Isomorfimos y Subanillos

ejercicio 1

Sea $h : A \to A'$ un isomorfismo de anillos, demuestre que:

1. Si A es un dominio entero, también lo es A'.

2. Si en A todo elemento no nulo tiene inverso, entonces igualmente ocurre en A'.

Solución. Veamos la primera proposición. Supongamos entonces que A es un dominio entero y supongamos además que existen $a, b \in A'$, ambos distintos de cero, tales que $ab = 0$. Como h es sobreyectiva, han de existir $x, y \in A$, distintos de cero[1], tales que $h(x) = a$ y $h(y) = b$. Entonces se tiene que

$$h(x)h(y) = h(xy) = 0,$$

pero por la inyectividad de h, $xy = 0$; lo cual es imposible pues A es un dominio entero. Finalmente, no existen $a, b \in A'$, ambos distintos de cero, tales que $ab = 0$ y A' es un dominio entero.

Consideremos ahora la segunda proposición y supongamos que todo elemento no nulo de A es invertible. Sea $a \in A'$ distinto de cero, entonces existe un $x \in A$ tal que $h(x) = a$. Como todo elemento de A es invertible, entonces existe x^{-1}. Hagamos $h(x^{-1}) = b$, entonces

$$ab = h(x)h(x^{-1}) = h(xx^{-1}) = h(1_A) = 1_{A'}.$$

El caso de $ba = 1_{A'}$ se prueba de forma análoga. Por lo tanto, todo $a \in A'$ es invertible.

ejercicio 2

Sea A un anillo conmutativo con identidad e y sea $f : \mathbb{Z} \to A$, dada por $f(n) = ne$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pruebe que f es un homomorfismo, además demuestre que el siguiente conjunto

$$f(\mathbb{Z}) = \{f(n) : n \in \mathbb{Z}\} = \{ne \in A : n \in \mathbb{Z}\}.$$

es un subanillo de A.

Solución. Veamos primero que f es un homomorfismo. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)e \\ &= \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{a+b \text{ veces}} \\ &= \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{a \text{ veces}} + \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{b \text{ veces}} \\ &= ae + be \\ &= f(a) + f(b). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(ab) &= (ab)e \\ &= \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{ab \text{ veces}} \\ &= \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{a \text{ veces}} \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{b \text{ veces}} \\ &= (ae)(be) \\ &= f(a)f(b). \end{aligned}$$

Luego, $f : \mathbb{Z} \to A$ es un homomorfismo.

Veamos ahora que el conjunto $f(\mathbb{Z})$ es un subanillo de A. Primero, sean n_1, n_2 dos enteros, entonces

$$\begin{aligned} n_1e + n_2e &= \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{n_1 \text{ veces}} + \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{n_2 \text{ veces}} \\ &= \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{n_1+n_2 \text{ veces}} \\ &= (n_1+n_2)e. \end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{Z}$ y $-n$ es su opuesto, entonces es claro que

$$-ne = \underbrace{(-e-e-\cdots-e)}_{\text{n veces}}$$

es un elemento de $f(\mathbb{Z})$. Por las dos cosas anteriores, $f(\mathbb{Z})$ es un subgrupo de A.

Queda por ver si es cerrado bajo el producto. Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} (n_1e)(n_2e) &= \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{n_1 \text{ veces}} \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{n_2 \text{ veces}} \\ &= \underbrace{(e+e+\cdots+e)}_{n_1n_2 \text{ veces}} \\ &= (n_1n_2)e \end{aligned}$$

y tenemos que $f(\mathbb{Z})$ es cerrado bajo el producto. Por todo lo anterior, $f(\mathbb{Z})$ es un subanillo de A.

[1] Por la inyectividad de h

ejercicio 3

Sea $x \in A$, con A un anillo, demuestre que el siguiente conjunto es un subanillo de A

$$c(x) = \{x \in A \,:\, ax = xa\}.$$

Solución. Sean $a, b \in c(x)$, entonces

$$(a-b)x = ax - bx = xa - xb = x(a-b)$$

donde las igualdades se siguen la distributividad en A y del hecho de que $a, b \in c(x)$. Se tiene entonces que $(a-b) \in c(x)$.

Veamos ahora que ocurre con el producto. Sean $a, b \in c(x)$, entonces

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab)$$

de donde $(ab) \in c(x)$.

