

Versuch Nr. 402

Dispersionsmessungen am Glasprisma

1. Einleitung

Eine Lichtwelle, die in Materie eindringt, tritt über ihre elektrische Feldstärke im wesentlichen mit den dort vorhandenen Elektronen in Wechselwirkung. Das hat zur Konsequenz, wie in Kap.3 gezeigt wird, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit v des Lichtes in Materie kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c wird. Ein Lichtstrahl, der schräg vom Vakuum in Materie oder umgekehrt eindringt, erfährt dadurch an der Grenzfläche der beiden Medien eine Richtungsänderung. Dieses Phänomen bezeichnet man als **Brechung** und beschreibt es durch den sogenannten **Brechungsindex n** , welcher als das Verhältnis der beiden Lichtgeschwindigkeiten definiert ist

$$(1) \quad n := \frac{c}{v} \quad \text{oder allgemeiner} \quad n := \frac{v_1}{v_2} .$$

n steht in engem Zusammenhang mit der Richtungsänderung des Lichtstrahls, die durch 2 Winkel beschrieben werden beschrieben werden kann. Darauf wird im nächsten Kapitel näher eingegangen. Aus den Überlegungen in Kap.3 folgt weiter, dass die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** des Lichtes in Materie eine **frequenzabhängige** Größe ist. Das heißt, auch der Brechungsindex ist eine Funktion der Frequenz ω oder der Wellenlänge λ des Lichtes. Dieses Phänomen bezeichnet man als **Dispersion**. Von praktischem und auch von theoretischem Interesse ist nun die sogenannte Dispersionskurve, das heißt die Funktion

$$n = f(\lambda)$$

im Bereich des sichtbaren Lichtes. Sie spielt beispielsweise eine Rolle bei der Berechnung von Objektiven, die in der technischen Optik zur möglichst fehlerfreien Abbildung von Gegenständen verwendet werden. Bei Kenntnis der Dispersionskurve verschiedener Materialien ist man in der Lage, die sogenannte chromatische Aberration einer Sammellinse – das heißt, die Wellenlängenabhängigkeit ihrer Brennweite – weitgehend durch Verwendung mehrerer Linsen mit unterschiedlichem Dispersionsverhalten zu kompensieren.

Im Experiment soll nun die Dispersionskurve für ein bestimmtes genormtes Glasmaterial ermittelt werden. Das ist möglich, wenn man die zweimalige Brechung eines Lichtstrahls beim Durchgang durch ein Prisma untersucht. Hierzu benötigt man einen Prismen-Spektralapparat, dessen Aufbau, Wirkungsweise und Bedienung in den Kapiteln 4 und 5 beschrieben werden. Anschließend sollen die Messergebnisse mit einer einfachen Funktion, die sich aus dem Modell der erzwungenen Schwingungen ableiten lässt (sogenannte klassische Dispersionstheorie), verglichen werden.

2. Die Erklärung der Lichtbrechung mit Hilfe des Huygensschen Prinzips

Ein Lichtstrahl falle unter einem Winkel α gegen die Normale auf die Grenzfläche zweier Medien, in denen die Lichtgeschwindigkeiten v_1 und v_2 betragen (siehe (Abb.1)). Nach

Durchtritt durch die Grenzfläche erfährt er eine Richtungsänderung, sodass er sich jetzt unter dem Winkel β gegen die Normale ausbreitet. Den Zusammenhang zwischen den Winkeln und den Geschwindigkeiten kann man mit Hilfe des **Huygensschen Prinzips**¹ berechnen. Es lautet: Jeder Punkt einer bestehenden Wellenfläche kann als Zentrum einer neuen kugelförmigen "Elementarwelle" aufgefasst werden. Die Einhüllende aller Elementarwellen gibt die Wellenfront für einen späteren Zeitpunkt an.

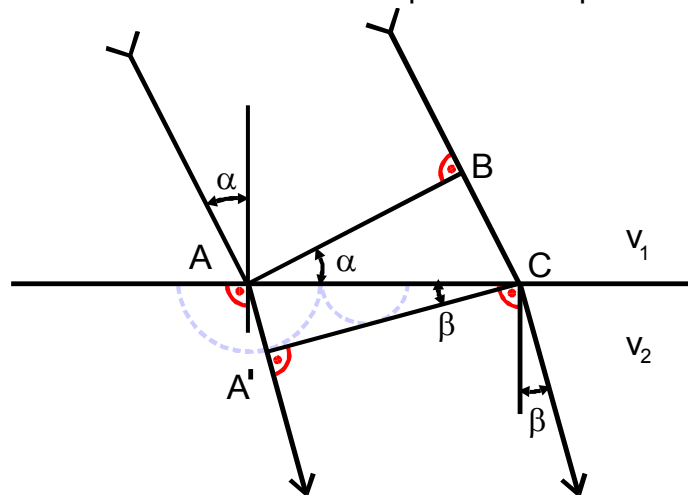


Abb.1: Zur Ableitung des Snelliusschen Brechungsgesetzes mit Hilfe des Huygensschen Prinzips

Man betrachte unter diesem Gesichtspunkt die Skizze in Abb.1. Die durch die Punkte A und B festgelegte, ebene Wellenfront möge im Punkte A gerade die Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Lichtgeschwindigkeiten v_1 und v_2 erreichen. In der Zeit $T = \overline{BC}/v_1$ ist auch der Punkt B auf der Grenzfläche angelangt. Am Ende dieses Zeitraumes hat die vom Punkte A ausgehende Elementarwelle schon den Radius Tv_2 angenommen, während der Radius der von C ausgehenden Kugelwelle noch null ist. Zusammen mit den anderen Elementarwellen, die von den übrigen auf der Grenzfläche liegenden Punkten ausgehen, bauen sie durch Überlagerung die Wellenfront A'C auf. Aus Abb.1 kann man nun die Beziehungen

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{v_1 T}{\overline{AC}} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{\overline{A'A}}{\overline{AC}} = \frac{v_2 T}{\overline{AC}}$$

ablesen, woraus folgt

$$(2) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

oder unter Berücksichtigung von (1)

$$(3) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

Die Gleichung (2) beschreibt somit die Richtungsänderung eines Lichtstrahls bei seinem Durchtritt durch eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Lichtgeschwin-

¹ benannt nach dem niederländischen Physiker, Mathematiker und Astronom Christiaan Huygens, 1629 - 1695

digkeiten v_1 und v_2 . Man bezeichnet sie als das **Snelliussche Brechungsgesetz**².

