Versuch Nr. 103

Biegung elastischer Stäbe

1. Problemstellung

Kräfte, die an der Oberfläche eines Körpers angreifen, können Gestalts- und Volumenveränderungen an ihm hervorrufen. Man bezieht diese Kräfte zumeist auf die Flächeneinheit und bezeichnet die so erhaltene physikalische Größe als **Spannung.** Ihre Komponente, die senkrecht zur Oberfläche steht, heißt **Normalspannung** σ oder Druck, die oberflächenparallele Komponente dagegen **Tangential** oder **Schubspannung**. Ist die Gestaltsänderung, die man durch die relative Änderung $\Delta L/L$ einer linearen Körperdimension L beschreiben kann (siehe Abb.1), hinreichend klein, so beobachtet man bei den meisten Festkörpern einen linearen Zusammenhang zwischen der Deformation $\Delta L/L$ und der angreifenden Spannung σ, der in der Literatur als **Hookesches Gesetz** bezeichnet wird:

(1) $$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad .$$

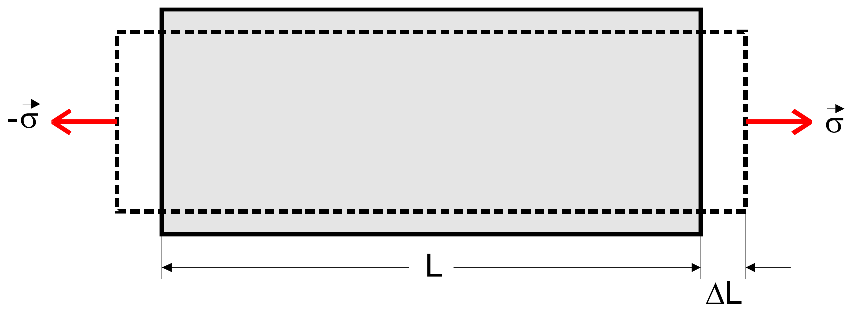

Abb.1: Dehnung einer stabförmigen Probe unter dem Einfluss einer Normalspannung

Den Proportionalitätsfaktor E bezeichnet man als **Elastizitätsmodul**. Er stellt eine für die Technik wichtige Materialkonstante eines Werkstoffes dar.

Wenn man eine Messvorrichtung besitzt, die es gestattet, kleine Längenänderungen ΔL einer Probe zuverlässig zu messen, kann man den Elastizitätsmodul bereits aus der Dehnung (oder Stauchung) eines stabförmigen Körpers gemäß Abb.1 bestimmen[1]. Da solche Geräte nicht immer zur Verfügung stehen, soll im vorliegenden Versuch eine spezielle Deformation verwendet werden, die bereits bei relativ geringen Kräften eine leicht messbare Veränderung am Probestab hervorruft. Man bezeichnet sie als **Biegung**[1]. Sie entsteht, wenn man in der in Abb.2 gezeigten Weise eine Kraft F an der Probe angreifen lässt. Hier ist die Messgröße D bei sonst gleichen Verhältnissen (F, L, Q) sehr viel größer als ΔL.

---

[1] *Bei beiden Messverfahren kann die E-Bestimmung durch das Phänomen der elastischen Nachwirkung (siehe V102 Kap.3) verfälscht werden. Daher müssen bei Materialien, die dieses Phänomen zeigen, andere Methoden verwendet werden (siehe Kap.5).*

Im Folgenden soll nun ein Messverfahren beschrieben werden, das es gestattet, mit Hilfe der elastischen Biegung den Elastizitätsmodul stabförmiger Metallproben zu messen. Hierzu ist es notwendig, die Gestalt eines elastisch gebogenen Stabes unter genau definierten Versuchsbedingungen zu berechnen. Das soll in den nächsten beiden Kapiteln geschehen.

2. Berechnung der Durchbiegung eines homogenen Stabes bei einseitiger Einspannung

Die Deformation der Biegung lässt sich auf die in Kap.1 erwähnte Dehnung zurückführen. Jedoch sind hier die Längenänderungen über den Querschnitt Q des Probenkörpers nicht mehr konstant. Sie können sogar kleiner als null werden (Stauchung). Ein stabförmiger Probekörper wird gebogen, wenn man an ihm eine Kraft F in der in Abb.2 gezeigten Weise angreifen lässt. Es soll nun die Durchbiegung D(x), das heißt die Verschiebung eines Oberflächenpunktes an der Stelle x zwischen belastetem und unbelastetem Zustand errechnet werden. In der Funktion D = D(x) tritt der Elastizitätsmodul auf, sodass man aus einer Messreihe, in der die Abhängigkeit der Größen D und x voneinander gemessen wird, diese Materialkonstante errechnen kann.

