

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---------------------------------|-----------|
| 1 Zielsetzung | 3 |
| 2 Theorie | 3 |
| 3 Fehlerrechnung | 5 |
| 4 Durchführung | 6 |
| 4.1 Quecksilber-Lampe | 6 |
| 4.2 Alkali-Metalle | 7 |
| 5 Auswertung | 7 |
| 5.1 Quecksilber | 7 |
| 5.2 Alkali-Metalle | 10 |
| 6 Diskussion | 11 |
| Literatur | 11 |

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll die innere Abschirmungszahl σ mehrerer Alkalimetalle bestimmt werden. Dies wird mit Hilfe der Emissionsspektren der entsprechenden Metalle vollführt.

2 Theorie

Der Vorteil von den in diesem Versuch verwendeten Alkali-Metallen ist, dass sie nur ein einzelnes Valenzelektron besitzen. Dieses wird Leuchtelektron genannt und die sogenannte Ein-Elektron-Näherung wird dadurch ermöglicht. Bei der Ein-Elektron-Näherung wird davon ausgegangen, dass die weiteren, weiter innen liegenden Elektronen auf den bereits vollbesetzten Schalen mit ihren Ladungen, die Ladungen von jeweils einem Proton im Atomkern größtenteils aufheben. Für mathematischen Betrachtungen wird dafür eine Abschirmungskonstante σ eingeführt. Dadurch bleibt neben der Ladung des Valenzelektrons entsprechend nur noch eine effektive positive Ladung im Kern übrig und es kann der Aufbau des Wasserstoffatom angenähert werden:

$$z_{\text{eff}} = z - \sigma, \quad z \hat{=} \text{Anzahl der Protonen.} \quad (1)$$

Ein wesentlicher Unterschied ist allerdings, dass die jeweiligen Valenzelektronen der Alkali-Metalle auf anderen Schalen, und damit verbundenen Energieniveaus, liegen als das des Wasserstoffes.

Um die Energieniveaus zu beschreiben werden die Quantenzahlen eingeführt. Diese unterteilen sich in Hauptquantenzahlen n und Nebenquantenzahlen oder auch Bahndrehimpulsquantenzahl l , sowie zu dem Spin die Quantenzahl j . Wichtig zu erwähnen ist, dass mit anwachsender Ordnungszahl der Atome auch die Hauptquantenzahlen der Valenzelektronen anwachsen. Dieses Valenzelektron kann unter Energiezufuhr angeregt werden und spring dabei auf eine höher gelegenes Energieniveau. Fällt es wieder ab, so wird die dabei freigesetzte Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung emittiert. Da die Energieniveaus diskret sind, entsteht ein Linienspektrum. Mit Hilfe der Schrödingergleichung und einer relativistischen Betrachtung ergibt sich eine Formel für die Energieeigenwerte in Abhängigkeit der Quantenzahlen:

$$E_{nlj} = -R_{\infty} \left\{ \frac{(z - \sigma)^2}{n^2} + \alpha^2 \frac{(z - \sigma)^4}{n^3} \left(\frac{2}{2l + 1} - \frac{3}{4n} - \frac{j(j + 1) - l(l + 1) - \frac{3}{4}}{l(l + 1)(2l + 1)} \right) \right\}. \quad (2)$$

Dabei ist R_{∞} die Rydbergenergie und α die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante. Wird beachtet, dass j nur die Wertmöglichkeiten $l + \frac{1}{2}$ und $l - \frac{1}{2}$ hat, vereinfacht sich die Formel zu der Sommerfeldschen Feinstrukturformel:

$$E_{nj} = -R_{\infty} \left\{ \frac{(z - \sigma)^2}{n^2} + \alpha^2 \frac{(z - \sigma)^4}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right\}. \quad (3)$$

