Índice general

Normas y Productos Internos

Normas 1

Producto interno 1

Formas Bilineales y Cuadráticas

Formas Bilineales 3

Formas Cuadráticas 3

Ejercicios 3

teorema de cauchy-hamilton

forma canónica de jordan

teorema de descomposición cíclica

Evaluaciones

1er Parcial:	Semana 6	(40 %)
2do Parcial:	Semana 11	(50 %)
Problemarios:	Antes de parcial	(10 %)

1 Normas y Productos Internos

§1.1 Normas

1.1.1 DEFINICIÓN (NORMA). Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real o complejo. Una norma sobre $\mathcal{V}$ es una función $\| \ \|: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathcal{V}$ y λ un escalar,

A. $\|x\| > 0$ y $\|x\| = 0$ si, y solo si, $x = 0$.

B. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

C. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

En un espacio vectorial $\mathcal{V}$ que posee una norma se puede definir la noción de distancia entre dos puntos $x, y \in \mathcal{V}$ como $\|x - y\|$. xx

1.1.1 Ejemplo. La *norma canónica* de $\mathbb{R}^n$ esta dada, para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, por

$$\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

El hecho de que esta norma cumple con las propiedades (1) y (2) de la definición anterior es inmediato debido a las propiedades de las raíces cuadradas reales. La propiedad (3) es menos evidente, la demostraremos mas adelante con ayuda del producto interno.

1.1.2 Ejemplo. En $\mathbb{C}$ definimos:

$$\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Al igual que antes, las propiedades (1) y (2) son consecuencia de las propeidades de las raices reales.

1.1.3 Ejemplo. En $\mathbb{R}^n$ definimos:

$$\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \text{máx}(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Veamos que esta norma cumple con las tres propiedades:

A. Dado que $|x_1|, \ldots, |x_n|$ son todos positivos, el mayor de ellos también lo es. Si $\text{máx}(|x_1|, \ldots, |x_n|) = 0$ es evidente que $x = 0$, el recíproco es igual de fácil.

B. Sea $|x_k|$ $(1 \leq k \leq n)$ el mayor de los $|x_1|, \ldots, |x_n|$. Entonces

$$|cx_k| = |c||x_k| \geq |c||x_i| \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq n.$$

C. Consideremos el vector SUMA:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Supongamos que $\text{máx}(x + y) = |x_k + y_j|$ con $1 \leq k, j \leq n$. Entonces

$$|x_k + y_j| \leq |x_k| + |y_j| \leq \text{máx}(x) + \text{máx}(y).$$

1.1.4 Ejemplo. En $\mathbb{R}^n$ definimos

$$\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

§1.2 Producto interno

1.2.1 DEFINICIÓN (PRODUCTO INTERNO). Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real o complejo. Un producto interno real sobre $\mathcal{V}$ es una función $\langle \ , \ \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ y λ un escalar,

A. $\langle x, x \rangle > 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si, y solo si, $x = 0$.

B. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

C. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

D. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$.

Si $\mathcal{V}$ es de dimensión finita lo llamaremos *espacio euclídeo*.

Nótese que las propiedades (2) y (3) implican

$$\begin{aligned} \langle x, \lambda y \rangle &= \overline{\langle \lambda y, x \rangle} \\ &= \overline{\lambda} \, \overline{\langle y, x \rangle} \\ &= \overline{\lambda} \langle x, y \rangle . \end{aligned}$$

De forma similar las propiedades (2) y (4) implican

$$\begin{aligned} \langle x, y + z \rangle &= \overline{\langle y + z, x \rangle} \\ &= \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} \\ &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle . \end{aligned}$$

Por todo lo anterior los productos internos son transformaciones lineales.

1.2.1 Ejemplo. En $\mathbb{R}^n$ el *producto interno canónico* esta dado por

$$\langle x, y \rangle = \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Para este producto interno las propiedades (1)-(4) no son difíciles de verificar.

