Primer Parcial

Ejercicio 1

Sea $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Calcule *la grafica de* g:

1. La derivada direccional de f en $(0,0)$ según el vector $(1,1)$.
2. Halle, alrededor del punto $(0,0)$, el polinomio de Taylor de orden dos.

Solución. Veamos cada parte por separado.

1. Calculamos primero el gradiente de f en $(0,0)$

$$\begin{aligned}\nabla f(0,0) &= (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2})|_{(x,y)=(0,0)}\\ &= (0,0).\end{aligned}$$

Ahora, normalizamos el vector $(1,1)$, dividiendo por su norma, para obtener el vector

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Por último, la derivada direccional viene dada por el producto punto:

$$\nabla f(0,0)\cdot u = (0,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

2. Es claro que $e^{x^2+y^2} = e^{x^2}e^{y^2}$. Entonces podemos calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de f usando la serie de Taylor de la función e^x. Veamos que, por un lado

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \cdots \tag{1}$$

donde los puntos suspensivos denotan a los términos de orden mayor que dos en la serie de taylor de e^{x^2}.

Por otro lado,

$$e^{y^2} = 1 + y^2 + \cdots \tag{2}$$

donde, igual que antes, los puntos suspensivos denotan a los términos de orden mayor que dos.

Por último, usando (1) y (2), obtenemos

$$\begin{aligned}e^{x^2+y^2} &= e^{x^2}e^{y^2} = (1 + x^2 + \cdots)(1 + y^2 + \cdots)\\ &= (1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 + \cdots).\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Sea S la superficie dada por $z = k/xy$ y $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de S.

1. ¿Será que el plano tangente a S en P_0 puede escribirse de la forma

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 3?$$

2. Calcule el volumen de los planos tangentes a S

Solución. Veamos la parte 1. Sea $f(x,y,z) = xyz$, entonces el plano tangente a S en el punto P_0 es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)[x - x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)[y - y_0] + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)[z - z_0] = 0. \tag{3}$$

Calculemos entonces cada una de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = y_0z_0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = x_0z_0,\ \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = x_0y_0.$$

Y sustituyendo en (3), obtenemos

$$y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0,$$

multiplicando ambos lados por $(x_0y_0z_0)^{-1}$,

$$\frac{x - x_0}{x_0} + \frac{y - y_0}{y_0} + \frac{z - z_0}{z_0} = 0,$$

que al separar las fracciones y simplificar es

$$\left\{\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0}\right\} = 3.$$

Ejercicio 3

Encontrar los valores máximos y mínimos de $h(x,y) = x^2 + 24xy + 8y^2$ en la región $x^2 + y^2 \leq 25$.

Solución. Para empezar, denotamos por $\mathcal{U}$ a la región $x^2 + y^2 < 25$ y por $\mathcal{U}_f$ a su frontera, es decir, a $x^2 + y^2 = 25$.

Los puntos críticos de h en $\mathcal{U}$ vienen dados por los puntos en que se anula el gradiente, estos son, todos los (x,y) en $\mathbf{R}^2$ tales que

$$\nabla f(x,y) = (2x + 24y, 24x + 16y) = 0.$$

Pero de esto último se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases}2x + 24y = 0\\ 24x + 16y = 0\end{cases}$$

que solo posee la solución trivial[1]. Así, el único punto critico de h en $\mathcal{U}$ es $(0,0)$.

Para hallar los puntos críticos en $\mathcal{U}_f$ usamos el método de los multiplicadores de Lagrange. Definamos $g(x,y) = x^2 + y^2$, entonces $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$.

El teorema de multiplicadores de Lagrange nos dice que los puntos críticos en la frontera son los (x,y) en $\mathbb{R}^2$ que cumplen con el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla h(x,y) &= \lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y) &= 25,\end{aligned}$$

[1]Debido a que el determinante es distinto de cero y la matriz de coeficientes es invertible.

que de forma explícita es,

$$
\begin{aligned}
2x + 24y &= 2\lambda x \\
(4) \quad 24x + 16y &= 2\lambda y \\
x^2 + y^2 &= 25.
\end{aligned}
$$

De la tercera ecuación, en (4), se tiene que $x^2 = 25 - y^2$. Por lo que los valores posibles (enteros) para y son $(\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5)$.