3. Ableitung der Dispersionsgleichung

In diesem Kapitel soll versucht werden, ausgehend von der Maxwellschen Theorie der elektromagnetischen Wellen eine Dispersionsgleichung, das heißt einen Zusammenhang zwischen Brechungsindex und Wellenlänge, abzuleiten. Sie kann allerdings nicht in ihrer ursprünglichen Gestalt, wo man die Materie als ein Kontinuum ansah, verwendet werden. Hier ist es vielmehr notwendig, ihre lokalisierten, elektrisch geladenen Bestandteile wie Elektronen und Ionenrümpfe, zu berücksichtigen. Sie befinden sich in Gleichgewichtslagen und sollen durch das elektrische Wechselfeld der Lichtwellen zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden³, wobei, wie in V354 am Beispiel des elektrischen Schwingkreises gezeigt, auch Resonanzerscheinungen eine Rolle spielen können. Es muss jedoch an dieser Stelle bemerkt werden, dass dieses Modell die Wechselwirkung von Materie und Strahlung nicht vollständig beschreibt, insbesondere nicht bei Wellenlängen unterhalb des sichtbaren Spektrums. Dazu ist nur die Quantentheorie in der Lage. Es lässt sich jedoch eine recht gute Übereinstimmung zwischen Experiment und klassischer Theorie erzielen, wenn man sich hinreichend weit von den soeben erwähnten Resonanzstellen entfernt; dort würde der Festkörper merklich Energie aus der Lichtwelle aufnehmen, das heißt, man würde eine deutliche Absorption beobachten. Daher soll im Folgenden eine Dispersionsgleichung für solche Wellenlängenbereiche abgeleitet werden, in denen nur eine vernachlässigbare Absorption auftritt. Die Bedingung ist beispielsweise für Gläser im sichtbaren Spektralbereich erfüllt. Es falle also auf eine Materieschicht, welche die zuvor genannten Bedingungen erfüllt, eine ebene Lichtwelle ein, deren elektrische Feldstärke durch

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

(ω = Kreisfrequenz der Lichtwelle)

gegeben ist. Dadurch wirkt eine periodische Kraft

$$\vec{F}_e = q_h \vec{E}$$

auf die Ladungen q_h . In Festkörpern muss die Gleichung exakt lauten: $\vec{K} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{3} \vec{P} \right)$

(\vec{P} = Polarisierung der Materie). Hier wird jedoch \vec{P} gegen \vec{E} vernachlässigt. Ebenso kann der Einfluss des magnetischen Wechselfeldes der Lichtwelle durch die Lorentzkraft auf die geladenen Teilchen vernachlässigt werden. Sie verschiebt die geladenen Teilchen um den Betrag \vec{x}_h aus ihrer Gleichgewichtslage. Hierdurch entsteht ein elektrischer Dipol, welcher das Moment

$$\vec{d}_h = q_h \vec{x}_h$$

hat. Sind von den Ladungsträgern q_h insgesamt N_h pro Volumeneinheit vorhanden und summiert man über alle verschiedenen Teilchenarten h , so erhält man das Dipolmo-

² benannt nach dem niederländischen Physiker und Mathematiker Willebrordus Snellius, 1580 - 1626

³ Die Wechselwirkung der Lichtwelle mit den Ionenrümpfen spielt im Bereich des sichtbaren Lichtes ($0,4 \leq \lambda \leq 0,7 \mu\text{m}$) noch keine Rolle sondern erst bei größeren Wellenlängen.

ment pro Volumeneinheit oder die Polarisation \vec{P} der Probe

$$(4) \quad \vec{P} = \sum_h \vec{P}_h = \sum_h N_h q_h \vec{x}_h \quad .$$

Außerdem wird durch die Auslenkung der Ladungsträger aus ihrer Gleichgewichtslage eine rücktreibende Kraft \vec{F}_r induziert, die proportional zur Auslenkung \vec{x} sein soll

$$\vec{F}_{r,h} = a_h \vec{x}_h \quad .$$

Zusätzlich wird angenommen, dass die periodische Bewegung der Teilchen durch eine „Reibungskraft“ \vec{F}_d gedämpft wird, die proportional zur Geschwindigkeit der Ladungsträger angesetzt wird

$$\vec{F}_{d,h} = f_h \frac{d\vec{x}_h}{dt} \quad .$$

Die Differentialgleichung für die Bewegung der Teilchen hat also die Gestalt

$$m_h \frac{d^2 \vec{x}_h}{dt^2} + f_h \frac{d\vec{x}_h}{dt} + a_h \vec{x}_h = q_h \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad .$$

(m_h = Teilchenmassen)

\vec{x}_h lässt sich durch die Polarisation \vec{P}_h ausdrücken, wenn man die Gleichung mit $N_h q_h / m_h$ erweitert. Unter Berücksichtigung von (4) ergibt sich dann

$$(5) \quad \frac{d^2 \vec{P}_h}{dt^2} + \frac{f_h}{m_h} \frac{d\vec{P}_h}{dt} + \frac{a_h}{m_h} \vec{P}_h = \frac{N_q q_h^2}{m_h} \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad .$$

