

resources/usblogo.png

**UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR**  
**DECANATO DE ESTUDIOS PROFESIONALES**  
**COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS**

**ESTUDIO COMPARATIVO DE TRES DEMOSTRACIONES DEL  
TEOREMA DE INCONSISTENCIA DE KUNEN.**

Por:  
Jhonny Lanzuisi Berrizbeitia

Realizado con la asesoría de:  
Jesús Nieto Martínez

**PROYECTO DE GRADO**  
Presentado ante la Ilustre Universidad Simón Bolívar  
como requisito parcial para optar al título de  
Licenciatura en Matemáticas Puras

Sartenejas, 20 de julio de 2024

14

## LISTA DE SÍMBOLOS

15 En la lista siguiente,  $C$  es un conjunto.

16

Símbolo	Significado
$\mathcal{P}(C)$	Conjunto de partes.
$\sup(C)$	Supremo, es decir, $\bigcup C$ .
$\text{cf } C$	Cofinalidad

## LISTA DE ABREVIATURAS

Abreviatura	Significado
ZF	Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.
AC	Axioma de elección.
ZFC	ZF al añadir AC.
NBG	Teoría de conjuntos de Von Neumann, Bernays y Gödel.
CH	Hipótesis del continuo: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ .
c. n. a.	Cerrado no acotado.

## ÍNDICE GENERAL

20	<b>1. Nociones básicas</b>	<b>1</b>
21	1.1. Filtros . . . . .	1
22	1.2. Conjuntos Estacionarios . . . . .	2
23	1.3. Teoría de Modelos . . . . .	5
24	1.4. Inmersiones Elementales . . . . .	6
25	1.5. Ultrapotencias . . . . .	7

# CAPÍTULO 1

## NOCIONES BÁSICAS

Este capítulo establece varios conceptos básicos que serán necesarios más adelante. Las nociones de filtro, ultrafiltro y filtro  $\kappa$ -completo junto con los conjuntos no acotados y estacionarios componen las definiciones de conjuntos más elementales que harán falta. Luego, un rápido repaso de la teoría de modelos permitirá abordar las inmersiones elementales, que son una pieza central del teorema de Kunen.

Es bien sabido que existen diversos sistemas axiomáticos con los cuales se puede desarrollar la teoría de conjuntos. En todo este texto, se usará el de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección, tal como aparece en cualquiera de las referencias estándar [1, 2]. Más aún, se asume familiaridad con las nociones elementales de la teoría de conjuntos y de la lógica de primer orden.

### 1.1 Filtros

Esta sección se ocupa de dar las definiciones básicas de filtros, que serán necesarias a lo largo del texto. Los filtros caracterizan a conjuntos “grandes” dentro de un conjunto dado  $C$ .

**DEFINICIÓN 1.1.** Sea  $C$  un conjunto no vacío. Un conjunto  $F \subset \mathcal{P}(C)$  es un *filtro* si se cumplen las siguientes condiciones:

- a)  $C \in F$  y  $\emptyset \notin F$ .
- b) Si  $X, Y \in F$  entonces  $X \cap Y \in F$ .
- c) Si  $X, Y \subset C$ ,  $X \in F$  y  $X \subset Y$  entonces  $Y \in F$ .

**DEFINICIÓN 1.2.** Sea  $F$  un filtro sobre  $C$ .  $F$  es *ultrafiltro* si, para todo  $X \subset C$ , se tiene que  $X \in F$  o  $X - S \in F$ .

Una caracterización para ultrafiltros viene dada por la propiedad de maximalidad:

TEOREMA 1.1. Sea  $F$  un filtro sobre  $C$ .  $F$  es *ultrafiltro* si, y solo si, es maximal.

La siguiente definición es central para la teoría de cardinales medibles.

DEFINICIÓN 1.3. Sea  $\kappa$  un cardinal regular y  $F$  un filtro sobre  $C$ .  $F$  es  $\kappa$ -completo siempre que dada una familia de conjuntos  $\{X_\alpha \in F \mid \alpha < \kappa\}$ , se tiene que

$$\bigcap X_\alpha \in F.$$

Un ejemplo que une los conceptos tratados hasta ahora es, como ya se mencionó, la definición de cardinal medible.

DEFINICIÓN 1.4. Sea  $\kappa > \omega$  un cardinal.  $\kappa$  es *medible* si existe un ultrafiltro  $\kappa$ -completo sobre  $\kappa$ .

