Ejercicios de topología. Evaluación final.

Topología 1 (4 de octubre de 2020)

Jhonny Lanzuisi,
15 10759

Ejercicios del curso de topología 1. Los temas van desde las definiciones básicas hasta espacios conexos. Estos diez ejercicios representan la evaluación final del curso.

Los diez ejercicios están distribuidos de la siguiente manera: uno en §1, dos en §2, dos en §3, uno en §4, uno en §5 y tres en §6.

A veces algunos ejercicios comparten parte de un enunciado, en cuyo caso dicha parte del enunciado aparece una sola vez antes de los ejercicios. Los párrafos marcados con 'SOLUCIÓN' corresponden a la solución de cada ejercicio y están colocados inmediatamente después de estos.

Índice general

1 Definición de espacio topológico

Sea X un conjunto y sea $\mathscr{T}_c$ el la colección de todo los conjuntos U de X tales que $X \setminus U$ es numerable o es todo X. Demuestre que $\mathscr{T}_c$ es una topología sobre X.[1]

SOLUCIÓN. Primero que todo, el conjunto vacío pertenece a $\mathscr{T}_c$ debido a que $X \setminus \emptyset = X$ y $X \in \mathscr{T}_c$ por la definición de $\mathscr{T}_c$. También se tiene que X es un conjunto abierto puesto que $X \setminus X = \emptyset$ y el conjunto vacío es finito.

Supongamos que $\{U_k\}$ es una familia de elementos de $\mathscr{T}_c$. Entonces[2]

$$X \setminus \bigcup U_k = \bigcap (X \setminus U_k).$$

Pero el lado derecho de la igualdad es numerable[3] puesto que estas intersecciones son subconjuntos de todos los $X \setminus U_k$ y estos últimos son numerables.

Supongamos ahora que $\{U_1, \dots, U_n\}$ son una cantidad finita de elementos de $\mathscr{T}_c$. Entonces

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus U_i.$$

Donde el lado derecho de la igualdad es numerable pues la unión de conjuntos numerables es numerable[4] .

Hemos visto que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{T}_c$ pertenecen nuevamente a $\mathscr{T}_c$, esto es, que $\mathscr{T}_c$ es una topología sobre X.

1. Ejercicio tomado del Munkres [3, §13, Nº 3]

2. Este tipo de igualdades se siguen de las leyes de De Morgan

3. Véase el Teorema 1

4. Véase el teorema 2

2 Base de una topología y relaciones de orden

Sea X un conjunto ordenado parcialmente. Sean $U_L(x) = \{y \mid y \prec x\}$ y $U_R(x) = \{y \mid x \prec y\}$, con x, y pertenecientes a X.[5]

5. Ejercicio tomado del Dugundji [2, Cap. 3, §3, Nº 6]

2.1 Bases

Demuestre que las familias $\{U_L(x)\}$, $\{U_R(x)\}$ son bases de dos topologías $\mathscr{T}_L$ y $\mathscr{T}_R$, respectivamente, sobre X. Demuestre también que G esta en $\mathscr{T}_L$ si, y solo si, se cumple que

$$x \in G \implies U_L(x) \subset G.$$

Demuestre que en $\mathscr{T}_L$ las intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos dan conjuntos abiertos.

SOLUCIÓN. Primero veamos que las familias $\{U_L(x)\}$, $\{U_R(x)\}$ cubren el conjunto X. Esto no es muy complicado puesto que, para todo $x \in X$, los conjuntos $U_L(x)$ y $U_R(x)$ contienen a x (debido a la reflexividad de $\prec$) de donde se sigue que X puede escribirse como la unión de los $U_L(x)$ o como unión de los $U_R(x)$.