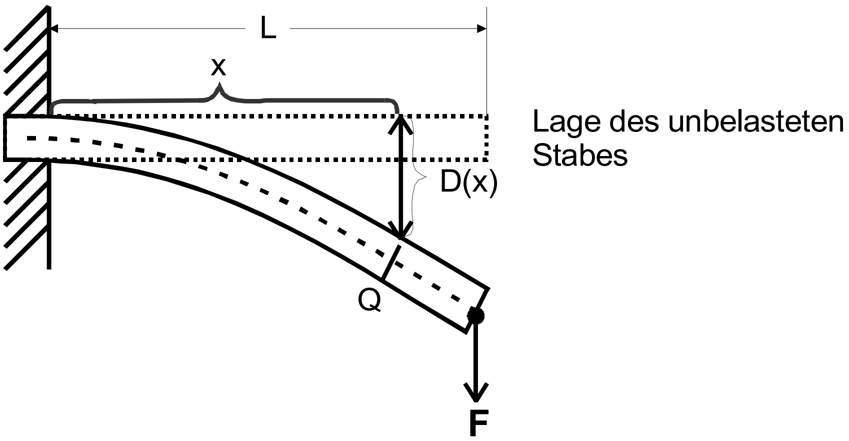

Abb.2: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung
(Die Lage der „neutralen Faser“ ist eine gestrichelte Linie dargestellt.)

Wie man an Abb.2 erkennt, greifen an den gebogenen Stäben Kräftepaare an, sodass man eine Drehmomentgleichung aufstellen muss, um die Funktion D = D(x) zu errechnen. So übt zum Beispiel die Kraft F auf einen senkrecht zur Stabachse stehenden Querschnitt Q, der den Abstand x von der Einspannung haben möge, ein Drehmoment M_F aus, welches den Querschnitt Q aus seiner ursprünglichen vertikalen Lage verdreht. Dadurch werden im Falle der einseitigen Einspannung des Stabes seine oberen Schichten gedehnt und die unteren gestaucht. Durch die elastischen Eigenschaften des Probenkörpers bedingt, treten dann in seinem Innern Normalspannungen auf, die dieser Deformation entgegenwirken, sodass sich schließlich im Gleichgewichtszustand eine endliche Durchbiegung D einstellt. In dem gewählten Beispiel der einseitigen Einspannung treten in den oberen Schichten des Stabes Zugspannungen und in den unteren Druckspannungen auf. Dazwischen liegt eine Fläche, in der keine Spannungen auftreten, die also bei der Biegung ihre ursprüngliche Länge beibehält. Man bezeichnet sie als **neutrale Faser**. Ihre Schnittlinie mit der Zeichenebene ist in Abb.2 gestrichelt dargestellt. Die Zug- und Druckspannungen, die an Q angreifen, sind entgegengesetzt gleich. Sie bewirken daher ein Drehmoment M_σ, welches sich durch Integration über Q berechnen lässt (siehe Abb.3):

(2) $$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq \quad ,$$

worin y den Abstand des Flächenelementes dq von der neutralen Faser x bedeutet.

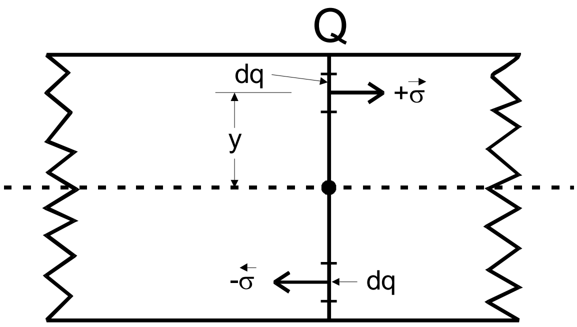

Abb.3: Skizze zur Berechnung des Drehmomentes M_σ

Die Deformation der Probe stellt sich nun so ein, dass an jeder Stelle x die beiden Drehmomente übereinstimmen:[2]

(3) $$M_F = M_\sigma \quad .$$

Da im Falle der einseitigen Einspannung die äußere Kraft F über den Hebelarm L - x an Q angreift (siehe Abb. 2) , hat M_F den Betrag

(4) $$M_F = F\,(L - x) \quad .$$

Das Gleichgewicht der Momente (3) ist also gegeben durch

(5) $$\int_Q y\,\sigma(y)\,dq = F\,(L - x) \quad .$$

Die Normalspannung σ(y) lässt sich nach dem Hookeschen Gesetz (1) berechnen. Im Abstand y von der neutralen Faser gilt für ein kurzes Stabstück der Länge Δx

$$\sigma(y) = E\,\frac{\delta x}{\Delta x} \quad .$$

Hierin bedeutet δx die Längenänderung der Faser mit der Ausgangslänge Δx infolge der Durchbiegung (siehe Abb.4). Aus der Abb.4 entnimmt man weiterhin die Beziehung (δx << Δx)

$$\delta x = y\,\Delta\varphi = y\,\Delta x / R$$

mit R als Krümmungsradius der Faser an der Stelle x. Somit ist

---

[2] *Ein weiteres Drehmoment, welches durch das Eigengewicht der Probe entsteht, soll hier vernachlässigt werden.*

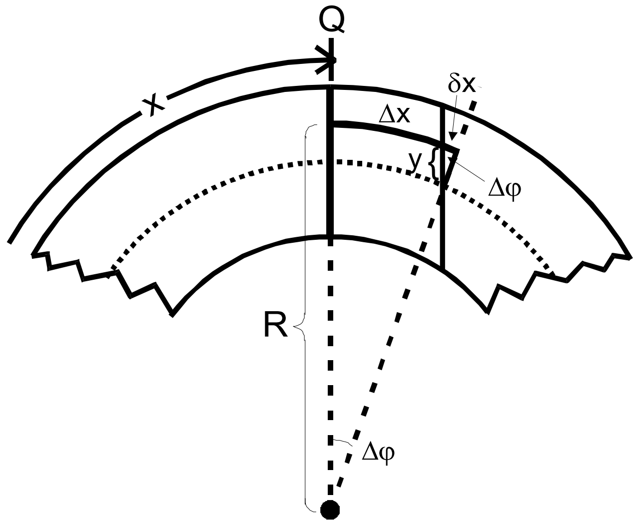

Abb.4: Skizze zur Berechnung der Normalspannung σ(y) in einem gebogenen Stab

(6) $$\sigma(y) = E\,\frac{y}{R} \quad .$$

Aus der Differentialgeometrie entnimmt man für geringe Kurvenkrümmungen (d. h. großes R) die Beziehung

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2D}{d\,x^2}\text{[3]} \quad ,$$

falls

$$\left(\frac{d\,D}{d\,x}\right)^2 \ll 1$$

ist. Damit wird (6) zu

$$\sigma(y) = E\,y\,\frac{d^2D}{d\,x^2} \quad ,$$

und für die Momentengleichung (5) bekommt man dann

(7) $$E\,\frac{d^2\,D}{d\,x^2}\int_Q y^2\,dq = F(L - x) \quad .$$

Den Ausdruck

$$\mathbf{I} := \int_Q y^2\,dq\,(y)$$

bezeichnet man, da er in formaler Analogie zum Massenträgheitsmoment θ steht, als **Flächenträgheitsmoment**. Nach Integration der Gleichung (7) ist das anfangs gestellte Problem, die Durchbiegung D in Abhängigkeit vom Abstand x von der Einspannung zu berechnen, gelöst. Für die einseitige Einspannung bekommt man

(8) $$D(x) = \frac{F}{2\,E\,\mathbf{I}}\left(L\,x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \quad (\text{für } 0 \le x \le L) \quad .$$

Die Integrationskonstanten in (8) verschwinden, da einerseits der Stab horizontal eingespannt ist d.h. D(0) = 0 und andererseits die Durchbiegung an der Einspannstelle null ist (d.h. dD/dx = 0).

3. Berechnung der Durchbiegung eines homogenen Stabes bei zweiseitiger Auflage

Man kann auch eine Durchbiegung eines Stabes erzeugen, wenn man ihn an seinen beiden Enden auflegt und in Stabmitte eine Kraft F angreifen lässt, so wie es in Abb.5 dargestellt ist.

