Subanillos e Ideales, Tarea 2

Ejercicio 1

Sean $\operatorname{id} a, \operatorname{id} b$ ideales de A, demuestre que $\operatorname{id} a + b$ es un ideal de A.

Solución. Sean a y b en $\operatorname{id} a + b$. Entonces se tiene que $a = v_1 + w_1$ y $b = v_2 + w_2$ para algunos v_1, v_2 en $\operatorname{id} a$ y w_1, w_2 en $\operatorname{id} b$.

Al restar a con b,

$$\begin{aligned} a - b &= (v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) \\ &= (v_1 - v_2) + (w_1 - w_2), \end{aligned}$$

se tiene que $(a - b) \in \operatorname{id} a + b$ debido a que $(v_1 - v_2)$ está en $\operatorname{id} a$ y $(w_1 - w_2)$ está en $\operatorname{id} b$ —pues tanto $\operatorname{id} a$ como $\operatorname{id} b$ son ideales—.

Ahora, tomemos un elemento z de A. El producto az, dado por

$$az = (v_1 + w_1)z = v_1 z + w_1 z,$$

es un elemento de $\operatorname{id} a + b$ puesto que $v_1 z$ pertenece a $\operatorname{id} a$ y $w_1 z$ pertenece a $\operatorname{id} b$ —debido a que tanto $\operatorname{id} a$ como $\operatorname{id} b$ son ideales—. Es claro que el producto za, dado por

$$za = z(v_1 + w_1) = zv_1 + zw_1,$$

es también un elemento de $\operatorname{id} a + b$.

Como $\operatorname{id} a + b$ es cerrado bajo al diferencia y el prodcuto por elementos de A, entonces es un ideal de A.

Ejercicio 2

Sea R un anillo unitario. Demuestre que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son elementos de R entonces

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1) + (a_2) + \cdots + (a_n).$$

Solución. Por conveniencia usaremos la notación RaR para denotar las sumas finitas de la forma

$$r_1 a s_1 + r_2 a s_2 + \cdots + r_n a s_n \quad (r_i, s_i \in R).$$

El ideal denotado por $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ —al que de ahora en adelante llamaremos $\operatorname{id} a$— es el ideal mas pequeño que contiene a los $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Como $\operatorname{id} a$ es un ideal, se tiene que $0 \in \operatorname{id} a$ y que, como es cerrado bajo la suma,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \in \operatorname{id} a$$

donde puede ser que algún a_i sea cero. Además, como $\operatorname{id} a$ es cerrado bajo el producto por elementos arbitrarios de R, debemos tener que

$$R(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)R \in \operatorname{id} a$$

donde, al igual que antes, algunos de los a_i pueden ser cero.

Como las condiciones anteriores son las *mínimas necesarias* que debe cumplir $\operatorname{id} a$, tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{id} a &= R(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)R \\ &= Ra_1R + Ra_2R + \cdots + Ra_nR \\ &= (a_1) + (a_2) + \cdots + (a_n). \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Demuestre que si $\operatorname{id} i$ es un ideal propio (a izquierda o derecha, o ambos) de un anillo unitario A, entonces ningún elemento de $\operatorname{id} i$ posee un inverso multiplicativo

Solución. Sea $\operatorname{id} i$ un ideal de A y supongamos que existe un $a \in \operatorname{id} i$, no nulo, tal que su inverso a^{-1} existe en A. Como $\operatorname{id} i$ es cerrado bajo la multiplicación por cualquier elemento de A, se sigue que $aa^{-1} = 1 \in A$. Luego, $\operatorname{id} i$ contiene a $r = r1$ para todo $r \in A$; es decir, $A \subseteq \operatorname{id} i$, y tenemos la igualdad $\operatorname{id} i = A$. Esto contradice el hecho de que $\operatorname{id} i$ era un ideal propio.

Ejercicio 4

Considere el anillo de las partes de X. Demuestre que el conjunto J dado por

$$J = \{S \text{ en } \text{ tales que } S \text{ es finito}\}$$

es un ideal de .

Solución. Sean S y V en J. Como el opuesto de V es el mismo conjunto V entonces SV, dado por

$$SV = (S - V) \cup (V - S),$$

puede ser considerado como la resta de S con V. Dado que la unión de conjuntos finitos es finita, la resta SV estará en J siempre que $S - V$ y $V - S$ sean finitos. Esto en efecto ocurre pues $S - V \subseteq S$ (de la misma forma $V - S \subseteq V$) y S (al igual que V) es finito, por lo que $S - V$ (y $V - S$) es finito —un conjunto finito no puede tener un subconjunto infinito. Luego SV está en J y este es cerrado bajo la diferencia.

Sea A un elemento de . El producto de A con V, dado por

$$AV = A \cap V,$$

es también finito pues, al ser uno de los conjunto finitos —y sabemos que V lo es— los elementos que este tiene en común con el otro (la intersección) no puede ser infinita.

Por lo anterior J es cerrado bajo la diferencia y bajo el producto por elementos de . Entonces J es un ideal de .

Ejercicio 5

Sea $h\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos. Demuestre que, si A es de característica n (denotado por $\operatorname{car} A = n$), $h(A)$ es un subanillo de B de característica menor o igual que n.

Solución. Veamos primero que $h(A)$ es un subanillo de A'. Sean r y s elementos de $h(A)$, entonces existen a y b en A tales que $h(a) = r$ y $h(b) = s$. La diferencia de r y s, dada por

$$r - s = h(a) - h(b) = h(a - b),$$

es también un elemento de $h(A)$ puesto que $a - b$ pertenece a A.

Los productos rs y sr, dados por

$$rs = h(a)h(b) = h(ab)$$

y

$$sr = h(b)h(a) = h(ba),$$

son ambos elementos de $h(A)$ debido a que tanto ab como ba pertenecen a A. Hemos demostrado entonces que $h(A)$ es un subanillo de A'.

Consideraremos ahora la característica de $h(A)$. Supongamos que $\operatorname{car} h(A) = m$ y que $n < m$.

Como n es la carcaterística de A, tenemos que

$$nh(a) = h(na) = h(0) = 0$$

y entonces $\operatorname{car} h(A) = n$ que es una contradicción, pues la característica de $h(A)$ es mayor que n. Por lo tanto, debe ocurrir que $\operatorname{car} h(A) \leq n$ como se buscaba.