Prof. Dr. Dmitri Kuzmin
Dipl.-Technomath. Christopher Basting
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Sommersemester 2016
Präsenzübung 25./26. April

Präsenzaufgabe 1

Die Kreiszahl π kann bestimmt werden durch

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot 2^{n-1} s_n$$

mit $s_1 := 1$ und $s_{n+1} := \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) s_n ist gerade die Länge eines regelmäßigen $3 \cdot 2^n$-Ecks, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist. Verifizieren Sie die Gültigkeit obiger Formel.

b) Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto x(x) := \sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}$. Geben Sie die relative Kondition des Problems (f, x) an, $f(x)$ für kleine $x \neq 0$ zu berechnen. Verwenden Sie $\|\cdot\| = |\cdot|$ (den Betrag als Norm).

Präsenzaufgabe 2

a) Gegeben sei eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x + y \\ e^{x/y} \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie deren Konditionszahlen k_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$. Wann ist das Problem gut konditioniert?

b) Untersuchen Sie die Konditionierung der folgenden Rechenoperationen:

1. Division: $f(x) = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$, speziell $f(y) = \frac{1}{y}$,
2. Potenzbildung: $f(x, y) = x^y$, $x > 0$, speziell $f(x) = \sqrt{x}$.

Wie groß ist der maximale relative Fehler im Ergebnis, ausgedrück in der Form $\alpha\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2)$, wenn die relativen Fehler in den Argumenten durch ε beschränkt sind?