2^DA Tarea

Algebra 3

Ejercicio 1

Sea $\mathcal{V}\mathcal{V}$ un espacio con producto interno y sean A, B subconjuntos no vacios de $\mathcal{V}$. Demuestre que:

A. $A^\perp = \text{gen}(A)^\perp$.

B. $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

C. $A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp$.

D. $(A \cup B)^\perp = \big(\text{gen}(A) + \text{gen}(B)\big)^\perp$.

Solución. Veamos cada parte:

A. Veamos la doble contención. Sea $\boldsymbol{v} \in A^\perp$ y $\boldsymbol{w} = (\lambda_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{w}_m) \in \text{gen}(A)$ (con $\lambda \in F$), entonces

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle &= \langle \boldsymbol{v}, \lambda \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \lambda \boldsymbol{w}_m \rangle \\ &= \lambda_1 \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle + \cdots + \lambda_m \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_m \rangle \\ &= \lambda_1 0 + \cdots + \lambda_m 0, \end{aligned}$$

y se sigue que $\boldsymbol{v} \in \text{gen}(A)^\perp$ y $A^\perp \subseteq \text{gen}(A)^\perp$.

Tomemos ahora $\boldsymbol{u} \in \text{gen}(A)^\perp$, esto es, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ para todo $\boldsymbol{v} \in \text{gen}(A)$. Entonces la inclusión $A \subseteq \text{gen}(A)$ implica que $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$ para todo $\boldsymbol{w} \in A$ pues $\boldsymbol{w} \in \text{gen}(A)$. Por lo tanto $\boldsymbol{w} \in A^\perp$ y $\text{gen}(A)^\perp \subseteq A^\perp$.

Las dos inclusiones implican que $A^\perp = \text{gen}(A)^\perp$.

B. Sea $\boldsymbol{v} \in (A+B)^\perp$, entonces para todo $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) \in A+B$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle &= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

pero como los productos internos son estrictamente positivos la igualdad anterior implica que $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 0$ y $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle = 0$ para todo $\boldsymbol{w}_1 \in A$ y $\boldsymbol{w}_2 \in B$, por lo que $\boldsymbol{v} \in A^\perp$ y $\boldsymbol{v} \in B^\perp$, es decir, $\boldsymbol{v} \in A^\perp \cap B^\perp$ y $(A+B)^\perp \subseteq A^\perp \cap B^\perp$.

Veamos ahora la otra inclusión. Sea $\boldsymbol{v} \in A^\perp \cap B^\perp$ y $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) \in A+B$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle &= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle \end{aligned}$$

y $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 0$ puesto que $\boldsymbol{w}_1 \in A$, de igual forma $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle = 0$ pues $\boldsymbol{w}_2 \in B$. De la discusión anterior se tiene que $\boldsymbol{v} \in (A+B)^\perp$ y $A^\perp \cap B^\perp \subseteq (A+B)^\perp$.

C. Sea $\boldsymbol{v} \in B^\perp$, es decir, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$ para todo $\boldsymbol{w} \in B$. Como $A \subseteq B$ se tiene que $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$ para todo $\boldsymbol{a} \in A$ puesto que la inclusión implica que $a \in B$. Tenemos entonces que $\boldsymbol{v} \in A^\perp$ y $B^\perp \subseteq A^\perp$.

D. Tomemos un $\boldsymbol{v} \in (A \cup B)^\perp$ y sea $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) \in \text{gen}(A) + \text{gen}(B)$. Como $A \cup B$ contiene a A se sigue que $A^\perp \subseteq (A \cup B)^\perp$

Ejercicio 2[1]

El ejercicio consta de tres partes.

A. Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial y $S \subset \mathcal{V}$. Demuestre que $S^\perp$ es un subespacio de $\mathcal{V}$.

B. Ecuentre $S^\perp \subseteq \mathcal{R}^3$ si $S = \{(1,1,1), (2,1,0)\}$ (producto punto).

C. Lo mismo si $S = \{(1,1,1), (2,1,0), (1,0,-1)\}$ (producto punto).

Solución. Veamos cada parte.

A. Sean $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ vectores de $S^\perp$, $\boldsymbol{v} \in S$ y λ un escalar. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 - \lambda \boldsymbol{w}_2 \rangle &= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle - \lambda \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle \\ &= 0 + \lambda 0 = 0 \end{aligned}$$

y $\boldsymbol{w}_1 - \lambda \boldsymbol{w}_2 \in S^\perp$ por lo que $S^\perp$ es un subespacio de $\mathcal{V}$.

---

[1] En el Jacob, 4.1.2.

B. El complemento ortogonal de S son todos los vectores $(x, y, z) \in \mathcal{R}^3$ tales que

$$(x, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 0 \quad \text{y}$$
$$(x, y, z) \cdot (2, 1, 0) = 0.$$

Lo anterior se reduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones son los vectores de $\mathcal{R}^3$ de la forma $(t, -2t, t)$ con $t \in \mathcal{R}$.

C. Por un argumento idéntico a la parte anterior, consideramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x - z = 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones son los vectores de $\mathcal{R}^3$ de la forma $(t, -2t, t)$ con $t \in \mathcal{R}$.

Ejercicio 3[2]

Sea $\langle \ , \ \rangle$ un producto interno sobre $\mathcal{R}^n$. Demuestre que el producto interno $\langle \ , \ \rangle'$ definido, para cualquier matríz A invertible $n \times n$, por

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle' = \langle A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w} \rangle$$

para todo $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{R}^n$.

