sqrt{36-20}}{2} = 3\pm 2$

$\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 1$

c) (8 PTS)
$[A-\lambda I \mid 0] = \left[\begin{bmatrix}2 & 2 \\ 1 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 0 \\ 0 & 4\end{bmatrix} \middle| \begin{matrix}0 \\ 0\end{matrix}\right] = \left[\begin{array}{cc|c}-2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

Variable libre : $x_2 \Rightarrow x_2 = s \quad -x_1+x_2=0 \Rightarrow x_1 = s$

$\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}$ (Aucune normalisation nécessaire)

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020 V

4. (15 PTS) ORTHOGONALITÉ ET FACTORISATION

a) (7 PTS)

$$\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 9 \\ +1 \\ +1 \\ +9 \end{matrix} = 20$$

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -15 \\ 1 \\ -5 \\ -21 \end{matrix} = -40$$

$$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} - \left(\frac{-40}{20}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{x}_3 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2$$

$$\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 24 \end{matrix} = 30$$

$$\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ -6 \\ -8 \end{matrix} = -10 \qquad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{matrix} = 20$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{30}{20} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{(-10)}{20} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/2 \\ 2/2 \\ -4/2 \\ 16/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9/2 \\ 3/2 \\ -3/2 \\ 9/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6/2 \\ 2/2 \\ 2/2 \\ 6/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Une base orthogonale est $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Normalisation non nécessaire.

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020

4. ORTHOGONALITÉ ET FACTORISATION

b) (8 PTS) $R = Q^T A$ où Q est une base orthonormale

Il faut normaliser la base orthogonale de l'espace représenté par Col(A).

$$\vec{w_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow |\vec{w_1}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-9)^2 + 1^2} = \sqrt{25+1+9+1} = \sqrt{36} = 6$$

$$\vec{w_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow |\vec{w_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{1+25+1+9} = \sqrt{36} = 6$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\vec{w_1}}{|\vec{w_1}|} & \frac{\vec{w_2}}{|\vec{w_2}|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 \\ 1/6 & 5/6 \\ -3/6 & 1/6 \\ 1/6 & 3/6 \end{bmatrix}$$

$$Q^T A = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & -3/6 & 1/6 \\ -1/6 & 5/6 & 1/6 & 3/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$\frac{25}{6} + \frac{1}{6} + \frac{9}{6} + \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$

$\frac{-5}{6} + \frac{5}{6} - \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{0}{6} = 0$

$\frac{-9}{6} + \frac{35}{6} - \frac{5}{6} + \frac{15}{6} = \frac{36}{6} = 6$

$\frac{45}{6} + \frac{7}{6} + \frac{15}{6} + \frac{5}{6} = \frac{72}{6} = 12$

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020

5. (15 PTS) DIAGONALISATION

a) (8 PTS) Comme la matrice est triangulaire, les valeurs propres sont -1 et 1.

$$\lambda=1: A-\lambda I = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 6 & -2\end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{array}\right]$$ Var. libre : x_2, $x_2 = s$

$$3x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_1 = \tfrac{1}{3}s \rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1/3\\ 1\end{bmatrix} \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\lambda=-1: A-\lambda I = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 6 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$ Var. libre : x_2, $x_2 = s$

$$x_1 + 0x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$P = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

b) $$P = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2] = \begin{bmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow D^4 = \begin{bmatrix}2^4 & 0\\ 0 & 1^4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^4 = PD^4P^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80 & 7\\ 32 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}80 & 7\\ 32 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -7\\ -2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}226 & -525\\ 90 & -209\end{bmatrix}$$

Inverse d'une matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{15-14}\begin{bmatrix}3 & -7\\ -2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -7\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

$240-14=226$
$-560+35=-525$
$96-6=90$
$-224+15=-209$

$$A^4 = PDP^{-1} = \begin{bmatrix}226 & -525\\ 90 & -209\end{bmatrix}$$

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020

6. (15 PTS) MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Modèle: $y = a\cos^2(\theta) + b\sin^2(\theta)$

Points (θ, y) : $(0,1)$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2})$ et $(\frac{\pi}{2}, 2)$