Dies ist die bekannte Differentialgleichung für eine erzwungene Schwingung, wie sie zum Beispiel in V 354, Kap.3 beschrieben ist. Ihre Lösung kann von dort übernommen werden: (siehe Gleichungen (8) und (9)). Der Koeffizient a_h/m_h vor \vec{P}_h stellt die Resonanzfrequenz ω_h^2 des schwingenden Systems dar⁴. Mit dieser Abkürzung lässt sich die Lösung von (5) schreiben als

$$\vec{P}_h = \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_q q_h^2}{m_h} \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad .$$

Die gesamte Polarisation beträgt somit

$$(6) \quad \vec{P} = \sum_h \vec{P}_h = \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_q q_h^2}{m_h} \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad .$$

Da die Polarisation eines Mediums gleich der dielektrischen Verschiebung $\epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ in der Materie vermindert um die dielektrische Verschiebung $\epsilon_0 \vec{E}$ im Vakuum ist, also

$$\vec{P} = (\epsilon - 1) \epsilon_0 \vec{E} \quad ,$$

⁴ falls $f_h/m_h \ll \omega_h$ ist

kann man in (6) die Polarisierung durch die Dielektrizitätskonstante ε ersetzen

$$(7) \quad (\tilde{\varepsilon} - 1)\varepsilon_0 = \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_q q_h^2}{m_h} .$$

Mit Hilfe der in V407, Kap. 3 abgeleiteten Maxwellschen Relation

$$n^2 = \varepsilon$$

kann man jetzt den gesuchten Zusammenhang zwischen Brechungsindex und Lichtfrequenz (bzw. Wellenlänge λ) herstellen. Es folgt aus (7)

$$(8) \quad \tilde{n}^2 = 1 + \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_q q_h^2}{m_h \varepsilon_0} .$$

Durch die \sim ist angedeutet, dass die Dielektrizitätskonstante und der Brechungsindex hier als komplexe Größen angesetzt werden müssen. \tilde{n} stellt man zweckmäßigerweise in der Form

$$\tilde{n} = n(1 - ik)$$

dar, denn dann bedeuten n den reellen Brechungsindex, der gemäß (1) gleich dem Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten ist, und k die Absorptionskonstante des Lichtes in Materie. Man erkennt diese Zusammenhänge sofort, wenn man \tilde{n} in die Gleichung für eine ebene Welle einsetzt

$$\begin{aligned} \frac{E(x,t)}{E_0} &= \exp \left\{ i \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right\} = \exp \left\{ i \omega \left(t - \frac{x \tilde{n}}{c} \right) \right\} = \exp \left\{ i \omega \left(t - x \frac{n}{c} \right) (1 - ik) \right\} \\ &= \exp \left\{ i \omega \left(t - \frac{x n}{c} \right) \right\} \exp \left(- \omega \frac{n}{c} k x \right) . \end{aligned}$$

In der Gleichung taucht ein reeller Exponentialfaktor auf mit dem Exponenten $-2\pi kx/\lambda$, der die Abnahme der Amplitude mit zunehmender Schichtdicke beschreibt. Zerlegt man nun (8) in Real- und Imaginärteil, dann bekommt man die gesuchten Dispersionsgleichungen

$$(9) \quad \text{Re}(\tilde{n}^2) = n^2(1 - k^2) = 1 + \sum_h \frac{N_h q_h^2 (\omega_h^2 - \omega^2)}{\varepsilon_0 m_h \left((\omega_h^2 - \omega^2)^2 + \frac{f_h^2}{m_h^2} \omega^2 \right)}$$

und

$$\text{Im}(\tilde{n}^2) = -2n^2 k = \sum_h \frac{N_h q_h^2 f_h}{\varepsilon_0 m_h^2} \frac{\omega}{(\omega_h^2 - \omega^2)^2 + \frac{f_h^2}{m_h^2} \omega^2} .$$

Es zeigt sich, dass in der Nähe der Stellen $\omega = \omega_h$ der Absorptionskoeffizient maximal wird, das heißt, wird die Lichtfrequenz etwa gleich der Resonanzfrequenz der schwingenden Ladungsträger, so tritt eine besonders starke Absorption des einfallenden Lichtes auf.

Es wurde bereits zu Beginn dieses Kapitels darauf hingewiesen, dass das Modell der erzwungenen Schwingungen die tatsächlichen Verhältnisse in diesem Frequenzbereich nur unzureichend beschreibt. Daher soll der Verlauf der Dispersionskurve nur weit außerhalb der Resonanzstellen betrachtet werden, sodass

$$n^2 k \approx 0$$

angenommen werden kann. Das bedeutet, die Materie ist in dem betrachteten Spektralbereich praktisch durchsichtig und farblos. Die Gleichung (9) geht dann über in

$$n^2(\omega) = \mathbf{1} + \sum_h \frac{N_h q_h^2}{\varepsilon_0 m_h} \frac{1}{\omega^2 - \omega_h^2}$$

oder, wenn man die nicht messbare Größe ω durch das leicht zugängliche λ ersetzt, (λ = Wellenlänge im Vakuum)

$$(10) \quad n^2(\lambda) = \mathbf{1} + \sum_h \frac{N_h q_h^2}{4 \pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_h} \frac{\lambda^2 \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2}.$$

Angenommen die betrachtete Materie besitze nur die eine Absorptionsstelle λ_1 , und es sei $\lambda \gg \lambda_1$, dann lässt sich (10) in eine Reihe nach Potenzen von λ_1/λ entwickeln

$$n^2(\lambda) = \mathbf{1} + \frac{N_1 q_1^2}{4 \pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_1} \frac{\lambda_1^2}{\mathbf{1} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2} = \mathbf{1} + \frac{N_1 q_1^2 \lambda_1^2}{4 \pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_1} \left(\mathbf{1} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^4 + \dots \right).$$

