resources/usblogo.png

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DECANATO DE ESTUDIOS PROFESIONALES
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

ESTUDIO COMPARATIVO DE TRES DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE INCONSISTENCIA DE KUNEN.

Por:
Jhonny Lanzuisi Berrizbeitia

Realizado con la asesoría de:
Jesús Nieto Martínez

PROYECTO DE GRADO
Presentado ante la Ilustre Universidad Simón Bolívar
como requisito parcial para optar al título de
Licenciatura en Matemáticas Puras

Sartenejas, 1 de julio de 2024

LISTA DE SÍMBOLOS

En la lista siguiente, C es un conjunto.

Símbolo	Significado
$\mathscr{P}(C)$	Conjunto de partes.
$\sup(C)$	Supremo, es decir, $\bigcup C$.
$\operatorname{cf} C$	Cofinalidad

LISTA DE ABREVIATURAS

Abreviatura	Significado
ZF	Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.
AC	Axioma de elección.
ZFC	ZF al añadir AC.
NBG	Teoría de conjuntos de Von Neumann, Bernays y Gödel.
CH	Hipótesis del continuo: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.
c. n. a.	Cerrado no acotado.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

NOCIONES BÁSICAS

Este capítulo establece varios conceptos básicos que serán necesarios más adelante. Las nociones de filtro, ultrafiltro y filtro κ-completo junto con los conjuntos no acotados y estacionarios componen las definiciones de conjuntos más elementales que harán falta. Luego, un rápido repaso de la teoría de modelos permitirá abordar las inmersiones elementales, que son una pieza central del teorema de Kunen.

Es bien sabido que existen diversos sistemas axiomáticos con los cuales se puede desarrollar la teoría de conjuntos. En todo este texto, se usará el de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección, tal como aparece en cualquiera de las referencias estándar [1, 2]. Más aún, se asume familiaridad con las nociones elementales de la teoría de conjuntos y de la lógica de primer orden.

1.1 Filtros

Esta sección se ocupa de dar las definiciones básicas de filtros, que serán necesarias a lo largo del texto. Los filtros caracterizan a conjuntos "grandes" dentro de un conjunto dado C.

DEFINICIÓN 1.1. Sea C un conjunto no vacío. Un conjunto $F \subset \mathscr{P}(C)$ es un *filtro* si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $C \in F$ y $\emptyset \notin F$.

b) Si $X, Y \in F$ entonces $X \cap Y \in F$.

c) Si $X, Y \subset C$, $X \in F$ y $X \subset Y$ entonces $Y \in F$.

DEFINICIÓN 1.2. Sea F un filtro sobre C. F es *ultrafiltro* si, para todo $X \subset C$, se tiene que $X \in F$ o $X - S \in F$.

Una caracterización para ultrafiltros viene dada por la propiedad de maximalidad:

TEOREMA 1.1. Sea F un filtro sobre C. F es *ultrafiltro* si, y solo si, es maximal.

La siguiente definición es central para la teoría de cardinales medibles.

DEFINICIÓN 1.3. Sea κ un cardinal regular y F un filtro sobre C. F es κ-completo siempre que dada una familia de conjuntos $\{X_\alpha \in F \colon \alpha < \kappa\}$, se tiene que

$$\bigcap X_\alpha \in F.$$

Un ejemplo que une los conceptos tratados hasta ahora es, como ya se mencionó, la definición de cardinal medible.

DEFINICIÓN 1.4. Sea $\kappa > \omega$ un cardinal. κ es *medible* si existe un ultrafiltro κ-completo sobre κ.

1.2 Conjuntos Estacionarios

El principal objetivo de esta sección es establecer un teorema de Solovay, acerca de particiones con conjuntos estacionarios, usando el teorema 1.3 de Fodor.

Sea C un conjunto y $X \subset C$, diremos que X es *no acotado* en C si $\sup(X) = C$. Si C es además un conjunto de ordinales, un ordinal límite α es *punto límite* de C si $\sup(C \cap \alpha) = \alpha$.

