Abgabe der **Theorieaufgaben bis Donnerstag, 16.06.2016, 16:15 Uhr** (einzeln oder zu zweit) in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihre Übungsgruppe sowie Name und Matrikelnummer. Heften Sie mehrere Blätter zusammen.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 16.06.2016, 16:15 Uhr** digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung. Bei Abgabe zu zweit bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin nennen. Sie können die Aufgaben in MatLab bzw. Octave schreiben. Alternativ kann auch in C oder C++ abgegeben werden, allerdings ohne mögliche Hilfestellung. Es kann nur lauffähiger Code bewertet werden.
Bei Fragen zu Vorlesung und Übungen können Sie neben der Übungsgruppe auch das **Tutorium** nutzen, jeweils **Mittwochs von 13:15 bis 14:45** Uhr im CIP-Pool der Mathematik (M946).

In allen folgenden Aufgaben: Geben Sie in jedem Gauss'schen Eliminationsschritt alle durchgeführten Zeilenumformungen explizit an (z. B. "$-2(\mathrm{II}); \ \cdot(-7)$" für: "ziehe zwei mal Zeile (II) ab, multipliziere anschließend mit -7.").

Aufgabe 7.1 (Pivotisierung | 3 + 3 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-3} & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mit dem Eliminationsverfahren von Gauß (ohne Zeilen- oder Spaltenverstauschungen) eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ unter Verwendung einer dreistelligen Gleitpunktarithmetik.

b) Die auf drei Stellen nach dem Komma gerundete Lösung lautet $x = A^{-1}b \approx (-1.996, 3.998)^\top$. Berechnen Sie eine genauere Lösung in dreistelliger Gleitpunktarithmetik mittels Pivotisierung und vergleichen Sie mit Teil a).

Aufgabe 7.2 (Pivotisierung | 6 Punkte)

Gegeben seien die Matrix und der Vektor

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe des Gauss'schen Eliminationsverfahrens <u>mit</u> Spaltenpivotisierung. Bestimmen Sie dabei die Matrizen P und L aus der LR-Zerlegung $PA = LR$.

Prof. Dr. Dmitri Kuzmin
Dipl.-Technomath. Christopher Basting

Aufgabe 7.3 (Thomas-Algorithmus | 5 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Thomas-Algorithmus (Gauss-Elimination für Tridiagonalmatrizen) die LR-Zerlegung der Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Programmieraufgabe 7.1 (Bisektionsverfahren | 4 + 2 + 1 Punkte)

Zur Approximation einer Nullstelle einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll das Bisektionsverfahren (Intervallschachtelungsverfahren) getestet werden. Gehen Sie davon aus, dass die Funktion f als `function_handle` `f` vorliegt. Das Verfahren soll abbrechen, sobald eine Genauigkeit von

$$|x_k - x_{k-1}| < 10^{-12}$$

erreicht wurde.

a) Schreiben Sie eine Routine `[x,e,v]=mybisect(f,x00,x0)`, welche mit Hilfe des *Bisektionsverfahrens* (Intervallschachtelungsverfahrens) eine Nullstelle von f berechnet. Die Routine soll jeweils einen Vektor $\mathbf{x}$ der Iterierten x_k, einen Vektor $\mathbf{e}$ der Fehler $|x_k - x_{k-1}|$ und einen Vektor $\mathbf{v}$ der Funktionswerte $f(x_k)$ zurückgeben.

b) Erstellen Sie nun in einem Skript `myBisectTest` einen `function_handle` `f` für die Funktion

$$f(x) = \cos^2(2x) - x^2 ,$$

sowie `df` für die Ableitung von f. Testen Sie damit die Routine aus **a)**: Wählen Sie als Startwerte $x_0 = 0.75$ und $x_{00} = 0$ und erstellen Sie einen Plot `PA7.1.fig` mit dem absoluten Fehler $|x_k - x_{k-1}|$ (y-Achste) gegen die Anzahl der Iterationsschritte (x-Achse). Die y-Achse soll logarithmisch skaliert werden, verwenden Sie dazu den Befehl `semilogy`.

c) Stimmt die im Plot aus Teilaufgabe **b)** beobachtbare numerische Konvergenzrate mit der aus der Theorie zu erwartenden Konvergenzgeschwindigkeit überein?