Für ist $\lambda \gg \lambda_1$ ist demnach

$$(11) \quad n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \dots \quad \text{mit} \quad A_0, A_2, A_4 > 0^5.$$

Ist nun $\lambda \ll \lambda_1$, nähert man sich also von der kurzwelligen Seite der Absorptionsstelle, dann lässt sich (10) umformen in

$$n^2(\lambda) = \mathbf{1} + \frac{N_1 q_1^2}{4 \pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_1} \frac{\lambda^2}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2 - 1} = \mathbf{1} - \frac{N_1 q_1^2}{4 \pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_1} \left(\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda^6}{\lambda_1^4} + \dots \right)$$

oder

$$(11a) \quad n^2(\lambda) = 1 - A_2' \lambda^2 - A_4' \lambda^4 - \dots \quad (A_i' > 0 \quad \text{für} \quad i \geq 2)$$

Die Gleichungen (11) und (11a) erscheinen demnach grundsätzlich geeignet, um die Dispersion von Gläsern im sichtbaren Spektralbereich zu beschreiben; denn aus ihrer hohen Transparenz und Farblosigkeit kann man den Schluss ziehen, dass ihre Absorp-

⁵ Historische Bemerkung: Bereits der französische Mathematiker und Physiker Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) hat sich mit dem Problem der Dispersion beschäftigt. Aus seinen Untersuchungen konnte er ein Ergebnis der Gestalt (11) ableiten. Die Gleichung (11) wird daher auch als **Cauchysche Dispersionsformel** bezeichnet.

tionsstellen weit im Ultravioletten und/oder im Infraroten liegen müssen. Die Entscheidung, welche der beiden Gleichungen das Dispersionsverhalten eines Glases im Sichtbaren besser beschreibt, ist nicht schwierig zu fällen; denn die durch (11) und (11a) dargestellten Kurven besitzen unterschiedliche Krümmungen: Bei (11) gilt

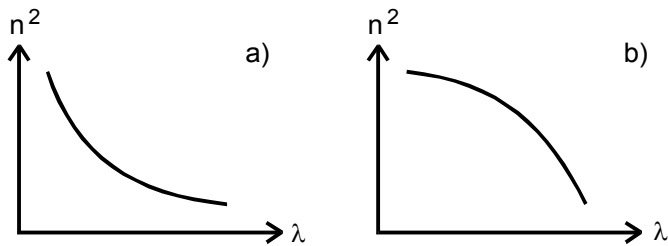


Abb.2: Gestalt der Dispersionskurven a) nach (11), b) nach (11a)

$$\frac{d^2 n^2(\lambda)}{d\lambda^2} > 0 \quad ,$$

für alle λ , während bei (11a) immer

$$\frac{d^2 n^2(\lambda)}{d\lambda^2} < 0$$

ist. Die typischen Kurvenverläufe sind in Abb.2 veranschaulicht. Bei-

den Fällen gemeinsam ist die Abnahme des Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge. Dieses Verhalten bezeichnet man als **normale Dispersion**. Der umgekehrte Fall – die Zunahme von n mit wachsenden λ – trägt dagegen die Bezeichnung **anomale Dispersion**. Sie kann in der Nähe der Absorptionsstelle λ_i und zwar bei $\lambda < \lambda_i$ beobachtet werden. Eine korrekte Beschreibung dieses Phänomens durch (11) oder (11a) ist nicht möglich.

Versucht man die Dispersionsgleichung eines Glases über den sichtbaren Spektralbereich hinaus ins Infrarote hinein zu formulieren, wird man feststellen, dass eine Kombination aus (11) und (11a) die experimentellen Ergebnisse am besten beschreibt. Daraus kann man den Schluss ziehen, dass Gläser sowohl im UV als auch im IR Absorptionsstellen besitzen.

4. Aufgaben

- Man bestimme für verschiedene Wellenlängen im Bereich des sichtbaren Lichtes die Brechungsindices einer genormten Glassorte durch Messung der Brechungswinkel an einem Prisma.
- Mit Hilfe der erhaltenen Wertepaare (n_i, λ_i) entscheide man, mit welcher der beiden Dispersionskurven ((11) oder (11a)) eine bessere Anpassung an die Messergebnisse möglich ist.
- Mit Hilfe einer Ausgleichsrechnung bestimme man die Parameter A_i bzw. A_i' der gemäß 4b gewählten Dispersionsgleichung.
- Aus den A_i bzw. A_i' errechne man die dem sichtbaren Spektralbereich am nächsten gelegene Absorptionsstelle λ_1 .
- Man berechne aus der erhaltenen Dispersionskurve einige Daten des verwendeten Prismas.

5. Beschreibung der Messapparatur

Zur Messung des Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge soll hier ein Prismenspektralapparat benutzt werden. Sein Aufbau wird im Folgenden näher beschrieben: Kernstück des Gerätes ist ein Glasprisma, durch das der zu untersuchende

Lichtstrahl hindurchgeht. Er wird dabei - wenn er nicht zufällig senkrecht auftrifft - zweimal gebrochen. Aus dem Winkel η der gesamten Richtungsänderung des Strahles lässt sich mit Hilfe des Snelliusschen Brechungsgesetzes (3) der gesuchte Brechungsindex des Glases berechnen. Es genügt, den Spezialfall des symmetrischen Strahlenganges, das heißt, $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ in Abb.3, zu betrachten. Unter dieser Voraussetzung kann man aus Abb.3 die folgenden Winkelbeziehungen ablesen

