

portada.pdf

Índice general

Preámbulos y Parametrizaciones

Integrales impropias 1

Integración respecto a un parámetro 2

Parametrizaciones clásicas 7

Coordenadas Polares 10

Coordenadas Cilíndricas 14

Coordenadas Cónicas 15

Integrales de Línea

Integrales de Area

Sumas de Riemann 19

Ejercicios 21

Integrales iteradas 23

Integrales por cambio de variable 23

Integrales de Volumen

Evaluaciones

1er Parcial: Semana 4 (30 %)

2do Parcial: Semana 8 (35 %)

3er Parcial: Semana 12 (35 %)

CAPÍTULO 0

Preámbulos y Parametrizaciones

Este capítulo ‘cero’ consiste de nociones básicas que son necesarias para los capítulos siguientes.

§0.1 Integrales impropias

0.1.1 Definición (convergencia). Sean f y g funciones reales y continuas en los intervalos $[a, \infty)$ y $[a, b] \setminus c$ respectivamente. Además, $g(x) \rightarrow \pm\infty$ cuando $x \rightarrow c$. Entonces

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{y} \quad (1)$$

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow c^-} \int_a^\beta g(x) dx + \lim_{\alpha \rightarrow c^+} \int_\alpha^b g(x) dx. \quad (2)$$

En caso de que los límites anteriores sean distintos de $\pm\infty$ diremos que las funciones convergen. En caso contrario diremos que divergen.

La condición, en la definición anterior, de que los límites no sean infinitos es de especial importancia en la ecuación (2). De no pedir esta condición obtendríamos expresiones sin sentido como $a = \infty - \infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

El siguiente teorema, que tiene una contraparte directa cuando se trata de series infinitas, permitirá determinar si una integral converge o diverge sin la necesidad de calcular dicha integral. Esto es especialmente útil con funciones que no poseen antiderivadas, como e^{x^2} .

0.1.1 Teorema (de comparación). Sean f y g dos funciones reales tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo x en el intervalo $[a, \infty)$ y, además, continuas en el intervalo abierto (a, ∞) . Entonces

- I. Si $\int_a^\infty g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x) dx$ también converge.
- II. Si $\int_a^\infty f(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty g(x) dx$ también diverge.

Ahora, un ejemplo del teorema de comparación que involucra una función importante en probabilidades: la campana de Gauß (dada por e^{-x^2}).

0.1.1 Ejemplo. Queremos determinar la convergencia de

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Compararemos con la función e^{-x} de la cual conocemos bien su comportamiento. Primero notemos que, para todo $x \geq 1$, $x^2 \geq x$ implica $-x^2 \leq -x$. De la última desigualdad se sigue claramente que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, y ya tenemos acotada la función problemática con una función que conocemos bien. Ahora, como la convergencia está determinada por la ‘cola’ de la forma $[a, \infty)$, podemos considerar la convergencia de e^{-x^2} tomando el intervalo $[1, \infty)$. Queda entonces por determinar la convergencia de e^{-x} y luego, por el teorema de comparación, tendremos que e^{-x^2} converge.

La convergencia de e^{-x} es sencilla:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-x} \Big|_1^b \\ &= e^{-1} - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} \\ &= e^{-1}. \end{aligned}$$

El argumento anterior puede verse gráficamente en la figura 1.

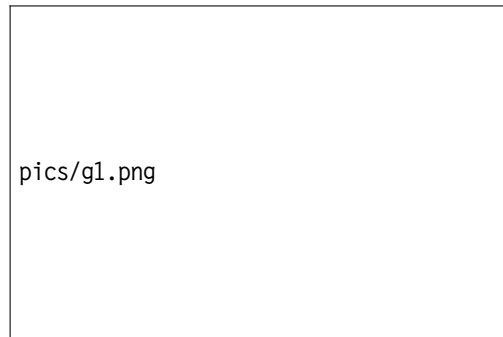


Figura 1: Comparación de e^{-x^2} (línea continua) con e^{-x} (segmentos de línea).

§0.2 Integración respecto a un parámetro

La continuidad uniforme será fundamental para la *integración respecto a un parámetro*, que es una herramienta útil en el cálculo de integrales complicadas o irresolubles.

0.2.1 Definición (continuidad uniforme). Si la función $f: I \subset$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, decimos que es uniformemente continua en un $x_0 \in I$, si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo δ se cumple que

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

es decir, que ϵ no depende de x .

