Universidad Simón Bolívar

Departamento de Matemáticas

Análisis V

Trimestre Enero - Marzo 2022

Lista de Ejercicios 1

Fecha de entrega: 25/02/2022

Profesor:

MSc. Daniel Morales

Alumno(s):

Jhonny Lanzuisi

Índice

Análisis V

Lista de Ejercicios 1

Jhonny Lanzuisi 1510759

7 de marzo de 2022

1. Enunciados

1. Una clase de conjunto N es llamada **Normal** si es cerrada bajo intersecciones enumerables de conjuntos y cerrada por uniones enumerables disjuntas de conjuntos. Demuestre que un $\sigma-$anillo es una clase Normal.

2. Una $\sigma-$álgebra de conjuntos es definida como una clase no vacía de conjuntos que es cerrada bajo complementos y la unión enumerable de conjuntos. Muestre que una $\sigma-$álgebra es un $\sigma-$anillo que contiene a X.

3. Si μ^* es una medida métrica exterior entonces todo conjunto abierto es μ^*-medible.

4. Si E es un conjunto Lebesgue medible tal que, para cada x en conjunto denso en casi todo punto

$$\bar{\mu}\left(E\Delta\left(E+x\right)\right)=0,$$

entonces $\bar{\mu}(E)=0$ ó $\bar{\mu}(E^c)=0$.

2. Solución

1. Si S es un $\sigma-$anillo y si $E_i \in S$ para $i = 1, 2, \ldots$ y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ entonces:

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} E_i = E - \bigcup_{i=1}^{\infty}(E - E_i),$$

   de donde se sigue que S es cerrado bajo intersecciones numerables, pues los dos conjuntos de la diferencia, a la derecha de la igualdad, pertenecen a S.

   Como las uniones numerables de conjuntos disjuntos son un caso particular de las uniones numerables de conjuntos, y S es cerrado respecto a estas últimas, se sigue que S también es cerrado respecto a las primeras.

   Entonces, S es una clase normal.

2. Sea S un $\sigma-$anillo y supongamos que $X \subset S$. Sea $E \in S$ entonces $X - E = E' \in S$ debido a que S es cerrado bajo las diferencias. Además, como S es un $\sigma-$anillo se tiene que es cerrado bajo uniones numerables.

   Se sigue entonces que S es una $\sigma-$álgebra.

3. Sea U un conjunto abierto y A un subconjunto de X. Sea $E = A \cap U$. Sean

$$E_n = E \bigcap \left\{ x \colon \rho\left(x, U'\right) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

   para $n = 1, 2, \ldots$.

   Ahora $E_n \cup (A \cap U')$ son una secuencia de subconjuntos de A, pues cada E_n es un subconjunto de A y $A \cap U'$ también lo es. A su vez, la union

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} E_n \cup (A \cap U')$$

   es un subconjunto de A, puesto que la union de los E_n es $A \cap U$ por construcción.

Tenemos entonces que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(E_n \cup (A \cap U')),$$

y como $\rho\,(E_n, A \cap U') > 0$, se sigue que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(E_n) + \mu^*(A \cap U').$$

Por ultimo, la construcción de los E_n asegura que el $\lim_n E_n = E$ (Ver el libro de Halmos pag 48 (8a)). Por lo que al tomar límites se obtiene

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U'),$$

y el conjunto abirto U es μ^*-medible.