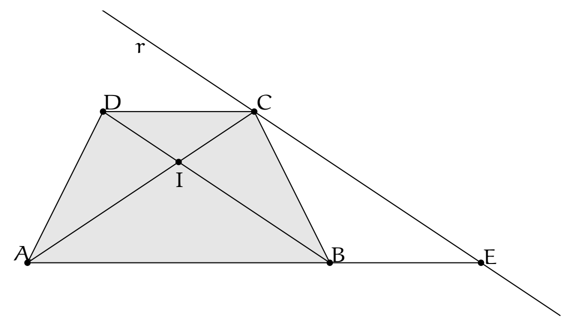
Geometría 3

Quinta Tarea

Jhonny Lanzuisi, 1510759

Ejercicio 1

Demostrar que las diagonales de un trapecio se dividen mutuamente en partes proporcionales a las bases



Solución. Sea $ABCD$ un trapecio y llamemos I a la intersección de sus diagonales. Tomemos la paralela a la diagonal DB que pasa por C y llamemos E a la intersección de dicha paralela con la prolongación de la base AB. Entonces la paralela CE determina sobre las prolongaciones de los lados del triángulo AIB segmentos proporcionales, esto es,

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AI}{IC}$$

pero como $BE = DC$ se tiene

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AI}{IC}.$$

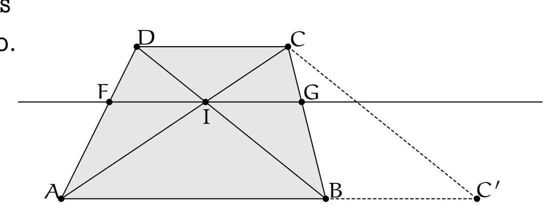
Puede hacerse una construcción análoga tomando la paralela a la diagonal AC por el punto D para obtener

$$\frac{AB}{DC} = \frac{BI}{ID} = \frac{AI}{IC}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 2

El segmento interior de la paralela a las bases de un trapecio por el punto de intersección de las diagonales es bisectado por dicho punto. Demostrar esta afirmación y calcular la longitud de un tal segmento en función de las bases.



Solución. Sean $ABCD$ un trapecio, I la intersección de sus diagonales y F, G los puntos de corte de la paralela a las bases por I con el trapecio. Entonces

$$\frac{FI}{DC} = \frac{IA}{CA} = \frac{AB}{AB + DC}$$

y similarmente,

$$\frac{IG}{DC} = \frac{BI}{DB} = \frac{AB}{AB + DC},$$

por lo que $FI = IG$ y el punto I bisecta al segmento FG.

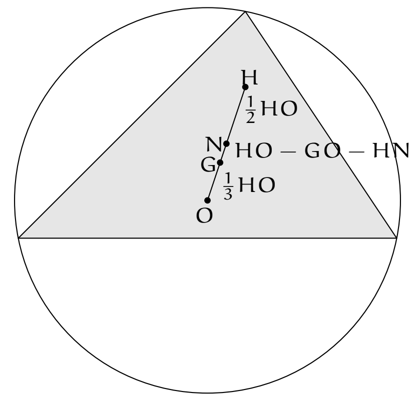
Sea $a = DC$ y $b = AB$ entonces

$$FG = 2a\frac{b}{b + a} = \frac{2ab}{a + b} = \frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$$

que es la media ármonica de a y b.

Ejercicio 3

Dado un triángulo acutángulo, mostrar que el ortocentro H y el baricentro G estan separados armónicamente por el centro N de la circunferencia de Feuerbach y el circuncentro O de triángulo.



Solución. Sean H, G, N y O como en el enunciado. Para ver que $HGNO$ forman una cuaterna armónica queremos ver que

$$(*) \quad \frac{HN}{HO} = -\frac{GN}{GO}.$$

El punto N, al ser centro de la circunferencia de Feuerbach, es punto medio del segmento HO, por lo que

$$\frac{HN}{HO} = \frac{1}{2}.$$

Entonces mostrar la veracidad de $(*)$ se reduce a mostrar que

$$(\star) \quad \frac{GN}{GO} = -\frac{1}{2}.$$

En efecto, esto es cierto. Hagamos $GN = HO - GO - HN$ entonces

$$(**) \quad \frac{GN}{GO} = \frac{HO - GO - HN}{GO} = \frac{HO}{GO} - \frac{GO}{GO} - \frac{HN}{GO}$$

Donde $HO/GO = 3$ y, evidentemente, $GO/GO = 1$. Para NH/GO, notemos que

$$\frac{NH}{GO} = \frac{HO/2}{HO/3} = \frac{3}{2}.$$

Volviendo a $(**)$, se obtiene

$$\frac{GN}{GO} = 3 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Y como G separa a los puntos O y N queda verificada la expresión $(\star)$.