TERCER PARCIAL

Las preguntas siguen la numeración del parcial original.

Respuesta a la primera pregunta

Para obtener la distribución acumulada, queremos calcular la integral:

$$\iint_{-\infty}^{X} e^{-x}(1+e^{-x})^{-2}\mathrm{d}x.$$

Hagamos $u = 1 + e^{-x}$, entonces $\mathrm{d}u = -e^{-x}$ y nuestra integral se convierte en

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{X} e^{-x}(1+e^{-x})^{-2}\mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{X} \frac{1}{u^2}du \\ &= \left.\frac{1}{u}\right|_{-\infty}^{X} \\ &= \left.\frac{1}{1+e^{-x}}\right|_{-\infty}^{X} \\ &= \frac{1}{1+e^{-X}}.\end{aligned}$$

Respuesta a la segunda pregunta

Calculamos primero la distribución acumulada de Y. Notemos que

$$F_Y(x) = P\{Y < y\} = P\{e^X < y\} = P\{X < \log(y)\}.$$

Entonces

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\log(y)} f(x)\mathrm{d}x$$

y derivando obtenemos que

$$f_Y(y) = \frac{1}{y} f(\log(y)).$$

Y esto último es lo mismo que

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} \exp\left(-\frac{\log(y)^2}{2\tau^2}\right)\frac{1}{y}.$$

Respuesta a la cuarta pregunta

F es una función de densidad si

$$\iint_{-\infty}^{A} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty} cye^{-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

Veamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} cye^{-xy}\mathrm{d}x = cy\left.\frac{-e^{-yx}}{y}\right|_{-\infty}^{\infty}$$

Respuesta a la quinta pregunta

Como la esperanza es una función lineal, tenemos que

$$E(8X - Y + 12) = 8E(X) - E(Y) + 12 = \frac{8}{\theta} - \lambda + 12.$$

Repuesta a la sexta pregunta

La esperanza viene dada por

$$E[X] = \int_0^{\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x$$

donde $f_X(x)$ es la función de densidad de la distribución gamma. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}E[X] &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} x^\alpha e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^\alpha e^t \frac{\mathrm{d}t}{\lambda} \quad (t = \lambda x) \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\lambda\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\alpha}{\lambda}\end{aligned}$$

Respuesta a la séptima pregunta

La esperanza viene dada por

$$E[X] = \int_0^1 xf_X(x)\mathrm{d}x$$

donde $f_X(x)$ es la función de densidad de la distribución beta. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}E[X] &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1} \\ &= \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} \\ &= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ &= \frac{a}{a+b}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b)} \\ &= \frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$