portada.pdf

Índice general

PARTE I

Teoría de Conjuntos

El concepto central de este capítulo —y pieza fundamental en la matemática moderna— es, al menos en la superficie, tremendamente simple. Un *conjunto* es un agregado de objetos, una colección o grupo de estos objetos. Así, tenemos que la colección de los estudiantes inscritos en la Universidad Simón Bolívar es un conjunto, como también lo es la cantidad de dígitos en la expansión decimal de π.

Esta noción de conjunto, en principio simple e intuitiva, irá revelando su dificultad a medida que se resuelvan problemas y se avance un poco en los conceptos.

Los conjuntos son una construcción abstracta, pensada por una cabeza humana, que consiste en agrupar todos los objetos que cumplen con una cierta propiedad. Esta propiedad puede ser en principio cualquiera, aunque más adelante daremos formas precisas de enunciar las propiedades para no caer en ambigüedades. Entonces todos los números que tienen la propiedad de ser múltiplos de dos son un conjunto, como también lo es la colección de todos los hijos que son a la vez sus propios padres (este último conjunto, aparentemente contradictorio, es *vacío*. La noción de vacío se verá mejor más adelante).

Es interesante notar que, si nos conformamos con la definición que hemos dado hasta ahora y la tomamos como definitiva, pueden surgir contradicciones e inconsistencias. Quizás el ejemplo mas paradigmático es el siguiente, dicho en la versión del mismo que el autor de esta guía escuchó por primera vez.

0.0.1 Ejemplo. Existe un pueblo, en una tierra muy lejana, donde trabaja un solo barbero. Pero este barbero tiene una exigencia peculiar a sus clientes: solo afeita a aquellos que no se afeitan a ellos mismos. Todo estaría bien con nuestro barbero si no se nos ocurriese la siguiente pregunta: ¿El barbero se afeita a si mismo?

Veamos. Si el barbero se afeita a si mismo entonces, por la *propiedad* especial que cumple nuestro barbero, se sigue que el barbero no se afeita a si mismo: una contradicción. De igual forma, si el barbero no se afeita a si mismo entonces el babero sería una persona que no se afeita a si misma y tendríamos, por la condición peculiar de nuestro barbero, que se afeita a si mismo: otra contradicción.

Tenemos que, sin importar que respuesta demos a nuestra pregunta, siempre llegamos a una contradicción: una paradoja. Los sistemas que se comportan de esta forma se suelen llamar *inconsistentes*.

La paradoja de Russel puede formularse formalmente, utilizando notación que no hemos explicado aún, de la siguiente manera: Sea $R = \{x \mid x \notin x\}$ preguntémonos si $R \in R$. Se deja como un ejercicio al lector volver después de la siguiente sección y desarrollar la paradoja de Russel en lenguaje formal.

La lección que se saca de ejemplos como la paradoja de Russel es que el conjunto nombrado no existe y que, en general, ser capaz de nombrar un conjunto no es condición suficiente para asegurar su existencia. Más aún, no tenemos hasta ahora ninguna manera de definir formalmente la noción de conjunto de tal forma que contradicciones como las del ejemplo anterior no ocurran. Por esta razón es que no intentaremos dar una noción mas formal de la idea de conjunto, en cambio daremos unos cuantos *axiomas*

Un *axioma* es una verdad que asumiremos sin demostración.

que describen bastante bien como esperamos que se comporte un conjunto. Y partiendo de estos axiomas construiremos el resto de nuestra teoría.

En nuestra definición de conjunto aludimos a unas *propiedades* que los elementos del conjunto compartían. Tenemos ahora la tarea de establecer ciertas reglas con las que podamos enunciar estas propiedades, con el fin de evitar ambigüedades.

Las reglas que vamos a explicar son, en esencia, las de la *lógica*. Si se quiere un estudio riguroso de estas reglas será mejor remitirse a un libro de lógica matemática, aquí se hablará de los conceptos de manera informal.

La relación más básica en la teoría de conjuntos es la de *pertenencia*, que denotamos con el símbolo $\in$. La expresión $X \in Y$ se lee 'X pertenece a Y' o 'X es un miembro de Y'.

