Álgebra 3

TERCERA TAREA

Jhonny Lanzuisi, 1510759

Ejercicio 4.2.5

Usamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt sobre los vectores de la base canónica de $\mathscr{P}^2$: $e_1 = 1, e_2 = t$ y $e_3 = t^2$.

Empezamos haciendo $v_1 = e_1$.

Hagamos ahora

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1,$$

donde

$$\langle e_2, e_1\rangle = \int_{-1}^{1} t \, \mathrm{d}t = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0,$$

y

$$v_2 = e_2 - 0w_1 = t.$$

Hagamos también

$$v_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 - \frac{\langle e_3, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2,$$

donde

$$\frac{\langle e_3, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} = \frac{\langle e_3, e_1\rangle}{2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3}$$

y

$$\frac{\langle e_3, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} t^3 \, \mathrm{d}t = 0,$$

por lo tanto

$$v_3 = e_3 - \frac{1}{3}e_1 - 0e_2 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Solo queda normalizar los vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ para obtener una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$. Hagamos

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}t$$
$$u_1 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 4.2.6

Calculamos directamente:

$$(b_1c_2 - c_1b_2, c_1a_2 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (a_1, b_1, c_1)$$

que es

$$a_1b_1c_2 - a_1c_1b_2 + b_1c_1a_2 - b_1a_1c_2 + c_1a_1b_2 - c_1a_2b_1 = 0.$$

Similarmente

$$(b_1c_2 - c_1b_2, c_1a_2 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (a_2, b_2, c_2)$$

que es

$$a_2b_1c_2 - a_2c_1b_2 + b_2c_1a_2 - b_2a_1c_2 + c_2a_1b_2 - c_2a_2b_1 = 0.$$

Ejercicio 4.3.1

PRIMERA PARTE Primero ortonormalizemos los vectores $(1, 2, 2)$ y $(0, 1, -1)$. Hagamos

$$u_1 = 1/3(1, 2, 2) \qquad \text{y}$$
$$u_2 = 1/\sqrt{2}(0, 1, -1).$$

Entonces la proyeccion sobre $W = \mathrm{gen}\{(1, 2, 2), (0, 1, -1)\}$ esta dada por:

$$\begin{aligned}\mathrm{Proy}_W(x, y, z) = 1/9(x + 2y + 2z)(1, 2, 2) \\ - 1/2(y - z)(0, 1, -1)\end{aligned}$$