Tomemos ahora un elemento y_1 en $U_L(x_1) \cap U_L(x_2)$, donde x_1, x_2 son elementos de X. Entonces

$$y_1 \in U_L(y_1),$$

por la misma razón que antes, y

$$U_L(y_1) \subset U_L(x_1) \cap U_L(x_2)$$

puesto que si tomamos un $y \in U_L(y_1)$ entonces $y \prec y_1$, pero como $y_1 \prec x_1$ y $y_1 \prec x_2$, se tiene que $y \prec x_1$ y $y \prec x_2$ por transitividad. Hemos descubierto que para todo elemento en la intersección de dos U_L podemos conseguir otro conjunto U_L tal que contiene a dicho elemento y esta contenido en la intersección, es decir, que la familia $\{U_L(x)\}$ forma una base para una topología sobre X por el teorema 3. Esta topología es $\mathscr{T}_L$.

Un argumento análogo al anterior nos da como resultado que la familia $\{U_R(x)\}$ también es base de una topología sobre X, y esta topología es $\mathscr{T}_R$.

Supongamos que G pertenece a $\mathscr{T}_L$, entonces G se escribe como una unión arbitraria de elementos básicos, es decir,

$$G = \bigcup_{\alpha} U_L(x_\alpha). \tag{1}$$

Si tomamos un $x \in G$ se sigue que x debe pertenecer a alguno de los $U_L(x_\alpha)$. Como x pertenece a este elemento básico se tiene que $x \prec x_\alpha$ pero entonces, por definición de los U_L,

$$U_L(x) \subset U_L(x_\alpha)$$

y por la igualdad en 1,

$$U_L(x) \subset U_L(x_\alpha) \subset G$$

de donde se tiene, claramente, que $U_L(x) \subset G$.

Supongamos ahora que para cada $x \in G$ se cumple que

$$x \in G \implies U_L(x) \subset G.$$

Pero como $U_L(x)$ es un elemento de la base de $\mathscr{T}_L$, la implicación anterior da de forma inmediata, por el teorema 4, que $G \in \mathscr{T}_L$.

Sea $\mathscr{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de conjuntos abiertos de $\mathscr{T}_L$, y consideremos la intersección

$$\bigcap \mathscr{A}.$$

Si tomamos un $x \in \cap\mathscr{A}$ entonces x pertenece a todos los A_α. Como estos conjuntos A_α son abiertos se sigue, por la parte anterior, que $U_L(x)$ esta contenido en todos los A_α. Pero esto es lo mismo que decir que

$$U_L(x) \subset \bigcap \mathscr{A},$$

y, nuevamente por la parte anterior, se tiene que $\cap\mathscr{A}$ es un conjunto abierto.

2.2 Comparación de topologías

Demuestre que la topología discreta es la única mas fina que $\mathscr{T}_L$ y $\mathscr{T}_R$. Además las topologías $\mathscr{T}_L$ y $\mathscr{T}_R$ no son comparables.

SOLUCIÓN. Sea $\mathscr{T}$ una topología sobre X tal que

$$\mathscr{T}_L \subset \mathscr{T} \quad \text{y} \quad \mathscr{T}_R \subset \mathscr{T}. \tag{2}$$

Sabemos que al menos una tal $\mathscr{T}$ existe: la topología discreta, a la que llamaremos $\mathscr{D}$, por lo que tiene sentido preguntarse si existe otra topología con esta propiedad.

Veamos. Dado cualquier $x \in X$, la topología $\mathscr{T}$ debe cumplir (por 2)

$$U_L(x) \in \mathscr{T} \quad \text{y} \quad U_R(x) \in \mathscr{T}.$$

Pero como $\mathscr{T}$ es una topología la intersección $U_L(x) \cap U_R(x) = \{x\}$ debe pertenecer también a $\mathscr{T}$. Entonces todos los conjuntos de la forma $\{x\}$ $(x \in X)$ pertenecen a $\mathscr{T}$, es decir, $\mathscr{D} \subset \mathscr{T}$.

Pero como $\mathscr{D}$ siempre es la topología mas fina, se tiene también $\mathscr{T} \subset \mathscr{D}$, por lo que $\mathscr{D} = \mathscr{T}$.

Es decir, $\mathscr{D}$ es la única topología más fina que $\mathscr{T}_L$ y $\mathscr{T}_R$.

Notemos primero que se puede establecer un criterio análogo al dado en 2.1 para caracterizar los conjuntos abiertos de $\mathscr{T}_R$, y la demostración de este hecho es muy parecida a la que esta en 2.1.

