GEL-3003 – Signaux et systèmes discrets :
Examen 1
(correction sur 40 points, pondération de 20%)
Mardi 1 Octobre 2019
Durée : 15h30 à 16h45 - 1h15

Le présent examen est un examen de cours. Il vise à vous évaluer sur la compréhension du cours. Les consignes sont les suivantes :

- Répondez aux questions sur le formulaire
- Aucune documentation ou note de cours n'est permise
- L'examen compte 5 questions pour un total de 40 points.
- Laissez des traces de vos raisonnements et justifiez vos résultats.
- Calculatrice autorisée.

L'examen comporte 9 pages. Vérifiez qu'aucune est manquante. Comme indiqué lors des séances magistrales et des laboratoires, la méthodologie et l'analyse rapportent la majorité des points pour les exercices 2 à 5 (80% des points). Les autres points quantifient les résultats. De plus, si une erreur est récurrente au sein de votre examen, elle ne sera pénalisée qu'une seule et unique fois. Enfin, c'est un examen assez long, si vous êtes bloqués à une question, passez à la suivante et revenez à la fin si le temps vous le permet.

Bon courage à toutes et à tous ! ! !

Nom, Prénom et matricule : ____

1. **(5 points) Notions de cours.**

   (a) (1 point) À quelle condition peut-on reconstruire un signal à temps continu $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_n = x(nT)$?

   il faut que $f_s > 2 \times f_{max}$.

   (b) (1 point) Un filtre anti-repliement est ? (Une seule réponse est vraie, aucune pénalité en cas de mauvaise réponse).

   - [x] est un filtre passe-bas
   - [ ] est un filtre passe-bande.
   - [ ] est un filtre passe-haut
   - [ ] permet de reconstruire le signal original (d'avant le filtrage) à partir du signal échantillonné même si la fréquence maximale du signal original est supérieure à deux fois la fréquence d'échantillonnage.

   (c) (1 point) Compléter les quatre propriétés de la convolution suivantes :

   i. (0.25 points) Opérateur neutre :$x(n) * \delta(n)$=

   Cf section 1

   ii. (0.25 points) Somme cumulative : $x(n) * U(n)$=

   cf section 1

   iii. (0.25 points) Distributivité : $x(n) * [h(n) + g(n)]$=

   cf section 1

   iv. (0.25 points) Décalage (deux égalités sont attendues) : $y(n - n_0)$= C.f slide de cours - section 2

   cf section 1

   (d) (2 points) Donnez la définition d'une séquence à droite, d'une séquence à gauche et d'une séquence mixte.
   C.f slide de cours - section 3

   Cf section 3.

2. **(8 points) Signal discret et réponse impulsionnelle.**

   (a) (8 points) Soit un signal analogique oscillant à une période $T_a = 50ms$. On veut échantillonner ce signal à une fréquence d'échantillonnage $f_s = 600$ échantillons par seconde.

   i. (2 points) Combien d'échantillons y a-t-il dans une période du signal ?

   $f_a = \frac{1}{T_a} = \frac{1}{50ms} = 20$ Hz.

   nb_ech $= \frac{f_s}{f_a} = \frac{600}{20} = 30$ échantillons / période

ii. (2 points) Quelle devrait être la fréquence (analogique) de coupure maximale d'un filtre anti-repliement idéal afin d'éviter tout repliement spectral ?

$f_s = 600$ Hz $\rightarrow f_{max} < \frac{f_s}{2} = 300$ Hz .

iii. (2 points) Quelle est la fréquence numérique du signal (à la première harmonique) ?

$\omega = \frac{2\pi f_a}{f_s} = \frac{2\pi 20}{600} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15}$ rad $\cdot s^{-1}$.

iv. (2 points) En assumant que le signal analogique est à large bande (plus large que le taux d'échantillonnage), combien d'harmoniques sont contenues dans l'intervalle de Nyquist ?

15 (ou 30 si côté négatif et positif).

3. (9 points) Convolution et corrélation.

