Séptima Tarea: Homotecias entre Circunferencias

Jhonny Lanzuisi, 1510759

Ejercicio 1

Sean c y c' dos circunferencias exteriores de radios desiguales. Si s es una circunferencia tangente exterior a c y c' muestre que los dos puntos de contacto de s con c y c' están alineados con el centro de homotecia positiva H que lleva c en c'.

Solución. Sean c, c', s y H como en el enunciado. Llamemos D, C' a los puntos de contacto de s con c y c', respectivamente, llamemos también O, O' a los centros de dichas circunferencias y O_s al centro de la circunferencia s (como en la figura 1).

Como los puntos C' y D son de tangencia la recta $C'D$ determina sobre las circunferencias c y c' dos puntos de corte C y D'[1] , respectivamente.

Si consideramos por un momento los dos triángulos isóceles $\triangle O_sC'D$ y $\triangle ODC$ veremos que, como comparten el vértice D, los ángulos en O y O_s son iguales. Pero si estos ángulos son iguales entonces la recta O_sO corta a dos paralelas, estas son, OC y O_sC'. Como la recta O_sC' contienen necesariamente al punto O', se sigue que los segmentos $O'C'$ y OC son paralelos.

Como c' es la imágen de c por la homotecia de centro en H (y, por consecuencia, O' la imágen de O), hemos descubierto que C' es la imágen de C por dicha homotecia; pues la construcción anterior nos dice que C' es un punto sobre la circunferencia c',en el mismo semiplano respecto de la recta OO' que C[2] , y sobre la paralela a OC por O'; pero estas son justamente las condiciones para que C' sea el homólogo C.

Finalmente, como desde un principio se tenia que los puntos C', D, C estaban alineados, y hemos decubierto que C', C, H estan alineados, tenemos que C', D y H estan alineados, como se buscaba.

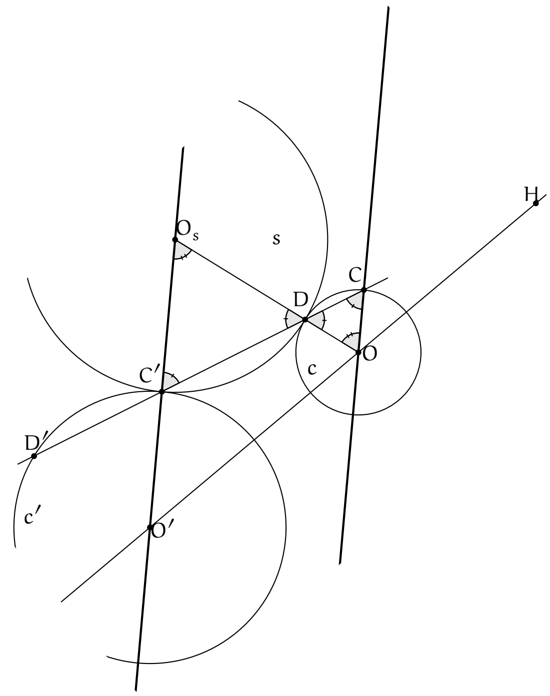

Figura 1: Homotecia de razón positiva (r=2.176) entre dos circunferencias de radios desiguales.

Ejercicio 2

Sean c y c' dos circunferencias exteriores. Sea s una circunferencia tal que, c es tangente exterior a s y c' es tangente interior a s. Muestre que los puntos de contacto de las circunferencia s con c y c están alineados con el centro de homotecia negativa N que envía a c en c'.

Solución. Sean c, c', s y N como en el enunciado. Llamemos C, D a los puntos de contacto de s con c y c', respectivamente, llamemos también O, O' a los centros de dichas circunferencias y O_s al centro de la circunferencia s (como en la figura 2).

Como los puntos C y D son de tangencia la recta CD determina sobre la circunferencia c'otro punto de corte C'.

Si trazamos la paralela a la recta CD por O y consideramos los dos triángulos isóceles $\triangle CO_sD$ y $\triangle O'C'D$ veremos que los ángulos en O, C, C' son iguales. Por lo que los segmentos OC y $O'C'$ son paralelos.

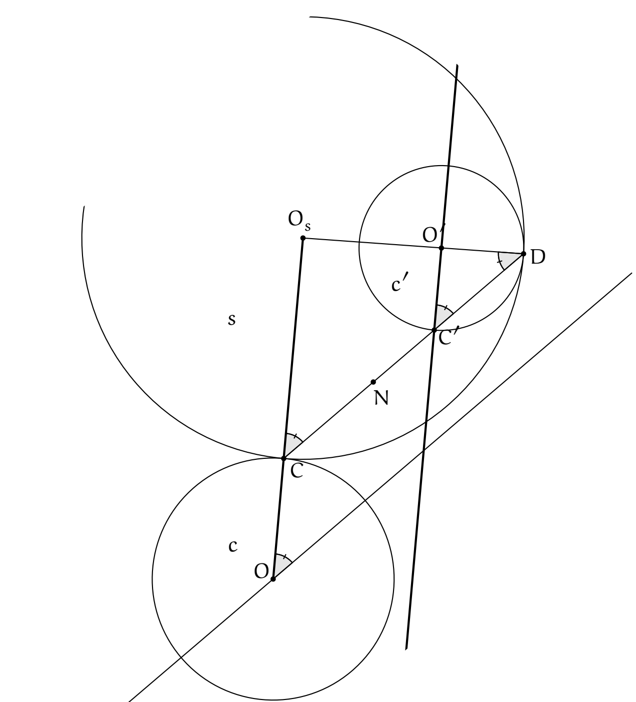

Figura 2: Homotecia de razón negativa (r=-0.679) entre dos circunferencias de radios desiguales.

[1] Nótese que, si los puntos C, D' no existen debe ocurrir que $C' = D$ en cuyo caso c y c' o s y c' serían interiores, contradiciendo el enunciado.

[2] C' ha de estar en el mismo semiplano que C respecto de la recta OO' debido a que la homotecia es de razón positiva.

Como c' es la imágen de c por la homotecia de centro en N (y, por consecuencia, O' la imágen de O), hemos descubierto que C' es la imágen de C por dicha homotecia; pues la construcción anterior nos dice que C' es un punto sobre la circunferencia c', en el distinto semiplano respecto de la recta OO' que C[3] , y sobre la paralela a OC por O'; pero estas son justamente las condiciones para que C' sea el homólogo C.

Finalmente, como desde un principio se tenia que los puntos C, D, C' estaban alineados, y hemos decubierto que C, C', H estan alineados, tenemos que C, D y H estan alineados, como se buscaba.

[3] C' ha de estar en el semiplano contrario que C respecto de la recta OO' debido a que la homotecia es de razón negativa.