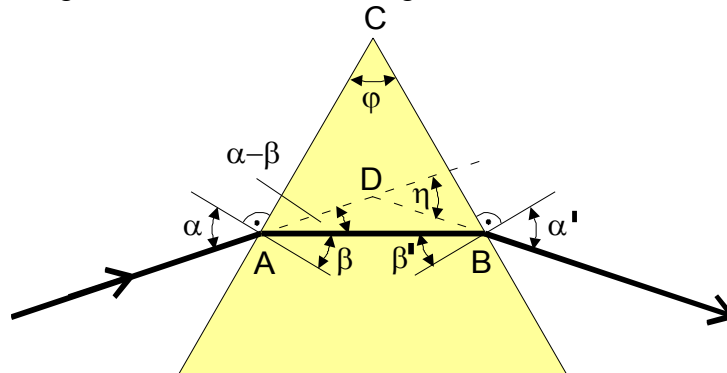


Abb.3: Symmetrischer Strahlengang durch ein Prisma

$$\angle CAB = 90 - \frac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad \angle CAB = 90 - \beta ,$$

woraus folgt

$$\beta = \frac{\varphi}{2} .$$

Aus Dreieck ADB erhält man

$$\eta = 2(\alpha - \beta)$$

oder

$$(12) \quad \alpha = \frac{\eta + \varphi}{2} .$$

Mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

ergibt sich daraus die wichtige Beziehung

$$(13) \quad n = \frac{\sin \frac{\eta + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} .$$

Zur Bestimmung des Brechungsindex n müssen also der Winkel η der Richtungsänderung des einfallenden Strahles und der Winkel φ zwischen den beiden brechenden Oberflächen gemessen werden. Zu diesem Zwecke stellt man das Prisma auf den Drehtisch eines Goniometers. Das Licht fällt, wie in der Skizze des Spektrometers (Abb.4) angedeutet ist, durch einen Spalt und eine Sammellinse auf die Oberfläche des Prismas. Da der Spalt in der Brennebene der Linse steht, erzeugt sie ein paralleles Lichtbündel. Nach seiner Brechung durch das Prisma gelangt das Strahlenbündel in ein

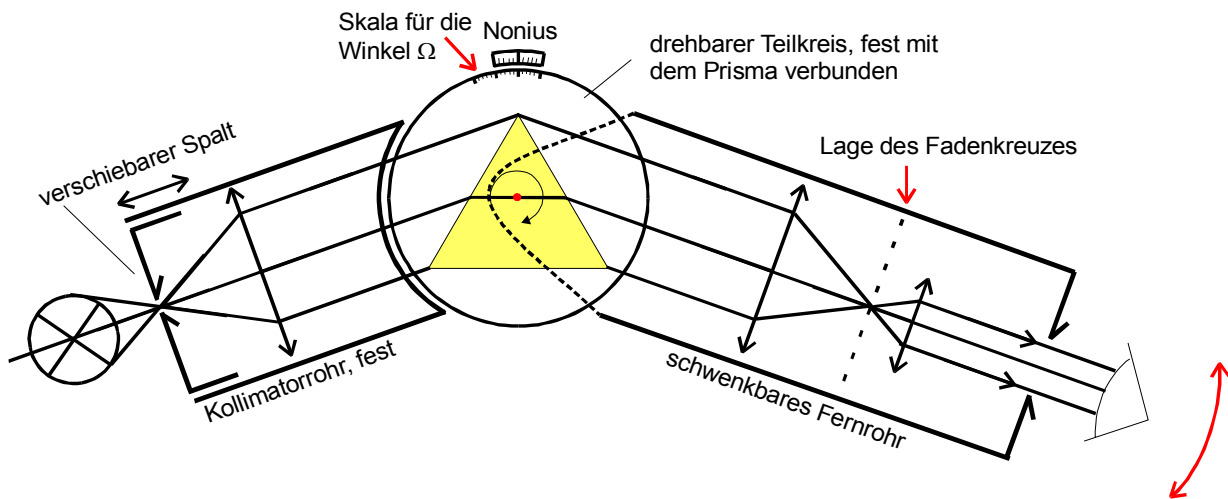


Abb.4: Schematische Darstellung eines Prismen-Spektralapparates

Fernrohr. Die Objektivlinse entwirft dort ein reelles Spaltbild in ihrer Brennebene, welches mittels einer Lupe (dem Okular) beobachtet wird. Zur genauen Lokalisierung des Spaltbildes ist in der Brennebene des Objektivs ein Fadenkreuz angebracht, das durch Schwenken des Fernrohres um die Goniometerachse mit dem Spaltbild zur Deckung gebracht werden kann.

6. Beschreibung des Messvorganges

Vor Beginn der Messungen muss der Spalt in die Brennebene der Kollimatorlinse geschoben und dort arretiert werden, nur dann kann man ein scharfes Spaltbild im Fernrohr beobachten.

a) η -Messung

Um die Gleichung (13) anwenden zu können, muss ein symmetrischer Strahlengang vorliegen. Man kann ihn auffinden, wenn man gemäß Abb.5 einen Teil des Lichtes auf die dritte Oberfläche des Prismas fallen lässt, wo es reflektiert wird und ebenfalls in das Fernrohr gelangt.

Ist das Prisma gleichschenkelig und verläuft der Lichtstrahl symmetrisch durch das Prisma, so sind, wie aus Abb.5 hervorgeht, gebrochener und reflektierter Strahl parallel.

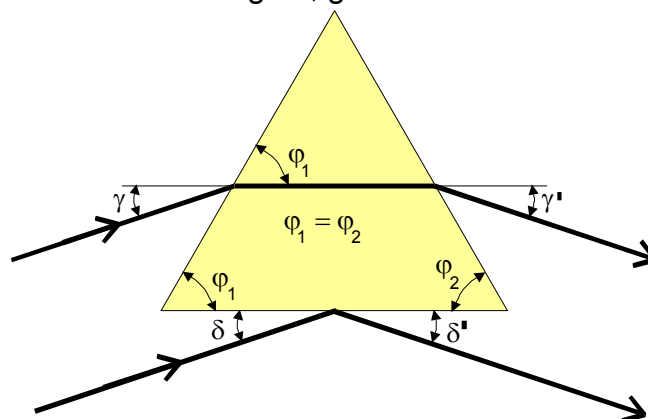


Abb. 5: Verlauf des reflektierten und des gebrochenen Strahls beim symmetrischen Strahlengang an einem gleichschenkligen Prisma ($\varphi_1 = \varphi_2$) (Es muss gelten $\gamma = \gamma' = \delta = \delta'$.)

