Geometría 3

CUARTA TAREA

JHONNY LANZUISI, 1510759

Ejercicio 1
Sean A el vértice de un ángulo agudo $\angle A$ y H un punto interior a dicho ángulo. Determine el triángulo ABC que tiene al punto H como ortocentro.

Solución. Llamemos c y b a los lados del ángulo $\angle A$, consideremos las dos perpendiculares por H a cada uno de estos lados y llamemos B y C a los puntos de intersección de dichas perpendiculares, distintos de los pies, con los lados c y b respectivamente. Entonces, por construcción, el triángulo ABC es tal que sus alturas se intersectan en H, es decir, es el triángulo buscado.

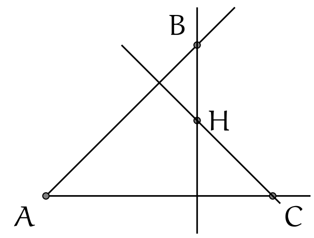


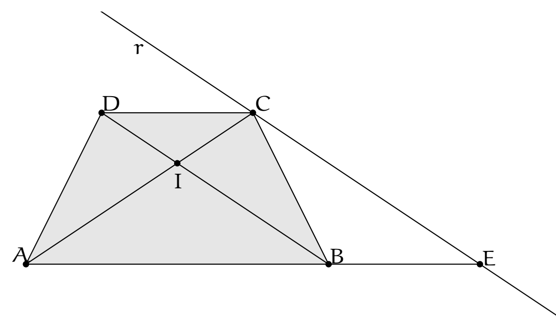
Figura 1: Determinación de un triángulo dado un águlo y el ortocentro.

Ejercicio 2
Construir un triángulo conocido un vértice, el ortocentro y la circunferencia circunscrita.

Solución. Sean A el vértice conocido, H el ortocentro y O el circuncentro (como se tiene la circunferencia circunscrita se puede determinar su centro) del triángulo buscado. Tomemos los puntos medios A_h y O_h de los segmentos AH y OH respectivamente. Entonces la circunferencia de centro en O_h y que pasa por A_h es la circunferencia de Feuerbach del triángulo buscado. Llamemos D al punto de intersección (distinto de A_h) de la recta A_hO_h con la circunferencia de Feuerbach, este punto D es el punto medio del lado opuesto al vértice A del triángulo buscado. Finalmente, tomemos la perpendicular a la recta AH que pasa por D.

Entonces los dos puntos de intersección de dicha perpendicular con la circunferencia circunscrita son los otros dos vértices buscados. Nótese que, si el ortocentro se encuentra dentro, fuera, o sobre la circunferencia, el argumento anterior funciona igualmente.

hollla



Ejercicio 3
Demostrar que las paralelas a dos lados de un triángulo por el baricentro cortan al tercer lado en tres segmentos iguales.

Solución. Sean ABC un triángulo, G su baricentro y M_a el punto medio del lado opuesto al vértice A. Llamemos A_g al punto medio del segmento AG. Como AM_a es una mediana, la distancia GM_a es la mitad de la distancia AG y se sigue que los tres segmentos AA_g, A_gG y GM_a son congruentes. Si trazamos dos paralelas al lado AB por los puntos A_g y G obtenemos que los puntos de corte H,I de dichas paralelas con el lado a dividen al segmento BM_a en tres partes iguales puesto que esta es la construcción clásica para dividir un segmento en partes iguales. Lo mismo ocurre si trazamos dos paralelas al lado AC por los puntos A_g y G: obtendremos dos puntos de corte J,K que dividen al segmento $M_a C$ en tres partes iguales. Por todo lo anterior, tenemos

$$BI = \frac{2}{3} BM_a = \frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{a}{3},$$

similarmente

$$CJ = \frac{2}{3} CM_a = \frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{a}{3},$$

y por último

$$IJ = a - BI - CJ = a - \frac{a}{3}\frac{a}{3} = \frac{a}{3}.$$

Y entonces los segmentos BI, IJ y JC, que son los determinados por las paralelas a los lados b y c que pasan por G, dividen al lado BC en tres partes iguales como se buscaba.