Geometría 3

Octava Tarea: Senos y Cosenos

Jhonny Lanzuisi, 1510759

Ejercicio 1

Considere un triángulo de lados a, b y c. Sean α, β y γ los ángulos opuestos a dichos lados, respectivamente. Muestre que

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = d$$

donde d es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Solución. Por definición del seno se tiene que

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{a}{a/d} = \frac{ad}{a} = d.$$

Similarmente, para los lados b y c:

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{b}{b/d} = \frac{bd}{b} = d \quad \text{y}$$
$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{c}{c/d} = \frac{cd}{c} = d.$$

Y entonces se obtiene el resultado buscado:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = d.$$

Ejercicio 2

Demuestre que

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Sugerencia: escriba $\pi/2 - (\alpha + \beta)$ como $(\pi/2 - \alpha) - \beta$.

Solución. Por la definición del coseno se tiene que

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right).$$

Ahora, escribiendo $\pi/2 - (\alpha + \beta) = (\pi/2 - \alpha) - \beta$ y usando la ecucación para el seno de una suma de ángulos, se tiene

$$\sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

pero esto es lo mismo que

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

que es lo que queríamos demostrar.