Tomemos dos elementos x_1, x_2 de X tales que $x_1 \prec x_2$. Entonces el conjunto $U_L(x_1)$, que es abierto en $\mathscr{T}_L$, *no contiene* a ningún elemento y que suceda a x_1 (por ejemplo, no contiene a x_2) por lo que $U_R(x_1) \not\subset U_L(x_1)$ y por lo tanto $U_L(x_1)$ no es abierto en $\mathscr{T}_R$. Un ejemplo análogo nos dará un conjunto abierto en $\mathscr{T}_R$ que no es abierto en $\mathscr{T}_L$. Entonces se tiene que $\mathscr{T}_L \not\subset \mathscr{T}_R$ y $\mathscr{T}_R \not\subset \mathscr{T}_L$.

3 Funciones. Continuidad e inclusiones.

3.1 Continuidad

Sean X y Z dos espacios topológicos. Si $Y \subset Z$ y $f \colon X \to Y$, entonces f es continua como una función de X a Y si, y solo si, f es continua como una función de X a Z.[6]

6. Ejercicio tomado del Willard [1, Nº E7]

SOLUCIÓN. Supongamos primero que f es continua como una función de X a Y. Tomemos un conjunto abierto V de Z. Entonces tenemos que

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap Y),$$

y, como $V \cap Y$ es un conjunto abierto en Y (en la topología relativa), la continuidad de f nos da como resultado que $f^{-1}(V)$ es abierto en X y que f es continua como una función de X a Z.

Supongamos ahora que la función f es continua como una función de X a Z. Tomemos un abierto U de Y. Como Y es un subespacio de Z el conjunto U se escribe como $Y \cap V$, con V algún abierto de Z. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}(Y \cap V) \\ &= f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(V) \\ &= X \cap f^{-1}(V) \\ &= f^{-1}(V) \end{aligned}$$

de donde se sigue que $f^{-1}(U)$ es abierto en X y por lo tanto f es continua como función de X a Y.

3.2 Inclusiones

Sean X, Y dos conjuntos. Dados $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$, entonces las funciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por

$$f(x) = (x, y_0) \quad \text{y} \quad g(y) = (x_0, y)$$

son *inclusiones*[7] .

7. Ejercicio tomado del Munkres [3, §18, Nº 4].

SOLUCIÓN. La función f es inyectiva puesto que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

implica

$$(x_1, y_0) = (x_2, y_0)$$

y esto, por definición del producto cartesiano, implica que $x_1 = x_2$. Un razonamiento análogo nos dice que la función g también es inyectiva.

Entonces, si restringimos el rango de f y g a sus imágenes directas obtenemos dos funciones f', g' biyectivas. Para ver que f, g son inclusiones solo hace falta ver que f', g' y sus inversas son continuas.

Para ver que f' es continua, notemos que esta función se puede escribir de la forma

$$f' = (\mathrm{id}_X, \gamma),$$

donde id_X es la identidad de X y $\gamma : X \to Y$ es la función constantemente igual a y_0.

Entonces la continuidad de f' se sigue de la continuidad de estas dos funciones[8] . Un argumento análogo sirve para la función g' y por lo tanto f', g' son ambas continuas.

8. Véase el teorema 5

Al igual que antes, una vez que veamos que f'^{-1} es continua un argumento completamente análogo nos dará como resultado que g'^{-1}

es continua. Para ver la continuidad de f'^{-1} notemos que esta función esta dada, al fijar un $y_0 \in Y$, por

$$f'^{-1} = \pi$$

donde π es la proyección canónica de $X \times \{y_0\}$ sobre X. Entonces la continuidad de f'^{-1} se sigue de la continuidad de π[9] .

9. Véase el teorema 6

Tenemos entonces que f', g' y sus inversas son continuas, por lo que f, g son inclusiones.