## 1.2 Conjuntos Estacionarios

El principal objetivo de esta sección es establecer un teorema de Solovay, acerca de particiones con conjuntos estacionarios, usando el teorema 1.3 de Fodor.

Sea  $C$  un conjunto y  $X \subset C$ , diremos que  $X$  es *no acotado* en  $C$  si  $\sup(X) = C$ . Si  $C$  es además un conjunto de ordinales, un ordinal límite  $\alpha$  es *punto límite* de  $C$  si  $\sup(C \cap \alpha) = \alpha$ .

DEFINICIÓN 1.5. Sea  $\kappa$  un cardinal regular no numerable. Un conjunto  $C \subset \kappa$  es *cerrado no acotado* (c. n. a.) si  $C$  es no acotado en  $\kappa$  y contiene a todos sus puntos límites menores que  $\kappa$ . Un conjunto  $S \subset \kappa$  es *estacionario* si para cada conjunto c. n. a.  $C \subset \kappa$  se tiene  $S \cap C \neq \emptyset$ .

Será de utilidad saber el comportamiento de los conjuntos c. n. a. bajo intersecciones. Para este fin, definimos, dada  $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$  una sucesión de subconjuntos de  $\kappa$ , la *intersección diagonal* de  $X_\alpha$  como:

$$\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \left\{ \epsilon < \kappa \mid \epsilon \in \bigcap_{\alpha < \epsilon} X_\alpha \right\}.$$

TEOREMA 1.2. Sea  $\kappa$  un cardinal regular no numerable y  $\{C_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$  una familia de c. n. a. en  $\kappa$ , entonces:

a)  $C_\alpha \cap C_\beta$  es c. n. a.  $(\alpha, \beta < \kappa)$ .

b)  $\bigcap_{\alpha < \kappa} C_\alpha$  es c. n. a.

73 c)  $\Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha$  es c. n. a.

74 *Demostración.* Veamos cada parte por separado.

75 a) Es claro que  $C \cap D$  es cerrado. Veamos que es no acotado. Sea  $\alpha < \kappa$ . Dado que  $C$  es  
 76 no acotado, existe  $\alpha_1 \in C$  tal que  $\alpha_1 > \alpha$ . De la misma forma, existe  $\alpha_2 \in D$  tal que  
 77  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Podemos seguir con este proceso para obtener una sucesión creciente:

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

78 Sea  $\beta$  el límite de la sucesión de arriba. Entonces  $\beta < \kappa$  y  $\beta \in C$  y  $\beta \in D$ .

79 b) La demostración será por inducción. Sea  $\lambda < \kappa$  y  $\langle C_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$  una sucesión de  
 80 conjuntos c. n. a. en  $\kappa$ . Para los ordinales sucesores, podemos simplemente aplicar el  
 81 punto a). Si  $\lambda$  es ordinal límite, asumiremos que el teorema es cierto para cada  $\alpha < \lambda$ .  
 82 Podemos ahora sustituir cada  $C_\alpha$  por  $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$  y obtenemos una sucesión decreciente  
 83 con la misma intersección. Entonces a partir de ahora:

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots$$

84 serán c. n. a. y  $C = \bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$ . Por la misma razón que el punto a), no es difícil ver que  
 85  $C$  es cerrado. Veamos que es no acotado. Sea  $\alpha < \kappa$ , construiremos una sucesión de la  
 86 siguiente forma: sea  $\beta_0 \in C_0$  mayor que  $\alpha$ , y para cada  $\xi < \lambda$  se tomará  $\beta_\xi \in C_\xi$  tal  
 87 que  $\beta_\xi > \sup \{\beta_\nu \mid \nu < \xi\}$ . Dado que  $\kappa$  es regular y  $\lambda < \kappa$ , la sucesión que se acaba  
 88 de describir existe y su límite  $\beta$  es menor que  $\kappa$ . Para cada  $\eta < \lambda$ ,  $\beta$  es límite de una  
 89 sucesión  $\langle \beta_\xi \mid \eta \leq \xi < \lambda \rangle$  en  $C_\eta$ , por lo que  $\beta \in C_\eta$  y esto implica  $\beta \in C$ .

