Prof. Dr. Dmitri Kuzmin
Dipl.-Technomath. Christopher Basting
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Abgabe der **Theorieaufgaben bis Donnerstag, 23.06.2016, 16:15 Uhr** (einzeln oder zu zweit) in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihre Übungsgruppe sowie Name und Matrikelnummer. Heften Sie mehrere Blätter zusammen.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 23.06.2016, 16:15 Uhr** digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung. Bei Abgabe zu zweit bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin nennen. Sie können die Aufgaben in MatLab bzw. Octave schreiben. Alternativ kann auch in C oder C++ abgegeben werden, allerdings ohne mögliche Hilfestellung. Es kann nur lauffähiger Code bewertet werden.
Bei Fragen zu Vorlesung und Übungen können Sie neben der Übungsgruppe auch das **Tutorium** nutzen, jeweils **Mittwochs von 13:15 bis 14:45** Uhr im CIP-Pool der Mathematik (M946).

Aufgabe 8.1 (Newton-Verfahren | 2+2+2+2 Punkte)

a) Ermitteln Sie eine Nullstelle der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4 - 4x^2 + 4$ durch Anwendung des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 1$. Berechnen Sie die ersten 6 Iterierten auf mind. 8 Stellen genau.

b) Berechnen Sie nun die Nullstellen von f analytisch (d. h. exakt).

c) Vergleichen Sie die Geschwindigkeit mit der des Newton-Verfahrens für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^4 - 5x^2 + 6$ bei gleichem Startwert.

d) Begründen Sie die unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren aus **a)** und **c)**.
Hinweis: siehe Aufgabe 8.2.

Aufgabe 8.2 (Newton-Verfahren und mehrfache Nullstellen | 2+4+3 Punkte)

Die Konvergenz des Newton-Verfahrens kann bei mehrfachen Nullstellen durch folgenden Ansatz verbessert werden:

$$\Phi(x^{(k)}) := x^{(k)} - \gamma \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})},\ \gamma \in \mathbb{R}$$

Wir betrachten den Fall einer doppelten Nullstelle x^*, also $f(x^*) = f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) \neq 0$. Im Folgenden kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass $f'(x) \neq 0$ in einer Umgebung U von x^* und dass f zweimal stetig differenzierbar ist.

a) Wie ist $\Phi(x^*)$ zu setzen, damit Φ stetig ist?

b) Bestimmen Sie $\Phi'(x)$ für $x \in U$, sowie $\Phi'(x^*)$.

c) Berechnen Sie $\lim_{x\to x^*} \Phi'(x)$ (l'Hôpital). Wie muss also γ gewählt sein, so dass das Verfahren lokal quadratisch gegen x^* konvergieren kann?
Hinweis: Nutzen Sie Satz 5.2 im Skript von Rolf Rannacher.

Programmieraufgabe 8.1 (Newton-Verfahren | 4 + 2 + 1 Punkte)

Zur Approximation einer Nullstelle einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll das Newton-Vverfahren getestet werden. Gehen Sie davon aus, dass die Funktion f sowie deren Ableitung f' als `function_handle` `f` bzw. `df` vorliegen. Das Verfahren soll abbrechen, sobald eine Genauigkeit von

$$|x_k - x_{k-1}| < 10^{-12}$$

erreicht wurde.

a) Schreiben Sie eine Funktion `[x,e,v]=myNewton(f,df,x0)`, welche mit Hilfe des *Newton-Verfahrens* eine Nullstelle von f berechnet. Das Verfahren soll spätestens nach 50 Iterationen abbrechen und jeweils einen Vektor $\mathbf{x}$ der Iterierten x_k, einen Vektor $\mathbf{e}$ der Fehler $|x_k - x_{k-1}|$ und einen Vektor $\mathbf{v}$ der Funktionswerte $f(x_k)$ zurückgeben.

b) Erstellen Sie nun einen `function_handle` `f` für die Funktion

$$f(x) = \cos^2(2x) - x^2 \ ,$$

sowie `df` für deren Ableitung. Testen Sie nun die Funktion aus **a)**. Wählen Sie dafür als Startwert $x_0 = 0.75$ und erstellen Sie einen Plot `PA8.1.fig` mit dem absoluten Fehler $|x_k - x_{k-1}|$ (y-Achste) gegen die Anzahl der Iterationsschritte (x-Achse). Die y-Achse soll logarithmisch skaliert werden, verwenden Sie dazu den Befehl `semilogy`. Der Plot soll auch den Fehlerverlauf des Bisektionsverfahren aus Programmieraufgabe 7.1 enthalten.

c) Stimmt die im Plot aus Teilaufgabe **b)** beobachtbare numerische Konvergenzrate mit der aus der Theorie zu erwartenden Konvergenzgeschwindigkeit überein?