DEFINICIÓN 1.5. Sea κ un cardinal regular no numerable. Un conjunto $C \subset \kappa$ es *cerrado no acotado* (c. n. a.) si C es no acotado en κ y contiene a todos sus puntos límites menores que κ. Un conjunto $S \subset \kappa$ es *estacionario* si para cada conjunto c. n. a. $C \subset \kappa$ se tiene $S \cap C \neq \emptyset$.

Será de utilidad saber el comportamiento de los conjuntos c. n. a. bajo intersecciones. Para este fin, definimos, dada $\langle X_\alpha \colon \alpha < \kappa \rangle$ una sucesión de subconjuntos de κ, la *intersección diagonal* de X_α como:

$$\mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \left\{ \epsilon < \kappa \colon \epsilon \in \bigcap_{\alpha<\epsilon} X_\alpha \right\}.$$

TEOREMA 1.2. Sea κ un cardinal regular no numerable y $\{C_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una familia de c. n. a. en κ, entonces:

a) $C_\alpha \cap C_\beta$ es c. n. a. $(\alpha, \beta < \kappa)$.

b) $\bigcap_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ es c. n. a.

c) $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ es c. n. a.

Demostración. Veamos cada parte por separado.

a) Es claro que $C \cap D$ es cerrado. Veamos que es no acotado. Sea $\alpha < \kappa$. Dado que C es no acotado, existe $\alpha_1 \in C$ tal que $\alpha_1 > \alpha$. De la misma forma, existe $\alpha_2 \in D$ tal que $\alpha_2 > \alpha_1$. Podemos seguir con este proceso para obtener una sucesión creciente:

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

Sea β el límite de la sucesión de arriba. Entonces $\beta < \kappa$ y $\beta \in C$ y $\beta \in D$.

b) La demostración será por inducción. Sea $\lambda < \kappa$ y $\langle C_\alpha \colon \alpha < \lambda \rangle$ una sucesión de conjuntos c. n. a. en κ. Para los ordinales sucesores, podemos simplemente aplicar el punto a). Si λ es ordinal límite, asumiremos que el teorema es cierto para cada $\alpha < \lambda$. Podemos ahora sustituir cada C_α por $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$ y obtenemos una sucesión decreciente con la misma intersección. Entonces a partir de ahora:

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots$$

serán c. n. a. y $C = \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$. Por la misma razón que el punto a), no es difícil ver que C es cerrado. Veamos que es no acotado. Sea $\alpha < \kappa$, construiremos una sucesión de la siguiente forma: sea $\beta_0 \in C_0$ mayor que α, y para cada $\xi < \lambda$ se tomará $\beta_\xi \in C_\xi$ tal que $\beta_\xi > \sup\{\beta_\nu \colon \nu < \xi\}$. Dado que κ es regular y $\lambda < \kappa$, la sucesión que se acaba de describir existe y su límite β es menor que κ. Para cada $\eta < \lambda$, β es límite de una sucesión $\langle \beta_\xi \colon \eta \leq \xi < \lambda \rangle$ en C_η, por lo que $\beta \in C_\eta$ y esto implica $\beta \in C$.

c) Llamemos D a $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Veamos primero que D es cerrado. Sea entonces $\lambda < \kappa$ tal que $D \cap \lambda$ no está acotado en λ, esto es, que λ es punto límite de D. Tomemos $\beta \in \lambda$, entonces existe $\epsilon \in \lambda \cap D$ tal que $\beta < \epsilon$ pues $D \cap \lambda$ es no acotado. Como $\epsilon \in D$, existe C_α, con $\alpha < \epsilon < \lambda$, al que ϵ pertenece. Pero entonces, lo que hemos demostrado es que siempre que tomemos $\beta \in \lambda$ existe $\epsilon \in C_\alpha \cap \lambda$ que esta por encima de β o, equivalentemente, que $C_\alpha \cap \lambda$ es no acotado en λ. Al ser C_α cerrado tenemos $\lambda \in C_\alpha$ y esto implica $\lambda \in D$. Luego D es cerrado.