$\sin(0) = 0 \rightarrow \sin^2 0 = 0 \qquad \cos(0) = 1 \rightarrow \cos^2(0) = 1$

$\sin(\frac{\pi}{4}) = 1/\sqrt{2} \rightarrow \sin^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \qquad \cos(\frac{\pi}{4}) = 1/\sqrt{2} \rightarrow \cos^2(\frac{\pi}{4}) = 1/2$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \rightarrow \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2(0) & \sin^2(0) \\ \cos^2(\frac{\pi}{4}) & \sin^2(\frac{\pi}{4}) \\ \cos^2(\frac{\pi}{2}) & \sin^2(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse d'une matrice 2×2

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 & 1/4 \\ 1/4 & 5/4 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{\frac{25}{16} - \frac{1}{16}} \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ -1/4 & 5/4 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ -1/4 & 5/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{12} & \frac{-2}{12} \\ \frac{-2}{12} & \frac{10}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -1/6 & 5/6 \end{bmatrix}$$

$\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{4} + 0 \\ 0 + \frac{3}{4} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 11/4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -1/6 & 5/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/4 \\ 11/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35/24 - 11/24 \\ -7/24 + 55/24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24/24 \\ 48/24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$a = 1$ et $b = 2 \qquad y = 1 \cdot \cos^2(\theta) + 2 \cdot \sin^2(\theta)$

7. (15 PTS) PSEUDOINVERSE ET MOINDRES CARRÉS

a) Σ est une matrice 4×2, c.-à-d. $m = 4$ et $n = 2$
Donc, Σ^+ est une matrice 2×4

$$\Sigma = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{2} \Big\} 4 \quad \text{où } \Sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}2 \\ \}2 \end{array} \rightarrow D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \Sigma^+ = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{où } \Sigma^+ = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}2 \\ \}0 \end{array}$$

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

$$V\Sigma^+ = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/20 & -4/10 & 0 & 0 \\ 4/20 & 3/10 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 3 & -8 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow U^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 3 & -8 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 11 & 11 & -5 & -5 \\ -2 & -2 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 11/40 & 11/40 & -5/40 & -5/40 \\ -1/20 & -1/20 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

b)

$$\bar{x} = A^+ \vec{b} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 11 & 11 & -5 & -5 \\ -2 & -2 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 0+11-10-15 \\ 0-2+20+30 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} -14 \\ 48 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -7/20 \\ 6/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,35 \\ 1,2 \end{bmatrix}$$

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020

(30 PTS) 8. DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice A a 2 lignes et 3 colonnes. Donc, A^TA aura 3 lignes et 3 colonnes. Il peut être fastidieux, complexe et long de calculer manuellement les racine de $\det(A^TA - \lambda I) = 0$. Il existe une astuce pour simplifier les calculs en obtenant un polynôme de degré 2 au lieu de degré 3. Voici comment :

1) Utiliser $\det(A^{TT}A^T - \lambda I) = 0$
   Dans ce cas, on obtient un polynôme de degré 2.

2) Calculer la SVD de A^T :

   $A^T = U \Sigma V^T$

3) Inverser l'ordre et transposer toutes les matrices. Poser :

$$\left.\begin{array}{l} U' = V^T \\ \Sigma' = \Sigma^T \\ V' = U^T \end{array}\right\} \quad A = U' \Sigma' V'^T$$

Ce corrigé présente les 2 approches :

1) En utilisant $A^{TT}A^T = AA^T$

2) En utilisant A^TA

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020 10/

SOURCE: STRANG, 7-4-13

(30 PTS) 8. DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

Pour simplifier les calculs, au lieu d'utiliser $A^T A$, on peut utiliser $A^{TT}A^T$ ou bien AA^T

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\begin{bmatrix} (17-\lambda) & 8 \\ 8 & (17-\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

$$(17-\lambda)(17-\lambda)-64=0 \Rightarrow 289-17\lambda-17\lambda+\lambda^2-64=0$$

$$\lambda^2-34\lambda+225=0 \qquad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{34 \pm \sqrt{34^2-4\times 225}}{2}$$

$$\frac{34 \pm \sqrt{1156-900}}{2} = \frac{34 \pm 16}{2} = \frac{50}{2} \text{ et } \frac{18}{2} \rightarrow \lambda_1 = 25 \text{ et } \lambda_2 = 9$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{25} = 5 \qquad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{9} = 3$$

CALCUL DE Σ

A a deux lignes et trois colonnes.
A^T a trois lignes et deux colonnes.
Σ doit avoir 3 lignes et 2 colonnes (pour A^T)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \leftarrow 2 \text{ lignes} \\ \} \leftarrow 1 \text{ lignes} \end{matrix}$$

2 col. 0 colonne

Pour former D, on doit placer les valeurs singulières en ordre décroissant.

