Tarea 2

Modelaje Matemático

Jhonny Lanzuisi

16 de Junio de 2022

Índice


```
import sympy as sym
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.style
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

matplotlib.style.use('seaborn')

matplotlib.rcParams.update({
    'figure.autolayout': True,
})

def lp(input_string):
   print('$$' + sym.latex(input_string) + '$$')
```

1. Primera pregunta

Sabemos que podemos obtener t de la relación:

$$\frac{R(t)}{R(0)} = e^{\lambda t}.$$

Debemos primero determinar λ. Supongamos que la cantidad inicial de carbono es 1, que representa el 100 %, entonces usando el hecho de que la vida media es 5568 tenemos

$$N(5568) = \frac{1}{2} = 1e^{-\lambda 5568}.$$

y despejando se obtiene

$$-\frac{\log(1/2)}{5568} = \lambda.$$

```
import math

lmda = math.log(1/2)/5568
print("lambda:", lmda)
```

```
## lambda: -0.0001244876401867718
```

Tenemos entonces que:

$$\frac{\log(R(t)/R(0))}{\lambda} = t$$

y al sustituir los valores en una calculadora podemos hallar el valor de t:

```
print("t:", math.log(0.97/6.68)/lmda)
```

```
## t: 15500.150795197595
```

2. Segunda pregunta

2.1. (a)

Los puntos de equilibrio son aquellos en que la derivada se anula, en este caso $x = 0$ implica que $e^{-x^2} = 1$ y $\dot{x} = 0$.

Para estudiar la estabilidad queremos ver como se comporta la derivada al variar x ligeramente. Si x es pequeño y positivo entonces la derivada es positiva pues $e^{-x^2} < 1$. Si, por otro lado, x es pequeño y negativo entonces $e^{-x^2} > 1$ y la derivada es negativa.

En el diagrama de fase luce entonces como la figura 1.

```
x = sym.symbols('x')

p1 = sym.plot(sym.exp(x), (x,-1,1), show=False)
```

2.2. (b)

La derivada se hace cero cuando

$$x(a - x^2)$$

se hace cero. Lo que ocurre en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{a}$.

Si $a = 0$ entonces el único punto de equilibrio es el cero. Si hacemos x pequeño y positivo entonces la derivada es negativa y cuando x es pequeño y negativo la derivada es positiva. El diagrama de fase es entonces como en la figura 2, y el punto $x = 0$ es estable.

```
p2 = sym.plot(-x**3, (x,-1,1), show=False)
```

Si $a < 0$ la raíz de a no es un número real y el único punto de equilibrio es nuevamente el cero, con el mismo diagrama de la figura 2.

Si $a > 0$ los puntos de equilibrio son el cero y $\pm\sqrt{a}$. Para el punto $\sqrt{a}$ tenemos que para $x^* > \sqrt{a}$ la derivada es negativa y para $x^* < \sqrt{a}$ la derivada es positiva. Para el punto $-\sqrt{a}$ tenemos que para $x^* > -\sqrt{a}$ la derivada es negativa y cuando $x^* < -\sqrt{a}$ la derivada es positiva. El diagrama de fase esta en la figura 3. De donde se tiene que los puntos $\pm\sqrt{a}$ son estables y 0 es inestable.

```
p3 = sym.plot(show=False, legend=True)
for i in range(0,5):
    if i != 0:
        p = sym.plot(
            x*(i-x**2),
            (x,-2,2),
            show=False,
            label='a= ' + str(i)
        )
        p3.append(p[0])
```