0.2.1 Ejemplo. Queremos ver si la función $f(x) = e^{-x}$ es uniformemente continua en el intervalo $[0, \infty)$.

Por el teorema del valor medio¹ tenemos

$$|e^x - e^{-x_0}| = |e^{-x_1}(x - x_0)| = e^{-x_1}|(x - x_0)|.$$

Como $x_1 \in [x_0, x] \subset [0, \infty)$ y e^{-x} es estrictamente decreciente en $[0, \infty)$, se sigue que $e^{-x_1} \leq e^0 = 1$ y sustituyendo esto en la ecuación anterior

$$|e^x - e^{-x_0}| \leq 1|x - x_0| < \delta.$$

Por lo tanto basta con tomar $\epsilon = 1$ para tener la continuidad uniforme.

Lo que ocurre gráficamente es que e^{-x} esta acotada superior e inferiormente como lo muestra la figura 2



Figura 2: Gráfico de e^{-x} (línea continua) con su asíntota horizontal.

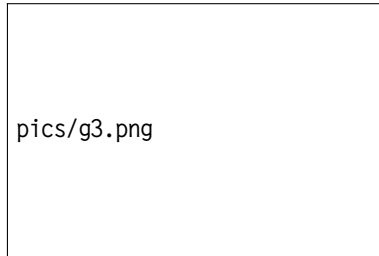


Figura 3: Gráfico de $\frac{1}{1+x^2}$ (línea continua) con su asíntota horizontal.

0.2.1 Contraejemplo. Sea $f(x) = 1/x$ definida en el intervalo $(0, 1)$. Esta función f es continua, sin embargo, no es uniformemente continua. Veamos que

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x - x_0}{xx_0} \right|.$$

Si $|x| < 1/2$ entonces $1/x > 2$, y esto ocurre también para x_0 : $1/x_0 > 2$, de donde

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{1}{xx_0}|x - x_0| > 4|x - x_0| \geq \epsilon$$

por lo que no existe un único ϵ que cumpla con la definición 0.2.1.

¹explicar teorema

0.2.2 Ejemplo. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Teniendo en cuenta el gráfico de la función, es decir, que esta acotada; ocurrirá lo mismo que en el ejemplo 0.2.1.

A continuación está el teorema central de esta clase:

0.2.1 Teorema (integración respecto a un parámetro). Sea f una función, que va del subconjunto $I_x \times I_a$ de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} , definida como $f(x, a)$ para $x \in I_x$ y un a fijo en I_a . Si f es uniformemente continua en I_x , entonces

$$\frac{d}{da} \int_u^v f(x, a) dx = \int_u^v \frac{\partial}{\partial a} f(x, a) dx \quad \text{y} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \int_{u(a)}^{v(a)} f(x, a) dx &= \int_{u(a)}^{v(a)} \frac{\partial}{\partial a} f(x, a) dx \\ &\quad + f(v(a), a)v'(a) - f(u(a), a)u'(a). \end{aligned} \quad (4)$$

El siguiente es un ejemplo, un tanto complicado, de como usar la técnica del teorema anterior.

0.2.3 Ejemplo. Calcular, usando integración respecto a un parámetro,

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)} dx.$$

Hagamos

$$g(a) = \int_0^\infty \frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)} dx = \int_0^\infty f(x, a) dx$$

donde $f(x, a)$ cumple con:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(ax)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+(ax)^2} = \frac{a}{1+0} = a \\ \bullet \quad \left| \frac{1}{1+x^2} \right| &= \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

por lo que $f(x, a)$ es el producto de una función acotada por una función uniformemente continua, lo que implica que $f(x, a)$ es uniformemente continua. Se cumplen entonces las hipótesis del

teorema y podemos aplicarlo:

$$\begin{aligned}
 g'(a) &= \frac{d}{da} \int_0^\infty \frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)} dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} \frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)} dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+x^2)(1+a^2x^2)} dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+a^2x^2)} dx.
 \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\cancel{(1+x^2)(1+a^2x^2)}} &= \frac{B}{1+x^2} + \frac{D}{1+a^2x^2} \\
 &= \frac{B(1+a^2x^2) + D(1+x^2)}{\cancel{(1+x^2)(1+a^2x^2)}}.
 \end{aligned}$$

De donde se sigue que $1 = (B + D) + (a^2B + D)x^2$ y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B + D = 1 \\ a^2B + D = 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$B = \frac{1}{1-a^2} \quad \text{y} \quad D = \frac{-a^2}{1+a^2x^2}.$$

Volviendo a $g'(a)$, tenemos

$$\begin{aligned}
 g'(a) &= \frac{1}{1-a^2} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} - \frac{a}{1-a^2} \int_0^\infty \frac{a dx}{1+a^2x^2} \\
 &= \frac{1}{1-a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(x) \Big|_0^b \\
 &\quad - \frac{a}{1-a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(ax) \Big|_0^b \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{1-a^2} - \frac{\pi}{2} \frac{a}{1-a^2} \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+a}.
 \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
 g(a) &= \int_0^\infty \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t} dt \\
 &= \frac{\pi}{2} \log(1+t) \Big|_{t=0}^{t=a} \\
 &= \frac{\pi}{2} \log(1+a).
 \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo se calcula la integral de la campana de Gauß.