1.2.2 Ejemplo. En $\mathbb{C}^n$ el *producto interno canónico* esta dado por

$$\langle x, y\rangle = \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

al igual que el ejemplo anterior las propiedades (1)-(4) no son difíciles de verificar.

1.2.3 Ejemplo. En $\mathcal{V} = M_{mn}(\mathbb{C})$ definimos un producto interno como

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$$

donde $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ y B^* es la *adjunta* (transpuesta de la conjugada) de B. Veamos que esta es en efecto un producto interno. Para la propiedad (1), notemos que

$$\begin{aligned}
\langle A, A\rangle &= \operatorname{tr}(AA^*) \\
&= \sum_{i=1}^{m} AA^*_{(ii)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A_{(ik)}A^*_{(ki)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A_{(ik)}\overline{A}_{(ik)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A^2_{(ik)}
\end{aligned}$$

de donde es claro que $\langle A, A\rangle > 0$ y $\langle A, A\rangle = 0$ si, y solo si, la suma de los $A_{(ik)}$ es cero, es decir, si $A = 0$.

Para (2), veamos que

$$\begin{aligned}
\overline{\langle A, B\rangle} &= \overline{\operatorname{tr}(AB^*)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \overline{A}_{(ik)}\overline{B^*}_{(ki)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \overline{A}^{\mathrm{t}}_{(ik)}(B^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}_{(ki)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} B_{(ik)}A^*_{(ki)}
\end{aligned}$$

2 Formas Bilineales y Cuadráticas

El objeto central de esta capítulo, las *formas bilineales*, son una generalización natural del concepto de producto interno. La ventaja de aquellas bilineales sobre estos es que las formas bilineales se encuentran en el cáculo multivariable y la geometría diferencial en lugares donde *no* se tiene un producto interno.

§2.1 Formas Bilineales

2.1.1 DEFINICIÓN. Una función $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{F}$, donde $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial y $\mathcal{F}$ un cuerpo de escalares, es una forma bilineal si B es lineal en cada componente cuando se deja la otra fija, es decir, si para todo $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i \in \mathcal{V}(i = 1, 2)$ y $\lambda \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\begin{aligned} B(\lambda \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) &= \lambda B(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \quad \text{y} \\ B(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) &= \lambda B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2). \end{aligned}$$

Diremos además que la forma bilineal es SIMÉTRICA si $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

Al conjunto de todas $\mathcal{AAB}\mathcal{B}$ las formas bilineales sobre $\mathcal{V}$ lo llamaremos $\mathcal{B}(\mathcal{V})$. Nótese que un producto interno es una forma bilineal si el cuerpo de escalares es real pero no si es complejo, debido a la conjugación necesaria en la linealidad de los productos internos complejos (en este caso se le llama *bilineal conjugada*).

Hay un ejemplo peculiar de una forma bilineal que conviene enunciar como un lema, pues nos será útil más adelante.

2.1.1 LEMA. Para cualquier matríz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{F}^n)$ la función $B : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to F$ definida por

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{y}$$

es una forma bilineal.

Demostración. Notemos primero que como $\boldsymbol{x}$ es una matríz $1 \times n$ y $\boldsymbol{y}$ es una matríz $n \times 1$ el producto $\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{y}$ es una matríz 1×1 y por lo tanto tiene sentido asociarlo con un escalar en F.

§2.2 Formas Cuadráticas

§2.2.1 Ejercicios

2.2.1 Ejercicio. Encuentre un polinomio cuadrático diagonal isométrico a:

A. $x^2 - xy + y^2 + xz - z^2$.

B. $xy - xz - yz$.

C. $xz + yw$.

Solución. CONSIDEREMOS PRIMERO el polinomio $x^2 - xy + y^2 + xz - z^2$. La matriz simétrica S asociada a el ha de cumplir que $s_{ij} = 1/2(a_{ij} + a_{ji})$ donde los a_{ij} son los coeficientes de nuestro polinimio cuadrático. Se sigue entonces que