4 Topología producto

Sean A un conjunto de indices y $X_\alpha (\alpha \in A)$ una familia de espacio topológicos. Demuestre que si los X_α son espacios de hausdorff entonces el producto

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

es un espacio de Hausdorff tanto en la topología caja como en la topología producto.[10]

10. Ejercicio tomado del Munkres [3, §19, Nº 3]

SOLUCIÓN. Tomemos dos puntos x, y distintos en $\prod X_\alpha$. Basta con construir un entorno de x que no contenga a y (tanto en la topología caja como en la producto) y el resultado buscado se obtendrá entonces haciendo un argumento simétrico para y.

Como x y y son distintos, existe al menos un índice β en A tal que $x_\beta \neq y_\beta$. Como X_β es un espacio de Hausdorff, existe un entorno U (tanto en la topología producto como en la caja) en X_β de x_β que no intersectan a y_β.

Consideremos la familia de conjuntos U_α dada por

$$U_\alpha = \begin{cases} U & \text{si } \alpha = \beta, \\ X_\alpha & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Notemos que cada U_α es abierto en X_α y tomemos el producto

$$W = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Evidentemente $W \subset \prod X_\alpha$. También, como $x_\beta \in U$ (por la forma en que se eligió W) y $x_\alpha \in X_\alpha$ para $\alpha \neq \beta$, se sigue que $x \in W$. Por ser W un producto de conjuntos abiertos se sigue que es abierto en la topología caja, como además todos menos una cantidad finita de los W_α son iguales a los X_α se tiene que W también es abierto en la topología producto.

Entonces, sin importar cual de las dos topologías tomemos (la caja o la producto) el conjunto W será un entorno del punto x. Solo queda por ver que este entorno no intersecta al punto y. Esto último podemos verlo mediante un argumento por contradicción.

Supongamos que $y \in W$. Entonces se tiene que $y_\alpha \in U_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. Pero esto implica, en particular, que $y_\beta \in U$. Lo cual es una contradicción.

Hemos obtenido entonces que W es un entorno de x que no contiene a y. De manera similar pude construirse un entorno V de y que no contenga a x y queda demostrado que $\prod X_\alpha$ es un espacio de Hausdorff.

5 Topología cociente

Sea $p\colon X \to Y$ una función continua. Demuestre que si existe una función continua $f\colon Y \to X$ tal que $p \circ f$ es igual a la identidad de Y, entonces p es una función cociente.

Use el resultado anterior para demostrar que una retracción r de X en A es una función cociente. Si $A \subset X$ una retracción de X en A es una función continua y sobreyectiva tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$.[11]

11. *Ejercicio tomado del Munkres [3, §22, Nº 2]*

SOLUCIÓN. La función p es continua. Tomemos un conjunto U de Y tal que $p^{-1}(U)$ es abierto en X. Entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(p^{-1}(U)) &= (p \circ f)^{-1}(U) \\ &= \mathrm{Id}_Y^{-1}(U) \\ &= \mathrm{Id}_Y(U) \\ &= U. \end{aligned}$$

Como f es continua entonces este conjunto U ha de ser abierto en Y, y tenemos como conclusión que p es una función cociente.

La retracción r es una función cociente debido a que, usando la parte anterior, la función de inclusión de A en X toma el papel de la función f en el resultado anterior. Siendo la función de inclusión, como es usual, la función $f\colon A \to X$ definida por $f(a) = a$ para cada $a \in A$.

6 Espacios conexos

Sea $X_{\alpha\in J}$ una familia indexada de espacios conexos. Sea

$$X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha,$$

y sea $a = a_\alpha$ un punto fijo de X.[12]

12. *Tomado del Munkres [3, §23, Nº 10]*

6.1 Definición espacio conexo

Dado un subconjunto K de J finito, llamemos X_K al subespacio de X dado por los puntos x tales que $x_\alpha = a_\alpha$ si $\alpha \notin K$. Demuestre que X_K es conexo.

SOLUCIÓN. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ los elementos de K, llamemos P al producto $\prod_{\alpha\in K} X_\alpha$, y consideremos la función $f : P \to X_K$ dada, para $x \in P$, por $f(x) = z$ donde

$$z_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{si } \alpha \in K, \\ a_\alpha & \text{si } \alpha \in J - K. \end{cases}$$

Entonces P y X_K son homeomorfos a través de esta f. Como P es conexo por el teorema 8, se tiene que X_K es conexo por el teorema 7.