0.2.4 Ejemplo. Sean

$$f(x) = \left(\int_0^x -e^{-t^2} dt \right)^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

I. Demostrar que $f(x) + g(x) = \text{cte.}$

II. Usa la parte anterior para calcular $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Veamos cada parte.

I. Empecemos calculando la derivada de f :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \left(2 \int_0^x -e^{-t^2} dt \right) \left(\frac{d}{dx} \int_0^x -e^{-t^2} dt \right) \\ &= 2 \int_0^x e^{-t^2} e^{-x^2} dt \\ &= 2 \int_0^x e^{-(t^2+x^2)} dt. \end{aligned}$$

Ahora, para calcular la derivada de g , debemos ver primero que es uniformemente continua. Hagamos

$$g(x) = \int_0^1 \phi_x(t) dt.$$

Como el intervalo $I_t = [0, 1]$ es cerrado y acotado y $\phi_x(t)$ es continua en la variable t , por el teorema de Bolzano $\phi_x(t)$ alcanza máximos y mínimos y entonces es uniformemente continua. Podemos usar derivación paramétrica:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 -2x(1+t^2) \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \\ &= -2 \int_0^1 e^{-x^2+(xt)^2} dt. \end{aligned}$$

Necesitamos que f' y g' se parezcan más para poder hacer su suma cero. Comencemos haciendo

$$\frac{df}{dx} = 2 \int_0^x e^{-(u^2+t^2)} du,$$

y luego el cambio $u = xt$ en g' para obtener

$$\frac{dg}{dx} = -2 \int_0^x e^{-(u^2+t^2)} du = -\frac{df}{dx}$$

y queda demostrado que $f + g$ es constante. Para determinar la constante hagamos

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

y luego $h(x) = h(x_0)$ para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$ elegido convenientemente. Elijamos $x_0 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \text{ctte} &= h(0) \\ &= \left(\int_0^0 -e^{-t^2} dt \right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-0^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

II. Se puede demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_x(t) dt = \int_a^b \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_x(t) dt.$$

Pero

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = \frac{0}{1+t^2} = 0.$$

Tomando límites en la respuesta de la parte anterior

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_0^x -e^{-t^2} dt \right)^2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$$

de donde se sigue que

$$\left(\int_0^\infty -e^{-t^2} dt \right)^2 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

y finalmente, tomando raíces cuadradas,

$$\int_0^\infty -e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

§0.3 Parametrizaciones clásicas

0.3.1 Definición (parametrización). Sean Ω y Λ dos objetos geométricos, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ ($1 \leq n, m \leq 3$) (En general Λ y Ω pueden ser: puntos, líneas, superficies planas o curvilíneas, volúmenes sólidos). Una parametrización es una aplicación $\Phi: \Omega \rightarrow \Lambda$ cuya acción no conviene estudiar a partir de $\mathbf{v} = \Phi(\mathbf{u})$ y su gráfico \mathcal{G}_Φ , sino que conviene estudiarla por el mapeo de la figura ??.

El cual se define como

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} v_1 = \phi_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ v_2 = \phi_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots \\ v_m = \phi_m(u_1, u_2, \dots, u_n). \end{cases}$$

Nos interesan principalmente cinco casos concretos:

caso 1-2 curvas planas. Tomemos $\Phi: \Omega \subset \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_{xy}^2$. Entonces las coordenadas x, y de un vector se escriben con respecto a Φ y a Φ' , de la siguiente manera

$$\begin{cases} x = \phi_1(t) \\ y = \phi_2(t) \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \phi'_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = \phi'_2(t) \end{cases}$$

y el mapeo correspondiente esta dado en la figura ??.

caso 1-3 curvas en el espacio. Tomemos $\Phi: \Omega \subset \mathbb{R}_t^1 \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3$. Entonces las coordenadas x, y, z de un vector se escriben con respecto a Φ y a Φ' de la siguiente manera

$$\begin{cases} x = \phi_1(t) \\ y = \phi_2(t) \\ z = \phi_3(t) \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \phi'_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = \phi'_2(t) \\ \frac{dz}{dt} = \phi'_3(t) \end{cases}$$

y el mapeo correspondiente es el de la figura ??.

caso 2-2 regiones planas. Tomemos $\Phi: \Omega \subset \mathbb{R}_{uv}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xy}^2$. Entonces las coordenadas x, y de un vector se escriben con respecto a Φ de la siguiente manera

$$\begin{cases} x = \phi_1(u, v) \\ y = \phi_2(u, v) \end{cases}$$

y esta representado por el mapeo de la figura ??.