90 c) Llamemos  $D$  a  $\Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha$ . Veamos primero que  $D$  es cerrado. Sea entonces  $\lambda < \kappa$  tal  
 91 que  $D \cap \lambda$  no está acotado en  $\lambda$ , esto es, que  $\lambda$  es punto límite de  $D$ . Tomemos  $\beta \in \lambda$ ,  
 92 entonces existe  $\epsilon \in \lambda \cap D$  tal que  $\beta < \epsilon$  pues  $D \cap \lambda$  es no acotado. Como  $\epsilon \in D$ ,  
 93 existe  $C_\alpha$ , con  $\alpha < \epsilon < \lambda$ , al que  $\epsilon$  pertenece. Pero entonces, lo que hemos demostrado  
 94 es que siempre que tomemos  $\beta \in \lambda$  existe  $\epsilon \in C_\alpha \cap \lambda$  que esta por encima de  $\beta$  o,  
 95 equivalentemente, que  $C_\alpha \cap \lambda$  es no acotado en  $\lambda$ . Al ser  $C_\alpha$  cerrado tenemos  $\lambda \in C_\alpha$  y  
 96 esto implica  $\lambda \in D$ . Luego  $D$  es cerrado.

97 Solo falta ver que  $D$  es no acotado en  $\kappa$ . Para esto notemos que, debido al punto b),  
 98 se puede reemplazar cada  $C_\alpha$  por  $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$  y obtenemos una sucesión decreciente  $C_0 \subset$   
 99  $C_1 \subset \dots$  que no cambia el valor de  $D$ . Sea  $\gamma \in \kappa$ . Como cada  $C_\alpha$  es no acotado en  $\kappa$ ,  
 100 podemos construir una sucesión  $\langle \beta_n \mid n \in \omega \rangle$  de la siguiente forma: tomamos  $\beta_0 \in C_0$

mayor que  $\gamma$ , luego dado  $\beta_n$ , tomamos  $\beta_{n+1} \in C_{\beta_n}$  mayor que  $\beta_n$ . Llamemos  $\beta = \lim_n \beta_n$  y tomemos  $\xi < \beta$ . Entonces existe  $\beta_n > \xi$  y cada  $\beta_k$  con  $k > n$  pertenece a  $C_{\beta_n}$ , pues los  $C_\alpha$  están encajados, por lo que  $\beta \in C_{\beta_n}$  y  $\beta \in C_\xi$ . Pero esto muestra que  $\beta \in D$  y que  $D$  es no acotado.

105

DEFINICIÓN 1.6. Una función de ordinales  $f$  en un conjunto  $S$  es *regresiva*, si  $f(\alpha) < \alpha$  para todo  $\alpha \in S$ .

TEOREMA 1.3 (Fodor). Sea  $f$  una función regresiva en un conjunto estacionario  $E \subset \kappa$ . Entonces existe  $\alpha \in \kappa$  tal que  $f^{-1}(\{\alpha\})$  es estacionario.

*Demostración.* Supongamos, en busca de una contradicción, que  $f^{-1}(\{\alpha\})$  no es estacionario para todo  $\alpha < \kappa$ . Entonces existen conjuntos c. n. a.  $C_\alpha$  tales que  $C_\alpha \cap f^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$ , esto es, que  $f(\gamma) \neq \alpha$  para todo  $\gamma \in E \cap C_\alpha$ . Si  $D = \Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha$ , por el teorema 1.2,  $D$  es c. n. a. en  $\kappa$ . Pero entonces  $D \cap E \neq \emptyset$  y podemos tomar  $\gamma \in D \cap E$ , luego,  $f(\gamma) \neq \alpha$  para todo  $\alpha < \gamma$  lo que implica  $f(\gamma) \geq \gamma$  y esto es una contradicción.

El siguiente es un teorema auxiliar, que será de utilidad para el teorema 1.5.

TEOREMA 1.4. Sea  $E \subset \kappa$  un conjunto estacionario en  $\kappa$  y supongamos que todo ordinal perteneciente a  $E$  es regular no numerable. Entonces el conjunto

$$T = \{\alpha \in E \mid E \cap \alpha \text{ no es un subconjunto estacionario de } \alpha\}$$

es estacionario en  $\kappa$ .

*Demostración.* Veamos que  $T$  intersecta a todos los c. n. a. de  $\kappa$ . Sea  $C$  c. n. a. en  $\kappa$  y  $C'$  el subconjunto de los puntos límite de  $C$ . Tenemos que  $C'$  también es c. n. a. en  $\kappa$  por lo que podemos tomar el menor  $\alpha \in C' \cap E$ . Puesto que  $\alpha$  es regular y punto límite de  $C$ ,  $C_\alpha \cap \alpha$  es un subconjunto c. n. a. de  $\alpha$ , como también lo es  $C' \cap \alpha$ . Dado que  $\alpha$  es el elemento más pequeño de  $C' \cap E$ ,  $C' \cap E \cap \alpha = \emptyset$ . Esto último dice que  $E \cap \alpha$  es no estacionario en  $\alpha$ , y  $\alpha \in T \cap C$ .