Bei der Anregung des Leuchtelektrons sind nur bestimmte Übergänge erlaubt. So muss sich bei jedem Übergang der Bahndrehimpuls ändern, es gibt also keinen Übergang, bei

dem sich nur der Spin ändert. Generell gilt immer $\Delta l = \pm 1$, da die Nebenquantenzahl sich ebenfalls nie um den Wert 2 oder mehr ändert. Übergänge mit $\Delta j = 0$ sind möglich, jedoch sehr unwahrscheinlich. Für Δn gibt es keine Beschränkungen, aber auch hier sind größere Sprünge unwahrscheinlicher. Einige mögliche Sprünge zwischen Energieniveaus sind in Abbildung 1 zu sehen. Energieniveaus mit gleichem Bahndrehimpuls

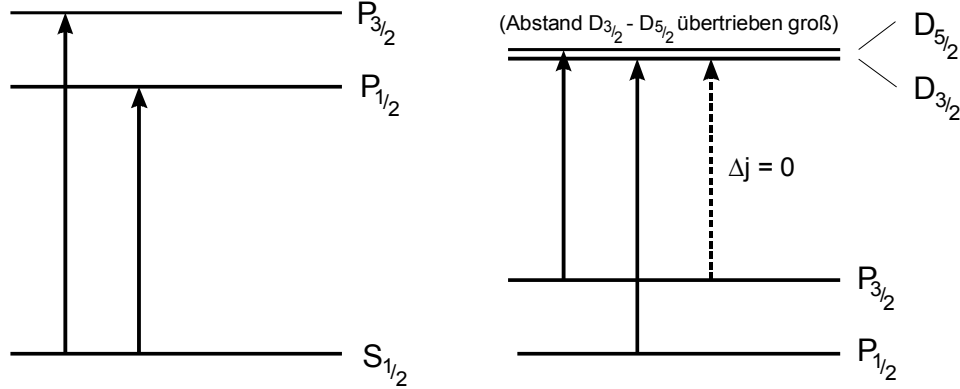


Abbildung 1: Beispiel Energieniveaus mit möglichen Übergängen[1, S. 161].

aber unterschiedlichem Spin liegen sehr nah bei einander. Dadurch zeigen sich in den Alkalispektren 2 sehr nah bei einander liegende Spektrallinien, welche Dublett genannt werden.

Die oben bereits eingeführte Abschirmungszahl kann noch weiter differenziert in eine Konstante der vollständigen Abschirmung σ_1 und eine Konstante der inneren Abschirmung σ_2 werden. Bei ersterer gelten alle Elektronen, während bei σ_2 nur die Elektronen der vollbesetzten Unterschalen gelten. Da bei den Alkali-Metallen immer nur ein Valenzelektron vorliegt, unterscheiden sich die beiden Abschirmungskonstanten nur geringfügig. Mit Hilfe der Energiedifferenz innerhalb eines Dubletts, lässt sich σ_2 bestimmen:

$$\Delta E_D = \frac{R_\infty \alpha^2}{n^3} (z - \sigma_2)^4 \frac{1}{l(l+1)} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_2 = z - \sqrt[4]{\Delta E_D \cdot l(l+1) \frac{n^3}{R_\infty \alpha^2}}. \quad (5)$$

Die Energiedifferenz ΔE_D bestimmt sich dabei mit Hilfe des Wellenlängenunterschieds $\Delta \lambda$ des Dubletts:

$$\Delta E_D = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right). \quad (6)$$

Die Bestimmung der Wellenlängen geschieht durch ein Aufspalten der einzelnen Spektrallinien am Beugungsgitter. Dadurch, dass die unterschiedlichen Wellenlängen bei unterschiedlichen Winkeln ϕ konstruktiv interferieren, kann durch den Winkel, bei dem ein Maximum auftritt, auf die Wellenlänge rückgeschlossen werden:

$$\sin \phi = k \frac{\lambda}{g}. \quad (7)$$

k gibt die Ordnung des Maximums an und g ist die Gitterkonstante.

