Anillos Cocientes

Ejercicio 1

Sea I un ideal de un anillo A. Demuestre que A/I:

1. Tiene elemento identidad si, y solo si, existe algún $e \in A$ tal que $ae - a$ y $ea - a$ están en I, para todo $a \in A$.
2. Es conmutativo si, y solo si, $ab - ba$ esta en I para todo a, b en A.

Solución. Veamos cada parte por separado.

1. Demostraremos la doble implicación. Supongamos que A/I tiene identidad $(e + I)$. Entonces, para todo $a \in A$, se cumple que

   $$(a + I)(e + I) = (ae + I) = (a + I)$$

   y como, de la ecuación anterior, a y ae están en la misma clase de equivalencia:

   $$ae - a \in I.$$

   Un argumento simétrico se usa para probar que también $ea - a \in I$.

   Supongamos ahora que existe un $e \in A$ tal que $ae - a$ y $ea - a$ están en I, para todo $a \in A$. Si $ae - a$ esta en I eso quiere decir que ae y a están en la misma clase de equivalencia, y por lo tanto,

   $$(a + I)(e + I) = (ae + I) = (a + I).$$

   Donde la primera igualdad se sigue del producto definido en A/I. Es claro que un argumento idéntico se puede usar para establecer que

   $$(e + I)(a + I) = (ea + I) = (a + I).$$

   Y entonces $e + I$ es el elemento identidad de A/I.

2. Demostraremos la doble implicación. Supongamos que A/I es conmutativo. Entonces, para todo a, b en A, tenemos que

   $$(ab + I) = (ba + I)$$

   de donde ab y ba están en la misma clase de equivalencia y $ab - ba \in I$.

   Supongamos ahora que $ab - ba \in I$ para todo a, b en A. Esto quiere decir que ab y ba estan en la misma clase de equivalencia, por lo que

   $$(ab + I) = (ba + I),$$

   o lo que es lo mismo,

   $$(a + I)(b + I) = (b + I)(a + I).$$

   Y entonces A/I es conmutativo.

Ejercicio 2

Para los anillos A y B, considere el anillo $A \times B$ con las operaciones

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

y

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2).$$

Demuestre que, para $I = \{(a, 0) \in A \times B \mid a \in A\}$,

1. I es un ideal de $A \times B$.
2. Existe un isomorfismo entre I y A.
3. $(A \times B)/I$ y B son isomorfos.

Solución. Veamos cada parte del Ejercicio.

1. Sean a y a' elementos de A. Entonces la diferencia, en $A \times B$, dada por

   $$(a, 0) - (a', 0) = (a - a', 0)$$

   es un elemento de I, puesto que $a - a'$ esta en A —porque A es un anillo—. Sea b un elemento de B y a, a' igual que antes. Entonces el producto, en $A \times B$, dado por

   $$(a, b)(a', 0) = (aa', b0) = (aa', 0)$$

   es un elemento de I, debido a que aa' esta en A. Como I es cerrado bajo la diferencia y también bajo el producto por elementos de $A \times B$ se tiene que I es un ideal de $A \times B$.

2. El isomorfismo entre I y A viene dado por la función $\omega : A \to I$, dada por $\omega(a) = (a, 0)$ para todo $a \in A$. Por la definición de ω el hecho de que sea biyectiva es evidente, veamos que es un homomorfismo.

   Sean a y b en A. Entonces

   $$\begin{aligned}\omega(a + b) &= (a + b, 0)\\ &= (a, 0) + (b, 0)\\ &= \omega(a) + \omega(b),\end{aligned}$$

   y también

   $$\begin{aligned}\omega(ab) &= (ab, 0)\\ &= (a, 0)(b, 0)\\ &= \omega(a)\omega(b).\end{aligned}$$

   Tenemos entonces que ω es un homomorfismo biyectivo, y que A es isomorfo a I como se buscaba.

3. Consideremos la función $\phi : B \to (A \times B)/I$ dada por $\phi(b) = (a,b) + I$ (para todo $(a,b) \in A \times B$), es decir, la función que asocia a cada elemento de B 'su' clase de equivalencia en $(A \times B)/I$.

   Notemos primero que siempre que se varíe, en el par (a,b), a a dejando a b fijo se obtiene la misma clase de equivalencia, puesto que (a,b) y (a',b) están en la misma clase de equivalencia:

$$(a,b) - (a',b) = (a - a', 0) \in I.$$

   En cambio, cuando se varia a se obtienen clases distintas, pues (a,b) esta en una clase distinta de (a',b'):

$$(a,b) - (a',b') = (a - a', b - b') \notin I$$

   siempre que $b \neq b'$.

   De la discusión anterior se sigue que ϕ es uno-a-uno: asigna a cada elemento de B una, y solo una, clase en $(A \times B)/I$. También por la discusión anterior, si tomamos una clase cualquiera, $(a,b)+I$ por ejemplo, de $(A \times B)/I$ entonces siempre podemos encontrar su preimagen por ϕ, la cual es b. La conclusión es que ϕ es una función biyectiva.

   Veamos por último que ϕ es un homomorfismo. Sean b y b' elementos de B y $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\phi(b+b') &= (a, b+b') + I\\ &= (a+a, b+b') + I\\ &= (a,b) + (a,b') + I\\ &= [(a,b)+I] + [(a,b')+I]\\ &= \phi(b) + \phi(b')\end{aligned}$$

   y también

$$\begin{aligned}\phi(bb') &= (a, bb') + I\\ &= (aa, bb') + I\\ &= (a,b)(a,b') + I\\ &= [(a,b)+I][(a,b')+I]\\ &= \phi(b)\phi(b').\end{aligned}$$

   Por todo lo anterior ϕ es un isomorfismo y $(A \times B)/I$ es isomorfo a B, como se buscaba.

Ejercicio 3

Sea I un ideal de un anillo A. Demuestre que la función $\pi : A \to A/I$, dada por $\pi(a) = a+I$, es un homomorfismo de anillos sobreyectivo. Halle también el núcleo de π.

Solución. Veamos primero que π es sobreyetiva como función. Esto no es muy difícil de ver, pues dada una clase $a + I \in A/I$ podemos siempre hallar $a \in A$ tal que $\pi(a) = a + I$. También se podría haber llegado a esta conclusión tomando en cuenta que las clases de equivalencia particionan al conjunto A, por lo que siempre se puede encontrar un elemento en A que corresponde a una clase dada en A/I.

Veamos ahora que π es un homomorfismo. Sean a y a' elementos de A, entonces

$$\begin{aligned}\pi(a+a') &= (a+a') + I\\ &= (a+I) + (a'+I)\\ &= \pi(a) + \pi(a'),\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\pi(aa') &= (aa') + I\\ &= (a+I)(a'+I)\\ &= \pi(a)\pi(a')\end{aligned}$$

por como están definidas las operaciones suma y producto en A/I.

Consideremos por último el núcleo de π. El $\ker(\pi)$ es el conjunto de los $a \in A$ tales que $\pi(a) = I$. Supongamos que a no esta en I, entonces es claro que $\pi(a) = a + I \neq I$ debido a que I no es cerrado bajo la suma con elementos de A. Ahora, si $a \in I$, entonces $\pi(a) = a + I = I$ debido a que I —por ser un ideal— es cerrado bajo la suma con elementos de I. Tenemos entonces que el $\ker(\pi) = I$.