Solo falta ver que D es no acotado en κ. Para esto notemos que, debido al punto b), se puede reemplazar cada C_α por $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$ y obtenemos una sucesión decreciente $C_0 \subset C_1 \subset \dots$ que no cambia el valor de D. Sea $\gamma \in \kappa$. Como cada C_α es no acotado en κ, podemos construir una sucesión $\langle \beta_n \colon n \in \omega \rangle$ de la siguiente forma: tomamos $\beta_0 \in C_0$

mayor que γ, luego dado β_n, tomamos $\beta_{n+1} \in C_{\beta_n}$ mayor que β_n. Llamemos $\beta = \lim_n \beta_n$ y tomemos $\xi < \beta$. Entonces existe $\beta_n > \xi$ y cada β_k con $k > n$ pertenece a C_{β_n}, pues los C_α están encajados, por lo que $\beta \in C_{\beta_n}$ y $\beta \in C_\xi$. Pero esto muestra que $\beta \in D$ y que D es no acotado.

∎

Definición 1.6. Una función de ordinales f en un conjunto S es *regresiva*, si $f(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha \in S$.

Teorema 1.3 (Fodor). Sea f una función regresiva en un conjunto estacionario $E \subset \kappa$. Entonces existe $\alpha \in \kappa$ tal que $f^{-1}(\{\alpha\})$ es estacionario.

Demostración. Supongamos, en busca de una contradicción, que $f^{-1}(\{\alpha\})$ no es estacionario para todo $\alpha < \kappa$. Entonces existen conjuntos c. n. a. C_α tales que $C_\alpha \cap f^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$, esto es, que $f(\gamma) \neq \alpha$ para todo $\gamma \in E \cap C_\alpha$. Si $D = \triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$, por el teorema 1.2, D es c. n. a. en κ. Pero entonces $D \cap E \neq \emptyset$ y podemos tomar $\gamma \in D \cap E$, luego, $f(\gamma) \neq \alpha$ para todo $\alpha < \gamma$ lo que implica $f(\gamma) \geq \gamma$ y esto es una contradicción. ∎

El siguiente es un teorema auxiliar, que será de utilidad para el teorema 1.5.

Teorema 1.4. Sea $E \subset \kappa$ un conjunto estacionario en κ y supongamos que todo ordinal perteneciente a E es regular no numerable. Entonces el conjunto

$$T = \{\alpha \in E \colon E \cap \alpha \text{ no es un subconjunto estacionario de } \alpha\}$$

es estacionario en κ.

Demostración. Veamos que T intersecta a todos los c. n. a. de κ. Sea C c. n. a. en κ y C' el subconjunto de los puntos límite de C. Tenemos que C' también es c. n. a. en κ por lo que podemos tomar el menor $\alpha \in C' \cap E$. Puesto que α es regular y punto límite de C, $C_\alpha \cap \alpha$ es un subconjunto c. n. a. de α, como también lo es $C' \cap \alpha$. Dado que α es el elemento más pequeño de $C' \cap E$, $C' \cap E \cap \alpha = \emptyset$. Esto último dice que $E \cap \alpha$ es no estacionario en α, y $\alpha \in T \cap C$. ∎

Teorema 1.5 (Solovay). Sea κ un cardinal regular no numerable. Entonces cada subconjunto estacionario de κ es la unión disjunta de κ subconjuntos estacionarios.

Demostración. Sea E un subconjunto estacionario de κ. Por el teorema 1.4, asumiremos que el conjunto W consistente de todos los $\alpha \in E$ tales que α es cardinal regular y $E \cap \alpha$ no es estacionario en α, es estacionario en κ. Existe entonces un conjunto c. n. a. $C_\alpha \subset \alpha$ tal que $E \cap C_\alpha = \emptyset$, pero $W \subset E$ por lo que $C_\alpha \cap W = \emptyset$. Sea $\langle a_\xi^\alpha \colon \xi < \alpha \rangle$ una enumeración creciente de C_α. Se tiene entonces que $\lim_{\xi \to \alpha} a_\xi^\alpha = \alpha$ y $a_\xi^\alpha \notin W$ para todo ξ, α.