Es aceptable que aproximemos el área del rectángulo $\Phi(A)$ como el generado por los vectores

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \quad y \quad \mathbf{b} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

debido a que:

$$\begin{aligned} (\Phi(A)) &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \\ &= \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| \\ &= \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} \right| \\ &= \left| \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(u, v)} \right| \\ &= \text{módulo del Jacobiano de } \Phi. \end{aligned}$$

Por todo lo anterior esta Φ envía regiones planas en regiones planas.

caso 2-3 superficies curvas. Tomemos $\Phi: \Omega \subset \mathbb{R}_{uv}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3$. Entonces las coordenadas x, y, z de un vector se escriben con respecto a Φ de la siguiente manera

$$\begin{cases} x = \phi_1(u, v) \\ y = \phi_2(u, v) \\ z = \phi_3(u, v) \end{cases}$$

Y esta representado por el mapeo de la figura ??

Por un razonamiento parecido al del caso anterior podemos aproximar el área de $\Phi(A)$ por el valor absoluto del siguiente producto exterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial(\phi_2, \phi_3)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(\phi_3, \phi_1)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(u, v)} \mathbf{k} \\ &= \text{producto fundamental de } \Phi. \end{aligned}$$

Y su norma es

$$\sqrt{\left| \frac{\partial(\phi_2, \phi_3)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(\phi_3, \phi_1)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(u, v)} \right|^2}.$$

Por lo tanto Φ convierte superficies planas en superficies curvas del espacio.

caso 3-3 sólidos. Tomemos $\Phi: \Omega \subset \mathbb{R}_{uvw}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3$. Entonces las coordenadas x, y, z de un vector se escriben con respecto a Φ de la siguiente manera

$$\begin{cases} x = \phi_1(u, v, w) \\ y = \phi_2(u, v, w) \\ z = \phi_3(u, v, w) \end{cases}$$

El volumen del paralelepipedo $\Phi(A)$ se puede aproximar mediante el valor absoluto del siguiente producto triple:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Como en el caso anterior calculamos el determinante de la derecha solo hace falta hacer el producto interno entre los dos vectores para

obtener:

$$\frac{\partial(\phi_2, \phi_3)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\phi_1, \phi_3)}{\partial(u, v)} \frac{\partial\phi_2}{\partial w} + \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(u, v)} \frac{\partial\phi_3}{\partial w},$$

que al estudiar cuidadosamente, es lo mismo que el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial v} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} & \frac{\partial\phi_3}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial w} & \frac{\partial\phi_2}{\partial w} & \frac{\partial\phi_3}{\partial w} \end{vmatrix}$$

el cual es el Jacobiano de Φ , al igual que en el caso (2-2).

Entonces el volumen del paralelepipedo $\Phi(A)$ queda aproximado por

$$\left| \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \phi_3)}{\partial(u, v, w)} \right|,$$

y Φ convierte sólidos en sólidos.

Finalmente, algunos ejemplos.

Coordenadas Polares

0.3.1 Ejemplo (caso 1-2). La circunferencia unitaria en el plano, dada por

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

puede parametrizarse mediante la siguiente función $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\sigma = \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (5)$$

Su mapeo esta dado por la figura ??

0.3.2 Ejemplo (caso 2-2). Consideremos el rectángulo $\Omega = [0, 2\pi) \times [0, R]$ que es un subconjunto de $\mathbb{R}_{\theta, \rho}^2$. Sobre este rectángulo tomemos la función $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{x, y}^2$ definida por

$$P = \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta). \end{cases}$$

Como veremos, esta función P envía el rectángulo Ω en un disco relleno en $\mathbb{R}_{x, y}^2$ de radio ρ y centrado en el origen.

Para ver esto, consideremos las rectas horizontales γ_θ y las rectas verticales γ_ρ definidas por

$$\begin{aligned} \gamma_\theta &= \{(\theta, \rho_0) : 0 \leq \rho_0 < R\} \quad (\theta \text{ constante}) \\ \gamma_\rho &= \{(\theta_0, \rho) : 0 \leq \theta_0 < 2\pi\} \quad (\rho \text{ constante}). \end{aligned}$$

Veamos ahora la imagen de estas rectas por P . La imagen de γ_θ es

$$\begin{aligned} P(\gamma_\theta) &= \begin{cases} x = \rho_0 \cos(\theta) \\ y = \rho_0 \sin(\theta) \end{cases} \\ \implies &\begin{cases} x^2 = \rho_0^2 \cos^2(\theta) \\ y^2 = \rho_0^2 \sin^2(\theta) \end{cases} \\ \implies &x^2 + y^2 = \rho_0^2, \end{aligned}$$

que en el plano $\mathbb{R}_{x,y}^2$ describe círculos concéntricos centrados en el origen de radio $0 \leq \rho < R$.

