GEL-3003 – Signaux et systèmes discrets :
Examen 2
(correction sur 100 points, pondération de 27.5%)
Mardi 3 novembre 2020
Durée : 15h30 à 17h30 - 2h00 + 5minutes pour la remise
Accommodations (1/3 temps supplémentaires) : 15h30 - 18h15 + 5 minutes pour la remise
Accommodations (1/2 temps supplémentaires) : 15h30 - 18h30 + 5 minutes pour la remise

Les consignes sont les suivantes :
- Documentation et notes de cours permises
- L'examen compte quatre questions pour un total de 100 points.
- Laissez des traces de vos raisonnements et justifiez vos résultats.
- Calculatrice et Matlab autorisés.

L'examen comporte douze pages dont une page de formulaire. Vérifiez qu'aucune est manquante. Comme indiqué lors des séances magistrales et des laboratoires, la majorité des points sont attribuées à la méthodologie et l'analyse pour les exercices 1 à 4. Les autres points quantifient les résultats. Enfin, si vous êtes bloqués à une question, passez à la suivante et revenez à la fin si le temps vous le permet.

Bon courage à toutes et à tous ! ! !

Nom, Prénom et matricule : ______________________________

Série géométrique : $\sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ $\qquad$ $\sum_{k=1}^{N} a^k = \frac{a(1-a^N)}{1-a}$

Relations d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ $\qquad$ $\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$

Convolution : $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_m x(m)h(n-m) = \sum_m h(m)x(n-m)$

Corrélation : $r_{ab}(n) = a(n) ** b(n) = a(n) * b(-n)$ $\quad$ on cherche $b(n)$ dans $a(n)$

Transformée en Z : $X(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$

TFTD :

$X(e^{j\omega}) = \sum_n x(n)e^{-j\omega n}$ $\qquad$ $X(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega+2\pi m)}\right)$

$x(n) * y(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ $\qquad$ $x(n)y(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega})]$

$u(n) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$ $\qquad$ $e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

Régime transitoire RII : $\rho^{n_{eff}} = \epsilon$ $\qquad$ où $\rho = \max_i |p_i|$

Dél. de phase et de groupe : $d(\omega) = -\frac{\angle H(\omega)}{\omega}$ $\qquad$ $d_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega}[\angle H(\omega)]$

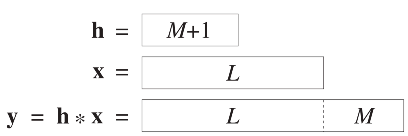


Fig. 4.1.1 Relative lengths of filter, input, and output blocks.

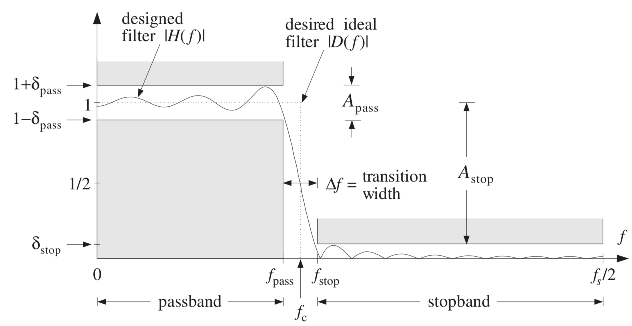


Fig. 10.2.1 Magnitude response specifications for a lowpass filter.

- 10.2.5 $\quad \delta_{pass} = \dfrac{10^{A_{pass}/20} - 1}{10^{A_{pass}/20} + 1} \qquad \delta_{stop} = 10^{-A_{stop}/20}$
- 10.2.6-7 $\quad \delta = \min(\delta_{pass}, \delta_{stop})$
- Table 10.2.1

Window	δ	A_{stop}	A_{pass}	D
Rectangular	8.9%	21 dB	1.55 dB	0.92
Hamming	0.2%	54 dB	0.03 dB	3.21
Kaiser	variable δ	$-20\log_{10}\delta$	17.372δ	$(A-7.95)/14.36$

$$D = \begin{cases} \frac{A-7.95}{14.36}, & A > 21 \\ 0.922, & A \le 21 \end{cases}$$