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que la forma bilineal asociada $(\ ,\ )_S$ viene dada, para $v = (a_1, a_2, a_3)$ y $w = (b_1, b_2, b_3)$, por

$$\begin{aligned} v^t A w &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_1 - b_2/2 + b_3/2 \\ -b_1/2 + b_2 \\ b_1/2 - b_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1(b_1 - \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2}) + a_2(-\frac{b_1}{2} + b_2) + a_3(\frac{b_1}{2} - b_3). \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora solo hace falta diagonalizar la matriz S para obtener el polinomio diagonal buscado. Sea $v_1 = (1, 0, 0)$ y notemos que $(v_1, v_1)_S = 1$. El complemento ortogonal $v_1^\perp$ viene dado por

$$b_1 - \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2} = 0$$

que implica

$$v_1^\perp = \text{gen} \left\{ b_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Notemos que $v_2 = (1/2, 1, 0)$ es tal que $(v_2, v_2)_S = 3/4$. Y su complemento ortogonal $v_2^\perp$ viene dado por

$$\frac{3b_2}{4} + \frac{b_3}{4} = 0$$

y nuestro tercer vector v_3 es cualquier solución no trivial del sistema

$$\begin{cases} b_1 - \dfrac{b_2}{2} + \dfrac{b_3}{2} = 0 \\ \dfrac{3b_2}{4} + \dfrac{b_3}{4} = 0 \end{cases}$$

como por ejemplo $v_3 = (2, 1, -3)$. Entonces la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

es tal que

$$P^t S P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Y finalmente nuestro polinomio $x^2 - xy + y^2 + xz - z^2$ es isométrico a $u^2 + \frac{3}{4}v^2 - 12w^2$.

CONSIDEREMOS EN SEGUNDO LUGAR el polinomio $xy - xz - yz$. La matriz simétrica S asociada a el es

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y la forma bilineal $(\ ,\ )_S$ viene dada, para $v = (a_1, a_2, a_3)$ y $w = (b_1, b_2, b_3)$, por

$$\begin{aligned} v^t A w &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_2 - b_3 \\ b_1 - b_3 \\ -b_1 - b_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1(b_2 - b_3) + a_2(b_1 - b_3) + a_3(-b_1 - b_2). \end{aligned}$$

Ahora solo hace falta diagonalizar la matriz S para obtener el polinomio diagonal buscado. Sea $v_1 = (1, 1, 0)$ notemos que $(v_1, v_1)_S = 1$, y su complemento ortogonal $v_1^\perp$ esta dado por

$$b_1 + b_2 - 2b_3 = 0$$

que implica

$$v_1^\perp = \text{gen} \left\{ b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tomemos ahora $v_2 = (-1, 1, 0)$ y notemos que $(v_2, v_2)_S = -1$. Su complemento ortogonal $v_2^\perp$ esta dado por

$$b_1 - b_2 = 0$$

Nuestro último vector v_3 es cualquier solución no trivial al sistema

$$\begin{cases} b_1 + b_2 - 2b_3 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \end{cases}$$

como por ejemplo $v_3 = (1, 1, 1)$. Y la matriz P dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es tal que

$$P^t S P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y finalmente nuestro polinomio $xy - xz - yz$ es isométrico a $2v^2 - 2u^2 - 2w^2$.

CONSIDEREMOS EN TERCER LUGAR el polinomio $xz + yw$. La matriz simétrica S asociada a el es

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la forma bilineal $(\ ,\ )_S$ viene dada, para $v = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $w = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, por

$$\begin{aligned} v^t A w &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \\ &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_3 + a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2. \end{aligned}$$