La imagen de γ_ρ es

$$\begin{aligned} P(\gamma_\rho) &= \begin{cases} x = \rho \cos(\theta_0) \\ y = \rho \sin(\theta_0) \end{cases} \\ \implies &\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin(\theta_0)}{\rho \cos(\theta_0)} \quad \left(\rho \neq 0 \text{ y } \theta_0 \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \\ \implies &\frac{y}{x} = \tan(\theta_0) \\ \implies &y = \underbrace{\tan(\theta_0)}_m x, \end{aligned}$$

que como se puede ver son rectas con pendiente $\tan(\theta_0)$. Al dar valores a θ_0 se verá que $P(\gamma_\rho)$ describe segmentos de recta en la dirección radial, conformando así —junto con el resultado de $P(\gamma_\theta)$ — un disco relleno en \mathbb{R}_{xy}^2 . El mapeo que describe lo anterior se puede ver en la figura ??.

0.3.3 Ejemplo (cardioides). La curva $\rho = b + a \cos(\theta)$ tiene nombres y gráficos diferentes dependiendo de los valores que tomen a y b .

Si $b = a$ entonces $\rho = b(1 + \cos(\theta))$ describe una **CARDIOIDE**, lo cual se puede ver al darle valores a θ recordando que este es un ángulo y que ρ es un radio. Su gráfico se puede ver en la figura 4.

Si $b > a$ se obtiene una **CARDIOIDE ALARGADA**, que recibe ese nombre debido a que es mas ‘grande’ que la cardiode original y no pasa por el origen. El hecho de que no pase por el origen se puede ver rápidamente de la ecuación $0 = b + a \cos(\theta)$ que, como los valores extremos del coseno son -1 y 1 , no tiene solución para $b > a$. Ver la figura 5.

Si $b < a$ se obtiene una **LIMAÇON**, que se parece a la cardiode pero tiene un bucle cerca del origen. La causa de este bucle es debido a que, como $b < a$, ρ toma valores negativos cuando $\cos(\theta) < 0$.

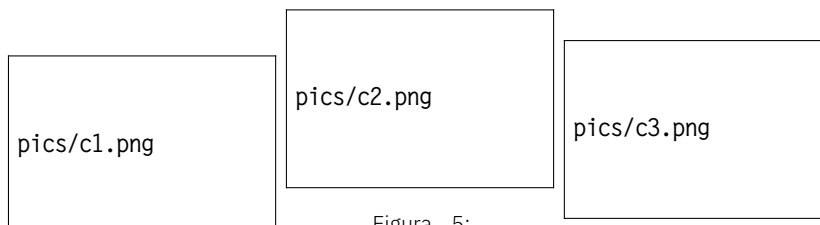


Figura 4:
Gráfico
de la
cardioide
con $b = 1$

Figura 5:
Gráfico
de la
cardioide
alargada
con
 $b = 1,5$ y
 $a = 1$

Figura 6:
Gráfico
de la
limaçon
 $b = 1$ y
 $a = 1,5$

Para ilustrar la utilidad de las coordenadas polares consideremos su parametrización inversa dada por

$$P^{-1} = \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Es claro que utilizar coordenadas polares para estas curvas es mucho mas fácil de entender y dibujar.

¿Tiene sentido calcular la pendiente m de la recta tangente a $\rho = f(\theta)$ en $\theta = \theta_0$ calculando $m = f'(\theta_0)$?

La respuesta es *no*. Si consideramos la circunferencia $\rho = c$ entonces $f'(\theta_0) = 0$, lo cual evidentemente no es cierto. En general $\rho' = f'(\theta_0)$ da el ángulo que forma la recta tangente con el radio vector.