Zum Aufsuchen des symmetrischen Strahlenganges muss man daher das Prisma so lange um die Goniometerachse schwenken, bis das Spaltbild, das durch das gebro-

chene Strahlenbündel entworfen wird, mit demjenigen zusammenfällt, welches durch das reflektierte Strahlenbündel entsteht. Würde man die Richtung des ungebrochenen Strahles kennen, so könnte man jetzt bereits an der Stellung des Fernrohres den Ablenkungswinkel η ablesen. Da diese aber nicht mit hinreichender Genauigkeit bekannt ist, schlägt man einen etwas anderen Weg ein. Man stellt zunächst, wie soeben beschrieben, die Apparatur auf den symmetrischen Strahlengang ein und liest die zugehörige Winkelstellung Ω_ℓ des Fernrohres am Teilkreis ab. Danach wiederholt man die Messung bei spiegelsymmetrischer Stellung des Prismas (siehe Abb.6). Das möge einen Winkel Ω_r für die Fernrohrstellung ergeben. Der gesuchte Brechungswinkel n errechnet sich daraus zu

$$(14) \quad \eta = 180 - (\Omega_r - \Omega_\ell) \quad .$$

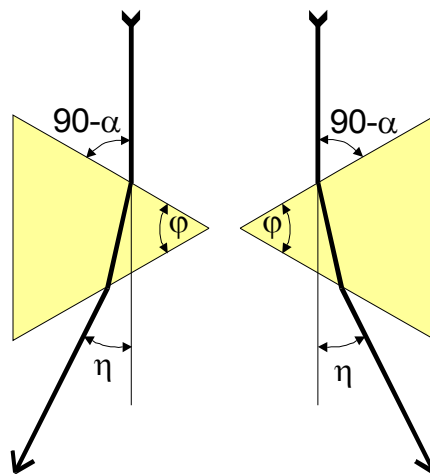


Abb. 6: Skizze zur Bestimmung des Brechungswinkels η aus zwei zueinander spiegelsymmetrischen Prismen-Stellungen

Diesen Zusammenhang erkennt man an Abb.6 und 7: Um das Prisma von der linken symmetrischen Stellung in die rechte zu bringen, muss es um den Winkel $2(90 - \alpha) + \varphi$

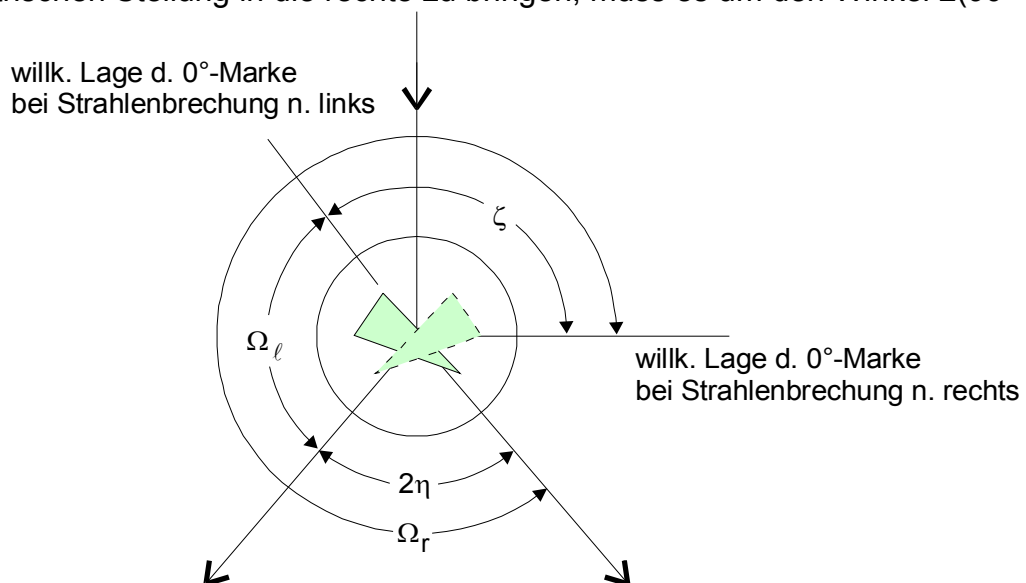


Abb. 7: Darstellung der Messgrößen Ω_ℓ und Ω_r in Zusammenhang mit den beiden spiegelsymmetrischen Prismenstellungen

gedreht werden. Also muss auch die 0° -Marke des Teilkreises, welcher mit dem Prisma fest verbunden ist, um diesen Winkel geschwenkt werden. Somit ist

$$\zeta = 180 - 2\alpha + \varphi$$

und unter Berücksichtigung von (12)

$$(15) \quad \zeta = 180 - \eta \quad .$$

Weiterhin liest man aus Abb.7 ab

$$(16) \quad \Omega_r = \zeta + \Omega_\ell + 2\eta \quad .$$

Aus (15) und (16) folgt dann die Behauptung (14).

b) φ -Messung

Zur Messung des brechenden Winkels φ wird das Prisma mit seiner brechenden Kante ungefähr auf das Kollimatorrohr ausgerichtet (siehe Abb.8).

