GEL-3002 : Examen partiel I

Problème 1

a) La grandeur du vecteur de Poynting moyen correspond à la puissance par unité de surface

$$\|\overline{P}_{moy}\| = \frac{P_{début}}{A_{fibre}}$$

avec

$$P_{début} = 3mW$$
$$A_{fibre} = 3 \cdot 10^{-10} \ m^2$$

On obtient

$$\|\overline{P}_{moy}\| = \frac{3 \cdot 10^{-3} W}{3 \cdot 10^{-10} m^2}$$

$$= 10^{7} W/m^2$$

b) La diminution de puissance dans la fibre est de 0,2dB/km.
À 100km, le gain en dB

$$-0{,}2\frac{dB}{km} \cdot 100km = 10 \log_{10} A$$

Où A correspond au rapport des puissances

$$A \triangleq \frac{\|\overline{P}_{100km}\|}{\|\overline{P}_{début}\|}$$

avec $\|\overline{P_{début}}\|$ l'amplitude du vecteur de Poynting moyen en début de ligne et $\|\overline{P_{100km}}\|$ après 100km. On obtient

$$-20 = 10 \log_{10} \frac{\|\overline{P_{100km}}\|}{\|\overline{P_{début}}\|}$$

$$-2 = \log_{10} \frac{\|\overline{P_{100km}}\|}{\|\overline{P_{début}}\|}$$

$$10^{-2} = \frac{\|\overline{P_{100km}}\|}{\|\overline{P_{début}}\|}$$

$$\begin{aligned} \|\overline{P_{100km}}\| &= 10^{-2} \cdot \|\overline{P_{début}}\| \\ &= 10^{-2} \cdot 10^{7} \text{ W/m}^2 \\ &= 10^{5} \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

la puissance moyenne à la sortie de la fibre :

$$\begin{aligned} P &= \|\overline{P_{100km}}\| \cdot A \\ &= 10^5 \text{ W/m}^2 \cdot 3 \cdot 10^{-10} \text{m}^2 \\ &= 0{,}03 \text{mW} \end{aligned}$$

c) Étant donné que

$$\|\overline{P_{moyen}}\| \propto \|E\|^2$$

et

$$\|E\| \propto e^{-\alpha L}$$

on a que

Hilroy

$$\|\overline{P}_{moyen}\| \propto \left(e^{-\alpha L}\right)^2$$

$$\propto e^{-2\alpha L}$$

qui correspond à la diminution de puissance dans la fibre.

À 100km, on sait que le facteur d'atténuation A :

$$A = 10^{-2}$$

$$e^{-2\alpha \cdot 100 \cdot 10^3} = 10^{-2}$$

$$-200 \cdot 10^3 \alpha = -2 \ln(10)$$

$$\alpha = \frac{\ln(10)}{100 \cdot 10^3}$$

$$\alpha = 0,000023 \text{ Np/m}$$

d)

$$\beta = 2\pi / \lambda$$

dans le vide, on a que

$$\lambda_0 = 1550 \text{nm}.$$

La vitesse de propagation dans un milieu est donnée par

$$u_p = \frac{c}{n} = \lambda f$$

Hilroy

Si le verre à un indice de réfraction de 1,5, la longueur d'onde doit diminuer de 1,5 par rapport au vide :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{1550\,nm}{1{,}5}$$

$$\lambda = 1033{,}\bar{3}\,nm$$

d'où

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1033{,}\bar{3}\,nm}$$

$$\beta \approx 6{,}08 \cdot 10^{6}\,m^{-1}$$

e) La longueur d'onde dans la fibre telle que calculée en d)

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \approx 1033{,}\bar{3}\,nm$$

f)

$$\|P\| = \frac{1}{2}\frac{\|E\|^2}{\eta}$$

avec $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

$\mu = \mu_r \mu_0$

On se trouve dans un milieu non magnétique $\mu_r = 1$

On obtient alors ϵ_r à l'aide de n

Hilroy

$$n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = 1{,}5$$

$$\sqrt{\epsilon_r} = 1{,}5$$

d'où

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$= \frac{377\,\Omega}{1{,}5}$$

$$\eta = 251{,}3\,\Omega$$

le module du champ E est alors

$$\|E\| = \sqrt{2\eta \|P\|}$$

au début de la fibre:

