Álgebra 3

Tarea: Descomposición Primaria

Jhonny Lanzuisi, 1510759

teorema. *Sea T una transformación lineal en un espacio $\mathcal{V}$ de dimensión finita. Sean $v_1, \dots, v_m$ vectores de $\mathcal{V}$. Para cada $1 \leq i \leq m$ definimos*

$$F_i = M_{T|_{Z(v_i,T)}}.$$

Supongamos además que los F_i son coprimos dos a dos. Si $U = \sum_{1\leq i\leq m} Z(v_i, T)$ demostrar que

$$U = \bigoplus_{1\leq i\leq m} Z(v_i, T) \quad y \quad U = Z(v, T),$$

donde $v = v_1 + v_2 + \dots + v_m$.

demostración. Por hipótesis los $Z(v_i, T)$ generan a U, para ver que U es suma directa de estos solo hace falta ver que son independientes. Para ver esto último supongamos que existe un $u \in Z(v_1, T) \cap (Z(v_2, T) + \dots + Z(v_m, T))$, esto es,

$$(1) \quad u \in Z(v_1, T) \qquad \text{y}$$
$$(2) \quad u \in Z(v_2, T) + \dots + Z(v_m, T)$$

hagamos $F = \prod_{i\neq 1} F_i = F_2F_3 \cdots F_m$.

Por hipótesis F_1 y F son coprimos y por el teorema del ideal principal se sigue que $(F_1, F) = \mathcal{F}[x]$ y por lo tanto existen $h_1, h_2 \in \mathcal{F}[x]$ tales que $h_1F_1 + h_2F = 1$. De esto último se sigue que el operador $h_1F_1(T) + h_2F(T)$ es la identidad y

$$h_1F_1(T)(u) + h_2F(T)(u) = \mathrm{id}(u) = u.$$

Pero por (1) y (2) se tiene que

$$h_1F_1(T)(u) + h_2F(T)(u) = 0$$

y entonces $u = 0$.

Por una repeticion del argumento anterior obtenemos $Z(v_i, T) \cap (Z(v_1, T) + \dots + Z(v_{i-1}, T) + Z(v_{i+1}, T) + \dots + Z(v_m, T)) = 0$ y se tiene entonces que los $Z(v_i, T)$ son independientes, como se buscaba.

Por último, notemos que

$$\begin{aligned} Z(v, T) &= Z(v_1 + \dots + v_m, T) \\ &= \mathrm{gen}\{v_1 + \dots + v_m, \dots, T^m(v_1 + \dots + v_m, T)\} \\ &= \mathrm{gen}\{v_1 + \dots + T^m(v_1), \dots, v_m + \dots + T^m(v_m)\} \\ &= Z(v_1, T) + Z(v_2, T) + \dots + Z(v_m, T) \\ &= U. \end{aligned}$$