Um den Wellenlängenunterschied der Dubletts zu bestimmen, ist eine genauere Messung nötig und es wird das genauere Okularmikrometer verwendet. Dieses wird, wie später in der Durchführung beschrieben, zunächst geeicht. $\Delta\lambda$ des Dubletts wird mit Hilfe des Verhältnis zum $\Delta\lambda$ der Eichung ermittelt:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \frac{\cos \bar{\phi}}{\cos \bar{\phi}_{1,2}} \frac{\Delta s}{\Delta t} (\lambda_1 - \lambda_2) \\ &= \cos \bar{\phi} \Delta s \cdot \Psi.\end{aligned}\quad (8)$$

$\bar{\phi}$ ist der gemittelte Winkel der Dublettlinien und Δs ist der mit dem Okularmikrometer ermittelte Abstand der Dublettlinien. $\bar{\phi}_{1,2}$ ist der gemittelte Winkel zwischen den beiden bei der Eichung benutzten Spektrallinien λ_1 und λ_2 , Δt ist der bei der Eichung ermittelte Abstand der Spektrallinien.

3 Fehlerrechnung

Im Folgenden werden alle Mittelwerte mit folgender Formel bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (9)$$

Der zugehörige Fehler des Mittelwertes berechnet sich mit

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (10)$$

Werden fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel benutzt, so wird der neue Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung angegeben:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (11)$$

Eventuelle Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$y = a \cdot x + b \quad (12a)$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (12b)$$

$$b = \frac{\overline{x^2 \bar{y}} - \bar{x} \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (12c)$$

Die Regression sowohl von Ausgleichsgeraden als auch von anderen Polynomen, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler, wird mit iPython 2.1.0 durchgeführt.

Fehler werden nach DIN auf eine geltende Ziffer gerundet. Sollte diese Zahl eine 1 sein, so wird, ebenfalls nach DIN, eine weitere Ziffer angegeben. Der zugehörige Wert, wird mit der gleichen Anzahl an Nachkommastellen wie der Fehler angegeben. Ausnahmen sind Werte, bei denen der Fehler größer als der eigentliche Wert ist, hier wird eine geltende Ziffer des Wertes angegeben. Im Falle einer 1 wird erneut auch die nächste Ziffer angegeben, der Fehler wird entsprechend gerundet.

4 Durchführung

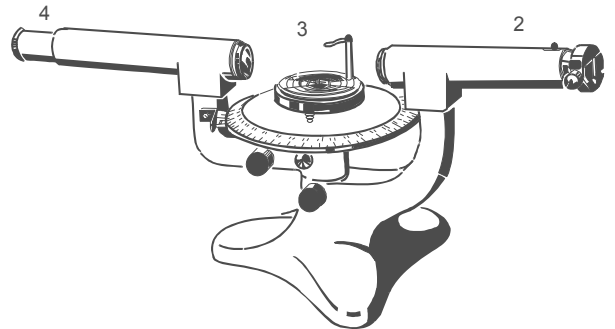


Abbildung 2: Verwendetes Spektrometer[1, S. 167].

Die zu untersuchende Lichtquelle wird an der in Figur 2 zu sehenden Position 1 vor dem Spalt positioniert. Das Licht wird im Kollimatorrohr (2) gebündelt und wird an Position 3 an dem aufgebauten Gitter gebeugt. Das Fernrohr (4) enthält das Okularmikrometer und kann so bewegt werden, dass die Maxima zu sehen sind. Der zugehörige Winkel kann an der Teilkreisplatte abgelesen werden.

4.1 Quecksilber-Lampe

Mit Hilfe der Quecksilber-Lampe wird die Apparatur geeicht. Dazu werden zunächst die Beugungswinkel ϕ der zu sehenden Spektrallinien ausgemessen. Des Weiteren wird

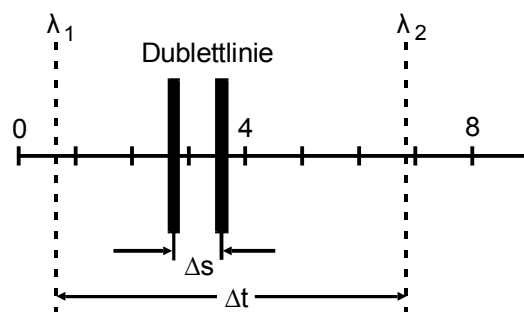


Abbildung 3: Schema des im Okularmikrometer zu sehenden Bild[1, S. 169].

das Fernrohr so eingestellt, dass mindestens 2 Spektrallinien am Okularmikrometer zu

sehen sind. Dann wird für möglichst viele Spektrallinienpaare ihr, wie in Abbildung 3 zu sehender, Abstand Δt mit dem Okularmikrometer gemessen.

