Algebra 3 # Formas Cuadráticas

Ejercicio 5.3.1

Jhonny Lanzuisi, 1510759

Encuentre un polinomio cuadrático diagonal % isométrico a:

A. $x^2 - xy + y^2 + xz - z^2$.

B. $xy - xz - yz$.

C. $xz + yw$.

SOLUCION CONSIDEREMOS PRIMERO el polinomio $x^2 - xy + y^2 + xz - z^2$. La matriz simétrica S asociada a el ha de cumplir que $s_{ij} = 1/2(a_{ij} + a_{ji})$ donde los a_{ij} son los coeficientes de nuestro polinimio cuadrático. Se sigue entonces que

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que la forma bilineal asociada $(\ ,\ )_S$ viene dada, para $v = (a_1, a_2, a_3)$ y $w = (b_1, b_2, b_3)$, por

$$\begin{aligned} v^t Aw &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_1 - b_2/2 + b_3/2 \\ -b_1/2 + b_2 \\ b_1/2 - b_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1(b_1 - \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2}) \\ &\qquad + a_2(-\frac{b_1}{2} + b_2) \\ &\qquad\qquad + a_3(\frac{b_1}{2} - b_3). \end{aligned}$$

Ahora solo hace falta diagonalizar la matriz S para obtener el polinomio diagonal buscado. Sea $v_1 = (1, 0, 0)$ y notemos que $(v_1, v_1)_S = 1$. El complemento ortogonal $v_1^\perp$ viene dado por

$$b_1 - \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2} = 0$$

que implica

$$v_1^\perp = \text{gen}\left\{ b_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Notemos que $v_2 = (1/2, 1, 0)$ es tal que $(v_2, v_2)_S = 3/4$. Y su complemento ortogonal $v_2^\perp$ viene dado por

$$\frac{3b_2}{4} + \frac{b_3}{4} = 0$$

y nuestro tercer vector v_3 es cualquier solución no trivial del sistema

$$\begin{cases} b_1 - \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2} = 0 \\ \frac{3b_2}{4} + \frac{b_3}{4} = 0 \end{cases}$$

como por ejemplo $v_3 = (2, 1, -3)$. Entonces la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

es tal que

$$P^t SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Y finalmente nuestro polinomio $x^2 - xy + y^2 + xz - z^2$ es isométrico a $u^2 + \frac{3}{4}v^2 - 12w^2$.

CONSIDEREMOS EN SEGUNDO LUGAR el polinomio $xy - xz - yz$. La matriz simétrica S asociada a el es

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y la forma bilineal $(\ ,\ )_S$ viene dada, para $v =$

(a_1, a_2, a_3) y $w = (b_1, b_2, b_3)$, por

$$\begin{aligned} v^t A w &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_2 - b_3 \\ b_1 - b_3 \\ -b_1 - b_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1(b_2 - b_3) + a_2(b_1 - b_3) + a_3(-b_1 - b_2). \end{aligned}$$

Ahora solo hace falta diagonalizar la matriz S para obtener el polinomio diagonal buscado. Sea $v_1 = (1, 1, 0)$ notemos que $(v_1, v_1)_S = 1$, y su complemento ortogonal $v_1^{\perp}$ esta dado por

$$b_1 + b_2 - 2b_3 = 0$$

que implica

$$v_1^{\perp} = \text{gen} \left\{ b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tomemos ahora $v_2 = (-1, 1, 0)$ y notemos que $(v_2, v_2)_S = -1$. Su complemento ortogonal $v_2^{\perp}$ esta dado por

$$b_1 - b_2 = 0$$

Nuestro último vector v_3 es cualquier solución no trivial al sistema

$$\begin{cases} b_1 + b_2 - 2b_3 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \end{cases}$$

como por ejemplo $v_3 = (1, 1, 1)$. Y la matriz P dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es tal que

$$P^t S P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y finalmente nuestro polinomio $xy - xz - yz$ es isométrico a $2v^2 - 2u^2 - 2w^2$.

Consideremos en tercer lugar el polinomio $xz + yw$. La matriz simétrica S asociada a el es

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la forma bilineal $(\ ,\ )_S$ viene dada, para $v = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $w = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, por

$$\begin{aligned} v^t A w &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \\ &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_3 + a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2. \end{aligned}$$

Ahora solo hace falta diagonalizar la matriz S para obtener el polinomio diagonal buscado. Sea $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ notemos que $(v_1, v_1)_S = 1$, y su complemento ortogonal $v_1^{\perp}$ esta dado por

$$b_3 + b_1 = 0$$

que implica

$$v_1^{\perp} = \text{gen} \left\{ b_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tomemos ahora $v_2 = (-1, 0, 1, 0)$ y notemos que $(v_2, v_2)_S = -1$. Su complemento ortogonal $v_2^{\perp}$ esta dado por

$$b_1 - b_3 = 0.$$

Ahora nuestor vector v_3 es cualqueir solución al sistema

$$\begin{cases} b_3 + b_1 = 0 \\ b_1 - b_3 = 0 \end{cases}$$

como por ejemplo $v_3 = (0, 1, 0, 1)$. Su complemento ortogonal $v_3^{\perp}$ esta dado por

$$b_4 + b_2 = 0.$$

El último vector v_4 es cualquier solución al sistema

$$\begin{cases} b_3 + b_1 = 0 \\ b_1 - b_3 = 0 \\ b_4 + b_2 = 0 \end{cases}$$

como $v_4 = (0, 1, 0, -1)$. Y la matriz P dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es tal que

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y nuestro polinomio $xz + yw$ es isométrico a $2t^2 - 2u^2 + 2v^2 - 2w^2$.