Lo correcto, en general, es calcular

$$m = \frac{dy}{dx}(x_0, y_0)$$

sabiendo que $x_0 = \phi(\theta_0) \cos \theta_0$ y $y_0 = \phi(\theta_0) \sin(\theta_0)$. Para calcular esta derivada usamos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{dy}{dx} \frac{\partial x}{\partial \theta},$$

esto implica que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial y / \partial \theta}{\partial x / \partial \theta} \\ &= \frac{\phi'(\theta_0) \sin(\theta_0) + \phi(\theta_0) \cos(\theta_0)}{\phi'(\theta_0) \cos(\theta_0) - \phi(\theta_0) \sin(\theta_0)}. \end{aligned}$$

0.3.4 Ejemplo (derivar coordenadas polares). Consideremos la circunferencia $\rho = c$. Queremos calcular su recta tangente con $\theta_0 = \pi/4$.

Veamos primero, usando la formula anterior,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\phi'(\pi/4)\sin(\pi/4) + \phi(\pi/4)\cos(\pi/4)}{\phi'(\pi/4)\cos(\pi/4) - \phi(\pi/4)\sin(\pi/4)} \\ &= \frac{\sqrt{2}\phi'(\pi/4) + \phi(\pi/4)}{2\phi'(\pi/4) - \phi(\pi/4)} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Ahora, para la ecuación de la recta tenemos que

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

implica

$$\begin{aligned}y - y(\theta_0, \rho_0) &= \frac{dy}{dx}(x - x(\theta_0, \rho_0)) \\ \implies y - y(\pi/4, c) &= \frac{dy}{dx}(x - x(\pi/4, c)) \\ \implies y - \frac{c}{\sqrt{2}} &= -1\left(x - \frac{c}{\sqrt{2}}\right) \\ \implies x + y &= c\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Lo anterior se puede ver gráficamente en la figura ??.

0.3.5 Ejemplo (derivar coordenadas polares). Hallar en coordenadas polares las rectas tangentes a la lemniscata de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$$

en el origen. Sustituyendo los valores de coordenadas polares $x = \cos(\theta)$ y $y = \sin(\theta)$ en la ecuación de la lemniscata obtenemos

$$\begin{aligned}\rho^4 &= a^2(\rho^2 \cos^2(\theta) - \rho^2 \sin^2(\theta)) \\ \implies \rho^4 &= a^2 \rho^2 \cos(2\theta) \\ \implies \rho^4 - a^2 \rho^2 \cos(2\theta) &= 0 \\ \implies \rho^2(\rho^2 - a^2 \cos(2\theta)) &= 0.\end{aligned}$$

De la última implicación se sigue que

$$\rho^2 = 0 \quad \text{o} \quad \rho^2 = a^2 \cos(2\theta).$$

Si $\rho^2 = a^2 \cos(2\theta)$ entonces $\rho = \sqrt{a^2 \cos(2\theta)}$ y para que esta raíz exista debemos tener $\cos(2\theta) > 0$, es decir, $\theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, \pi]$. De donde las rectas tangentes en el origen son $y = \pm x$, como se ve en el gráfico 7.

²Los ρ no se pueden cancelar porque es un polinomio de grado 4.



Figura 7: Gráfico de la lemniscata con $a = 1$ y sus rectas tangentes en el origen.

Coordenadas Cilíndricas

Sea $F(x, y) = 0$ una superficie en \mathbb{R}^2 y sea $\sigma: \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_{xy}^2$ una parametrización de F dada por $\sigma(f(t), g(t))$. Un CILINDRO ABSTRACTO es un punto (x, y, z) tal que $\forall z \in \mathbb{R} : (x, y) \in \{F(x, y) = 0\}$.

Sea Φ es producto exterior:

$$\Phi(t, z) = \underbrace{(f(t), g(t), 0)}_{\Phi_t} \times \underbrace{(0, 0, z)}_{\Phi_z}$$

y esto es si, y solo si,

$$\Phi = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = z. \end{cases} \quad (6)$$

La representación gráfica de lo anterior esta en la figura ??.

0.3.6 Ejemplo (cilindro). Para el cilindro típico tomemos

$$\sigma(t) = (R \cos(t), R \sin(t)).$$

Entonces el cilindro queda parametrizado, de acuerdo con (6), por

$$C = \begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \\ z = z. \end{cases}$$

Su Jacobiano consiste en el producto fundamental:

$$\begin{aligned} \Phi_t \times \Phi_z &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f'(t) & g'(t) & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} g'(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} f'(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} - \begin{vmatrix} f'(t) & g'(t) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (g'(t), -f'(t), 0). \end{aligned}$$

Y su norma es

$$\|\Phi_t \times \Phi_z\| = \sqrt{(g'(t))^2 + (f'(t))^2}.$$

0.3.7 Ejemplo (Astroide). Buscamos el cilindro abstracto cuyas curvas ‘paralelas’ están determinadas por la *astroide*: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Debemos hallar primero una parametrización de esta curva, notemos que