(a) (5 points) Soit la séquence d'entrée

$$x(n) = -2, 4, 5, -3, 4, -6 \;\; pour \;\; -2 \leq n \leq 3$$

et la réponse impulsionnelle

$$h(n) = 1, 2, 3, 4 \;\; pour \;\; -1 \leq n \leq 2$$

$y(n)$ est la convolution de $x(n)$ et de $h(n)$.

i. (1 point) Calculez la longueur de la sortie $y(n)$.

$L_y = 6 + 4 - 1 = 9.$

ii. (1 point) Calculez l'indice de début et de fin de la convolution.

$i_d = -2 - 1 = -3$
$i_f = 3 + 2 = 5$) 9 échantillons

iii. (1 point) Définissez la région transitoire et la région stable de la séquence de sortie $y(n)$.

$M = L_h - 1 = 3$ donc $\left\{ \begin{array}{l} -3 \leq n \leq -1 \\ 3 \leq n \leq 5 \end{array} \right)$ transitoire

$0 \leq n \leq 2 \rightarrow$ stable.

iv. (2 points) Calculez la séquence de sortie $y(n)$ (Définissez la méthode que vous utilisez et indiquer l'échantillon à la position n=0 dans la séquence de sortie).

	-2	4	5	-3	4	-6
1	-2	4	5	-3	4	-6
2	-4	8	10	-6	8	-12
3	-6	12	15	-9	12	-18
4	-8	16	20	-12	16	-24

$y(n) = [-2, 0, 7, \underline{11}, 29, 13, -12, -2, -24]$

(b) (4 points) Soit les signaux discrets suivants

$$a(n) = -1, 1, 1, 2, 1, -2 \;\; pour \;\; 0 \leq n \leq 5$$

et

$$b(n) = 1, 1, 2 \;\; pour \;\; 0 \leq n \leq 2$$

Nous allons calculer la corrélation croisée $r_{a,b}$.

i. (1 point) Déterminez les indices de départ et de fin de la corrélation croisée $r_{a,b}$.

$i_d = 0 - (2) = -2$
$i_f = 5 - (0) = 5$) 8 échs $(L_x + L_h - 1 = 6 + 3 - 1 = 8.)$

ii. (2 points) Calculez la corrélation croisée $r_{a,b}$.

$r_{a,b} = a(n) \cancel{**} \, b(n) = a(n) * b(-n)$.

$r_{a,b}(n) = [-2, 1, \bar{2}, 6, 5, -1, -1, -2]$.

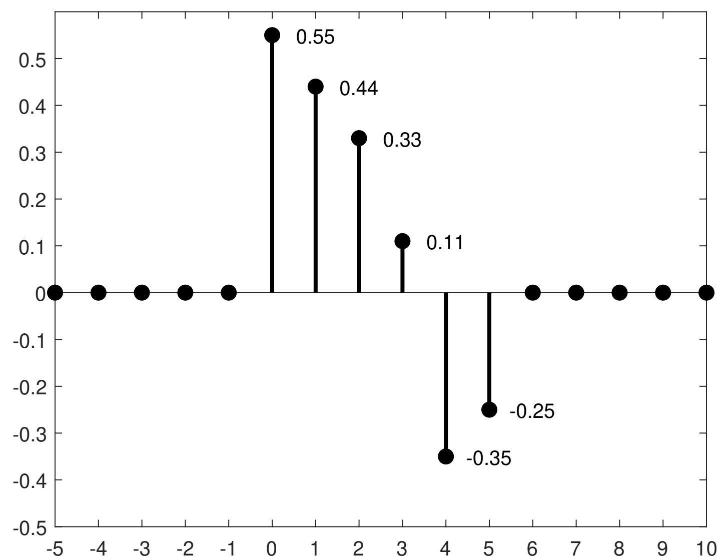
iii. (1 point) Quelle est l'indice de la meilleure occurrence de la corrélation croisée $r_{a,b}$?

occurrence à l'indice $n = 1$ avec

$r_{a,b}(1) = 6$

4. **(8 points) Transformée en Z et Région de convergence.**

(a) (1 point) Donner la transformée en z de la fonction numérique discrète x[n] représenté par le graphique ci-contre (elle est aussi nulle dans les parties non représentées).



$$X(z) = 0{,}55 + 0{,}44\, z^{-1} + 0{,}33\, z^{-2}$$
$$+ 0{,}11\, z^{-3} + (-0{,}35)\, z^{-4} - 0.25\, z^{-5}$$

(b) (1 point) Calculer les zéros et/ou les pôles de la transformée en z précédente (a). Quelle est sa région de convergence ?

Pôles en $z = 0$ (5 fois).

RDC $\Rightarrow$ tous les $z \Rightarrow \infty$ excepté $\underline{0}$.

Zéros $\rightarrow$ incalculable $\rightarrow$ Erreur d'énoncé.

(c) (6 points) Soit la séquence

$$y(n) = [(\frac{1}{2})^{n+1} - (\frac{1}{3})^{n+1}]U(n)$$

qui représente la sortie d'un système LIT stable lorsque l'entrée est le signal $x(n)$.

i. (2 points) Montrer que la transformée en z de cette séquence $Y(n)$ est

$$Y(z) = \frac{1}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}}$$

N.B : Pour rappel la transformée en z associé à $a^n U(n)$ est $\frac{z}{z-a}$ (en puissance positive) ou $\frac{1}{1-az^{-1}}$ (en puissance négative).

$$y(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n).$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right).$$

$$= \frac{3(1-\frac{1}{3}z^{-1}) - 2(1-0{,}5z^{-1})}{6(1-0{,}5z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$= \frac{3 - z^{-1} - 2 + z^{-1}}{6(1 - 3z^{-1} - 2z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1}{6-5z^{-1}+z^{-2}}$$

ii. (4 points) Soit la transformée en z,

$$X(z) = \frac{1}{6 - 11z^{-1} + 4z^{-3} - z^{-4}}$$

Quelle est la fonction de transfert $H(z)$ du système LIT ? Est-ce que le système LIT associé est causal ? RIF ou RII ? En déduire la réponse impulsionnelle $h(n)$.

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$. Par division de polynômes, on obtient $H(z) = -z^{-2} - z^{-1} + 1$

Donc RIF et causal

$h(n) = [\bar{1}, -1, -1]$

5. **(10 points)** **Identification d'un système discret** Soit un système linéaire invariant en temps (LIT) causal avec une réponse impulsionnelle inconnu h[n] que vous allez analyser. Lorsque le signal causal à cinq (5) échantillons x[n] donné ci-dessous est entré dans le système inconnu, la réponse y[n] est longue de six (6) échantillons et causale, comme indiqué ci-dessous. En d'autres termes, on a la séquence d'entrée et de sortie suivantes

$$x(n) = [1, 2, 3, 4, 5] \;\; pour \;\; 0 \leq n \leq 4$$

et

$$y(n) = [1, 1, 1, 1, 1, -5] \;\; pour \;\; 0 \leq n \leq 5$$

(a) (5 points) Trouver h[n] en partant de la définition de la convolution. **N.B** Pensez à calculer la longueur de la réponse impulsionnelle avant toute chose et n'oubliez pas que le système LIT est causal dans le cas présent.

(b) (4 points) En calculant la fonction de transfert dans le domaine en z et puis en appliquant la transformée inverse en z, retrouver la réponse impulsionnelle précédente.

(c) (1 point) Dessiner h[n].

a) $L_y = L_h + L_x - 1 \Rightarrow L_h = L_y - L_x + 1$
$= 6 - 5 + 1 = 2$.

$y(0) = x(0)\,h(0)$

$\Rightarrow h(0) = \dfrac{y(0)}{x(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.

$y(1) = h(0)\,x(1) + h(1)\,x(0)$

$1 = 2 + h(1) \Rightarrow h(1) = -1$.

b) $H(z) = \dfrac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} - 5z^{-5}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4}}$.

Par division du numérateur par le dénominateur, on obtient : $-z^{-1} + 1$.

d'où $h[n] = [\underline{1}, -1]$

c)