Veamos, en primer lugar, que existe ξ tal que, para todo $\eta < \kappa$, el conjunto:

$$\left\{ \alpha \in W \colon a_\xi^\alpha \geq \eta \right\} \tag{1.1}$$

es estacionario. Si este no fuese el caso, para cada ξ tendríamos un $\eta(\xi)$ y un conjunto c. n. a. C_ξ, tal que $a_\xi^\alpha < \eta(\xi)$ para todo $\alpha \in W \cap C_\xi$, siempre que a_ξ^α este definida. Sea C la intersección diagonal de los C_ξ. Entonces si α es un elemento de $W \cap C$, se tiene que $a_\xi^\alpha < \eta(\xi)$ para todo $\xi < \alpha$. Consideremos ahora el conjunto D de los $\gamma \in C$ tales que $\eta(\xi) < \gamma$ para todo $\xi < \gamma$, este conjunto es c. n. a. y $W \cap D$ es estacionario. Sean $\alpha < \gamma$ dos ordinales en $W \cap D$, si $\xi < \gamma$ entonces $a_\xi^\alpha < \eta(\xi) < \gamma$, lo cual implica que $a_\gamma^\alpha = \gamma$. Pero esto es una contradicción puesto que $\gamma \in W$ y $a_\gamma^\alpha \notin W$.

Tenemos ahora ξ tal que (1.1) es estacionario. Sea f una función en W definida por $f(\alpha) = a_\xi^\alpha$. Por la definición de a_ξ^α la función f es regresiva, por lo que para cada $\eta < \kappa$ el teorema 1.3 de Fodor nos da un conjunto estacionario E_η de (1.1) y un $\gamma_\eta \geq \eta$ que es testigo de que E_η sea estacionario. Ahora, si $\gamma_\eta \neq \gamma_{\eta'}$ entonces $E_\eta \cap E_{\eta'} = \emptyset$ y, puesto que κ es regular, se tiene también $|\{E_\eta \colon \eta < \kappa\}| = |\{\gamma_\eta \colon \eta < \kappa\}| = \kappa$. ∎

1.3 Teoría de Modelos

La teoría de modelos es un área relativamente joven [3, pág. 3]. No obstante, su desarrollo ha sido crucial para la teoría de conjuntos y los cardinales grandes [4, pág. xv].

Se quiere definir lo que es un modelo para un lenguaje formal $\mathscr{L}$. Un lenguaje $\mathscr{L}$ es un conjunto de símbolos relacionales, funcionales y constantes. Los símbolos relacionales y funcionales pueden tener cualquier cantidad finita de argumentos, lo que se conoce usualmente como su aridad, excepto cero.

Dado un conjunto cualquiera A, interesa darle significado a los símbolos de un lenguaje $\mathscr{L}$ en A. Esto se logra a través de una *interpretación*, esto es, una correspondencia que asigna a cada relación n-aria P una relación $R \subset A^n$, a cada función m-aria una función $G \colon A^m \to A$ y a cada constante c un elemento $x \in A$.

Definición 1.7. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje formal. Un *modelo* $\mathfrak{A}$ para $\mathscr{L}$ se define como,

$$\mathfrak{A} = \langle A, \mathscr{I} \rangle.$$

Donde A, que es un conjunto cualquiera, es el *universo* de $\mathfrak{A}$ y $\mathscr{I}$ es una interpretación de los símbolos de $\mathscr{L}$ en A.

Dada una sentencia ϕ de un lenguaje $\mathscr{L}$ y $\mathfrak{A}$ un modelo para $\mathscr{L}$, se escribirá $\mathfrak{A} \models \phi$ si la fórmula ϕ se satisface en $\mathfrak{A}$. Intuitivamente, la relación $\models$ quiere decir que ϕ es verdadera en el modelo. Una definición rigurosa de $\models$ es posible, y requiere inducción sobre la complejidad de ϕ (véase [3, §1.3] ó [2, §12]).

Dados dos modelos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ se dirá que $\mathfrak{A}$ es *elementalmente equivalente* a $\mathfrak{B}$, en símbolos $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, si toda sentencia que es verdadera en $\mathfrak{A}$ lo es también en $\mathfrak{B}$ y viceversa.

La definición 1.7 esta dada en forma general. Normalmente interesarán modelos del lenguaje de la teoría de conjuntos, denotado $\mathscr{L}_\in$, el cual consiste de la lógica de primer orden con la relación de igualdad y el símbolo binario $\in$. Los $\in$-modelos de la forma $\langle A, \in \rangle$, a los que denotaremos solamente por A, son los modelos de $\mathscr{L}_\in$ con los que se trabajará la mayoría del tiempo. Existe una clase de $\in$-modelos de gran importancia, que se definen a continuación.