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CALCUL DE V

$A^T A - \lambda I$

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020

8. DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

$\lambda_1 = 25: \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Var. libre: x_2 $x_2 = 5$

$-x_1 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 9: \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Var. libre: x_2 $x_2 = 5$

$x_1 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -5$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

CALCUL DE U

on travaille avec A^T

$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A^T \vec{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5/\sqrt{2} \\ 5/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A^T \vec{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ -4/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{-4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \\ -4/\sqrt{18} \end{bmatrix}$

Comme $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, il faut trouver un vecteur unitaire $\vec{u}_3$ qui est orthonormal à la fois à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$. Donc, $\vec{u}_1^T \cdot \vec{u}_3 = 0$ et $\vec{u}_2^T \cdot \vec{u}_3 = 0$. On va utiliser des nombres entiers pour faciliter les calculs.

$x_1 + x_2 + 0x_3 = 0$ et $-x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$

$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 5 + 0x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -5 \\ -(-5) + 5 - 4x_3 = 0 \rightarrow x_3 = \frac{1}{2} 5 \end{array}$

x_2 var. libre $x_2 = 5$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \end{bmatrix}$

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020

8. DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

$$A^T = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

On vient de calculer une SVD pour A^T. Une SVD pour A s'obtient en inversant l'ordre des matrices et en utilisant les transposées.

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{18} & 1/\sqrt{18} & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020 13/

8. DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

Approche directe sans utiliser $A^T A^{++}$.

CALCUL DES VALEURS PROPRES ET SINGULIÈRES ET Σ

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^TA - \lambda I = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (13-\lambda) & 12 & 2 \\ 12 & (13-\lambda) & -2 \\ 2 & -2 & (8-\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\det([A^TA - \lambda I]) = 0$$

Dans un cas complexe comme ça, on autorisera Matlab pour trouver les valeurs propres.

$$\lambda_1 = 25 \quad \lambda_2 = 9 \quad \lambda_3 = 0 \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{25} = 5 \quad \sigma_2 = \sqrt{9} = 3 \quad \sigma_3 = 0$$

$$\lambda_1 = 25 : A^TA - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -12 & 12 & 2 & 0 \\ 12 & -12 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -17 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 + \frac{1}{6}L_1}{\overset{L_2 - L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} -12 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17\tfrac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Var. libre : x_2

$x_2 = 5$

$$-x_1 + 5 = 0 \Rightarrow 5 = x_1$$

$$x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020

8. DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

$$\lambda_2 = 9 : A^TA - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 2 & 0 \\ 12 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 - \frac{1}{2}L_1}{\overset{L_2 - 3L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & -32 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{L_3 - \frac{1}{4}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & -32 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{L_2/4}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Var. libre : x_2 $\quad 4s + x_3 = 0 \longrightarrow x_3 = -4s$

$x_2 = s$

$$4x_1 + 12s + 2(-4s) = 0 \rightarrow 4x_1 + 4s = 0 \rightarrow x_1 = -s$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \\ -4/\sqrt{18} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0 : \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & 12 & 2 & 0 \\ 12 & 13 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 8 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 - \frac{2}{13}L_1}{\overset{L_2 - \frac{12}{13}L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{25}{13} & \frac{-50}{13} & 0 \\ 0 & \frac{-50}{13} & \frac{100}{13} & 0 \end{array}\right]$$

$12 \times 13 = 156 \quad \frac{156}{13} - \frac{156}{13} = 0$

$\frac{169}{13} - \frac{144}{13} = \frac{25}{13} \quad \frac{-26}{13} - \frac{24}{13} = \frac{-50}{13}$

