Geometría 3

Sexta Tarea: Homotecias

Jhonny Lanzuisi, 1510759

Ejercicio 1

Sean O un punto en el plano, k una constante distinta de cero y v un vector. La composición $T_v \circ T_k$ de la homotecia con centro en O y razón k con la traslación determinada por el vector v es una homotecia. Determine su centro.

Solución. Sean el punto O, el vector v y las transformaciones T_v, T_k como en el enunciado. Para hallar el centro O' de la homotecia $T = T_v \circ T_k$ basta ver la intersección de dos rectas formadas por dos pares de puntos homólogos, es decir, si A, B son dos puntos del plano (como se ve en la figura 1) y A'', B'' sus homólogos por T entonces la intersección de las rectas AA'' y BB'' es O', el centro de la homotecia T buscado.

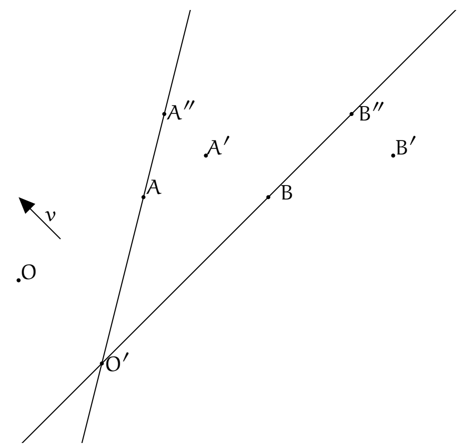

Figura 1: Determinación del centro de la homotecia T con $k = 3/2$.

Nótese que la construcción anterior puede fallar en dos casos, o $k = 1$ o los puntos A'', B'' están sobre la recta AB. En el primer caso la homotecia T_1 es una traslación y no existe ningún punto invariante O'. En el segundo caso basta con tomar cualquier otro punto C del plano exterior a la recta AB y repetir la construcción anterior con C en lugar de B.

Ejercicio 2

Demostrar que el paralelogramo obtenido de unir los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera es homotético a aquel que se obtiene de tra- zar por los extremos de las diagonales, paralelas a la otra. Determinar el centro de la homotecia.

Solución. Sean $ABCD$ un cuadrilátero y $M_{AB}, M_{BC}, M_{CD}, M_{DA}$ los puntos medios de sus lados. Sean además O la intersección de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ y $M'_{AB}, M'_{BC}, M'_{CD}, M'_{DA}$ los vértices del paralelogramo formado al trazar por los extremos de las diagonales paralelas a la otra (como se ve en la figura 2).

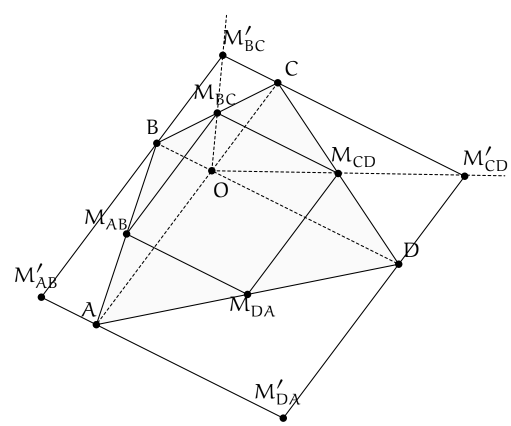

Figura 2: Dos paralelogramos homotéticos, con razón de la homotecia $k = 2$.

Queremos ver que los paralelogramos $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ y M'_{AB} $M'_{BC}M'_{CD}M'_{DA}$ son hometéticos por la homotecia de centro en O.

Como los segmentos $BO, M'_{BC}C$ y OC, BM'_{BC} son pararelos por construcción, el cuadrilatero $BM'_{BC}CO$ es un paralelogramo. Las diagonales de este paralelogramo se intersectan en su punto medio, esto es, se intersectan en M_{BC}. De esto se sigue que los puntos O, M_{BC}, M'_{BC} son colineales y, además,

$$\frac{OM'_{BC}}{OM_{BC}} = 2.$$

Se obtiene un resultado similar al anterior sobre los tres puntos O, M_{CD}, M'_{CD} al considerar el paralelogramo $OCM'_{CD}D$. De esto se sigue que la imágen del segmento $M_{BC}M_{CD}$ por la homotecia de centro en O y razón $k = 2$ es el segmento $M'_{BC}M'_{CD}$.

Una razonamiento análogo al anterior, considerando esta vez los paralelogramos $M'_{AB}BOA$ y $AODM'_{DA}$, se usa para demostrar que el segmento $M_{AB}M_{DA}$ es homotético al segmento $M'_{AB}M'_{DA}$.

Entonces, por todo lo anterior, los paralelogramos $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ y $M'_{AB}M'_{BC}M'_{CD}M'_{DA}$ son homotéticos por la homotecia de centro en O y razón $k = 2$.

Ejercicio 3

Sea $ABCD$ una cuaterna armónica. Sea T_A la homotecia que transforma a C en D y T_B la homotecia que transforma a D en C. Muestre que $T = T_B \circ T_A$ es la simetría central con respecto a C.

Solución. Sean r_a la razón de T_A y r_b la razón de T_B.

Por un lado, se sigue directamente de la definición de T_A y T_B que

$$T(C) = T_B(T_A(C)) = T_B(D) = C,$$

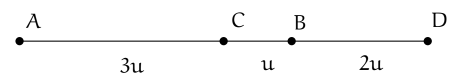

Figura 3: Cuaterna armónica. Razones $r_a = 2, r_b = 1/2$. Longitud de segmentos en relación a la unidad de medida u.

y la homotecia T deja invariante al punto C.

Por otro lado, como AB separa armónicamente a CD (como en la figura 3) se cumple

$$\frac{AD}{AC} = -\frac{BD}{BC},$$

que implica,

$$\frac{BC}{BD}\frac{AD}{AC} = -1.$$

Pero BC/BD y AD/AC son precisamente las razones r_a y r_b. Luego el producto $r_a r_b = -1$ es la razón de T.

Hemos descubierto entonces que T es una homotecia de razón -1 y que deja invariante al punto C. Como todas las homotecias de razón -1 son simetrías centrales, se sigue que T es la simetría central con respecto de C, como se buscaba.