Algebra 3

PRIMERA TAREA

JHONNY LANZUISI, 1510759

Ejercicio 1
Sea $\| \ \|$ la norma asociada al producto interno real $\langle \ , \ \rangle$ sobre un espacio vectorial $\mathcal{V}$. Demuestre que:

1. Para todo $x, y \in \mathcal{V}$,
$$\frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = \langle x, y \rangle .$$
2. Si $v_1, \ldots, v_m$ son vectores de $\mathcal{V}$ ortogonales dos a dos, entonces
$$\left\| \sum_{i=1}^{m} v_i \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \|v_i\|^2}.$$
3. Los vectores $x, y \in \mathcal{V}$ son ortogonales si, y solo si,
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Solución. PARTE 1. Solo hace falta desarrollar recordando que como $\langle \ , \ \rangle$ es un producto interno real se cumple $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{V}$.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle \\
&= \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle \\
&\qquad - \langle x, x-y \rangle + \langle y, x-y \rangle \\
&= \cancel{\langle x, x \rangle} + \langle x, y \rangle \\
&\quad + \langle y, x \rangle + \cancel{\langle y, y \rangle} - \cancel{\langle x, x \rangle} \\
&\quad\quad + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \cancel{\langle y, y \rangle} \\
&= 4 \langle x, y \rangle .
\end{aligned}$$

Y al dividir ambos lador por 4 se obtiene el resultado deseado.

PARTE 2. Hay que desarrollar usando la defincíon de norma, las propiedades de las sumas finitas y el hecho de que los vectores son ortogonales dos a dos:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{m} v_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{m} v_i, \sum_{i=1}^{m} v_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{m} v_i, v_1 \right\rangle + \cdots + \left\langle \sum_{i=1}^{m} v_i, v_m \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v_1 \rangle + \cdots + \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v_m \rangle \text{ [1]} \\
&= \langle v_1, v_1 \rangle + \cdots + \langle v_m, v_m \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \|v_i\|^2
\end{aligned}$$

y el resultado deseado se obtiene al tomar raices cuadradas a ambos lados.

PARTE 3. Supongamos que x, y son ortogonales. Entonces el resultado se sigue de la parte anterior elevando ambos lados al cuadrado y haciendo $m = 2$. Para ver esto claramente, hagamos $x = v_1$ y $y = v_2$. Entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{2} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{2} \|v_i\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 .$$

Supongamos ahora que $x, y \in \mathcal{V}$ son tales que

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Veamos primero que

$$\|x+y\|^2 = 2 \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle .$$

Y despejando de la ecuación anterior,

$$\langle x, y \rangle = \|x+y\|^2 - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle .$$

Pero por nuestra hipótesis se tiene finalmente

$$\langle x, y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle = 0.$$

Queda demostrado entonces que x, y son ortogonales si, y solo si, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Ejercicio 2
Demuestre que la función $\langle \ , \ \rangle$ definida en $M_{mn}(\mathbf{C})$ y dada por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*) \quad \text{con } A, B \in M_{mn}(\mathbf{C}),$$

es un producto interno sobre el espacio vectorial $M_{mn}(\mathbf{C})$.

Solución. Para la PROPIEDAD 4, notemos que

$$\begin{aligned}
\langle A, A \rangle = \operatorname{tr}(AA^*) &= \sum_{i=1}^{m} AA^*_{(ii)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A_{(ik)} A^*_{(ki)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A_{(ik)} \overline{A}_{(ik)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A^2_{(ik)}
\end{aligned}$$

[1] Los productos $v_i v_k$ son cero para $i \neq k$, por la ortogonalidad.

de donde es claro que $\langle A, A\rangle > 0$ y $\langle A, A\rangle = 0$ si, y solo si, la suma de los $A^2_{(ik)}$ es cero, es decir, si $A = 0$.

Para la PROPIEDAD 1, veamos que

$$\begin{aligned}
\overline{\langle B, A\rangle} &= \overline{\operatorname{tr}(BA^*)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \overline{B}_{(ik)}\overline{A^*}_{(ki)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \overline{B}_{(ik)}(A)_{(ik)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A_{(ik)}B^*_{(ik)} \\
&= \langle A, B\rangle .
\end{aligned}$$

y entonces $\langle A, B\rangle = \overline{\langle B, A\rangle}$ como se buscaba.

Para la PROPIEDAD 2,

$$\begin{aligned}
\langle \lambda A, B\rangle &= \operatorname{tr}(\lambda AB^*) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda AB^*_{(ii)} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{m} AB^*_{(ii)} \\
&= \lambda \langle A, B\rangle .
\end{aligned}$$

Para la PROPIEDAD 3 hace falta utilizar el hecho de que para todo $A, B \in M_{mn}(\mathbf{C})$ se tiene

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).$$

Con esto en mente,

$$\begin{aligned}
\langle A + B, C\rangle &= \operatorname{tr}\left((A + B)C^*\right) \\
&= \operatorname{tr}(AC^* + BC^*) \\
&= \operatorname{tr}(AC^*) + \operatorname{tr}(BC^*) \\
&= \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle .
\end{aligned}$$

Por todo lo anterior queda demostrado que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno.