Cálculo II

Segundo Problemario

Jhonny Lanzuisi, 1510759

Ejercicio 1

Verifique las siguientes identidades en el complejo:

1. $|z|^2 \geqslant 2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)|$,
2. $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$,
3. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Solución. Veamos cada parte por separado.

1. Primero, notemos que para todo a y b en $\mathcal{R}$ la siguiente desigualdad

   $$0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

   implica que $a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$. Ahora sea $z = a + bi$ un número complejo,

   $$\begin{aligned} |z|^2 &= a^2 + b^2 \\ &\geqslant 2|ab| \\ &= 2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)|. \end{aligned}$$

2. Sean $z_1 = t + ui$ y $z_2 = v + wi$. Notemos primero que $\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = tv + uw$. Ahora

   $$\begin{aligned} |z_1 \pm z_2|^2 &= (t \pm v)^2 + (u \pm w)^2 \\ &= (t^2 \pm 2tv + v^2) + (u^2 \pm 2uw + w^2) \\ &= (t^2 + u^2) + (v^2 + w^2) \pm 2(tv + uw) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}). \end{aligned}$$

3. Sean z_1 y z_2 igual que antes. Utilizando el resultado de la parte anterior, tenemos que $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ es

   $$\big(|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})\big) + \big(|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})\big)$$

   que se reduce a

   $$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Ejercicio 2

Sea $a \in \mathcal{C}$ tal que $a^{n-1} = 0$ y $a \neq 0$.

1. Demostrar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k = 0$ y que
2. Si $a = a_0$ es una raíz enésima de la unidad, y si $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ son todas las raíces de $z^n = 1$

   demuestre que $a_0^k = a_k$

   para $k = 0, 1, \dots, n-1$, y que

   $$1 + a + a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0.$$

Ejercicio 3

Hallar la imagen del siguiente conjunto

$$\Omega = \{z \in \mathcal{C} \mid |z| = R\}$$

bajo la transformación

$$f(z) = z/(\overline{z}).$$