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta) \\ \iff a^{2/3} &= a^{2/3} (\cos^6(\theta))^{1/3} + a^{2/3} (\sin^6(\theta))^{1/3} \\ \iff a^{2/3} &= \underbrace{a^{2/3} (\cos^3(\theta))^{2/3}}_x + \underbrace{a^{2/3} (\sin^3(\theta))^{2/3}}_y. \end{aligned}$$

Por lo tanto la función σ definida por

$$\sigma = \begin{cases} x = a^{2/3} \cos^3(\theta) \\ y = a^{2/3} \sin^3(\theta), \end{cases}$$

es una parametrización para la astroide. Luego, por (6), la siguiente Φ

$$\Phi = \begin{cases} x = a^{2/3} \cos^3(\theta) & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = a^{2/3} \sin^3(\theta) \\ z = z & 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

parametriza el cilindro abstracto que se ve en la figura.

Coordenadas Cónicas

CAPÍTULO 1

Integrales de Línea

CAPÍTULO 2

Integrales de Area

Como ha ocurrido a lo largo de esta guía, las nociones nuevas de integración en varias variables (en este caso dos variables) recuerdan bastante a las respectivas definiciones del cálculo en una variable. La definición de integral doble por *sumas de Riemann* sigue esa tendencia y es una extensión natural de las ideas que se encuentran en la definición de integral para una variable.

§2.1 Sumas de Riemann

2.1.1 Definición (área). Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ *acotado*. Supongamos que cada punto $(\bar{x}_k, \bar{y}_j) \in A$ tiene la propiedad de pertenecer a un rectángulo de la forma

$$\Delta x_k \Delta y_j = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j].$$

Los puntos extremos del rectángulo anterior $\{(x_k, y_j) | 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ son una partición de A .

Le asociamos a cada rectángulo antes mencionado un número real no negativo

$$\Delta A_{kj} = (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}),$$

llamado el diferencial de área del rectángulo. Entonces podemos extender la noción de área de \mathbb{R} a \mathbb{R}^2

$$\text{area} A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta A_{kj}.$$

Si los límites anteriores existen y son iguales los denotaremos por el ÁREA de A :

$$\text{area} A = \iint_A dA = \iint_A dx dy.$$

2.1.2 Definición (integral doble). Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ y $(\bar{x}_k, \bar{y}_j) \in A$ como en la definición anterior. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función CONTINUA entonces definimos la integral doble de f sobre A como

$$\iint_A f(x, y) dA = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} f(\bar{x}_k, \bar{y}_j) \Delta A_{kj}. \quad (2.1)$$

2.1.1 Ejemplo (integral por definición). Calcular por definición

$$\iint_A xy \, dA$$

con $A = [0, 1]^2$.

Empezamos constuyendo la *partición equi-espaciada* del conjunto A de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} \\ < \cdots < x_k = \frac{k}{n} < \cdots \\ < x_n = \frac{n}{n} = 1, \end{aligned}$$

análogamente,

$$\begin{aligned} y_0 = 0 < y_1 = \frac{1}{m} < y_2 = \frac{2}{m} \\ < \cdots < y_k = \frac{k}{m} < \cdots \\ < y_m = \frac{m}{m} = 1. \end{aligned}$$

Tomamos ahora como *puntos de muestra* (\bar{x}_k, \bar{y}_j) a las esquinas superiores derechas de los rectángulos, es decir, a los puntos (x_k, y_j) .

Podemos entonces, teniendo en cuenta que $f(x, y) = xy$ es continua en A , usar la ecuación 2.1:

$$\begin{aligned} \iint_A xy \, dA &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} f(\bar{x}_k, \bar{y}_j) \Delta x_k \Delta y_j \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \bar{x}_k \bar{y}_j \Delta x_k \Delta y_j \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \frac{k}{n} \frac{j}{m} \frac{1}{n} \frac{1}{m} \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k \leq n} k \right) \left(\frac{1}{m^2} \sum_{1 \leq j \leq m} j \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right) \right) \\ &\quad \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \left(\frac{m^2}{2} + \frac{m}{2} \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + 0 \right) \left(\frac{1}{2} + 0 \right) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

§2.2 Ejercicios

2.2.1 Ejercicio. Sean $A = [a, b] \times [c, d]$ y a, c mayores que cero. Calcular por definición

$$\iint_A \frac{dA}{x^2 \sqrt{y}},$$

usando como puntos de muestra

$$\bar{x}_k = \sqrt{x_{k-1}x_k} \quad \text{y} \quad \bar{y}_j = \left(\frac{\sqrt{y_{j-1}}}{2} - \frac{\sqrt{y_j}}{2} \right)^2.$$