Probando todos los valores posibles, es decir, viendo uno por uno cuales de ellos satisfacen el sistema (4), se llega a la conclusión de que los valores para y son ± 4. Por lo tanto, los puntos críticos en la frontera son

$$(3,4),\ (-3,-4),\ (-3,4),\ (3,-4).$$

Por último, para ver cuales de ellos son los vales máximos o mínimos, evaluamos en h. Veamos que

$$h(3,4) = h(-3,-4) = 425,$$

y

$$h(-3,4) = h(3,-4) = -200,$$

por último

$$h(0,0) = 0.$$

Ejercicio 4

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x+y}\right) & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}.$$

¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

Solución. Empezamos calculando las derivadas parciales de f. Usando la definición, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim x \to 0 \frac{f((0,0)+x(1,0)) + f(0,0)}{x} \\
&= \lim x \to 0 \frac{f(x,0)+0}{x} \\
&= \lim x \to 0 2x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

donde la ultima igualdad se sigue del teorema del sandwich[2]. De forma similar se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)+0}{y} \\
&= \lim_{y \to 0} 2y \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{y}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Para ver que f es diferenciable, queremos ver que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{||(x,y)||} = 0,$$

[2]Con la desigualdad $-2x < 2x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} < 2x$.

o lo que es lo mismo,

$$(5) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[(x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x+y}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Consideramos primero el límite al aproximarnos por la recta $y = 0$

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0,$$

luego veamos el limite al aproximarnos por la recta $y = mx$

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2(1+m^2)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x(1+m)}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{x^2(1+m^2)}},$$

que se reduce a

$$\lim_{x\to 0} x\frac{(1+m^2)}{\sqrt{1+m^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x(1+m)}\right),$$

que finalmente es cero por el teorema del sandiwch.

Parece entonces ser cierto que el limite (5) es cero, por lo que debemos demostrarlo.

Queremos ver que, para cada ϵ real y positivo, existe un $\delta > 0$ tal que

$$||(x,y)|| < \delta \to \left|\frac{f(x,y)}{||(x,y)||}\right| < \epsilon,$$

que en el caso $x = -y$ es trivialmente cierto. Para los demás casos, tenemos

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \to \left|(x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x+y}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < \epsilon.$$

Sea $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, entonces

$$\frac{\epsilon}{2} > \sqrt{x^2+y^2}$$

implica que,

$$
\begin{aligned}
\epsilon &> 2\sqrt{x^2+y^2} \\
&= 2|\sqrt{x^2+y^2}| \\
&= 2\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \\
&= 2|x^2+y^2|\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \\
&> \left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x+y}\right)\right| |x^2+y^2| \left|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \\
&= \left|(x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x+y}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|.
\end{aligned}
$$

Y por lo tanto (5) es cierto, y f es diferenciable.

Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, $z = f(x,y)$ y

$$F(x,y,z) = ze^z - 3(x^2+y^2) + 2xy = 0$$

definida alrededor del punto $(x,y) = (0,0)$. Encuentre el $\nabla f(0,0)$.

Solución. Comenzamos derivando de forma implícita la ecuación $F(x, y, z) = 0$. Primero con respecto de x

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(ze^z - 3x^2 + -3y^2 + 2xy) &= \frac{\partial z}{\partial x}e^z + \frac{\partial z}{\partial x}e^z z - 6x + 2y \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}(e^z + ze^z) - 6x + 2y \\ &= 0\end{aligned}$$

de donde se sigue que,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(e^z + ze^z) = 6x + 2y$$

y finalmente

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6x + 2y}{e^z + ze^z}.$$

La derivada con respecto de y es completamente análoga, por lo tanto se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial y}(e^z + ze^z) - 6y + 2x = 0,$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y + 2x}{e^z + ze^z}.$$

Ahora, de la ecuación $F(x, y, z) = 0$, al sustituir $(x, y) = (0, 0)$, se obtiene $z = 0$. Entonces, en las derivadas parciales, el denominador no se anula en $z = 0$[3] mientras que el numerador, con $(x, y) = (0, 0)$, si se anula; por lo tanto, ambas derivadas parciales en cero son cero. Pero esto es lo mismo que decir que $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

[3]En efecto, el denominador es 1.