$\frac{26}{13} - \frac{26}{13} = 0 \quad \frac{-26}{13} - \frac{24}{13} = \frac{-50}{13}$

$13 \times 8 = 104$

$\frac{104}{13} - \frac{4}{13} = \frac{100}{13}$

$$\overset{L_3 + 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{25}{13} & \frac{-50}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Var. lib. x_3 : $x_3 = s$

$$x_2 - 2s = 0 \rightarrow x_2 = 2s$$

$$13x_1 + 12(2s) + 2s = 0 \rightarrow 13x_1 + 26s = 0 \rightarrow x_1 = -2s$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{V}_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \end{bmatrix}$$

MAT-2930 EXAMEN FINAL DIFFÉRÉ A-2020 15/

8. DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

CALCUL DE U

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5/\sqrt{2} \\ 5/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \\ -4/\sqrt{18} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -9/\sqrt{18} \\ 9/\sqrt{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{18} \\ 3/\sqrt{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$U = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{18} & 1/\sqrt{18} & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

```matlab
% MAT-2930 Examen final différé A-2020
% Question 9
clear all;
close all;

k = 25
I = imread('Pontiac.bmp');
A = double(I);
figure(1)
imshow(A/255);

% SOLUTION AVEC LA COMMANDE SVDS()
[U,S,V] = svds(A,k);
disp('d) Calculer le taux de compression (suite à svds).');
Taille_I = size(A)
Taille_I = Taille_I(1)*Taille_I(2)
taille_U = size(U)
taille_U = taille_U(1)*taille_U(2)
taille_V = size(V);
taille_V = taille_V(1)*taille_V(2)
Taille_ImCompressee = taille_U + taille_V + k

disp(['Calcul du taux de compression en %']);
TauxCompression= (Taille_I-Taille_ImCompressee)/Taille_I*100
A2 = U*S*V';
figure(2)
imshow(A2/255);

% SOLUTION AVEC LA COMMANDE SVD()
[U,S,V] = svd(A);
U2 = U(:,1:k);
S2 = S(1:k,1:k);
V2 = V(:,1:k);

disp('d) Calculer le taux de compression (suite à svd).');
Taille_I = size(A)
Taille_I = Taille_I(1)*Taille_I(2)
taille_U = size(U2)
taille_U = taille_U(1)*taille_U(2)
taille_V = size(V2);
taille_V = taille_V(1)*taille_V(2)
Taille_ImCompressee = taille_U + taille_V + k

disp(['Calcul du taux de compression en %']);
TauxCompression = (Taille_I-Taille_ImCompressee)/Taille_I*100

A2 = U2*S2*V2';
figure(3)
imshow(A2/255);
imwrite(A2/255, 'Pontiac2.bmp', 'bmp');
```

```matlab
% MAT-2930 Examen final différé A-2020
% Question 10
clear all;
close all;

A = [

     0     1     0     0     0     1
     1     0     1     1     0     0
     0     1     0     1     0     0
     0     1     1     0     1     0
     0     0     0     1     0     1
     1     0     0     0     1     0

     ]

% INSÉREZ LE CODE ICI
[V, D] = eig(A)

% DÉCOMMENTEZ ET METTRE LE VECTEUR PROPRE APPROPRIÉ DANS LA VARIABLE
% monVecteurPropre1
% La valeur propre dominante est la sixième
monVecteurPropre1 = -V(:,6) % On change de signe car le vecteur est négatif
[c,Noeuds1]=sort(monVecteurPropre1,'descend')
B = ['A','B','C','D','E','F']
BClassement1 = B(Noeuds1);

% INSÉREZ LE CODE ICI - ajout du lien et 2ème classement
A(1,5) = 2
A(5,1) = 2
[V, D] = eig(A)
% La valeur propre dominante est la sixième
monVecteurPropre2 = V(:,6) % On NE change PAS de signe car le vecteur est
% déjà POSITIF
% DÉCOMMENTEZ ET METTRE LE VECTEUR PROPRE APPROPRIÉ DANS LA VARIABLE
% monVecteurPropre2
[c,Noeuds2]=sort(monVecteurPropre2,'descend')
BClassement2 = B(Noeuds2);
BClassement1
BClassement2
disp('Les noeuds A et B ont amélioré leur classement.')
```