Por las dos condiciones anteriores queda demostrado que $c(x)$ es un subanillo de A.

ejercicio 4

Para un conjunto $X \neq \varnothing$,

1. Pruebe que el conjunto de partes de X, junto con la diferencia simétrica y la intersección, es un anillo.
2. Halle un subanillo de partes de X que sea isomorfo a $\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Z}_p$ con p primo.

Solución. Veamos primero que el conjunto $\mathcal{P}(X)$ es un anillo con las operaciones dadas. Comencemos con que es un grupo abeliano con la diferencia simétrica.

Primero que nada, es evidente que $\mathcal{P}(X) \neq \varnothing$ dado que $\varnothing \in \mathcal{P}(X)$. Ahora, sean $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, entonces

$$\begin{aligned} A \bigtriangleup B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= \{x \in X \,:\, (x \in A \text{ y } x \notin B) \text{ o } (x \in B \text{ y } x \notin A)\}. \end{aligned}$$

Como $A, B \in \mathcal{P}(X)$, necesariamente $A - B$ y $B - A$ también lo están; de donde se sigue que $A \bigtriangleup B$ esta en $\mathcal{P}(X)$.

Por otro lado, usando la doble contención, se puede ver que

$$(A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C),$$

de donde la diferencia simétrica es asociativa.

El conjunto $\varnothing$ es el elemento neutro, en efecto

$$A \bigtriangleup \varnothing = (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A \cup \varnothing = A,$$

y también,

$$\varnothing \bigtriangleup A = (\varnothing \bigtriangleup A) \cup (A \bigtriangleup \varnothing) = \varnothing \cup A = A.$$

En lo que respecta a los inversos, cada elemento es su inverso, como se puede ver por

$$A \bigtriangleup A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

por último, la conmutatividad viene dada por

$$A \bigtriangleup B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \bigtriangleup A.$$

Con todo lo anterior, el conjunto $\mathcal{P}(X)$ con la diferencia simétrica es un grupo abeliano.

Veamos ahora que ocurre con la intersección en $\mathcal{P}(X)$. Este conjunto es cerrado bajo la interseccion, en efecto, sean $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ como antes, se tiene que

$$A \cap B = \{x \in X \,:\, x \in A \wedge x \in B\} \subset X \to (A \cap B) \in \mathcal{P}(X).$$

Como la intersección de dos conjuntos siempre es asociativa, en particular lo es para elementos en $\mathcal{P}(X)$.

Por ultimo, veamos que la intersección se distribuye respecto de la diferencia simétrica

$$\begin{aligned} (A \bigtriangleup B) \cap C &= ((A - B) \cup (B - A)) \cap C \\ &= ((A - B) \cap C) \cup ((B - A) \cap C) \\ &= ((A \cap C) - (B \cap C)) \cup ((B \cap C) - (A \cap C)) \\ &= (A \cap C) \bigtriangleup (B \cap C). \end{aligned}$$

En el caso de $C \cap (A \bigtriangleup B)$ se procede de forma análoga. Y por todo lo dicho anteriormente, el conjunto $\mathcal{P}(X)$ con la diferencia simétrica y la intersección es un anillo.

Consideremos ahora la parte 2. Sea $A \in \mathcal{P}(X)$, y tomemos el siguiente conjunto

$$\mathcal{C} = \{A, \varnothing\}.$$

Entonces $\mathcal{C}$ es un subanillo de $\mathcal{P}(X)$, más aún, $\mathcal{C}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

Veamos primero que $\mathcal{C}$ es un subanillo de $\mathcal{P}(X)$, esto no es muy complicado debido a que

$$A \bigtriangleup \varnothing = A \quad \text{y} \quad A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing.$$

Por otro lado, para ver que $\mathcal{C}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ solo hace falta considerar la función, $\phi \,:\, \mathcal{P}(X) \to \mathbb{Z}_2$, definida por

$$\phi(\varnothing) = 0 \quad \text{y} \quad \phi(A) = 1.$$

El que ϕ es biyectiva es inmediato. Solo queda ver que ϕ es en efecto un homomorfismo:

$$\phi(A \bigtriangleup \varnothing) = \phi(A) = 1 = 1 + 0 = \phi(A) + \phi(\varnothing)$$

y

$$\phi(A \cap \varnothing) = \phi(\varnothing) = 0 = 01 = \phi(\varnothing)\phi(A).$$