4.2 Alkali-Metalle

Die Quecksilber-Lampe wird mit einer Alkali-Metall-Lampe ausgetauscht. In diesem Versuch wird Natrium, Kalium und Rubidium verwendet. Bei allen Lampen werden erneut sowohl die Beugungswinkel ϕ als auch die Abstände Δs einiger Dubletts gemessen. Bei Natrium wird ein gelbes und ein grünes Dublett ausgemessen, bei Kalium werden jeweils zwei benachbarte Dubletts im gelben und grünen Bereich vermessen und bei Rubidium wird das Dublett zwischen der 3. und 4. Spektrallinie betrachtet.

5 Auswertung

5.1 Quecksilber

Die gemessenen Beugungswinkel ϕ und zugehörigen, gegebenen Wellenlängen λ finden sich in Tabelle 1. Die Gitterkonstante g wird mit (7) und einer linearen Ausgleichsrech-

Tabelle 1: Beugungswinkel vom Quecksilber.

| $\lambda / 10^{-9} \text{ m}$ | ϕ / rad | $\sin(\phi)$ |
|-------------------------------|---------------------|--------------|
| 579,1 | 5,45 | -0,737 |
| 577,0 | 5,46 | -0,736 |
| 546,1 | 5,49 | -0,714 |
| 491,6 | 5,54 | -0,674 |
| 435,8 | 5,60 | -0,629 |
| 407,8 | 5,63 | -0,607 |
| 404,7 | 5,63 | -0,605 |

nung, in der $\sin(\phi)$ gegen λ aufgetragen wird, bestimmt:

$$\begin{aligned}
 k &= -1 \\
 a &= (-7,3 \pm 0,3) \cdot 10^5 \frac{1}{\text{m}} \\
 b &= -0,313 \pm 0,014 \\
 \Rightarrow g &= (1,38 \pm 0,05) \cdot 10^{-6} \text{ m}
 \end{aligned}$$

An der negativen Steigung ist zu erkennen, dass die $k = -1$ ten Maxima ausgemessen wurden. Damit die Formeln stimmen, werden die Winkel durch