---

[3] *Die exakte Gleichung hat die Gestalt:* $$\frac{1}{R} = \frac{d^2D}{d\,x^2}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{d\,D}{d\,x}\right)^2\right)^3}} \quad .$$

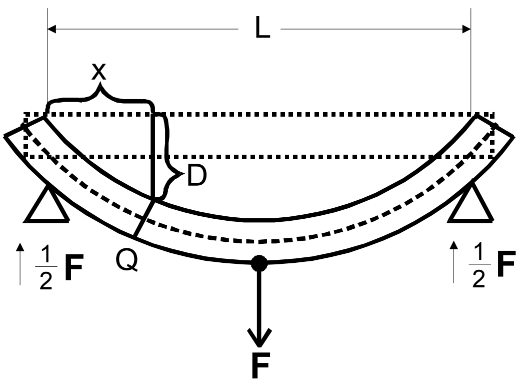

Abb.5: Durchbiegung eines homogenen Stabes bei zweiseitiger Auflage

Bei dieser Versuchsanordnung greift die Kraft F/2 mit dem Hebelarm x an der Querschnittsfläche Q an. Es gilt daher jetzt für das Drehmoment M_F im Bereich $0 \leq x \leq L/2$ die Beziehung

$$M_F = -\frac{F}{2}x \quad .$$

Entsprechend hat M_F für die andere Stabhälfte $L/2 \leq x \leq L$ den Wert

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x) \quad .$$

Damit nimmt die Momentengleichung (7) jetzt die Form

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{E\mathbf{I}}\frac{x}{2} \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{1}{2}\frac{F}{E\mathbf{I}}(L - x) \quad \text{für} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

an. Die Integration dieser beiden Gleichungen liefert

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{E\mathbf{I}}\frac{x^2}{4} + C \quad \text{für} \qquad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

bzw.

$$\frac{D(x)}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{F}{E\mathbf{I}}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C' \qquad \text{für} \qquad \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad .$$

In Stabmitte soll die Biegekurve eine horizontale Tangente besitzen. Diese Bedingung liefert für C den Wert

$$C = \frac{F}{E\mathbf{I}}\frac{L^2}{16}$$

und für C'

$$C' = \frac{3}{16}\frac{F}{E\mathbf{I}}L^2 \quad .$$

Durch eine weitere Integration erhält man schließlich das Endergebnis

(9) $$D(x) = \frac{F}{48\,E\mathbf{I}}\left(3L^2x - 4x^3\right) \qquad \text{für} \qquad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad .$$

Die Integrationskonstante in (9) verschwindet, da die Durchbiegung am linken Auflager null ist. Für die rechte Stabhälfte ($L/2 \leq x \leq L$) folgt mit $D(L) = 0$

(10) $$D(x) = \frac{F}{48\,E\,\mathbf{I}}\left(4\,x^3 - 12L\,x^2 + 9L^2\,x - L^3\right) \quad .$$

Mit den Gleichungen (8), (9) und (10) hat man nun das gesuchte Profil eines elastisch gebogenen Stabes gefunden.
Im folgenden Kapitel wird eine Apparatur beschrieben, mit der man in der Lage ist, die Gültigkeit der genannten Gleichungen an realen Proben zu überprüfen.

4. Beschreibung einer Apparatur zur Vermessung elastisch gebogener Stäbe

Eine schematische Darstellung der zu verwendenden Apparatur ist in Abb.6 wiedergegeben. Die Probestäbe können entweder einseitig mit Hilfe der Spannvorrichtung C ge-