Las letras X e Y usadas en el párrafo anterior son *variables*, denotan cualquier par de conjuntos. La proposición '$X \in Y$' es verdadera o falsa dependiendo de cuales son los conjuntos X e Y.

Todas las demás propiedades de la teoría de grupos se pueden expresar usando la pertenencia y algunas herramientas lógicas: identidad, conectividad y cuantificadores.

Hay veces en las que conviene expresar el mismo conjunto con variables distintas, la relación de igualdad —o identidad— de conjuntos la denotaremos con el símbolo '$=$'.

1.0.1 Ejemplo. Este ejemplo da varios hechos sobre la igualdad de conjuntos. Sean X, Y y Z tres conjuntos, entonces se cumple que:

I. $X = X$.

II. Si $X = Y$ entonces $Y = X$.

III. Si $X = Y$ y $Y = Z$, entonces $X = Z$.

IV. Si $X = Y$ y $X \in Z$ entonces $Y \in Z$.

V. Si $X = Y$ y $Z \in X$ entonces $Z \in Y$.

Los axiomas CAPÍTULO 2

En esta sección asentaremos las bases axiomáticas de la teoría que queremos desarrollar. Se intentará dar la intuición detrás de cada axioma, con el fin de que su significado sea lo más claro posible.

El primer axioma que vamos a enunciar dice que existe al menos un conjunto, y por lo tanto toda la discusión hasta este punto no ha sido en vano.

Axioma de existencia. Existe un conjunto que no posee elementos.

Existen muchas maneras de denotar intuitivamente el conjunto vacío, por ejemplo, pensemos en el conjunto de todos los números enteros que son pares e impares al mismo tiempo, o el conjunto de todos los reales x tales que $x^2 = -1$. Existen muchos ejemplos de esta forma. Nuestra intuición no dice que este conjunto que no tiene elementos ha de ser uno solo, pero aún no podemos demostrar este hecho, nos hará falta el axioma siguiente para poder caracterizar a un conjunto por sus elementos.

Axioma de extensión. Sean X, Y dos conjuntos, si todo elemento de X es un elemento de Y y todo elemento de Y es un elemento de X entonces $X = Y$.

PARTE II

Espacios topológicos

La definición de una topología que se dará a continuación es una de muchas posibles, diferentes autores (1) han propuesto diferentes manera de definirlas. La forma en que se definen en este texto es la manera *estándar* de la cual se pueden obtener todos los casos de topologías interesantes en los conjuntos interesantes.

Aunque la definición de una topología pueda parecer abstracta, su significado se irá haciendo más claro cuanto más se use.

3.0.1 Definición. Una TOPOLOGÍA en un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X (un subconjunto del conjunto de partes de X) que posee las siguientes propiedades:

I. El conjunto vacío y X pertenecen a $\mathcal{T}$

II. La union arbitraria de subconjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

III. Las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{T}$ estan en $\mathcal{T}$.

Un conjunto X junto con una topología $\mathcal{T}$ definida en X es llamado un *espacio topológico*.

Si X es un espacio topológico con una topología $\mathcal{T}$, diremos que un subconjunto U de X es *abierto* si $U \in \mathcal{T}$. Dicho esto la definición anterior puede enunciarse nuevamente en términos de conjuntos abiertos:

- Tanto el vacío como X son abiertos.
- Las uniones arbitrarias e intersecciones finitas de conjuntos abiertos dan conjuntos abiertos.

A partir de ahora se usará la frase 'es un conjunto abierto' como sinónimo de 'pertenece a la topología $\mathcal{T}$' a no ser que se diga lo contario.

3.0.1 Ejemplo. Si X es un conjunto, entonces el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de las *partes* de X es una topología. Esta topología, en la que todos los conjuntos son abiertos, se conoce como la topología *discreta*.

3.0.2 Ejemplo. Si consideramos como abiertos solamente a los subconjuntos $\emptyset, X$ de un conjunto X cualquiera entonces obtenemos una topología sobre X llamada *indiscreta* o trivial.