$$\phi_{\text{neu}} = 2\pi - \phi_{\text{alt}} \quad (13)$$

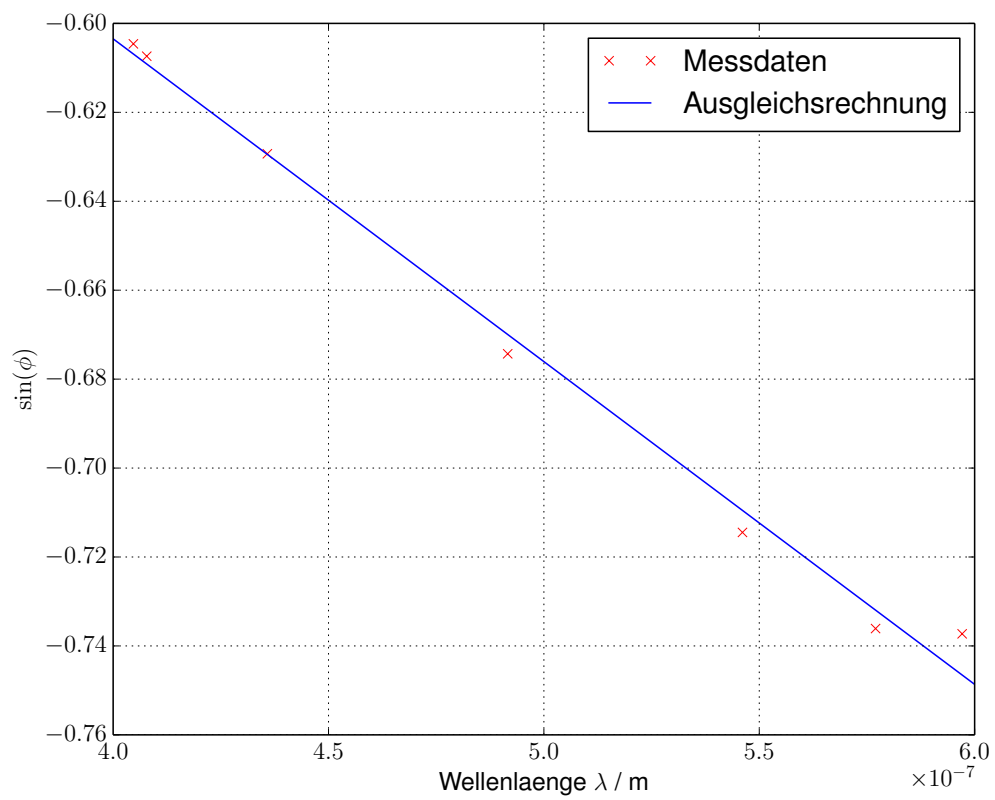


Abbildung 4: Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Gitterkonstanten.

auf die entsprechenden ersten Maxima umgeschrieben. Da zusätzlich die Teilkreisscheibe nicht richtig ausgerichtet werden konnte, wurden bisher alle Winkelgrößen nicht richtig angegeben. Es handelt sich dabei um einen systematischen Fehler $F = \text{const.}$ Da die Gitterkonstante jedoch über die Steigung berechnet wurde, hatte der Fehler noch keine Auswirkungen, wird jetzt jedoch für die späteren Berechnungen korrigiert. Dafür werden mit (7) rückwärts die Beugungswinkel der Spektrallinien berechnet, zu sehen in Tabelle 2. Der gemittelte Wert wird als systematischer Fehler angenommen:

Tabelle 2: Werte zur Bestimmung des systematischen Fehlers.

| $\lambda / 10^{-9} \text{ m}$ | ϕ / rad | F / rad |
|-------------------------------|---------------------|------------------|
| 579,1 | 0,829 | 0,395 |
| 577,0 | 0,827 | 0,395 |
| 546,1 | 0,796 | 0,388 |
| 491,6 | 0,681 | 0,359 |
| 435,8 | 0,653 | 0,352 |
| 407,8 | 0,649 | 0,351 |
| 404,7 | 0,740 | 0,375 |

$$F = (0,374 \pm 0,007) \text{ rad.}$$

Alle weiteren Winkel werden direkt abzüglich dieses Fehlers angegeben. Des Weiteren haben alle Winkel nach (11) den selben Fehler wie F . Dieser wird entsprechend nicht mehr mit aufgeführt.

Die Eichgröße Ψ ergibt sich durch:

$$\Psi = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\cos(\bar{\phi}_{1,2}) \Delta t}. \quad (14)$$

Die benötigten Daten befinden sich in den Tabellen 3 und 4. Bei den gemittelten Winkeln, wird dabei sowohl der Gaußfehler als auch der Fehler des Mittelwertes bestimmt. Nur der größere wird angegeben. Die vier Werte für Ψ werden erneut gemittelt:

Tabelle 3: Daten zur Bestimmung der Eichgröße I.

| ϕ_1 / rad | ϕ_2 / rad | $\bar{\phi}_{1,2}$ | $\cos(\bar{\phi}_{1,2})$ |
|-----------------------|-----------------------|--------------------|--------------------------|
| 0,455 | 0,454 | $0,454 \pm 0,005$ | $0,898 \pm 0,002$ |
| 0,454 | 0,422 | $0,438 \pm 0,016$ | $0,906 \pm 0,007$ |
| 0,307 | 0,279 | $0,293 \pm 0,014$ | $0,957 \pm 0,004$ |
| 0,279 | 0,276 | $0,277 \pm 0,005$ | $0,9618 \pm 0,0014$ |

$$\Psi = (2,866 \pm 0,007) \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot \text{Skt}^{-1}.$$

Tabelle 4: Daten zur Bestimmung der Eichgröße II.

