Primer Problemario

Ejercicio 1

Decimos que una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conserva la norma si $||T(x)|| = ||x||$ y que conserva el producto interno si $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Demostrar que T conserva la norma si, y solo si, T conserva el producto interno.

Solución. Supongamos primero que T conserva el producto, entonces tenemos que $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pero, en particular, haciendo $y = x$ obtenemos

$$\langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle \to \langle T(x), T(x)\rangle^{1/2} = \langle x, x\rangle^{1/2} \to ||T(x)|| = ||x||$$

y tenemos entonces que T preserva la norma.

Supongamos ahora que T conserva la norma. Notemos que, para todo $x, y \in R^n$,

(1) $||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$.

De la misma forma,

(2) $||T(x) + T(y)||^2 = ||T(x)||^2 + 2\langle T(x), T(y)\rangle + ||T(y)||^2$,

pero como T es lineal se tiene necesariamente que $||T(x) + T(y)|| = ||T(x + y)||$.Por otro lado, como T preserva la norma, se sigue que $||T(x + y)|| = ||x + y||$.

Juntando las dos cosas anteriores se tiene que $||T(x) + T(y)|| = ||x + y||$. Usando lo anterior podemos igualar (1) y (2), obtenemos entonces que

(3) $||x||^2+2\langle x, y\rangle+||y||^2 = ||T(x)||^2+2\langle T(x), T(y)\rangle+||T(y)||^2$.

Pero T preserva la norma y entonces $||T(x)|| = ||x||$ y $||T(y)|| = ||y||$. Por lo que de (3) se obtiene, finalmente,

$$2\langle x, y\rangle = 2\langle T(x), T(y)\rangle \;\to\; \langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle$$

y tenemos que T preserva el producto.

Ejercicio 2

Solución. Empecemos estudiando las derivadas parciales de f, usando la definición tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x} 0\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x} 0\frac{0}{x} = 0,$$

de la misma manera se obtiene que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y} 0\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y} 0\frac{0}{y} = 0.$$

Por lo tanto, si f fuese diferenciable debería ocurrir que el

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - [\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)](x-0) - [\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)](y-0)}{||(x-0, y-0)||} = 0,$$

o lo que es lo mismo, que el

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{||(x,y)||} = 0.$$

Pero el

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{||(x,y)||} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Este último límite no existe. En efecto, consideremos el limite al aproximarnos por la recta $x = 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{0y^2}{(0^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

Por otra parte, si nos aproximamos por la recta $y = mx$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x(mx)^2}{(x^2+(mx)^2)^{3/2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3m^2}{(x^2(m^2+1))^{3/2}}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3m^2}{x^3(m^2+1)^{3/2}}\\ &= \frac{m^2}{(m^2+1)^{3/2}}\end{aligned}$$

que es distinto de cero, para todo $m \neq 0$. Por lo que el limite no existe y f no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejercicio 3

Solución. Utilizando la regla de la cadena, tenemos que

$$(\star)\quad \frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 1$$

entonces $(\star)$ se convierte en

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Por la regla de la cadena, igual que antes, calculamos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t},\end{aligned}$$

pero

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -1$$

por lo tanto

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ejercicio 4

Solución. Como f es continua en a, sabemos que existe un δ tal que, para todo $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\|x - a\| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Esta n-bola, de radio δ y centrada en a, es la buscada. En efecto, para todos los x en esta n-bola sabemos que

$$-\epsilon < f(x) - f(a) < \epsilon,$$

de donde se sigue que

$$-\epsilon + f(a) < f(x) < \epsilon + f(a).$$

Tomando $\epsilon = \dfrac{|f(a)|}{2}$ tenemos que

$$(*) \quad -\frac{|f(a)|}{2} + f(a) < f(x) < \frac{|f(a)|}{2} + f(a).$$

Si $f(a) > 0$ entonces el $|f(a)| = f(a)$ y se tiene que, de $(*)$,

$$\frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$$

de donde se sigue claramente que $f(x) > 0$. Ahora, si $f(a) < 0$ entonces el $|f(a)| = -f(a)$ y sustituyendo en $(*)$ obtenemos que $f(x)$ queda acotado por dos expresiones negativas, luego $f(x) < 0$.