A. Gráficos

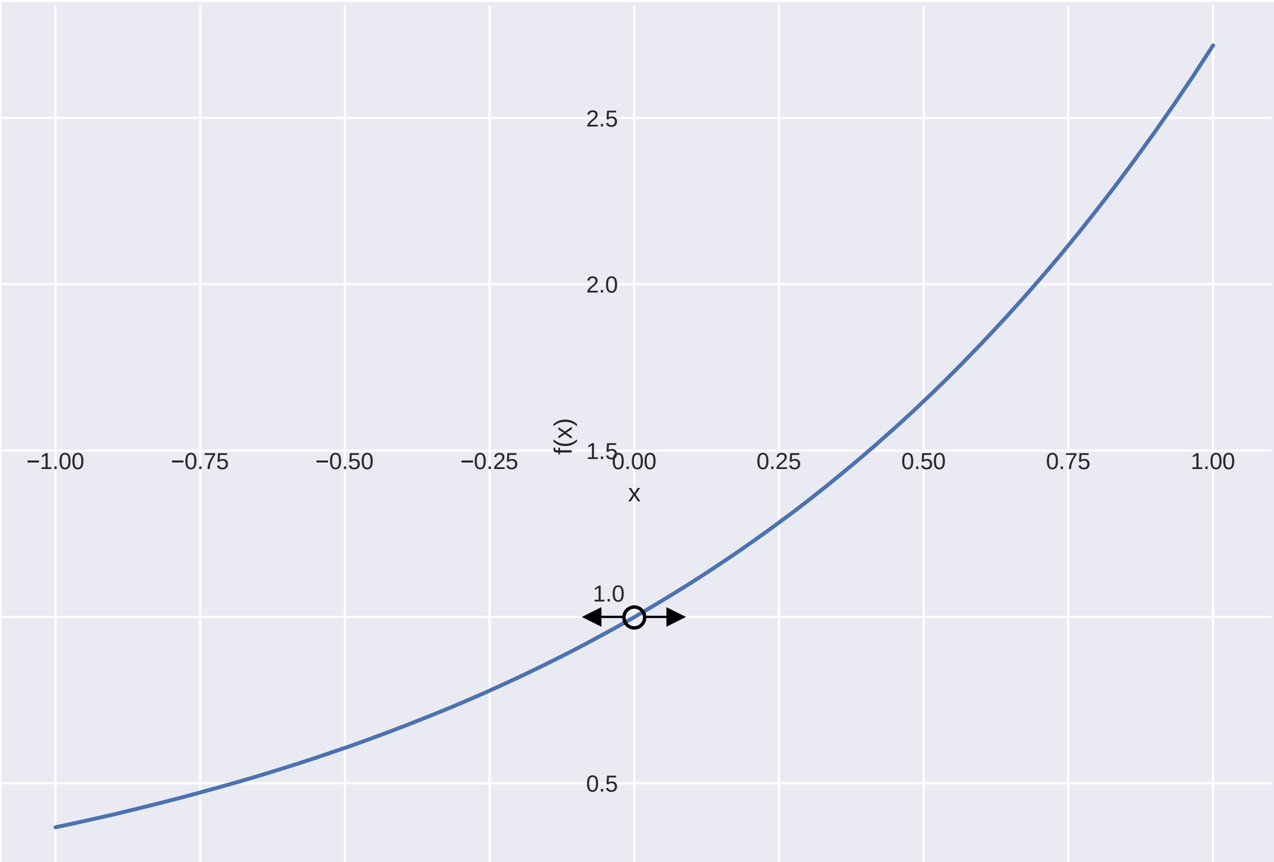

Figura 1: Diagrama de fase: $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$