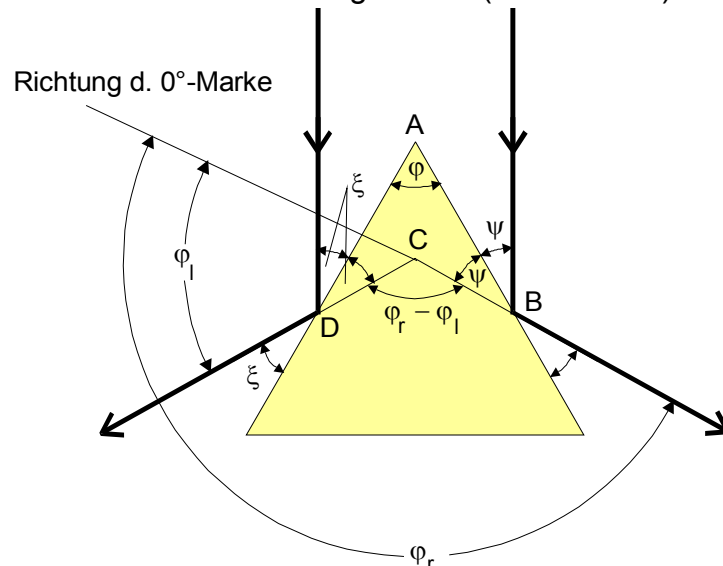


Abb.8: Skizze zur Bestimmung des Winkels φ zwischen den brechenden Oberflächen

Das einfallende Licht wird dann von den Prismenoberflächen reflektiert. Bei arretiertem Prisma werden nun die Richtungen der beiden reflektierten Strahlen mit dem Fernrohr ausgemessen. Sie mögen unter den Winkeln φ_l und φ_r erscheinen; dann folgt aus dem Viereck ABCD in Abb.8

$$360 = \varphi + \psi + (360 - (\varphi_r - \varphi_l)) + \xi$$

Da die beiden einfallenden Strahlen parallel sind, gilt

$$\varphi = \psi + \xi \quad .$$

Somit ist

$$(17) \quad \varphi = \frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_l) \quad .$$

7. Messprogramm

a) Man bestimme den Winkel φ zwischen den brechenden Oberflächen des Prismas nach der in Kap.6b geschilderten Methode.

- b) Man ermittle die Brechungswinkel n_i für die wichtigsten Linien des Helium-Spektrums und eventuell anderer Spektrallinien unter Angabe des verwendeten Glasmaterials.

8. Hinweise zur Auswertung

- a) Man berechne gemäß (13) aus φ und n_i die Brechungsindices n_i in Abhängigkeit von den Wellenlängen λ_i .
- b) Man versuche die Gleichung für diejenige Dispersionskurve zu bestimmen, die sich den Wertepaaren $\{n(\lambda_i), \lambda_i\}$ aus 8a am besten anpasst. Dazu muss man zunächst eine Entscheidung zwischen den beiden möglichen Dispersionsgleichungen

$$(11) \quad n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \dots$$

oder

$$(11a) \quad n^2(\lambda) = A_0' - A_2' \lambda^2 - \dots$$

treffen. Hierzu kann man zunächst nach der Methode der kleinsten Quadrate⁶ aus den Messwertepaaren die optimalen A_i - bzw. A_i' -Werte bestimmen. Mit diesen errechne man jetzt die Summe der Abweichungsquadrate gemäß

$$s_n^2 = \frac{1}{z-2} \sum_{i=1}^z \left\{ n^2(\lambda_i) - A_0 - \frac{A_2}{\lambda_i^2} \right\}^2$$

bzw.

$$s_{n'}^2 = \frac{1}{z-2} \sum_{i=1}^z \left\{ n^2(\lambda_i) - A_0' + A_2' \lambda_i^2 \right\}^2$$

(z = Anzahl der Messwertepaare)

errechnen. Es wird nun diejenige Dispersionsgleichung als gültig angenommen, die das (deutlich) kleinere s^2 besitzt. Wie lautet sie, und welche Fehler haben die Parameter? (Wenn die Möglichkeit besteht, kann auch bis zur 4. Ordnung gerechnet oder es kann eine Dispersionsgleichung der Gestalt

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} - A_2' \lambda^2$$

optimiert werden.)

- c) Zur Veranschaulichung stelle man in einem geeigneten Diagramm die gemessenen Wertepaare $\{n(\lambda_i), \lambda_i\}$ und die berechnete Dispersionskurve dar.
- d) Aus der in 8b bestimmten Dispersionsgleichung errechne man die sogenannte Abbesche Zahl⁷

$$v := \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

für das verwendete Glasmaterial, die ein Maß für seine Farbzerstreuung darstellt. Die Größen n_C , n_D und n_F bedeuten die Brechungsindices für die Wellenlängen der

⁶ siehe z.B. „Fehlerrechnung“, Kap.9

⁷ benannt nach dem deutschen Physiker und Sozialreformer Ernst Abbe (1840 – 1905)

Fraunhoferschen Linien: $\lambda_C = 656 \text{ nm}$, $\lambda_D = 589 \text{ nm}$ und $\lambda_F = 486 \text{ nm}$.

- e) Man berechne mit Hilfe der Dispersionssgleichung das theoretische Auflösungsvermögen (siehe Anhang) des benutzten Prismenspektralapparates für die Wellenlängen λ_C und λ_F unter der Annahme, dass das Prisma voll ausgeleuchtet ist (Basislänge = 3 cm)!
- f) Man berechne aus den optimierten Parametern der Dispersionssgleichung die dem sichtbaren Spektralbereich am nächsten gelegene Absorptionsstelle λ_i . (Hinweis: Man schätze die Gültigkeit dieses Zahlenwertes nicht zu hoch ein!)