| $\lambda_1 / 10^{-9} \text{ m}$ | $\lambda_2 / 10^{-9} \text{ m}$ | $\cos(\bar{\phi}_{1,2})$ | $\Delta t / \text{Skt}$ | $\Psi / 10^{-11} \text{ m} \cdot \text{Skt}^{-1}$ |
|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------|-------------------------|---|
| 579,1 | 577,0 | 0,898 \pm 0,002 | 78 | 2,996 \pm 0,008 |
| 577,0 | 546,1 | 0,906 \pm 0,007 | 1115 | 3,06 \pm 0,02 |
| 435,8 | 407,8 | 0,957 \pm 0,004 | 1042 | 2,807 \pm 0,012 |
| 407,8 | 404,7 | 0,9618 \pm 0,0014 | 124 | 2,599 \pm 0,004 |

5.2 Alkali-Metalle

Die Bestimmung der inneren Abschirmungszahl σ_2 erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst werden aus den gemessenen Beugungswinkeln und der oben bestimmten Gitterkonstanten g nach (7) die Wellenlängen der Spektrallinien bestimmt. Über (6) wird anschließend mit Hilfe der zuvor bestimmten Wellenlängen der Dublettlinien die Energiedifferenz der beteiligten Energieniveaus bestimmt. Die innere Abschirmungszahl bestimmt sich dann nach (5). Dabei ist in allen Fällen $l = 1$ und beim Natrium gilt $n = 3$, beim Kalium $n = 4$ und beim Rubidium $n = 5$. Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 5.

Tabelle 5: Bestimmung der inneren Abschirmungszahlen.

| ϕ / rad | λ / 10^{-9} m | ΔE_{D} / eV | σ_2 |
|--------------|-------------------------|----------------------------|----------------|
| Natrium | | | |
| 0,410 | 550 ± 20 | 0.009 ± 0.140 | 10.8 ± 0.7 |
| 0,412 | 550 ± 20 | | |
| 0,467 | 620 ± 30 | 0.007 ± 0.123 | 10.8 ± 0.7 |
| 0,468 | 620 ± 30 | | |
| Kalium | | | |
| 0,405 | 540 ± 20 | 0.009 ± 0.142 | 18.8 ± 0.8 |
| 0,406 | 540 ± 20 | | |
| 0,408 | 550 ± 20 | | |
| 0,415 | 560 ± 20 | 0.04 ± 0.14 | 18.7 ± 0.3 |
| 0,452 | 600 ± 30 | | |
| 0,455 | 610 ± 30 | 0.015 ± 0.126 | 18.8 ± 0.5 |
| 0,457 | 610 ± 30 | | |
| 0,461 | 610 ± 30 | 0.014 ± 0.125 | 18.8 ± 0.5 |
| Rubidium | | | |
| 0,499 | 660 ± 30 | 0.03 ± 0.11 | 36.7 ± 0.3 |
| 0,508 | 670 ± 30 | | |

6 Diskussion

Zu bemerken ist, dass, anders als in der Versuchsanleitung gefordert, die Spektrallinien nur bei einem Maximum ausgemessen werden konnten und nicht bei dem ersten Maximum und dem gespiegelten minus ersten Maximum. Zusätzlich gab es keine Möglichkeiten die Teilkreisscheibe auf die 0° zu kalibrieren. Diese beiden apparaturbedingten Einschränkungen sind für den, in der Auswertung beschriebenen, systematischen Fehler verantwortlich. Zusätzlich ist auf Grund der teilweise geringen Intensität der Spektrallinien ein genaues Ablesen nicht immer möglich gewesen.

Die sehr großen Fehler bei den Energiedifferenzen der Dublett-Komponenten sind typisch für Berechnungen mit Division durch sehr kleine, fehlerbehaftete Größen und bedeuten nicht direkt eine schlechte Messung. Insgesamt ist das Ergebnis der inneren Abschirmungszahlen im Erwartungsbereich.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 605, Die Spektren der Alkali-Atome*. 8. Apr. 2015. eprint: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V605.pdf>.