Tarea 1

Combinatoria III

Jhonny Lanzuisi

9 de Junio de 2022

Índice

1. Primera pregunta

Podemos suponer que A es numerable sin perdida de generalidad, puesto que de no serlo tendria un subconjunto infinito numerable, y el argumento aplicaria igualmente para este conjunto.

Definimos una coloracion $f : A^{[2]} \to 2$:

$$f(\{a,b\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ y } b \text{ son comparables} \\ 1 & \text{si } a \text{ y } b \text{ no son comparables} \end{cases}$$

El teorema de Ramsey asegura que existe un subconjunto infinito H de A que es monocromatico bajo esta f. Esto quiere decir que:

- o los a, b no son comparables dos a dos, en cuyo caso ya tenemos uno de los casos que queremos demostrar,
- o todos los a, b son comparables. Supongamos que estamos en este caso y llamemos a este conjunto C.

Tomemos $c \in C$ fijo. Entonces podemos definir otra coloracion $g_c : C^{[1]} \to 2$:

$$g_c(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < c \\ 1 & \text{si } s > c \end{cases}$$

En este caso g es simplemente una particion de C. Podemos considerar los conjuntos C_0, C_1 de todos los elementos que tienen color 0 o color 1, respectivamente. Entonces el principio del casillero asegura que al menos uno de estos dos conjuntos es infinito. Supongamos que C_1 es infinito, entonces podemos fijar un $c_1 \in C_1$ y considerar la particion dada por $g_{c_1} : C_1^{[2]} \to 2$. Como C_1 esta acotado inferiormente por c, y C_1 es numerable, se tiene que el conjunto de los elementos que tiene color 1 por g_{c_1} (llamemoslo C_{11}) es infinito y los que tienen color 0, nuevamente por g_{c_1}, son un conjunto finito. Podemos entonces continuar de esta forma, tomando un $c_2 \in C_{11}$ y considerando la particion dada por g_{c_2}, etc. Obtenemos de esta forma una sucesion

$$H_1 = \{c, c_1, c_2, \dots\}$$

que es creciente y es infinita.

Es claro que de haber supuesto que C_0 era infinito en vez de C_1 obtendriamos un conjunto H_0 decreciente, de forma simetrica a como se contruyo H_1.

Por lo tanto, en A pueden ocurrir tres casos: o hay un subconjunto infinito H donde ningun elemento es comprable con otro, o existe un subconjunto H_0 decreciente o un subconjunto H_1 creciente.

2. Segunda pregunta

Haremos la demostración por reducción al absurdo. Dado k entero positivo supongamos que existe $N = k^2 + 1$ tal que toda sucesión de N números naturales distintos contiene una subsucesión de a lo sumo tamaño k que es mónotona.

Sea $S = \{x_1, \dots, x_N\}$ la sucesión dada. Consideremos para $1 \le i \le N$ los pares de enteros (a_i, b_i) donde a_i es la longitud de la sucesión *creciente* de mayor tamaño que termina en x_i, y b_i es la longitud de la sucesión *decreciente* de mayor tamaño que termina en x_i.

Veamos ahora que los (a_i, b_i) son todos distintos. Si $x_i > x_j$ entonces $a_i > a_j$ puesto que la subsucesión de a_j siempre se puede extender hasta llegar a a_i. Si $x_j > x_i$ entonces $b_j > b_i$ por la misma razon que antes.

Finalmente, como los (a_i, b_i) son todos distintos y $0 \le a_i \le k$, $0 \le b_i \le k$, hay a lo sumo k^2 pares. Pero esto es una contradicción puesto que supusimos $N = k^2 + 1$ pares.

Se sigue entonces que la suseción S ha de tener una subsucesión monótona de tamaño mayor o igual que $k+1$.

3. Tercera pregunta

Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $GS(con) \wedge \neg GS$. Esto quiere decir que dado $k \in \mathbb{N}^*$ existe una coloración $f\colon \mathbb{N}^* \to r$ tal que $FS(\{x_1, \ldots, x_k\})$ no es monocromático para ningún subconjunto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de $\mathbb{N}$.

Podemos construir una coloración $g\colon FU(\mathbb{N}^{[<\infty]}) \to r$. Dado que la cantidad de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es numerable, existe una correspondencia uno a uno entre $\mathbb{N}^{[<\infty]}$ y $\mathbb{N}$. Llamemos a esta biyección c. Definimos g de la siguiente forma:

$$g(\bigcup a_i) = f(\sum c(a_i)).$$

Entonces el hecho de que no existe ningún subconjunto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de $\mathbb{N}$ tal que $FS(\{x_1, \ldots, x_k\})$ sea monocromático bajo f implica que ningún subconjunto $\{a_1, \ldots, a_k\}$ de $\mathbb{N}^{[<\infty]}$ es tal que $FU(\{a_1, \ldots, a_k\})$ es monocromático bajo g.

Pero la función g induce una coloración $h\colon \mathbb{N}^{[<\infty]} \to r$, dada por

$$h(a_i) = g(a_i \cup \emptyset).$$

Es evidente, por construcción, que cuando tenemos una unión finita no trivial de elementos de $\mathbb{N}^{[<\infty]}$, h y g coinciden en dicha unión. Pero esto implica que ningún subconjunto $\{a_1, \ldots, a_k\}$ de $\mathbb{N}^{[<\infty]}$ es monocromático bajo h, lo cual contradice $GS(con)$.

Por lo tanto, debemos tener que $GS(con) \implies GS$, que es lo que buscabamos demostrar.