9. Anhang: Das Auflösungsvermögen eines Prismen-Spektralapparates

Beim Arbeiten mit dem Prismen-Spektralapparat erhebt sich die Frage, wie gering der Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ zweier benachbarter Spektrallinien werden darf, sodass sie vom Gerät gerade noch getrennt werden können. Man versteht dann unter dem Auflösungsvermögen A den Ausdruck

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda},$$

worin λ die gemittelte Wellenlänge der beiden Spektrallinien bedeutet. Das Auflösungsvermögen eines idealen Prismen-Spektralapparates - dessen optische Systeme keine Abbildungsfehler besitzen - ist durch Beugungserscheinungen (siehe V 406) festgelegt; denn das Prisma wirkt infolge seiner endlichen Größe wie eine spaltförmige Blende. Man erhält daher genaugenommen in der Brennebene des Fernrohrobjektivs nicht ein scharfes Bild des Beleuchtungsspaltess sondern die in V 406 beschriebene Beugungsfigur. Lässt man nun zwei Spektrallinien mit den Wellenlängen λ und $\Delta\lambda + \lambda$ in den Spektralapparat einfallen, so werden sie infolge der Dispersion in etwas unterschiedliche Richtungen gebrochen (siehe Abb.9). Der Richtungsunterschied sei $\Delta\eta$. Es entstehen daher in der Brennebene des Fernrohrobjektivs zwei Beugungsfiguren, deren Helligkeitsmaxima ein wenig gegeneinander verschoben sind.

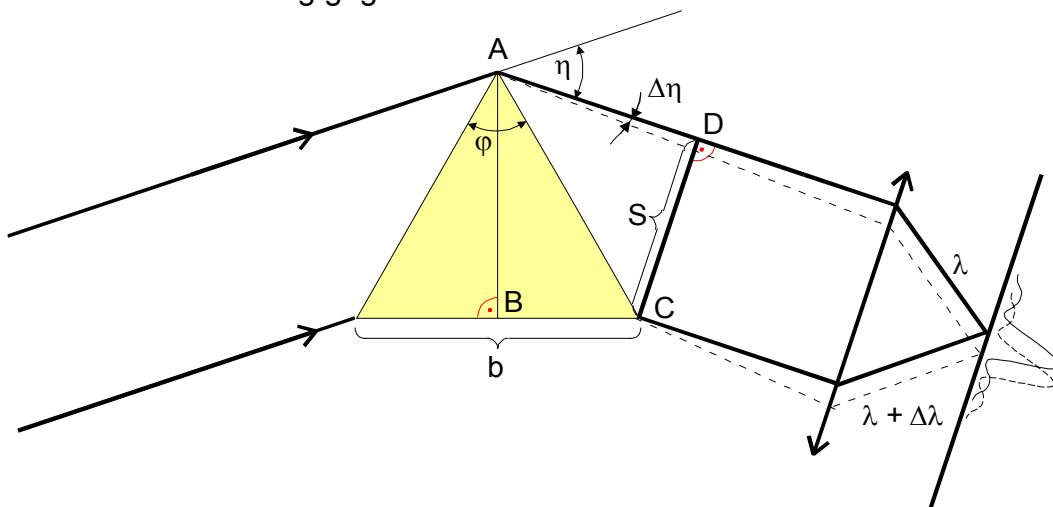


Abb.9: Skizze zur Berechnung des Auflösungsvermögens eines idealen Prismen-Spektralapparates
(b = Basisbreite des vom einfallenden Strahl ausgeleuchteten Prismas))

Eine Trennung der beiden Linien soll genau dann noch möglich sein, wenn das Helligkeitsmaximum der einen gerade in das erste Minimum der anderen fällt. Nach den

Ergebnissen aus V 406 liegt das erste Minimum an der Stelle

$$(18) \quad \sin \vartheta_{\min} = \frac{\lambda}{s} \quad .$$

(s = „Spalt“-Breite = Breite des durch das Prisma begrenzten Strahlenbündels)

Das bedeutet, wenn der Richtungsunterschied $\Delta \eta$ den durch (18)

gegebenen Wert besitzt, können die beiden Spektrallinien noch getrennt werden. Es muss also gelten

$$\sin \Delta \eta = \frac{\lambda}{s}$$

oder, da $\Delta \eta$ sehr klein ist,

$$(19) \quad \Delta \eta = \frac{\lambda}{s} \quad .$$

Die Richtungsänderung $\Delta \eta$ lässt sich nun durch die Dispersion des Glasmaterials ausdrücken. Beim symmetrischen Strahlengang gilt für Licht der Wellenlänge λ :

$$n(\lambda) = \frac{\sin \frac{\eta + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

und für

$$(20) \quad n(\lambda + \Delta \lambda) = n(\lambda) + \Delta \lambda \frac{dn}{d\lambda} + \dots = \frac{\sin \frac{\eta + \Delta \eta + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \quad .$$

Gleichung (20) kann man umformen in

$$n(\lambda) + \Delta \lambda \frac{dn}{d\lambda} + \dots = \frac{\sin \frac{\eta + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\Delta \eta}{2} + \frac{\cos \frac{\eta + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\Delta \eta}{2} \quad .$$

Da $\Delta \eta$ sehr klein ist, gelten die Näherungen

$$\cos \frac{\Delta \eta}{2} \approx 1 \quad \text{und} \quad \sin \frac{\Delta \eta}{2} \approx \frac{\Delta \eta}{2} \quad ,$$

daraus folgt

$$(21) \quad \Delta \lambda \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\Delta \eta}{s} \frac{\cos \frac{\eta + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \quad .$$

Damit erhält man für das gesuchte Auflösungsvermögen A des Prismen-Spektralapparates aus (19) und (21) den Ausdruck

$$(22) \quad \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = 2s \frac{dn}{d\lambda} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\eta + \varphi}{2}} \quad .$$

Die Winkelfunktionen in (22) lassen sich noch durch die Basisbreite b des Prismas ausdrücken. Man erkennt in Abb.9 an den Dreiecken ABC und ACD die Beziehungen

$$\frac{b}{2} = \overline{AC} \sin \frac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{s}{\overline{AC}} = \cos \frac{\eta + \varphi}{2} \quad ,$$

woraus schließlich folgt

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = b \frac{dn}{d\lambda} \quad .$$