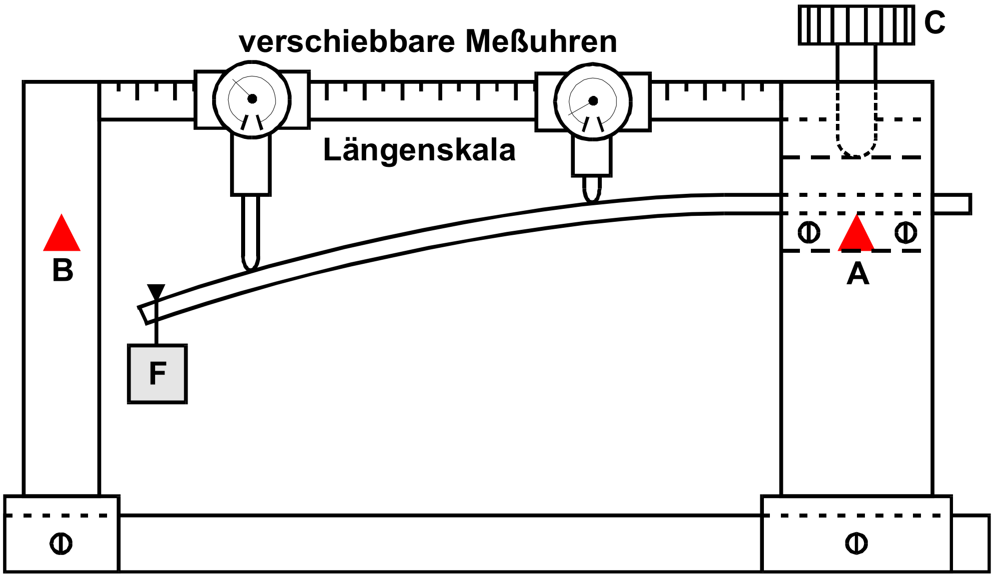

Abb. 6: Schematische Darstellung einer Apparatur zur Vermessung elastisch gebogener Stäbe

klemmt oder zweiseitig auf den Fußpunkten A und B gelagert werden. Die Belastung der Stäbe geschieht durch Anhängen eines geeigneten Gewichtes F entweder in Stabmitte oder am Stabende. Für die Messung der Durchbiegung benutzt man 2 "Messuhren". Das sind Längenmessinstrumente, mit denen man mittels eines federnden Taststiftes Verschiebungen eines Objektes messen kann. Die Geräte sind verschiebbar auf einer horizontalen Längen-Skala angeordnet, sodass die Durchbiegung der Probe an verschiedenen Stellen x gemessen werden kann. Ein Teilstrich auf der Skala der Messuhr entspricht einer Stiftverschiebung von 10 µm.
Da man nicht davon ausgehen kann, dass die Probestäbe ohne Last F exakt gerade sind und dass die Messuhrführung exakt parallel zur Probenachse verläuft, muss unbedingt auch eine Messung ohne Last durchgeführt werden. Zweckmäßigerweise misst man an einer Stelle x zunächst die Durchbiegung $D_0(x)$ der Probe ohne Last. Sodann hängt man das Gewicht F ein und liest die Durchbiegung $D_M(x)$ ab. Die tatsächliche Durchbiegung der Probe infolge der Belastung durch F beträgt dann

$$D(x) = D_M(x) - D_0(x) \quad .$$

Man wähle das Gewicht F so, dass die maximale Durchbiegung möglichst zwischen 3 und 7 mm liegt.

5. Ableitung eines Zusammenhanges zwischen Elastizitätsmodul und Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

In diesem Kapitel wird eine Methode zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls beschrieben, die durch das Phänomen der elastischen Nachwirkung nicht beeinflusst wird. Sie beruht auf einer Messung der Schallgeschwindigkeit c in langen dünnen Stäben, denn es besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen E und c. Dieser soll im folgenden abgeleitet werden: Während des Durchlaufs einer longitudinalen Deformation durch einen Stab, die durch einen Stoß auf seine Stirnseite erzeugt wurde, tritt eine ortsabhängige Spannung $\sigma(x)$ auf. Das aus dem Stab willkürlich herausgegriffene Volumenelement

$$dV = Q\,dx$$

(Q = Stabquerschnitt)

an der Stelle x (siehe Abb.7) ist infolge der Spannung $\sigma(x)$ um das Stück ξ in Richtung der Stabachse verschoben und gleichzeitig um den Betrag $d\xi$ gedehnt (oder gestaucht), da an seinen Stirnflächen, das heißt am Orte x und am Orte x+dx, unterschiedliche Spannungen angreifen, nämlich $\sigma(x)$ und $\sigma(x) + d\sigma$. Da die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes (1) vorausgesetzt wird, gilt

