CUARTO EJERCICIO, ESPACIOS DE HAUSDORFF

Topología 1 (07-2020)

Jhonny Lanzuisi,
15 10759

Índice general

Resumen

Cuarto ejercico del curso de: Espacios de Hausdorff y topología producto.

1 Enunciado[1]

Sean A un cojunto de indices y $X_\alpha(\alpha \in A)$ una familia de espacio topológicos. Demuestre que si los X_α son espacios de hausdorff entonces el productoo

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

es un espacio de Hausdorff tanto en la topología caja como en la topología producto.

1.1 Solución

Tomemos dos puntos x, y distintos en $\prod X_\alpha$. Basta con construir un entorno de x que no contenga a y (tanto en la topología caja como en la producto) y el resultado buscado se obtendrá entonces haciendo un argumento simétrico para y.

Como x y y son distintos, existe al menos un índice β en A tal que $x_\beta \neq y_\beta$. Como X_β es un espacio de Hausdorff, existe un entorno U (tanto en la topología producto como en la caja) en X_β de x_β que no intersectan a y_β.

Consideremos la famila de conjuntos U_α dada por

$$U_\alpha = \begin{cases} U & \text{si } \alpha = \beta, \\ X_\alpha & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Notemos que cada U_α es abierto en X_α y tomemos el producto

$$W = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Evidentemente $W \subset \prod X_\alpha$. También, como $x_\beta \in U$ (por la forma en que se eligió W) y $x_\alpha \in X_\alpha$ para $\alpha \neq \beta$, se sigue que $x \in W$. Por ser W un producto de cojuntos abiertos se sigue que es abierto en la topología caja, como además todos menos una cantidad finita de los W_α son iguales a los X_α se tiene que W también es abierto en la topología producto.

Entonces, sin importar cual de las dos topologías tomemos (la caja o la producto) el cojunto W será un entorno del punto x. Solo queda por ver que este entorno no intersecta al punto y. Esto último podemos verlo mediante un argumento por contradicción.

Supongamos que $y \in W$. Entonces se tiene que $y_\alpha \in U_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. Pero esto implica, en particular, que $y_\beta \in U$. Lo cual es una contradicción.

Hemos obtenido entonces que W es un entorno de x que no contiene a y. De manera similar pude construirse un entorno V de y que no contenga a x y queda demostrado que $\prod X_\alpha$ es un espacio de Hausdorff.

1. *En [1]: Capítulo 2, §19, ejercicio 3*

Referencias

[1] J. R. Munkres. *Topology*. Pearson, Harlow, 2. ed edición, 2014. ISBN: 978-1-292-02362-5 (véase página 1).