Ahora solo hace falta diagonalizar la matriz S para obtener el polinomio diagonal buscado. Sea $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ notemos que $(v_1, v_1)_S = 1$, y su complemento ortogonal $v_1^\perp$ esta dado por

$$b_3 + b_1 = 0$$

que implica

$$v_1^\perp = \text{gen} \left\{ b_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tomemos ahora $v_2 = (-1, 0, 1, 0)$ y notemos que $(v_2, v_2)_S = -1$. Su complemento ortogonal $v_2^\perp$ esta dado por

$$b_1 - b_3 = 0.$$

Ahora nuestor vector v_3 es cualqueir solución al sistema

$$\begin{cases} b_3 + b_1 = 0 \\ b_1 - b_3 = 0 \end{cases}$$

como por ejemplo $v_3 = (0, 1, 0, 1)$. Su complemento ortogonal $v_3^\perp$ esta dado por

$$b_4 + b_2 = 0.$$

El último vector v_4 es cualquier solución al sistema

$$\begin{cases} b_3 + b_1 = 0 \\ b_1 - b_3 = 0 \\ b_4 + b_2 = 0 \end{cases}$$

como $v_4 = (0, 1, 0, -1)$. Y la matriz P dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es tal que

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y nuestro polinomio $xz + yw$ es isométrico a $2t^2 - 2u^2 + 2v^2 - 2w^2$.

2.2.2 Ejercicio. Encontrar la forma cuadrática (expresada como un polinomio) asociada a cada una de las siguientes matrices simétricas:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución. Para cada una de las matrices S_i el polinomio cuadrático asociado a ellas se calcula como:

$$q_1 = v^t S_1 v \quad q_2 = v^t S_2 v \quad q_3 = v^t S_3 v,$$

donde v es un vector de $\mathbb{R}^2$ en el caso de q_1 y un vector de $\mathbb{R}^3$ en el caso de q_2 y q_3.

Entonces,

$$\begin{aligned} q_1 &= v^t S_1 v \\ &= (x, y) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x, y) \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ 4x + y \end{pmatrix} \\ &= x(2x + 4y) + y(4x + y) \\ &= 2x^2 + 4xy + 4yx + y^2 \\ &= 2x^2 + 8xy + y^2. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} q_2 &= v^t S_2 v \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ x + 3z \\ x + 3y + 2z \end{pmatrix} \\ &= x(x + 2y + z) + y(x + 3z) + z(x + 3y + 2z) \\ &= x^2 + 2xy + xz + yx + 3yz + zx + 3yz + 2z^2 \\ &= x^2 + 3xy + 2xz + 6yz + 2z^2. \end{aligned}$$

Y finalmente,

$$\begin{aligned} q_3 &= v^t S_3 v \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} x + 3y + 4z \\ 3x + z \\ 4x + y + 2z \end{pmatrix} \\ &= x(x + 3y + 4z) + y(3x + z) + z(4x + y + 2z) \\ &= x^2 + 3xy + 4xz + 3xy + yz + 4xz + yz + 2z^2 \\ &= x^2 + 6xy + 8xz + 2yz + 2z^2. \end{aligned}$$

2.2.3 Ejercicio. Sea q la forma cuadrática en $\mathcal{F}^2$ dada por XY. Encuentre una transformación lineal invertible $T : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2$ tal que

$$q\big(T(a, b)\big) = a^2 - b^2.$$

Solución. Consideremos la transformación $T : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2$ dada, para todo $(a, b) \in \mathcal{F}^2$, por $T(a, b) = (a - b, a + b)$. Para esta T se tiene que

$$q\big(T(a, b)\big) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Además la transformación T es inyectiva, pues $\ker(T) = \{0\}$, y sobreyectiva, puesto que para cualquier vector v en $\mathcal{F}^2$ se pueden hallar elementos $a, b \in \mathcal{F}$ tales que $v = (a - b, a + b)$. La biyectividad implica entonces que T es invertible (más aún, su inversa $T^{-1} : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2$ esta dada por $T^{-1}(x, y) = 1/2(x + y, y - x)$).

Luego la T dada satisface las condiciones del problema.

3 Teorema de Cauchy-Hamilton

4 Forma Canónica de Jordan

5 Teorema de Descomposición Cíclica