- Si Kaiser (10.2.10)

$$\alpha = \begin{cases} 0.1102(A-8.7), & A \ge 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & 21 < A < 50 \\ 0, & A \le 21 \end{cases} \qquad A = -20\log_{10}\delta$$

- 10.2.1 $\quad \Delta f = f_{stop} - f_{pass} \qquad f_c = \frac{1}{2}(f_{pass} + f_{stop}) \qquad \omega_c = 2\pi f_c / f_s$
- 10.2.11 $\quad N = 1 + \dfrac{D f_s}{\Delta f}$ (arrondir à entier impair supérieur) $\rightarrow M = \dfrac{N-1}{2}$
- 10.2.14 $\quad h(n) = w_i(n-M, N) \cdot \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}[n-M]\right) \qquad 0 \le n \le N-1$

18

1. **(20 points) Question de cours**

   (a) (10 points) Vrai (V) ou faux (F) ? Aucun point ne sera donné s'il n'y a pas de justification à votre réponse.

      i. (2 points) Un filtre RII est toujours stable.

      ii. (2 points) Une séquence à droite est toujours causale.

      iii. (2 points) La fenêtre de Kaiser a une bande de transition plus étroite que la fenêtre rectangulaire.

      iv. (2 points) La multiplication de la réponse impulsionnelle du filtre idéal par une fenêtre $w(n)$ implique que le spectre est convolué par la réponse de la fenêtre $W(\omega)$.

      v. (2 points) Un filtre à phase linéaire a nécessairement un délai de groupe nul.

(b) (10 points) Soit la réponse impulsionnelle $h(n) = [2, 2, \bar{3}, 2, 2]$.

i. (4 points) Donner la réponse en fréquence sous la forme d'une somme de cosinus.

ii. (2 points) Que peut-on dire sur la phase ?

iii. (4 points) Calculer la sortie du filtre pour l'entrée $x(n) = cos(\frac{\pi n}{6})$.

2. (30 points) Détermination d'un filtre numérique

Le signal $x(t) = 3.cos(2\pi f_1 t) + 5.cos(2\pi f_2 t) + 2.cos(2\pi f_3 t)$, où $f_1 = 3$Hz, $f_2 = 5$Hz, et $f_3 = 10$Hz, est échantilonné à la fréquence $f_s = 20$Hz. On élimine ensuite du signal échantilonné $x(n)$ les composantes à $f_2 = 5$Hz et $f_3 = 10$Hz, en utlisant un filtre numérique **causal et stable** dont la réponse à l'impulsion est **finie et réelle**.

(a) (8 points) Placer dans le plan complexe (ou diagramme pôles-zéros) les pôles et zéros de la fonction de transfert du filtre. Utiliser le nombre minimum de pôles et de zéros. Expliquez vos choix.

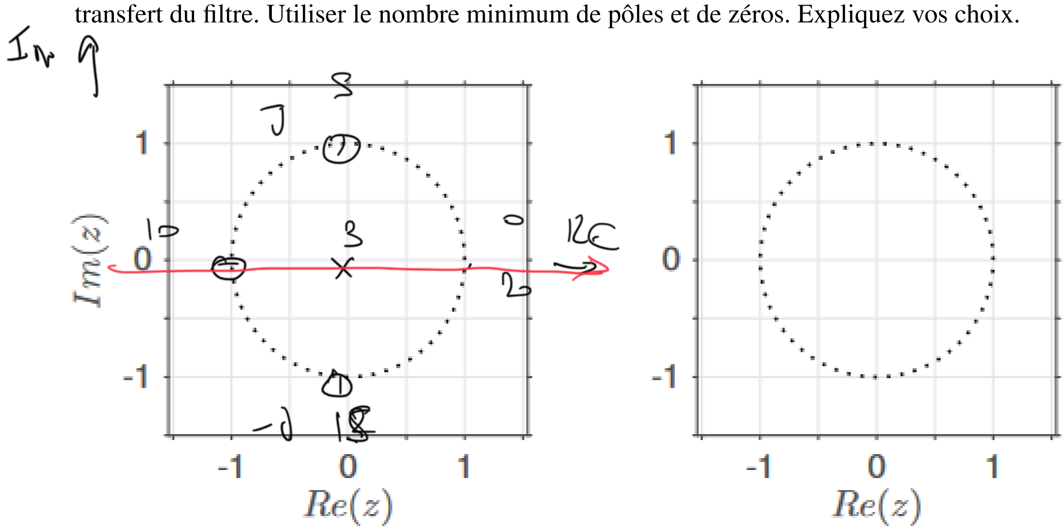


FIGURE 1 – Vous pouvez utiliser les plans Z suivants pour vous aider dans la conception.