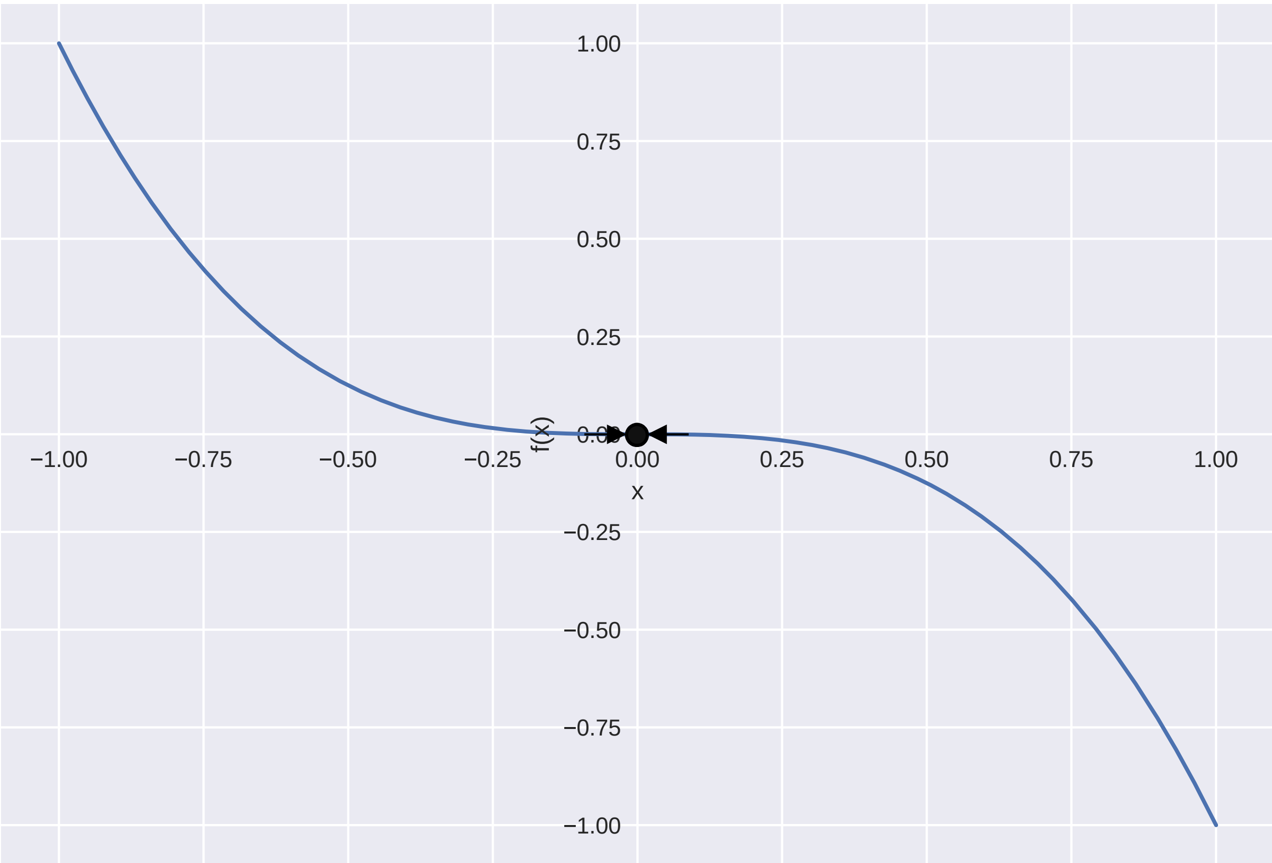

Figura 2: Diagrama de fase: $\dot{x} = -x^3$

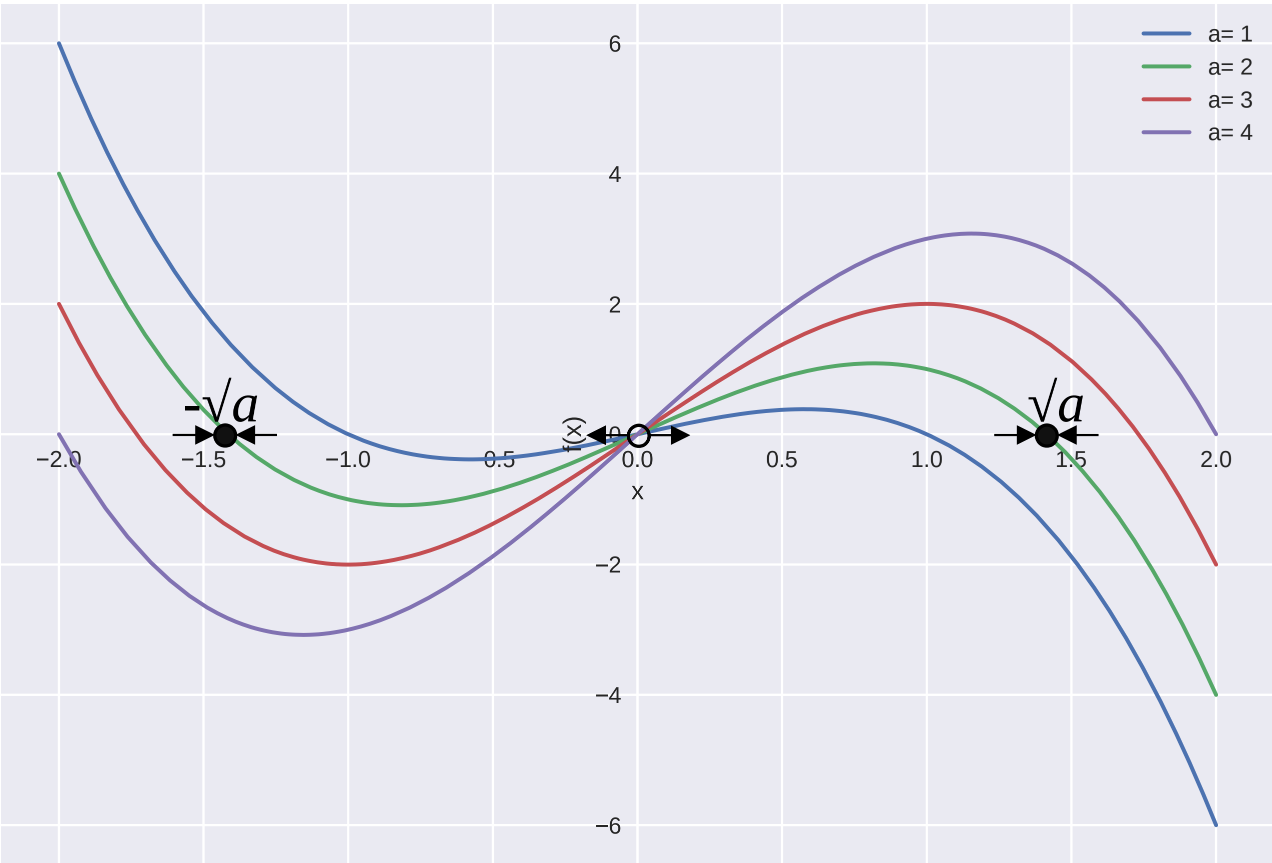

Figura 3: Diagrama de fase: $\dot{x} = x(a - x^2)$