Prof. Dr. Dmitri Kuzmin
Dipl.-Technomath. Christopher Basting
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Abgabe der **Theorieaufgaben bis Donnerstag, 30.06.2016, 16:15 Uhr** (einzeln oder zu zweit) in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihre Übungsgruppe sowie Name und Matrikelnummer. Heften Sie mehrere Blätter zusammen.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 30.06.2016, 16:15 Uhr** digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung. Bei Abgabe zu zweit bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin nennen. Sie können die Aufgaben in MatLab bzw. Octave schreiben. Alternativ kann auch in C oder C++ abgegeben werden, allerdings ohne mögliche Hilfestellung. Es kann nur lauffähiger Code bewertet werden.
Bei Fragen zu Vorlesung und Übungen können Sie neben der Übungsgruppe auch das **Tutorium** nutzen, jeweils **Mittwochs von 13:15 bis 14:45** Uhr im CIP-Pool der Mathematik (M946).

Aufgabe 9.1 (Fixpunktsatz von Banach | 4 + 6 + 3 Punkte)

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

a) Begründen Sie (ohne die Nullstellen von h explizit zu berechnen), dass h im Intervall $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *genau eine* Nullstelle x^* hat.

b) Wandeln Sie das Problem in ein Fixpunktproblem um und begründen Sie die Konvergenz der Fixpunktiterationsfolge mittels Fixpunktsatz von Banach.
Hinweis: Zur Anwendung des Fixpunktsatzes von Banach muss gezeigt werden, dass die Fixpunktabbildung selbstabbildend und *eine Kontraktion ist.*

c) Schätzen Sie die Anzahl der Iterationsschritte N a priori ab, die man benötigt, damit $|x_N - x^*| \leq 10^{-3}$ gilt (mit Startwert $x_0 = 0$).

Aufgabe 9.2 (Jacobi-Verfahren, alte Klausuraufgabe | 2+2 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}}_{=:A} \mathbf{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{b}}$$

gegeben. Es soll mit einem iterativen Verfahren der Form

$$P\mathbf{x}_{n+1} = N\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$$

approximativ gelöst werden (wobei $A = P - N$).

a) Geben Sie die Matrizen P und N die dem Jacobi-Verfahren entsprechen explizit an.

b) Führen Sie die ersten zwei Schritte mit dem Startwert $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^\top$ aus.

Programmieraufgabe 9.1 (Fixpunktiteration | 4 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen die theoretischen Ergebnisse aus Aufgabe 9.1 numerisch evaluiert werden. Implementieren Sie dazu ein Skript `myFixpunktIter`, welches das Fixpunktproblem aus Aufgabe 9.1 **b)** löst. Verwenden Sie als Startwert $x_0 = 0$ und führen Sie N Schritte aus (mit N aus **c)**). Geben Sie x_i und $|x_i - x_{i-1}|$ für $i = 1, \ldots, N$ aus.