Definiciones Básicas

ejercicio 1

Si A y B son anillos, pruebe que el producto cartesiano $A \times B$ es un anillo, el cual llamamos producto directo.

Solución. Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ definimos las siguientes operaciones,

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

y

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

donde las sumas y los productos son los de A y B respectivamente. El conjunto $A \times B$ junto con estas operaciones es un anillo.

En efecto, tenemos que $(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in A \times B$ y que $(a_1 a_2, b_1 b_2) \in A \times B$ ya que A y B son ambos anillos, y por lo tanto el conjunto $A \times B$ es cerrado bajo las operaciones definidas. Cabe descatar también que, evidentemente, $A \times B \neq \emptyset$ ya que necesariamente $(0_a, 0_b) \in A \times B$ (con 0_a el neutor de A y 0_b el neutro de B, con respecto a la suma).

Nótese también que para la suma se cumple

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ &= (a_2 + a_1, b_2 + b_1) \\ &= (a_2, b_2) + (a_1, b_1)\end{aligned}$$

la segunda igualdad se sigue del hecho de que tanto A como B son grupos abelianos respecto a la suma. Por otra parte, sea $(a_3, b_3) \in A \times B$ tenemos que

$$\begin{aligned}((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3) &= (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3) \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3), (b_1 + (b_2 + b_3))) \\ &= (a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3, b_3))\end{aligned}$$

en donde, igual que antes, la segunda igualdad se sigue del hecho de que la propiedad asociativa se cumple en A y en B. Por estos dos hechos, la operación suma en $A \times B$ es conmutativa y asociativa.

Consideremos ahora la existencia de elementos distinguidos. Para todo $(a, b) \in A \times B$ es claro que

$$(a, b) + (0_a, 0_b) = (0_a, 0_b) + (a, b) = (a, b)$$

también es fácil ver que, si $-a \in A$ es el inverso aditivo de a y $-b \in B$ es el inverso aditivo de b entonces $(-a, -b)$ es el inverso aditivo de (a, b). Por todo lo anterior, el conjunto $A \times B$ es un grupo abeliano con la suma.

Veamos por último las propiedades del producto definido en $A \times B$. Notemos que

$$\begin{aligned}((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) &= (a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3) \\ &= (a_1(a_2 a_3), b_1(b_2 b_3)) \\ &= (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3))\end{aligned}$$

en donde la segunda igualdad se sigue del hecho de que los productos en A y B son asociativos. Para el producto, también se cumple que

$$\begin{aligned}(a_1, b_1)((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) &= (a_1(a_2 + a_3), b_1(b_2 + b_3)) \\ &= (a_1 a_2 + a_1 a_3, b_1 b_2 + b_1 b_3) \\ &= (a_1 a_2, b_1 b_2) + (a_1 a_3, b_1 b_3)\end{aligned}$$

en donde la segunda igualdad se sigue de la propiedad distributiva del prodcuto en A y en B. La distributividad a la derecha se prueba de forma analoga. Por todo lo anterior, el conjuto $A \times B$ con las operaciones definidas es un anillo.

ejercicio 2

Demuestre que el siguiente conjunto es un anillo conmutativo con unidad:

$$\mathbb{Z}(i) = \{a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Solución. Sabemos por lo visto en clase que el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ es un anillo conmutativo con unidad. Como todos los elementos de $\mathbb{Z}(i)$ son elementos de $\mathbb{C}$ entonces se sigue que necesariamente $\mathbb{Z}(i)$ es un anillo, ya que si alguna de las propiedades de un anillo fallase para algunos elementos de $\mathbb{Z}(i)$ también fallaría para estos vistos como elementos en $\mathbb{C}$,bajo las mismas operaciones, lo cual es imposible. Lo mismo sirve para probar que la con[redacted]utatividad de $\mathbb{Z}(i)$ se sigue de la conmutatividad en $\mathbb{C}$ con el producto usual. Por último, notemos que la unidad de $\mathbb{C}$ es $(1, 0)$, que como $1 \in \mathbb{Z}$ y $0 \in \mathbb{Z}$, entonces $(1, 0) \in \mathbb{Z}(i)$; y por lo tanto $\mathbb{Z}(i)$ posee unidad.

ejercicio 3

Para cada anillo A, determine su conjunto de unidades $U(A)$.

Solución.

1. Consideremos el anillo $A = \mathbb{Z}_6$. Operando en $\mathbb{Z}_6$ podemos ver que $U(A) = \{1, 5\}$ debido a que $(1)(1) = 1$ y $(5)(5) = 1$, para cualquier otro elemento en $\mathbb{Z}_6$ es imposible encontrar un inverso multiplicativo.

2. Consideremos el anillo $A = 5\mathbb{Z}$. Este anillo no posee unidad multiplicativa, debido a que la unidad del producto de enteros es el 1 y este elemento no esta en el conjunto $5\mathbb{Z}$, por lo que el conjunto $U(A) = \varnothing$.

3. Consideremos el anillo $A = \mathbb{Z}_7$. Este anillo, como 7 es primo, es un cuerpo. Se sigue que todos los elementos no nulos son unidades y que $U(A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En efecto: $(1)(1) = 1$, $(2)(4) = 1$, $(3)(5) = 1$, $(4)(2) = 1$, $(5)(3) = 1$, $(6)(6) = 1$.

4. Consideremos el anillo $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$. Notemos primero que en $\mathbb{Z}$ las únicas unidades son $-1, 1$; en $\mathbb{Q}$ por otra parte las unidades son todos los elementos no nulos. Por como está definido el producto en A se sigue que, por todo lo dicho antes, las unidades son $U(A) = \{(\pm 1, a, \pm 1) \in A : a \neq 0\}$.

ejercicio 4

Si A es un anillo tal que $a + b = ab \ \forall\ a, b \in A$, demuestre que $A = \{0\}$.

Solución. Supongamos que existe un $a \neq 0$ en A. Tenemos entonces que, por la definición de la suma

$$a + 0 = a0 = 0$$

pero de aqui se sigue que

$$a + 0 = 0 \rightarrow a = 0 - 0 \rightarrow a = 0$$

y como a era distinto de cero, llegamos a una contradicción. Tenemos entonces que no puede existir ningún $a \neq 0$ en A.