Geometría 3

TERCERA TAREA

JHONNY LANZUISI, 1510759

Ejercicio 1

Sea $\triangle ABC$ un triángulo y sean $A\prime$, B' y C' sobre los lados a, b y c, respectivamente. Mostrar que las circunferencias que pasan por los puntos $AC'B'$, $A'BC'$ y $A'B'C$ concurren en un mismo punto P.

Solución. Supongamos que las circunferencias $AC'B'$ y $A'BC'$ se cortan en un punto P distinto de A. Entonces los cuadriláteros $AB'PC'$ y $BA'PC'$ estan inscritos en las circunferencias $AC'B'$ y $A'BC'$ respectivamente, por lo que los ángulos opuestos de estos dos cuadriláteros son suplementarios. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\angle A'PB' &= 2\pi - \angle C'PA' - \angle C'PB' \\ &= 2\pi - (\pi - \angle C'BA') - (\pi - \angle C'AB') \\ &= \angle C'BA' + \angle C'AB' \\ &= \pi - \angle A'CB'.\end{aligned}$$

Por el razonamiento anterior el ángulo $\angle A'PB'$ es el suplementario del ángulo $\angle A'CB'$. Como estos ángulos son suplementarios el cuadrilátero $A'CB'P$ esta inscrito en la circunferencia $A'CB'$ y corta con las otras dos en P, como se buscaba.