Definición 1.8. Un *modelo interno* de ZF es un $\in$-modelo transitivo donde se satisfacen los axiomas y que contiene a los ordinales.

1.4 Ultrapotencias e Inmersiones Elementales

El objetivo de este capítulo es establecer los resultados básicos sobre las inmersiones elementales de modelos internos de ZFC y demostrar el teorema ⟨reference needed⟩ que se usará en una de las demostraciones del teorema de Kunen.

Definición 1.9. Sean $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ y $\mathfrak{N} = \langle N, \dots \rangle$ dos modelos de un lenguaje $\mathscr{L}$. Una función inyectiva $f \colon M \to N$ es una *inmersión elemental*, denotado por $f \colon \mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, si, y solo si, para cualquier fórmula n-aria ϕ de $\mathscr{L}$ y $x_1, \dots, x_n \in M$,

$$\mathfrak{M} \models \phi(x_1, \dots, x_n) \iff \mathfrak{N} \models \phi(f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Si f es la función identidad, diremos que $\mathfrak{M}$ es una subestructura elemental de $\mathfrak{N}$ y se denotará por $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

Hace falta una pequeña disgresión para tratar el caso de inmersiones elementales entre clases propias transitivas. Es sabido que en ZFC no es posible formalizar el concepto de inmersión elemental para clases propias, pues lo prohibe el teorema de la indefinibilidad de la verdad de Tarski. A partir de ahora la noción de inmersión elemental se trabajará de manera informal, pero sin olvidar que, en los contextos que será utilizada, puede ser formalizada en ZFC. ⟨citar a kanamori y la referencia que el hace de Gaifman pag 46⟩.

De la definición de inmersión elemental se sigue que estas preservan todas las operaciones conjuntistas que son absolutas para modelos transitivos. En particular, las inmersiones envían ordinales en ordinales y preservan su orden.

Teorema 1.6. Sean M y N modelos internos de ZFC y $j\colon M \prec N$. Si j no es la función identidad, existe un ordinal δ tal que $j(\delta) > \delta$.

Demostración. Primero, $j(\delta)$ nunca es estrictamente menor que δ: si este fuese el caso, podríamos tomar el menor δ con dicha propiedad y puesto que $j(\delta) < \delta \in M$, y M transitivo, se tendría $j(\delta) \in M$ y al considerar ahora $j(j(\delta))$ se llega a la conclusión $j(j(\delta)) < j(\delta)$, pues las inmersiones preservan el orden. Sea ahora $j(\delta) = \delta$ para todo ordinal δ. Si $x \in M$ es un conjunto de ordinales, se sigue entonces que $j(x) = x$. Puesto que $M \models \text{AC}$ y $N \models \text{AC}$, todo $x \in M$ es un conjunto de ordinales y $j(x) = x$ para todo $x \in M$, lo cual es una contradicción pues se asumió que j no era la identidad. ∎

El teorema anterior se puede establecer también en ZF. En efecto, para este caso, basta con que $N \subseteq M$ ó $M \models \text{AC}$ ⟨poner cita del teorema del kanamori⟩.

A partir de ahora se considerarán solamente inmersiones elementales que no sean la identidad entre modelos internos de ZFC. Esto permite dar un nombre al δ del teorema 1.6.

Definición 1.10. Sea $j\colon M \to N$ una inmersión elemental. El *punto crítico* de j es el menor ordinal α tal que $j(\alpha) > \alpha$.

REFERENCIAS

⟨Arreglar formato⟩

[1] K. Kunen, “Set theory”, Rev. ed, College Publ, London, 402, (2013)

[2] T. J. Jech, “Set theory”, The 3rd millennium ed., Springer, Berlin ; New York, 769, (2003)

[3] C. C. Chang y H. J. Keisler, “Model theory”, Dover ed, Dover Publications, Mineola, N.Y, 650, (2012)

[4] A. Kanamori, “The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings”, 2nd ed, Springer, Berlin, 536, (2009)