6.2 Unión de espacios conexos

Demuestre que la unión Y de todos los X_K es conexa.

SOLUCIÓN. Sea Y la unión de los X_K. Como los elementos de cualquier X_K coinciden con a en las coordenadas que pertenecen a K, se sigue que el punto a esta en todos los X_K de forma casi inmediata. La conexidad de Y es entonces consecuencia del teorema 9.

6.3 Clausura y conexidad

Demuestre que Y es la clausura de X y concluya que X es conexo.

SOLUCIÓN. Elijamos un punto $(x_\alpha) \in X$. Queremos ver que todo entorno de (x_α) contiene un punto de Y. Elijamos un entorno U de (x_α). Como estamos bajo la topología producto, este entorno U es un producto de abiertos donde todos menos una cantidad finita de ellos son iguales a los X_α. Sea $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ esta cantidad finita de índices.

Entonces podemos hallar un punto (y_α) que esta en X_K y en U de la siguiente manera: hagamos $y_\alpha = a_\alpha$ para $\alpha \notin K$ y para los $\alpha \in K$ tomamos y_α tales que pertenecen a U_α, donde los U_α son los términos del producto, que conforma a U, que difieren de los X_α.

Luego como $(y_\alpha) \in X_K$ entonces también pertenece a Y y se tiene que X es la clausura de Y.

Por lo que X es conexo por el teorema 10. Todo lo anterior en realidad ha demostrado el siguiente teorema:

> En la topología producto, el producto arbitrario de espacios conexos es conexo.

7 Resultados teóricos utilizados

> Los resultados provienen principalmente del Munkres [3], aunque algunos son del Dugundji [2] y el Willard [1].

Teorema 1. La intersección de conjuntos numerables es numerable.

Teorema 2. La unión de conjuntos numerables es nuevamente numerable.

Teorema 3. Sea $\mathscr{B} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{M}\}$ una familia de subconjuntos de X que cubre a X y satisface la siguiente condición:

- Para cada $(\alpha, \beta) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ y cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, existe un U_γ tal que $x \in U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta$.

Entonces el conjunto $\mathscr{T}(\mathscr{B})$ que consiste de $X, \varnothing$ y todas las uniones de miembros de $\mathscr{B}$ es una topología sobre X, es decir, $\mathscr{B}$ es la base de *alguna* topología sobre X.

Teorema 4. Sea $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ una base para la topología $\mathscr{T}$. Entonces un conjunto A es abierto (es decir, pertenece a $\mathscr{T}$) si, y solo si, para cada $x \in A$ existe un $U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U \subset A$.

Teorema 5. Las proyecciones sobre la primera y la segunda componente π_1, π_2 —definidas en el producto cartesiano $X \times Y$— son funciones continuas.

Teorema 6. Sea $f : A \to X \times Y$ una función dada, para cada $a \in A$, por

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Entonces f es *continua* si, y solo si, las funciones

$$f_1 : A \to X \quad \text{y} \quad f_2 : A \to Y$$

son continuas.

Teorema 7. La imagen de un espacio conexo bajo una función continua es conexo

Teorema 8. El producto finito de espacios conexos es conexo.

Teorema 9. La unión de una colección de subespacios conexos de un espacio X que tienen un punto en común es conexa.

Teorema 10. Sea A un subespacio conexo de X. Si $A \subset B \subset \bar{A}$, entonces B también es conexo.

Referencias bibliográficas

[1] S. Willard. *General topology.* eng. Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley, Reading/Mass., 1970. ISBN: 9780201087079. OCLC: 233546742 (véanse páginas 3, 7).

[2] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon series in advanced mathematics. Allyn y Bacon, Boston,Mass., 10. print edición, 1987. ISBN: 978-0-205-00271-9 (véanse páginas 1, 7).

[3] J. R. Munkres. *Topology.* Pearson, Harlow, 2. ed edición, 2014. ISBN: 978-1-292-02362-5 (véanse páginas 1, 4-7).