TEOREMA 1.5 (Solovay). Sea  $\kappa$  un cardinal regular no numerable. Entonces cada subconjunto estacionario de  $\kappa$  es la unión disjunta de  $\kappa$  subconjuntos estacionarios.



127 *Demostración.* Sea  $E$  un subconjunto estacionario de  $\kappa$ . Por el teorema 1.4, asumiremos que  
 128 el conjunto  $W$  consistente de todos los  $\alpha \in E$  tales que  $\alpha$  es cardinal regular y  $E \cap \alpha$  no es  
 129 estacionario en  $\alpha$ , es estacionario en  $\kappa$ . Existe entonces un conjunto c. n. a.  $C_\alpha \subset \alpha$  tal que  
 130  $E \cap C_\alpha = \emptyset$ , pero  $W \subset E$  por lo que  $C_\alpha \cap W = \emptyset$ . Sea  $\langle a_\xi^\alpha \mid \xi < \alpha \rangle$  una enumeración creciente  
 131 de  $C_\alpha$ . Se tiene entonces que  $\lim_{\xi \rightarrow \alpha} a_\xi^\alpha = \alpha$  y  $a_\xi^\alpha \notin W$  para todo  $\xi, \alpha$ .

132 Veamos, en primer lugar, que existe  $\xi$  tal que, para todo  $\eta < \kappa$ , el conjunto:

$$\{\alpha \in W \mid a_\xi^\alpha \geq \eta\} \quad (1.1)$$

133 es estacionario. Si este no fuese el caso, para cada  $\xi$  tendríamos un  $\eta(\xi)$  y un conjunto c. n. a.  
 134  $C_\xi$ , tal que  $a_\xi^\alpha < \eta(\xi)$  para todo  $\alpha \in W \cap C_\xi$ , siempre que  $a_\xi^\alpha$  este definida. Sea  $C$  la intersección  
 135 diagonal de los  $C_\xi$ . Entonces si  $\alpha$  es un elemento de  $W \cap C$ , se tiene que  $a_\xi^\alpha < \eta(\xi)$  para todo  
 136  $\xi < \alpha$ . Consideremos ahora el conjunto  $D$  de los  $\gamma \in C$  tales que  $\eta(\xi) < \gamma$  para todo  $\xi < \gamma$ ,  
 137 este conjunto es c. n. a. y  $W \cap D$  es estacionario. Sean  $\alpha < \gamma$  dos ordinales en  $W \cap D$ , si  $\xi < \gamma$   
 138 entonces  $a_\xi^\alpha < \eta(\xi) < \gamma$ , lo cual implica que  $a_\gamma^\alpha = \gamma$ . Pero esto es una contradicción puesto  
 139 que  $\gamma \in W$  y  $a_\gamma^\alpha \notin W$ .

140 Tenemos ahora  $\xi$  tal que (1.1) es estacionario. Sea  $f$  una función en  $W$  definida por  $f(\alpha) =$   
 141  $a_\xi^\alpha$ . Por la definición de  $a_\xi^\alpha$  la función  $f$  es regresiva, por lo que para cada  $\eta < \kappa$  el teorema 1.3  
 142 de Fodor nos da un conjunto estacionario  $E_\eta$  de (1.1) y un  $\gamma_\eta \geq \eta$  que es testigo de que  $E_\eta$   
 143 sea estacionario. Ahora, si  $\gamma_\eta \neq \gamma_{\eta'}$  entonces  $E_\eta \cap E_{\eta'} = \emptyset$  y, puesto que  $\kappa$  es regular, se tiene  
 144 también  $|\{E_\eta \mid \eta < \kappa\}| = |\{\gamma_\eta \mid \eta < \kappa\}| = \kappa$ . ■

### 145 1.3 Teoría de Modelos

146 La teoría de modelos es un área relativamente joven [3, pág. 3]. No obstante, su desarrollo  
 147 ha sido crucial para la teoría de conjuntos y los cardinales grandes [4, pág. xv].