$$\|E\| = \sqrt{2 \cdot 251{,}3 \cdot 10^7}$$

$$= 70894{,}3 \text{ V/m}$$

à la fin de la fibre

$$\|E\| = \sqrt{2 \cdot 251{,}3 \cdot 10^5}$$

$$= 7089{,}43 \text{ V/m}$$

Correspondant bien à une atténuation

$$A_E = e^{-\alpha L} = 0{,}1 \quad \text{ou}$$

$$A_E(\text{dB}) = 20 \log_{10} 0{,}1 = -20 \frac{\text{dB}}{100\text{km}}$$

Problème 2

a) Le champ $\bar{E}$ est donné par:

$$\bar{E}(z) = \hat{x}\, a_x\, e^{-jk_1 z} + \hat{y}\, a_y\, e^{j\delta} e^{-jk_2 z}$$

à $z=0$, on a que

$$\bar{E}(0) = \hat{x} \cdot 1 \cdot e^{-jk_1 \cdot 0} + \hat{y} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{-jk_2 0}$$

$$= \hat{x} + \hat{y}$$

La polarisation en $z=0$ est linéaire

b) On calcule d'abord k_1, k_2

$$k_1 = \beta_1 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$= \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\, n_1$$

$$= 2\pi \cdot 300 \cdot 10^{2} \sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \cdot 1{,}5$$

$$\approx 9{,}431 \cdot 10^{6}\, m$$

$$k_2 = \beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\, n_2$$

$$= \beta_1 \frac{n_2}{n_1}$$

$$\approx 9{,}117 \cdot 10^{6}\, m^{-1}$$

à $z = \mu m$, on a que

$$k_1 z = 9{,}431 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-6}$$
$$= 47{,}155$$

$$k_2 z = 9{,}117 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-6}$$
$$= 45{,}585$$

L'expression du phaseur devient :

$$E(z) = \hat{x}\, e^{-j47{,}155} + \hat{y}\, e^{-j45{,}585}$$

de manière équivalente

$$\vec{E}(z) = \hat{x}\, e^{-j47{,}155} + \hat{y}\, e^{j1{,}57} e^{-j47{,}155}$$

$$\delta = 47{,}155 - 45{,}585 = 1{,}57$$

en négligeant les erreurs d'arrondis

$$\delta = \pi/2$$

d'où

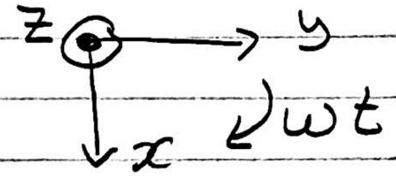
$$E(z,t) = \hat{x} \cos(\omega t - 47{,}155) +$$
$$\hat{y} \cos(\omega t - 47{,}155 + \pi/2)$$

c) Par l'expression du phaseur trouvé en b), on a que

$$\theta_y - \theta_x = \delta = \frac{\pi}{2}$$

Hilroy

C'est-à-dire que E_y est en avance de $\pi/2$ sur E_x.



Comme $a_x = a_y$ & que la direction de propagation $\hat{n} = \hat{z}$:

Polarisation circulaire gauche

d) Si $n_1 = 1,45$ $n_2 = 1,5$

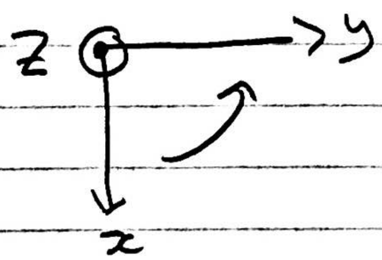
C'est-à-dire qu'on inverse les indices de réfraction, le phaseur devient

$$\bar{E}(z = 5\mu m) = \hat{x}\, e^{j1,57} e^{-j47,155} + \hat{y}\, e^{-j47,155}$$