Solución. Veamos que se cumplen las cuatro propiedades de los productos internos:

A. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle' = \langle A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w} \rangle = \langle A\boldsymbol{w}, A\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle'$.

B. $\langle k\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle' = \langle Ak\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w} \rangle = \langle kA\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w} \rangle = k \langle A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w} \rangle = k \langle A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w} \rangle'$.

C. $\langle \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u} \rangle' = \langle A\boldsymbol{v}_1 + A\boldsymbol{v}_2, A\boldsymbol{u} \rangle = \langle A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{u} \rangle + \langle A\boldsymbol{v}_2, A\boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u} \rangle' + \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u} \rangle'$.

D. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle' = \langle A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v} \rangle \geq 0$. Y si $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle' = 0$ entonces $A\boldsymbol{v} = 0$ y como A es invertible $\boldsymbol{v} = 0$.

[2] En el Jacob, 4.1.5.

Ejercicio 4[3]

Supongamos que $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ es una base para el espacio vectorial $\mathcal{V}$. Demuestre que para cualquier sucesión de números reales $r_1, \dots, r_n$ existe un $\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}$ tal que $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w} \rangle = r_i$.

Solución. Veremos que existe una biyección específica entre la base de $\mathcal{V}$ y los $r_1, \dots, r_n$. Consideremos la función $\phi \colon \mathcal{V} \to \mathcal{R}^n$ dada por

$$\phi(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w} \rangle \\ \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w} \rangle \\ \vdots \\ \langle \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w} \rangle \end{pmatrix}.$$

Esta función es lineal puesto que $\langle \ , \ \rangle$ es lineal. Más aún, si $T(\boldsymbol{w}) = 0$ y $\boldsymbol{w} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1, \dots, \lambda_n \boldsymbol{v}_n$ (con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares) entonces

$$\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k \langle \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w} \rangle = 0.$$

Y tenemos que el $\ker(T) = 0$ y esto implica que T es inyectiva.

Como $\mathcal{V}$ y $\mathcal{R}^n$ tienen la misma dimesión, se tiene que T es sobreyectiva. Entonces T es un isomorfismo de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{R}^n$.

Por todo la anterior se tiene que existe $\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}$ con la propiedad buscada.

Ejercicio 5[4]

Esta ejercicio consta de dos partes:

A. Si $\mathcal{V}$ es un espacio real con producto interno, demuestre la *identidad polar*:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \frac{1}{4} \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 - \frac{1}{4} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 .$$

B. Si $\mathcal{V}$ es un espacio complejo con producto interno, demuestre demuestre la *identidad polar*:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 + i \|\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}\| - \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 - i \|\boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}\| \Big)$$

[3] En el Jacob, 4.1.7.
[4] En el jacob, 4.1.11

Solución. Veamos cada parte.

A. Solo hace falta desarrollar recordando que como $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno real se cumple $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle$ para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 &= \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle \\
&\qquad - \langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle \\
&\qquad - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle \\
&= \cancel{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle} + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&\quad + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle + \cancel{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} - \cancel{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle} \\
&\quad + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle - \cancel{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} \\
&= 4\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle .
\end{aligned}$$

Y al dividir ambos lador por 4 se obtiene el resultado deseado.

B. Por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 &= \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \overline{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle} \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle + 2\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 &= \langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle - \langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle - \overline{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle} \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle - 2\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = 4\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle . \tag{1.1}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
i\,\|\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}\|^2 &= i(\langle \boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}\rangle) \\
&= i(\langle \boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}, i\boldsymbol{v}\rangle) \\
&= i(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle - \langle i\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle \\
&\qquad\qquad - \langle \boldsymbol{u}, i\boldsymbol{v}\rangle + \langle i\boldsymbol{v}, i\boldsymbol{v}\rangle) \\
&= i(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + (-i^2)\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&\qquad\qquad - i\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + i\overline{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}) \\
&= i\big(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&\qquad\qquad - i(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle - \overline{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle})\big) \\
&= i(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle - i2\operatorname{Im}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle) \\
&= i\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + i\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle + 2\operatorname{Im}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle .
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
i\,\|\boldsymbol{u}-i\boldsymbol{v}\|^2 &= i(\langle \boldsymbol{u}-i\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-i\boldsymbol{v}\rangle) \\
&= i(\langle \boldsymbol{u}-i\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle - \langle \boldsymbol{u}-i\boldsymbol{v}, i\boldsymbol{v}\rangle) \\
&= i(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle - \langle i\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle \\
&\qquad\qquad - \langle \boldsymbol{u}, i\boldsymbol{v}\rangle + \langle i\boldsymbol{v}, i\boldsymbol{v}\rangle) \\
&= i(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle - (-i^2)\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&\qquad\qquad + i\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle - i\overline{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}) \\
&= i\big(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&\qquad\qquad + i(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle - \overline{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle})\big) \\
&= i(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle + i2\operatorname{Im}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle) \\
&= i\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + i\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle - 2\operatorname{Im}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$i\,\|\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}\|^2 - i\,\|\boldsymbol{u}-i\boldsymbol{v}\|^2 = 4\operatorname{Im}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle . \tag{1.2}$$

Finalmente, usando (1) y (2), se tiene

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + i\,\|\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 - i\,\|\boldsymbol{u}-i\boldsymbol{v}\|^2 \\
&\qquad = 4(\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \operatorname{Im}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle) = 4\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle
\end{aligned}$$

y el resultado deseado se obtiene al dividir ambos lados por 4.