148 Se quiere definir lo que es un modelo para un lenguaje formal  $\mathcal{L}$ . Un lenguaje  $\mathcal{L}$  es un  
 149 conjunto de símbolos relacionales, funcionales y constantes. Los símbolos relacionales y fun-  
 150 cionales pueden tener cualquier cantidad finita de argumentos, lo que se conoce usualmente  
 151 como su aridad, excepto cero.

152 Dado un conjunto cualquiera  $A$ , interesa darle significado a los símbolos de un lenguaje  $\mathcal{L}$   
 153 en  $A$ . Esto se logra a través de una *interpretación*, esto es, una correspondencia que asigna a  
 154 cada relación  $n$ -aria  $P$  una relación  $R \subset A^n$ , a cada función  $m$ -aria una función  $G: A^m \rightarrow A$   
 155 y a cada constante  $c$  un elemento  $x \in A$ .

156 DEFINICIÓN 1.7. Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal. Un *modelo*  $\mathfrak{A}$  para  $\mathcal{L}$  se define como,

$$\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle.$$

157 Donde  $A$ , que es un conjunto cualquiera, es el *universo* de  $\mathfrak{A}$  y  $\mathcal{I}$  es una interpretación de  
158 los símbolos de  $\mathcal{L}$  en  $A$ .

159 Dada una sentencia  $\phi$  de un lenguaje  $\mathcal{L}$  y  $\mathfrak{A}$  un modelo para  $\mathcal{L}$ , se escribirá  $\mathfrak{A} \models \phi$  si la  
160 fórmula  $\phi$  se satisface en  $\mathfrak{A}$ . Intuitivamente, la relación  $\models$  quiere decir que  $\phi$  es verdadera en  
161 el modelo. Una definición rigurosa de  $\models$  es posible, y requiere inducción sobre la complejidad  
162 de  $\phi$  (véase [3, §1.3] ó [2, §12]).

163 Dados dos modelos  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  se dirá que  $\mathfrak{A}$  es *elementalmente equivalente* a  $\mathfrak{B}$ , en símbolos  
164  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ , si toda sentencia que es verdadera en  $\mathfrak{A}$  lo es también en  $\mathfrak{B}$  y viceversa.

165 La definición 1.7 esta dada en forma general. Normalmente interesarán modelos del lenguaje  
166 de la teoría de conjuntos, denotado  $\mathcal{L}_\in$ , el cual consiste de la lógica de primer orden con la  
167 relación de igualdad y el símbolo binario  $\in$ . Los  $\in$ -modelos de la forma  $\langle A, \in \rangle$ , a los que  
168 denotaremos solamente por  $A$ , son los modelos de  $\mathcal{L}_\in$  con los que se trabajará la mayoría del  
169 tiempo. Existe una clase de  $\in$ -modelos de gran importancia, que se definen a continuación.

170 DEFINICIÓN 1.8. Un *modelo interno* de ZF es un  $\in$ -modelo transitivo donde se satisfacen los  
171 axiomas y que contiene a los ordinales.

## 172 1.4 Inmersiones Elementales

173 El objetivo de este capítulo es establecer los resultados básicos sobre las inmersiones ele-  
174 mentales de modelos internos de ZFC.

175 DEFINICIÓN 1.9. Sean  $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$  y  $\mathfrak{N} = \langle N, \dots \rangle$  dos modelos de un lenguaje  $\mathcal{L}$ . Una  
176 función inyectiva  $f: M \rightarrow N$  es una *inmersión elemental*, denotado por  $f: \mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ , si, y solo  
177 si, para cualquier fórmula  $n$ -aria  $\phi$  de  $\mathcal{L}$  y  $x_1, \dots, x_n \in M$ ,

$$\mathfrak{M} \models \phi(x_1, \dots, x_n) \iff \mathfrak{N} \models \phi(f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

178 Si  $f$  es la función identidad, diremos que  $\mathfrak{M}$  es una subestructura elemental de  $\mathfrak{N}$  y se denotará  
179 por  $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ .

180 Hace falta una pequeña digresión para tratar el caso de inmersiones elementales entre clases

181 propias transitivas. Es sabido que en ZFC no es posible formalizar el concepto de inmersión  
 182 elemental para clases propias, pues lo prohíbe el teorema de la indefinibilidad de la verdad de  
 183 Tarski. A partir de ahora la noción de inmersión elemental se trabajará de manera informal,  
 184 pero sin olvidar que, en los contextos que será utilizada, puede ser formalizada en ZFC. [\(citar](#)  
 185 [a kanamori y la referencia que el hace de Gaifman pag 46\)](#).