de manière équivalente

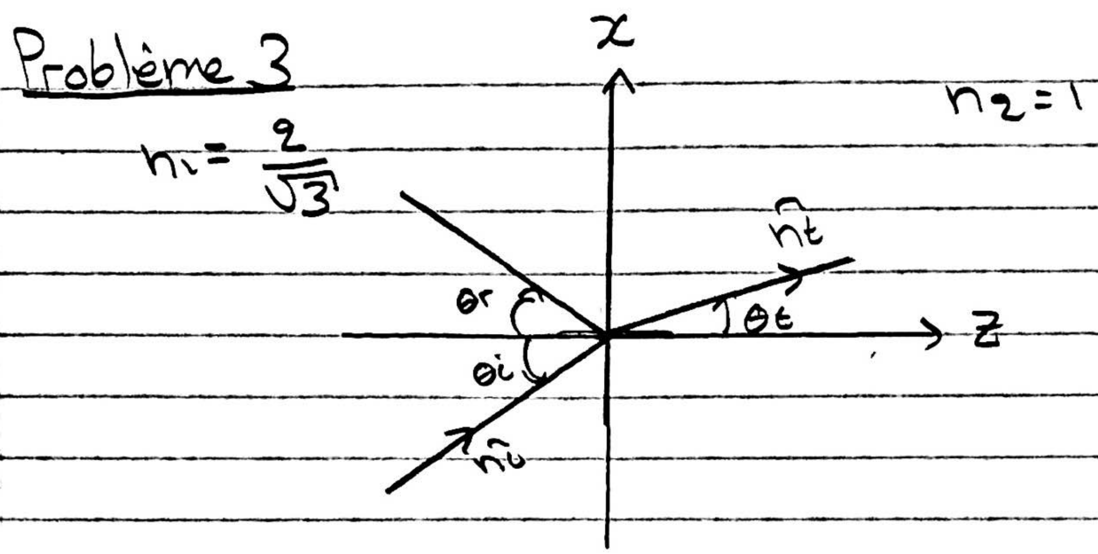
$$\bar{E}(z = 5\mu m) = e^{j1,57}\left(\hat{x}\, e^{-j47,155} + \hat{y}\, e^{-j1,57} e^{-j47,155}\right)$$

le champ E_y est maintenant en retard de $\pi/2$ sur le champ E_x =>



Polarisation circulaire droite

Problème 3



a) la longueur d'onde est donnée par

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\beta_1}$$

avec β_1 donnée par

$$\beta_1 = \|\vec{k}_1\|$$

et $\vec{k}_1$

$$\vec{k}_1 = 2\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z} \right)$$

$$\|k_1\| = 2\pi \sqrt{3/4 + 1/4}$$

$$= 2\pi$$

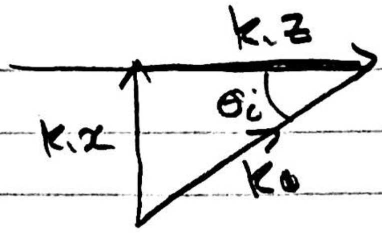
ainsi

$$\beta_1 = 2\pi$$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1m$$

On obtient l'angle d'indice à partir de $\vec{k}_i$

Hilroy



$$\theta_i = \operatorname{atan}\left(\frac{k_i x}{k_i z}\right)$$

$$= \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \operatorname{atan}(\sqrt{3})$$

$$= 60°$$

b) Par Snell-Descartes, on a que :

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

$$\theta_t = \operatorname{asin}\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)$$

$$= \operatorname{asin}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 60°\right)$$

$$= \operatorname{asin}(1)$$

$$= 90°$$

La longueur d'onde peut être obtenue par :

$$v_p = \frac{c}{n_i} = \lambda_i f$$

$$c = n_i \lambda_i f$$

d'où

$$n_1 \lambda_1 = n_2 \lambda_2$$

Hilroy

$$\lambda_2 = \frac{n_1}{n_2} \lambda_1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1\,m$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,m$$

c) On peut obtenir la fréquence de l'onde par

$$v_p = \frac{c}{n_i} = \lambda_i f$$

$$f = \frac{c}{n_i \lambda_i}$$

dans le milieu 1

$$f = \frac{3 \cdot 10^8\,m/s}{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1\,m}$$

$$f \approx 259.8\ MHz$$

d)

Le champ possède une composante $\parallel$ au plan d'incidence et une composante $\perp$ au plan d'incidence

$\perp$)

$$\Gamma_\perp = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2}$$

$$=$$

$$\tau_\perp = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2}$$

$$= 2$$

//)

$$\Gamma_{//} = \frac{n_1 \cos\theta_2 - n_2 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_2 + n_2 \cos\theta_1}$$

$$= -1$$

$$\tau_{//} = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_2 + n_2 \cos\theta_1}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \simeq 2,3$$

On note que $|\Gamma| = 1$ dans les 2 cas. On pouvait s'y attendre étant donné qu'on se trouve à l'angle critique

C'est-à-dire :

$$\sin\theta_t = 1 \quad \Rightarrow$$
$$\cos\theta_t = 0$$

e)

$$R = |\Gamma|^2$$

$$T = \mathrm{Re}\left(\frac{n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_1}\right) |\tau|^2$$