3.0.3 Ejemplo. Sean X un conjunto y $\mathcal{T}_f$ la colección de todos los subconjuntos U de X tales que $X \setminus U$ es finito o es todo X. Entonces $\mathcal{T}_f$ es una topología, llamada la *topología complemento finito*.

Tanto X como el vacío pertenecen a $\mathcal{T}_f$ debido a que $X \setminus X$ es finito y $X \setminus \emptyset$ es todo X. Si $\{U_\alpha\}$ es una familia indexada de elementos de $\mathcal{T}_f$ no nulos, entonces (2)

$$X \setminus \bigcup U_\alpha = \bigcap (X \setminus U_\alpha).$$

donde el lado derecho de la igualdad es conjunto finito puesto que los $X \setminus U_\alpha$ son finitos. Se sigue que las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{T}_f$ pertenecen a $\mathcal{T}_f$.

(1) Fréchet, Hausdorff, entre otros.
(2) Las igualdades de este ejemplo se siguen todas de las leyes de *De Morgan*.

Sean $U_1, \ldots, U_n$ una cantidad finita de elementos no vacíos de $\mathcal{T}_f$. Entonces

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i).$$

Donde el lado derecho de la igualdad es finito por ser la unión de conjuntos finitos.

Ejercicios Resueltos

§3.1 Espacios Topológicos

3.1.1 Ejercicio. Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Supongamos que para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto U que contiene a x tal que $U \subset A$. Demuestre que A es abierto.

Solución. Sea $\{U_i\}$ la familia de todos los conjuntos U asociados a cada elemento $x \in A$. Entonces, como $U_i \subset A$ para todo i, el conjunto A puede escribirse como

$$A = \bigcup U_i$$

y dado que los U_i son cojuntos abiertos su unión ha de ser un conjunto abierto. Luego A es un conjunto abierto como se buscaba.

3.1.2 Ejercicio. Sea X un conjunto y $\mathcal{T}_c$ la colección de todos los subconjuntos U de X tales que $X \setminus U$ es numerable o es todo X. Demuestre que $\mathcal{T}_c$ es una topología sobre X.

Solución. Primero que todo, el conjunto vacío pertenece a $\mathcal{T}_c$ debido a que $X \setminus \emptyset = X$ y $X \in \mathcal{T}_c$ por definición. También se tiene que X es un conjunto abierto puesto que $X \setminus X = \emptyset$ y el conjunto vacío es numerable por vacuidad.

Conjuntos cerrados y puntos de acumulación

CAPÍTULO 4

§ 4.1 Espacios de Hausdorff

El conjunto de los números reales (y $\mathbb{R}^2$) con la topología usual tienen propiedades que no cumple cualquier espacio topológico. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ todo cojunto de un solo elemento es cerrado; esto sin embargo no es cierto para otros espacios topológicos.

Otro ejemplo lo dan las sucesiones convergentes. Una sucesión en un espacio topológico es una función de los naturales a este espacio. Decimos que una sucesión CONVERGE a un punto x del espacio si, para cada entorno de x, existe un número entero N tal que la cola (los $n > N$) de la sucesión esta totálmente contenida en dicho entorno. En $\mathbb{R}$ las sucesiones no puede converger a dos puntos distintos, sin embargo, en espacios mas generales esto si puede ocurrir.

Los espacios que se comportan como $\mathbb{R}$ en el sentido antes mencionado reciben un nombre especial:

4.1.1 Definición. Un espacio topológico X es llamado de HAUSDORFF si para cada par de puntos distintos x_1, x_2 de X se pueden encontrar dos entornos de dichos puntos que son disjuntos.

4.1.1 Teorema. Todo cojunto de una cantidad finita de puntos en un espacio de hausdorff es cerrado.

Demostración. Basta hacer la demostración para los conjuntos que tienen un solo elemento. Sea x un punto cualquiera de un espacio de hausdorff X. Entonces, si tomamos cualquier otro punto $x' \in X$ la condición de hausdorff nos dice que existe un entorno de x' que no intersecta a $\{x\}$. Luego, x es el único punto tal que cada entorno intersecta al conjunto $\{x\}$ y, por lo tanto, x es su propia clausura y es cerrado.