# Tarea: Matrices Diagonales de Bloques

JHONNY LANZUISI, 1510759

TEOREMA. *Si* $A = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \cdots \oplus A_{mm}$ *es una matriz bloque diagonal, entonces*

I. *El polinomio característico de* $A$, $p_A$, *esta dado por*

$$p_A(t) = \prod_{i=1}^{m} p_{A_{ii}}(t).$$

II. *El polinomio minimal de* $A$, $m_A$, *esta dado por*

$$m_A = \mathrm{mcm}(A_{11}, \dots, A_{mm}).$$

III. *Para cualquier polinomio* $f$ *se tiene que*

$$f(A) = f(A_{11}) \oplus f(A_{22}) \oplus \cdots \oplus f(A_{mm}).$$

DEMOSTRACIÓN. Para ver (I), hagamos $p_A(t) = \det(A - tI_m)$ y supongamos que las matrices $A_{ii}$ son de tamaño $n_i \times n_i$ donde los $n_i$ son números positivos ($0 \leqslant i \leqslant m$), luego

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det\left((A_{11} - tI_{n_1}) \oplus (A_{22} - tI_{n_2}) \oplus \cdots \oplus (A_{mm} - tI_{n_m})\right) \\ &= \det\left(A_{11} - tI_{n_1}\right) \cdots \det\left(A_{mm} - tI_{n_m}\right) \\ &= p_{A_{11}}(t) p_{A_{22}}(t) \cdots p_{A_{mm}}(t). \end{aligned}$$

Consideremos (III). Sea $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ un polinomio en $t$; entonces, tomando en cuenta que las potencias de una matriz diagonal se obtienen elevando los elementos de la diagonal, tenemos

$$\begin{aligned} f(A) &= A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I \\ &= (A_{11}^n \oplus \cdots \oplus A_{mm}^n) \\ &\qquad + a_{n-1}(A_{11}^{n-1} \oplus \cdots \oplus A_{mm}^{n-1}) + \cdots \\ &\qquad\qquad + a_1(A_{11} \oplus \cdots \oplus A_{mm}) + a_0 I \\ &= (A_{11}^n + a_{n-1}A_{11}^{n-1} + \cdots + a_1 A_{11} + a_0 I) \oplus \cdots \\ &\qquad \oplus (A_{mm}^n + a_{n-1}A_{mm}^{n-1} + \cdots + a_1 A_{mm} + a_0 I) \\ &= f(A_{11}) \oplus f(A_{22}) \oplus \cdots \oplus f(A_{mm}). \end{aligned}$$

Consideremos ahora (II). Llamemos $m_i$ al polinomio minimal asociado a $A_{ii}$ ($0 \leqslant i \leqslant m$), entonces tenemos que $m_A(A_{ii}) = 0$ y $m_i$ divide a $m_a$ de donde se sigue $\mathrm{mcm}(A_{11}, \dots, A_{mm})$ divide a $m_A$. Por otro lado, tenemos que $\mathrm{mcm}(A_{11}, \dots, A_{mm})(A) = 0$ por lo que $m_A$ divide a $\mathrm{mcm}(A_{11}, \dots, A_{mm})$ y se obtiene la igualdad $m_A = \mathrm{mcm}(A_{11}, \dots, A_{mm})$.