Abgabe der **Theorieaufgaben bis Donnerstag, 14.07.2016, 16:15 Uhr** (einzeln oder zu zweit) in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihre Übungsgruppe sowie Name und Matrikelnummer. Heften Sie mehrere Blätter zusammen.
Bei Fragen zu Vorlesung und Übungen können Sie neben der Übungsgruppe auch das **Tutorium** nutzen, jeweils **Mittwochs von 13:15 bis 14:45** Uhr im CIP-Pool der Mathematik (M946).

Aufgabe 11.1 (Alte Klausuraufgabe | 2 Bonuspunkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Kann man das Newton-Verfahren als Fixpunktiteration betrachten?

b) “Für jede nicht-singuläre, quadratische Matrix A existiert eine LR-Zerlegung der Form $A = LR$ (L linke untere Dreiecksmatrix, R rechte obere Dreiecksmatrix).” Ist diese Behauptung wahr oder falsch?

c) Es sollen die Daten $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ interpoliert werden. Welche Darstellung des Interpolationspolynoms ist bei einer möglichen, späteren Hinzunahme weiterer Datenpaare sinnvoll?

d) Es soll das Integral $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x$ numerisch approximiert werden ($a, b \in \mathbb{R}$). “Die summierte Trapezregel ist stets exakt, wenn p ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.” Ist die Behauptung wahr oder falsch?

Aufgabe 11.2 (Alte Klausuraufgabe | 2 Bonuspunkte)

Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{und der Vektor} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix},$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Hilfe der gegebenen LR-Zerlegung. *Hinweis: Alle anderen Lösungswege geben 0 Punkte.*

Aufgabe 11.3 (Alte Klausuraufgabe | 2 Bonuspunkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^3 - x.$$

Gesucht sind die Extrema von f.

a) Berechnen Sie die Extrema von f.

b) Formulieren Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Berechnung eines Extremums von f. *Hinweis: Wenden Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle der ersten Ableitung von f an.*

c) Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x = 1$ durch.

Aufgabe 11.4 (Alte Klausuraufgabe | 2 Bonuspunkte)

Betrachten Sie die Datenpaare (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, 3$, gegeben durch

i	0	1	2	3
x_i	-2	0	1	3
y_i	2	1	2	1

Es sei p_k, $k \in \{1, 2, 3\}$, das Polynom, welches die Daten (x_i, y_i) für $i = 0, \dots, k$ interpoliert. Berechnen Sie p_1, p_2 und p_3 und geben Sie die Polynome jeweils bezüglich der NEWTON-Basis an.

Aufgabe 11.5 (Alte Klausuraufgabe | 2 Bonuspunkte)

Es soll die Nullstelle einer Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Intervall $[-1, 1]$ berechnet werden. Es sei g stetig und $g(-1) < 0$ sowie $g(1) > 0$.

a) Schlagen Sie ein geeignetes numerisches Verfahren zur Approximation der Nullstelle vor und formulieren Sie die Iterationsvorschrift.

b) Warum ist hier das Newton-Verfahren nicht ohne weiteres Wissen über die Funktion g anwendbar?

Aufgabe 11.6 (Alte Klausuraufgabe | 2 Bonuspunkte)

Berechnen Sie die erste Iteriation des Gradientenverfahrens zur Minimierung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Verwenden Sie als Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^\top$.