Ejercicio 5.3.5

Solución. Llamemos S_1, S_2, S_3 a cada una de las matrices del problema, numeradas en el orden que se leen (de izquierda a derecha). Para cada una de las matrices S_i el polinomio cuadrático asociado a ellas se calcula como:

$$q_1 = v^t S_1 v \quad q_2 = v^t S_2 v \quad q_3 = v^t S_3 v,$$

donde v es un vector de $\mathcal{R}^2$ en el caso de q_1 y un vector de $\mathcal{R}^3$ en el caso de q_2 y q_3.

Entonces,

$$\begin{aligned} q_1 = v^t S_1 v &= (x, y) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x, y) \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ 4x + y \end{pmatrix} = x(2x + 4y) + y(4x + y) \\ &= 2x^2 + 4xy + 4yx + y^2 = 2x^2 + 8xy + y^2. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} q_2 = v^t S_2 v &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ x + 3z \\ x + 3y + 2z \end{pmatrix} \\ &= x(x + 2y + z) + y(x + 3z) + z(x + 3y + 2z) \\ &= x^2 + 2xy + xz + yx + 3yz + zx + 3yz + 2z^2 \\ &= x^2 + 3xy + 2xz + 6yz + 2z^2. \end{aligned}$$

Y finalmente,

$$\begin{aligned} q_3 = v^t S_3 v &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} x + 3y + 4z \\ 3x + z \\ 4x + y + 2z \end{pmatrix} \\ &= x(x + 3y + 4z) + y(3x + z) + z(4x + y + 2z) \\ &= x^2 + 3xy + 4xz + 3xy + yz + 4xz + yz + 2z^2 \\ &= x^2 + 6xy + 8xz + 2yz + 2z^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.3.6

Solución. Consideremos la transformación $T : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2$ dada, para todo $(a, b) \in \mathcal{F}^2$, por $T(a, b) = (a - b, a + b)$. Esta T es lineal, pues si $a_1, b_1 \in \mathcal{F}^2$ entonces

$$\begin{aligned} T(a + a_1, b + b_1) &= (a + a_1 - b - b_1, a + a_1 + b + b_1) \\ &= (a - b, a + b) + (a_1 - b_1, a_1 + b_1) \\ &= T(a, b) + T(a_1, b_1). \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

También para esta T se tiene que

$$q\big(T(a, b)\big) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Además la transformación T es inyectiva, pues $\ker(T) = \{0\}$, y sobreyectiva, puesto que para cualquier vector v en $\mathcal{F}^2$ se pueden hallar elementos $a, b \in \mathcal{F}$ tales que $v = (a - b, a + b)$. La biyectividad implica entonces que T es invertible (más aún, su inversa $T^{-1} : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2$ esta dada por $T^{-1}(x, y) = 1/2(x + y, y - x)$).

Luego la T dada satisface las condiciones del problema.

Ejercicio 5.3.8

Solución. Veamos cada parte.

A. Sean $v, w \in \boldsymbol{W}$ y $k \in \mathcal{F}$. Entonces

$$Q(kv) = k^2 Q(v)$$

puesto que $v \in \mathcal{V}$ (por el hecho de que $\boldsymbol{W} \subseteq \mathcal{V}$) y sabemos que Q es una forma cuadrática sobre $\mathcal{V}$. Por una razón similar se tiene que

$$B_Q(v, w) = Q(v + w) - Q(v) - Q(w)$$

es una forma bilineal simétrica. Y entonces $Q|_{\boldsymbol{W}}$ es una forma cuadrática sobre $\boldsymbol{W}$.

Ejercicio 5.4.4

Solución. Consideremos el determinante

$$\det(Q^t P Q) = \det(P)\det(Q)^2.$$

Y como $\det(P) \neq 0$ y $\det(Q)^2$ siempre es mayor que cero, se sigue que $\det(Q^t P Q) \neq 0$ y $Q^t P Q$ es no-singular.

Ejercicio 5.4.5

Solución. Primero notemos que la bilinealidad y la simetría de $\langle v, w\rangle = v^t S w$ se heredan directamente de la forma bilineal asociada a S y de la simetría de S, respectivamente. Queda por demostrar la propiedad positiva definida.

Como S es simétrica y real sabemos que es congruente ortogonalmente con una matriz D diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios, todos positivos, de S. Pero como la congruencia no afecta a la signatura de S se sigue que la signatura de D y la de S son la misma. Como D solo tiene elementos positivos en su diagonal su signatura es n, luego la signatura de S también es n y S es positiva definida.

Ejercicio 5.4.6

Solución. Como P es positiva definida, simétrica y real existe una matriz ortogonal B tal que $P = B^t D B$ y D es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal (los valores propios de P) son todos positivos. Consideremos el determinante

$$\det(P) = \det(B^t D B) = \det(D)\det(B)^2.$$

Como $\det(D)$ es el producto de la diagonal y $\det(B)^2$ es siempre mayor que cero, se sigue que $\det(P) > 0$.

Si $A, B \in \boldsymbol{M}_{n\times n}(\mathcal{R})$ entonces $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. De esto se sigue que

$$\operatorname{tr}(P) = \operatorname{tr}(B^t D B) = \operatorname{tr}(D)$$

y como $\operatorname{tr}(D) > 0$ se sigue que $\operatorname{tr}(P) > 0$.

Ejercicio 5.4.7

Solución. La siguiente matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, diagonaliza a la matriz A:

$$C^t A C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces el rango de A es 2 y la signatura de A es 0.