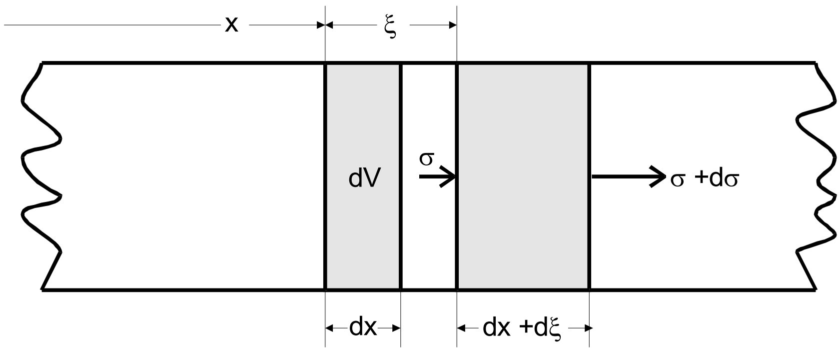

Abb.7: Skizze zur Ableitung eines Zusammenhanges zwischen Elastizitätsmodul und Schallgeschwindigkeit

$$\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

und

$$\sigma + d\sigma = \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx = E \frac{\partial \xi}{\partial x} + E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad .$$

Auf das Volumenelement Qdx wirkt also die Kraft

$$dF = Q\left((\sigma + d\sigma) - \sigma\right) = QE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad .$$

Sie erteilt der Masse

$$dm = \rho\, Q\, dx$$

(ρ = Dichte des Stabes)

des Volumenelementes die Beschleunigung

$$b = \frac{dF}{dm} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad .$$

Da die Beschleunigung als zweite Ableitung des Weges nach der Zeit definiert ist, gilt schließlich

(11) $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad .$$

Diese Gleichung, die die zeitliche und räumliche Verschiebung eines Volumenelementes miteinander verknüpft, bezeichnet man als Wellengleichung. (11) wird gelöst durch alle Funktionen mit der Gestalt

(12) $$\xi(x, t) = f(x \pm ct) \quad ,$$

wobei die Konstante c den Wert

$$c = \sqrt{E/\rho}$$

haben muss, wie man durch Einsetzen von (12) in (11) sofort sieht. Die in (12) eingeführte Größe c ist nun aber nichts anderes als die gesuchte Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elastischen Deformation, wie im Folgenden gezeigt werden soll: An einer beliebigen Stelle x' des Stabes beobachte man zur Zeit t' die Verschiebung ξ'. Es gelte also gemäß (12)

$$\xi' = f(x' - ct') \quad .$$

Für einen späteren Zeitpunkt t'' > t' gibt es ebenfalls einen Ort x'', sodass

(13) $$x' - ct' = x'' - ct''$$

ist. An der so definierten Stelle x'' muss dann die Verschiebung ebenfalls den Wert ξ' haben, da f eindeutig ist. Daraus folgt, dass sich in dem Zeitintervall t'' - t' der Deformationszustand um das Stück x'' - x' weiterbewegt haben muss. Nach (13) ist aber

$$\frac{x''-x'}{t''-t'} = c \quad ,$$

damit ist

(14) $$c = \sqrt{E/\rho}$$

die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elastischen Deformation.

6. Beschreibung einer Apparatur zur Messung der Schallgeschwindigkeit in Stäben

Eine Skizze einer zur Schallgeschwindigkeitsmessung geeigneten Apparatur ist in Abb.8 wiedergegeben.

Die elastische Deformation wird durch den Aufprall einer Stahlkugel auf die linke Stirnseite des Probestabes erzeugt. Der Schallimpuls läuft dann durch den Stab hindurch und trifft auf die rechte Stirnfläche. Ihre Deformation wird durch einen Tonabnehmer, wie er von der Schallplattentechnik her bekannt ist, registriert. Dieser gibt zum Zeitpunkt des Eintreffens des Schallimpulses einen elektrischen Impuls ab, welcher, nachdem er einen Verstärker und Impulsformer durchlaufen hat, eine elektronische Torstufe öffnet,

