Prof. Dr. Dmitri Kuzmin
Dipl.-Technomath. Christopher Basting
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Sommersemester 2016
Übungsblatt 5

Abgabe der **Theorieaufgaben bis Donnerstag, 02.06.2016, 16:15 Uhr** (einzeln oder zu zweit) in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihre Übungsgruppe sowie Name und Matrikelnummer. Heften Sie mehrere Blätter zusammen.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 02.06.2016, 16:15 Uhr** digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung. Bei Abgabe zu zweit bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin nennen. Sie können die Aufgaben in MatLab bzw. Octave schreiben. Alternativ kann auch in C oder C++ abgegeben werden, allerdings ohne mögliche Hilfestellung. Es kann nur lauffähiger Code bewertet werden.
Bei Fragen zu Vorlesung und Übungen können Sie neben der Übungsgruppe auch das **Tutorium** nutzen, jeweils **Mittwochs von 13:15 bis 14:45** Uhr im CIP-Pool der Mathematik (M946).

Aufgabe 5.1 (Alte Klausuraufgabe | 2+3 Punkte)

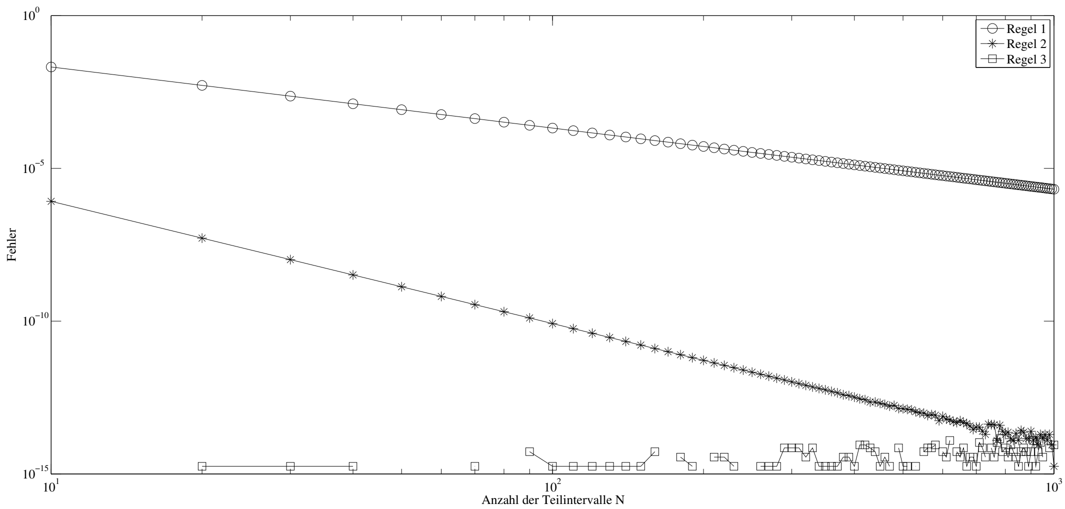
a) Formulieren Sie die Simpson-Regel zur numerischen Approximation des Integrals

$$\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x.$$

b) Betrachten Sie unten abgebildete Grafik. Sie zeigt den Fehler dreier verschiedener numerischer Verfahren zur Integration eines Polynoms vierten Grades im Intervall $[0, 1]$. Auf der horizontalen Achse ist die Anzahl an Teilintervallen verzeichnet, auf der vertikalen der Fehler gegenüber der exakten Lösung (in Maschinenzahldarstellung gerundet). Die Skala beider Achsen ist logarithmisch. Ordnen Sie den drei Verläufen jeweils eine der folgenden (summierten) Quadratur-Regeln

- summierte Trapez-Regel,
- summierte Simpson-Regel,
- summierte drei-Punkt Gauß-Quadratur,

zu und begründen Sie Ihre Wahl.



Aufgabe 5.2 (Alte Klausuraufgabe | 1+2 Punkte)

Für $h \ll r$ ergibt sich das Volumen einer dünnen Kugelschale aus

$$V = 4\pi \frac{(r+h)^3 - r^3}{3}.$$

a) Warum ist die numerische Auswertung dieser Formel für kleine h problematisch?

b) Was kann man machen, damit für kleine Werte von h die numerische Auswertung dieser Formel genauer wird?

Aufgabe 5.3 (Alte Klausuraufgabe | 3+3 Punkte)

Es soll die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) := (x-4)(x+4)$$

betrachtet werden.

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom vom Grade 1 zu h und den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 4$. Geben Sie die Koeffizienten des Polynoms bezüglich der Lagrange-Basis an.

b) Approximieren Sie $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$ mit der summierten Trapezregel. Unterteilen Sie dazu das Intervall $[0,1]$ in zwei Teilintervalle. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Resultat.

Programmieraufgabe 5.1 (Rückwärts- und Vorwärtssubstitution | 6 + 3 Punkte)

Schreiben Sie die folgenden Routinen ohne dabei entsprechende vorimplementierte Funktionen in Matlab zu nutzen (wie etwa `vander` oder den Backslash-Löser \).

a) `function x = direct_backward_solve(U,z)`
Diese Funktion soll das Gleichungssystem $Ux = z$ lösen, wobei U eine rechte obere Dreiecksmatrix ist.

`function z = direct_forward_solve(L,b)`
Diese Funktion soll das Gleichungssystem $Lz = b$ lösen, wobei L eine linke, untere Dreiecksmatrix ist.

b) `function V = Vandermonde(v)`
Die Routine soll zu einem gegebenen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ die Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{bmatrix} v_1^{n-1} & \cdots & v_1^2 & v_1 & 1 \\ v_2^{n-1} & \cdots & v_2^2 & v_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^{n-1} & \cdots & v_n^2 & v_n & 1 \end{bmatrix}$$

berechnen und dabei höchstens eine Schleife verwenden. Überprüfen Sie ob Ihre Implementierung mit der Matlab-Implementierung `vander(v)` übereinstimmt.