Tarea 2

Combinatoria III

Jhonny Lanzuisi

9 de Junio de 2022

Índice

1. Primera pregunta

Para ver que los U_s son una base, basta con ver que si $r \in U$, donde U es un abierto de la topología producto, entonces existe un U_s tal que $r \in U_s \subset U$ (Munkres, *Topology*, Capitulo II, lema 13.2).

En este caso, como dotamos a $\mathbb{N}$ de la topologia discreta, los abiertos de la topología producto son los conjuntos de sucesiones infinitas.

Entonces dada una sucesion infinita r podemos considerar la sucesion finita s que se obtiene de tomar los primeros k elementos de r. Entonces, el conjunto U_s contiene a r.

Además como toda sucesion de U_s es infinita, tenemos que U_s es en si mismo un conjunto abierto por lo que la condición $U_s \subset U$ se cumple.

2. Segunda pregunta

Consideremos el complemento de U_s, U_s^c, en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Entonces U_s^c es el conjunto de todas las sucesiones infinitas que difieren de s en su dominio. Pero este conjunto, por ser de sucesiones infinitas, es abierto, como dijimos antes.

Se sigue que U_s es cerrado.

3. Tercera pregunta

Sea $\{x_k\}$ una sucesión de cauchy. Entonces dado $\epsilon = 1/n$ existe un N tal que $d(x_n, x_m) < 1/n$ siempre que $n, m > N$.

Pero esto significa que

$$\frac{1}{\text{mín}\{i \colon x_n(i) \neq x_m(i)\}} < \frac{1}{n},$$

por lo que las suceciones x_n y x_m coinciden hasta n.

Sea $\{r_k\}$ una sucesión que coincide con x_n y x_m en estos primeros n términos. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe n tal que $1/n < \epsilon$. La propiedad de cauchy asegura que existe un N tal que $d(x_k, r_k) < 1/n < \epsilon$ siempre que $k > N$, puesto que r_k coincide con x_k en los primeros n términos por construcción.