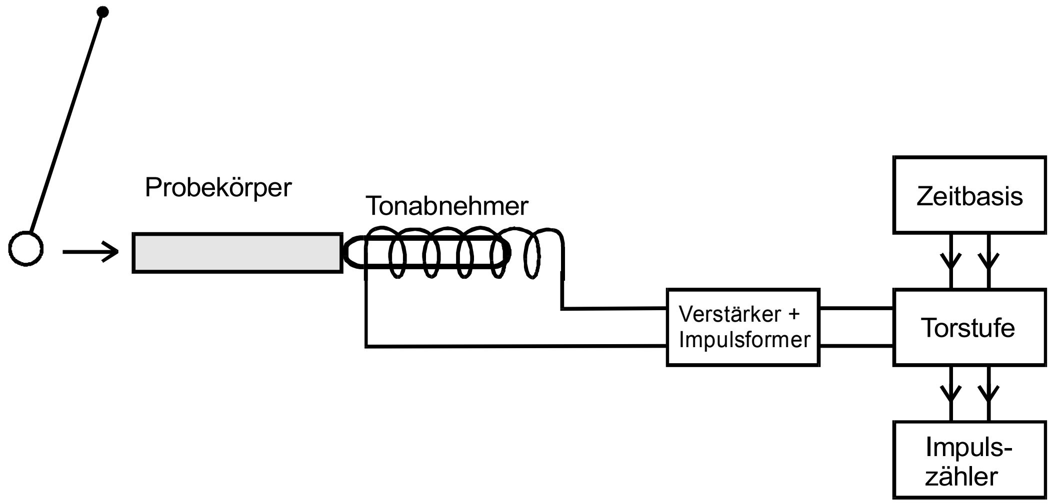

Abb. 8: Schematische Darstellung einer Apparatur zur Messung der Laufzeit eines Schallimpulses in einem stabförmigen Probekörper

sodass von einem quarzgesteuerten Zeitbasisgenerator elektrische Impulse in Abständen von 1 μsec in ein elektronisches Zählwerk gelangen können. Der auf die rechte Stirnfläche einfallende Schallimpuls geht nur zu einem geringen Teil in die umgebende Luft über, der größere Teil wird reflektiert, da $c_{stab} >> c_{luft}$ ist. Die Schallwelle läuft also zur linken Stirnfläche zurück, wird dort ebenfalls reflektiert und trifft zum zweiten Mal auf die rechte Stirnfläche. Der hierbei entstehende elektrische Impuls schließt jetzt die Torstufe, sodass der Impulszähler die **doppelte** Laufzeit des Schallimpulses anzeigt. Da der Schallimpuls nicht einmal sondern viele Male reflektiert wird, bevor seine Energie verbraucht ist, kann man mit der hier beschriebenen Apparatur auch die doppelte Laufzeit eines zehnfach reflektierten Impulses messen. Hierzu braucht man nur einen Schalter in die entsprechende Stellung zu bringen. Zur Messung von E nach dem oben beschriebenen Verfahren müssen die Dichte des Probestabes durch Wägung und Ermittlung seiner Abmessungen sowie die Schallgeschwindigkeit bestimmt werden.

7. Aufgabe

a) Man bestimme den Elastizitätsmodul verschiedener Metalle und Legierungen mit Hilfe von Biegungs- und Schallgeschwindigkeitsmessungen.
b) Man überprüfe, ob die nach den verschiedenen Methoden gewonnenen Ergebnisse übereinstimmen.

8. Messprogramm

a) Man messe die Durchbiegung D(x) in Abhängigkeit von der Distanz x vom Einspannort für je einen Stab von zylindrischem und rechteckigem Querschnitt bei einseitiger Einspannung.

b) Man messe die Durchbiegung eines Stabes bei zweiseitiger Auflage links und rechts von der Last.
c) Man bestimme die Laufzeit von Schallimpulsen in den zuvor ausgemessenen Proben.
d) Man ermittle mit Mikrometerschraube und Schieblehre die geometrischen Abmessungen der Probekörper.
e) Mit Hilfe einer elektronischen Waage bestimme man die Massen der Probekörper und der Belastungsgewichte.

9. Praktische Hinweise

Bei der Auswahl der Messwerte x beachte man den nicht-linearen Zusammenhang zwischen D(x) und x. Um eventuell auftretende systematische Abweichungen von den Beziehungen (8), (9) und (10) aufzudecken, trage man in einem Diagramm D(x) gegen $Lx^2 - x^3/3$ bzw. $3L^2x - 4x^3$ auf. Die Elastizitätsmoduln bestimme man mittels einer Ausgleichsrechung. Zur Berechnung des Flächenträgheitsmomentes **I** für einen kreisförmigen Querschnitt verwende man zweckmäßigerweise ein Polarkoordinatensystem.

10. Literatur

K.A. Reckling, Mechanik II (Festigkeitslehre) unitext

W. Müller, Theorie der elastischen Verformung, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig 1959

H. Müller, Festigkeits- und Elastizitätslehre,

R. Demmig Festigkeitslehre, demmig verlag KG

H. Blasius, Mechanik II Elastizität und Festigkeit, Boysen & Maasch Verlag 1964