(b) (6 points) Donner la fonction de transfert $H(z)$ du filtre.

$$H(z) = \frac{(z-j)(z+j)(z+1)}{z^3}$$

$$= \frac{(z^2+1)(z+1)}{z^3} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

(c) (8 points) Donner la réponse à l'impulsion du filtre. Exprimer cette réponse sous une forme qui montre bien que la réponse à l'impulsion est réelle et finie.

$H(z) \rightarrow h(n)$.

$z^{-m} \rightarrow x(n-m)$.

$h(n) = [\bar{1}, 1, 1, 1]$

(d) (8 points) Normaliser la fonction de transfert pour que l'amplitude de la composante à $f_1 = 3$Hz soit atténuée d'un facteur 2. (**Utilisez la réponse en fréquence de votre filtre pour cela**).

$f_1 \rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi f_1}{f_S} = \frac{2\pi \cdot 3}{20} = 0.3\pi \cdot \text{rad} \cdot \text{ech}^{-1}$

$k \, |H(e^{j\omega})| = \frac{1}{2}$.

$\uparrow$

$z^n \rightarrow e^{j\omega n}$

$\hookrightarrow H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega}$.

$= e^{-\frac{3}{2}j\omega} \left[e^{\frac{3}{2}j\omega} + e^{-1/2 j\omega} + e^{1/2 j\omega} + e^{-3/2 j\omega} \right]$.

$= e^{-3/2 j\omega} \left(2\cos\left(\frac{3}{2}\omega\right) + 2\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right) \right]$.

$k \, |H(e^{j\omega})| = k \left\| e^{-3j\omega} \left[2\cos\left(\frac{3}{2}\omega\right) + 2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] \right\|$

$= k \, |2.095| = 1/2 \Rightarrow k = 0.24$.

$H(z) = 0.24 \left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right)$.

3. (25 points) Analyse d'un filtre

Un filtre linéaire invariant et causal avec entrée $x(n)$ et en sortie $y(n)$ est régi par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = 1 - z^{-3}$$

avec $z \neq 0$.

(a) (6 points) À partir de la fonction de transfert, trouver l'équation différentielle réalisant l'entrée $x(n)$ et la sortie $y(n)$.

(b) (6 points) Trouver l'équation de la réponse en fréquence du filtre.

(c) (7 points) Quel est le délai de groupe du filtre ? Est-il à phase linéaire ?

(d) (6 points) Dessiner le diagramme pôles-zéros. Le filtre est-il un passe-bas, un passe-haut, un notch ou un passe-tout ? Justifier.

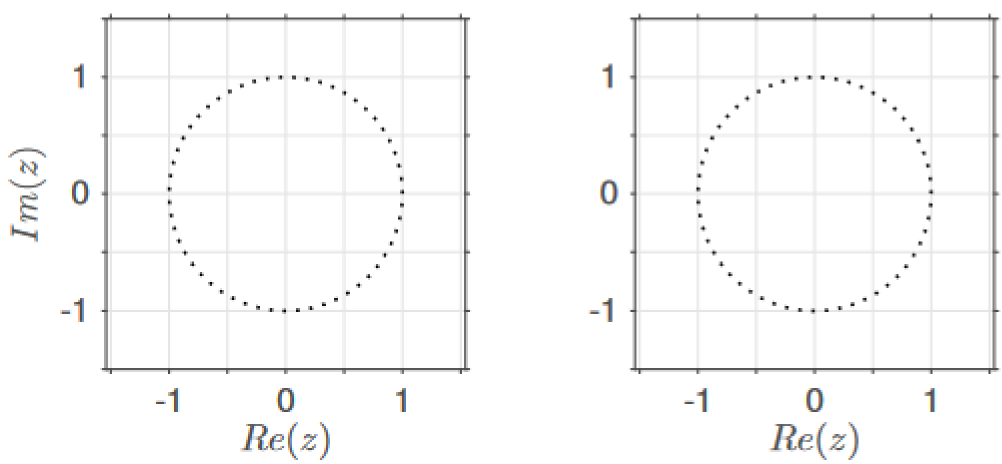
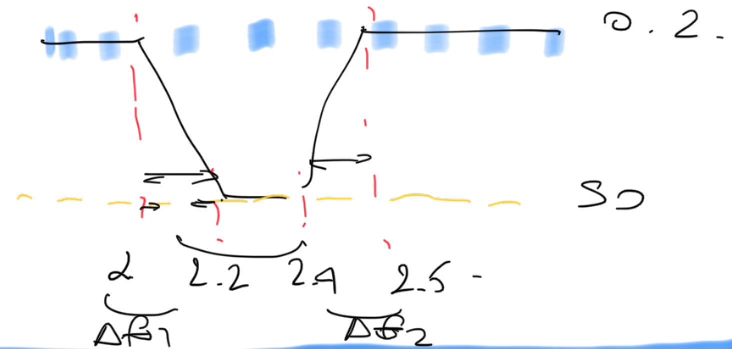