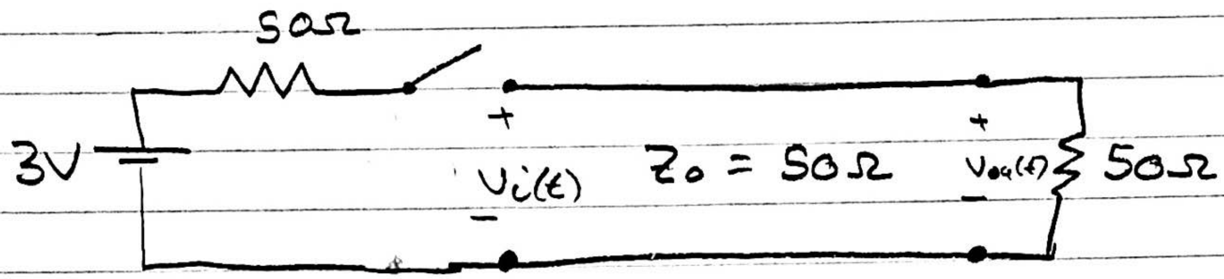
dans les 2 cas

$$R = 1 \quad T = 0 \quad \Rightarrow \quad R + T = 1$$

Problème 4

a)

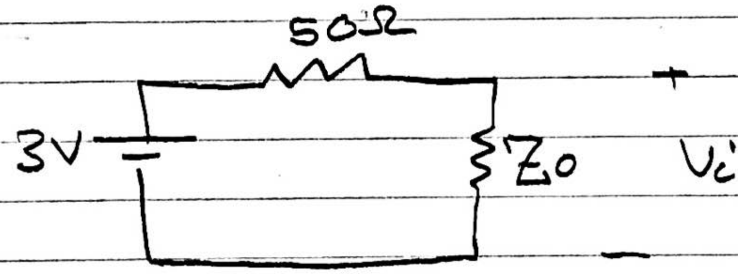
Soit le circuit :



à l'instant $t = 0^-$, le circuit est au repos :

$$V_i(0^-) = 0V$$
$$V_{out}(0^-) = 0V$$

à l'instant $t = 0^+$, le circuit vu par la source :



$$V_i(0^+) = 3 \cdot \frac{Z_0}{50 + Z_0} = 3 \cdot \frac{50}{50+50}$$

$$V_i(0^+) = 1{,}5V$$

l'onde arrive en bout de ligne après d/v_p secondes avec

$$d = 60m$$

et

$$U_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

on ne connaît pas L, mais on connaît Z_o

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\sqrt{L} = Z_o \sqrt{C}$$

$$\sqrt{LC} = Z_o C$$

$$U_p = \frac{1}{Z_o C} = \frac{1}{50 \cdot (320 \cdot 10^{-12})}$$

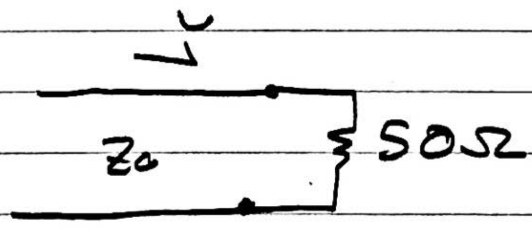
$$= 6{,}25 \cdot 10^{7} \ m/s$$

ainsi l'onde arrive en bout de ligne à

$$t = \frac{d}{U_p} = \frac{60 m}{6{,}25 \cdot 10^{7} m/s}$$

$$t \approx 9{,}6 \cdot 10^{-7} s$$

à cet instant, l'onde perçoit



la discontinuité a comme coefficient de réflexion

$$\Gamma = \frac{50 - Z_0}{50 + Z_0}$$

$$\Gamma = \frac{50-50}{50+50} = 0$$

il n'y a donc pas de réflexion. Ainsi la valeur de V_{out} à cet instant est donnée par

$$V_{out}(t^*) = (1 + \Gamma) \cdot 1{,}5V$$

$$= (1+0) \cdot 1{,}5V$$

$$= 1{,}5V$$

Comme il n'y a pas d'autres transitoires du à l'absence de réflexion :

$$V_{out} = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 9{,}6 \cdot 10^{-7} s \\ 1{,}5 & t \geq 9{,}6 \cdot 10^{-7} s \end{cases}$$