Solución. Tomemos la partición de A dada por

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

y

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d.$$

Veamos primero que los puntos sugeridos son en efecto puntos de muestra válidos. Por un lado

$$\begin{aligned} x_{k-1} &< x_k \\ \implies x_{k-1}^2 &< x_k x_{k-1} \\ \implies x_{k-1} &< \sqrt{x_k x_{k-1}}, \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned} x_{k-1} &< x_k \\ \implies x_{k-1} x_k &< x_k^2 \\ \implies \sqrt{x_{k-1} x_k} &< x_k. \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$x_{k-1} < \sqrt{x_{k-1} x_k} < x_k.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} y_{j-1} &< y_j \\ \implies \frac{\sqrt{y_{j-1}}}{2} &< \frac{\sqrt{y_j}}{2} \\ \implies \sqrt{y_j} &< \frac{\sqrt{y_j}}{2} + \frac{\sqrt{y_{j-1}}}{2} \\ \implies y_{j-1} &< \left(\frac{\sqrt{y_{j-1}}}{2} + \frac{\sqrt{y_j}}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned}
 & y_{j-1} < y_j \\
 \implies & \frac{\sqrt{y_{j-1}}}{2} < \frac{\sqrt{y_j}}{2} \\
 \implies & \frac{\sqrt{y_{j-1}}}{2} + \frac{\sqrt{y_j}}{2} < \sqrt{y_j} \\
 \implies & \left(\frac{\sqrt{y_{j-1}}}{2} + \frac{\sqrt{y_j}}{2} \right)^2 < y_j.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y_{j-1} < \frac{\sqrt{y_{j-1}}}{2} + \frac{\sqrt{y_j}}{2} < y_j$$

Entonces los puntos \bar{x}_k y \bar{y}_j son en efecto puntos de muestra válidos.

Por lo tanto podemos calcular la integral doble usando la definición, pues la función $f(x, y) = (1/x^2)(1/\sqrt{y})$ es continua debido a que x, y son mayores que cero (y esto es debido a que a, c lo son).

Veamos primero que,

$$\begin{aligned}
 f(\bar{x}_k, \bar{y}_j) &= \left(\sqrt{x_{k-1}x_k}^2 \sqrt{\left(\frac{\sqrt{y_{j-1}}}{2} + \frac{\sqrt{y_j}}{2} \right)^2} \right)^{-1} \\
 &= \left((x_{k-1}x_k) \left(\frac{\sqrt{y_j}}{2} + \frac{\sqrt{y_{j-1}}}{2} \right) \right)^{-1} \\
 &= \frac{2}{(x_{k-1}x_k)(\sqrt{y_j} + \sqrt{y_{j-1}})} \\
 &= \frac{2(\sqrt{y_j} - \sqrt{y_{j-1}})}{(x_{k-1}x_k)(\sqrt{y_j} - \sqrt{y_{j-1}})(\sqrt{y_j} + \sqrt{y_{j-1}})} \\
 &= \frac{2(\sqrt{y_j} - \sqrt{y_{j-1}})}{(x_{k-1}x_k)(y_j - y_{j-1})}.
 \end{aligned}$$

Ahora consideremos la suma:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} f(\bar{x}_k, \bar{y}_j)(x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}) \\
 &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \frac{2(\sqrt{y_j} - \sqrt{y_{j-1}})}{(x_{k-1}x_k)(\cancel{y_j - y_{j-1}})} (x_k - x_{k-1})(\cancel{y_j - y_{j-1}}) \\
 &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \frac{2(\sqrt{y_j} - \sqrt{y_{j-1}})(x_k - x_{k-1})}{(x_{k-1}x_k)} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k x_{k-1}} \sum_{1 \leq j \leq m} 2\sqrt{y_j} - 2\sqrt{y_{j-1}} \\
 &= \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\cancel{x_k}}{\cancel{x_k} x_{k-1}} - \frac{\cancel{x_{k-1}}}{x_k \cancel{x_{k-1}}} \right) (2\sqrt{y_m} - 2\sqrt{y_0})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(\sqrt{y_m} - \sqrt{y_0}) \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k} \right) \\
 &= 2(\sqrt{y_m} - \sqrt{y_0}) \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} \right) \\
 &= 2(\sqrt{d} - \sqrt{c}) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).
 \end{aligned}$$

Luego la integral doble

$$\iint_A \frac{dA}{x^2 \sqrt{y}} = 2(\sqrt{d} - \sqrt{c}) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

siempre que $A = [a, b] \times [c, d]$ y $a, c > 0$.

§2.3 Integrales iteradas

§2.4 Integrales por cambio de variable

CAPÍTULO 3

Integrales de Volumen