FIGURE 2 – Vous pouvez utiliser les plans Z suivants pour vous aider dans la conception.

4. (25 points) Dimensionnement d'un filtre numérique

On souhaite réaliser la conception d'un filtre coupe-bande causal, stable et réel ayant les propriétés suivantes :

- $f_s = 10\text{kHz}$
- $f_{pass_1} = 2\text{kHz}$
- $f_{stop_1} = 2.2\text{kHz}$
- $f_{stop_2} = 2.4\text{kHz}$
- $f_{pass_2} = 2.5\text{kHz}$
- $A_{stop} = 50\text{dB}$
- $A_{pass_{1,2}} = 0.2\text{dB}$



La réponse impulsionnelle doit être la plus courte possible et être associée à un délai de groupe minimal. Votre réponse finale doit utiliser le symbole $w_i(n, N)$ pour faire référence à une fenêtre de N points centrée à l'origine. Utilisez l'indice i = R pour rectangulaire, H pour Hamming ou K pour Kaiser (dans ce dernier cas, donnez aussi la valeur de α).

(a) (6 points) Justifier le choix de la fenêtre que vous considérez pour la conception de votre filtre.

Kaiser

(b) (14 points) Calculer les valeurs que vous jugez pertinentes à la conception de votre filtre.

$\Delta f_1 = 2.2 - 2 = 0.2\ \text{kHz}$

$\Delta f_2 = 2.5 - 2.4 = 0.1\ \text{kHz}.$

$\Delta f = 0.1\ \text{kHz}.$

$f_s = 10\ \text{kHz}.$

$N = 1 + \dfrac{D \cdot f_s}{\Delta f}$

$= 1 + \dfrac{D \cdot 2\pi}{\Delta\omega}$

$\Delta\omega = \dfrac{2\pi \cdot \Delta f}{f_s}$

N, M, α, D, Δf, fs

~~fc~~, ~~ωc~~.

→ (c) (5 points) Donnez la réponse impulsionnelle $h(n)$ de ce filtre.

$f_{c_1} = 2.15 \text{ kHz}$ $f_{c_2} = 2.45 \text{ kHz}$.

$\omega_{c_1} = 0.43\pi$ $\omega_{c_2} = 0.47\pi$.

$\delta_{pass} = 0.0115$

$\delta_{stop} = 0.00316$.

$\min(\delta_{pass}, \delta_{stop}) = \delta_{stop}$

$A \Rightarrow A_{stop}$

$$D = \frac{A - 7.95}{14.36} = 2.928.$$

$$N = 1 + \frac{D \cdot f_s}{\Delta f} = \underbrace{293.8}\ \sim 295$$

$$M = \frac{N-1}{2} = 147.$$

$\alpha = \cancel{4}.551.$

c) $h(n) = \cancel{\delta(n-\pi)}$

$$- W_k(n-\pi, N, \alpha)$$

$$\left[\frac{w_{c2}}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c2}}{\pi}(n-\pi)\right) - \frac{\omega_{c1}}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{c1}}{\pi}(n-\pi)\right)\right]$$