186 De la definición de inmersión elemental se sigue que estas preservan todas las operaciones  
 187 conjuntistas que son absolutas para modelos transitivos. En particular, las inmersiones envían  
 188 ordinales en ordinales y preservan su orden.

189 **TEOREMA 1.6.** Sean  $M$  y  $N$  modelos internos de ZFC y  $j: M \prec N$ . Si  $j$  no es la función  
 190 identidad, existe un ordinal  $\delta$  tal que  $j(\delta) > \delta$ .

191 *Demostración.* Primero,  $j(\delta)$  nunca es estrictamente menor que  $\delta$ : si este fuese el caso, po-  
 192 dríamos tomar el menor  $\delta$  con dicha propiedad y puesto que  $j(\delta) < \delta \in M$ , y  $M$  transitivo,  
 193 se tendría  $j(\delta) \in M$  y al considerar ahora  $j(j(\delta))$  se llega a la conclusión  $j(j(\delta)) < j(\delta)$ , pues  
 194 las inmersiones preservan el orden. Sea ahora  $j(\delta) = \delta$  para todo ordinal  $\delta$ . Si  $x \in M$  es un  
 195 conjunto de ordinales, se sigue entonces que  $j(x) = x$ . Puesto que  $M \models AC$  y  $N \models AC$ , todo  
 196  $x \in M$  es un conjunto de ordinales y  $j(x) = x$  para todo  $x \in M$ , lo cual es una contradicción  
 197 pues se asumió que  $j$  no era la identidad. ■

198 El teorema anterior se puede establecer también en ZF. En efecto, para este caso, basta  
 199 con que  $N \subseteq M$  ó  $M \models AC$  [\(poner cita del teorema del kanamori\)](#).

200 A partir de ahora se considerarán solamente inmersiones elementales que no sean la iden-  
 201 tidad entre modelos internos de ZFC. Esto permite dar un nombre al  $\delta$  del teorema 1.6.

202 **DEFINICIÓN 1.10.** Sea  $j: M \rightarrow N$  una inmersión elemental. El *punto crítico* de  $j$  es el menor  
 203 ordinal  $\alpha$  tal que  $j(\alpha) > \alpha$ .

## 204 1.5 Ultrapotencias

205 Sea  $I$  un conjunto no vacío,  $U$  un ultrafiltro sobre  $I$  y, para cada  $i \in I$ , sean  $A_i$  conjuntos no  
 206 vacíos. Dadas dos funciones  $f$  y  $g$  pertenecientes al producto cartesiano de los  $A_i$ , se define  
 207 la relación de *U-equivalencia*:

$$f =_U g \quad \text{si, y solo si,} \quad \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U.$$

208 La relación anterior es una relación de equivalencia [3, Proposición 4.1.5], por lo que pode-

mos considerar la clase de equivalencia de una función dada  $f$ :

$$f_U = \left\{ g \in \prod_{i \in I} A_i \mid g =_U f \right\},$$

el *ultraproducto* de los  $A_i$  se define como el conjunto de todas las  $f_U$ , y lo denotamos por  $\prod_U A_i$ . En el caso de que los  $A_i$  sean todos iguales, digamos que a un conjunto  $A$ , el ultraproducto se conoce como *ultrapotencia* y se denota, naturalmente, por  $\prod_U A$ .

Si en la construcción anterior, para cada  $i \in I$ , se consideran modelos  $\mathfrak{A}_i$  entonces se puede contruir un modelo  $\prod_U \mathfrak{A}_i$ , al que llamaremos igualmente ultraproducto o ultrapotencia según sea el caso, haciendo de  $\prod_U A_i$  el universo del modelo y dando una interpretación apropiada (es decir, definida en relación al ultrafiltro) a las relaciones, funciones  $n$ -arias y las constantes [3, Teorema 4.1.6], donde lo importante es que dicho modelo está bien definido. Conviene, sin embargo, enunciar el teorema fundamental de los ultraproductos, pues da la forma en la que podemos interpretar la satisfacción de fórmulas en estas estructuras.

**TEOREMA 1.7.** Sea  $\prod_U \mathfrak{A}_i$  un ultraproducto e  $I$  su conjunto de índices. Dada cualquier fórmula  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  del lenguaje y  $(f_1)_U, \dots, (f_n)_U \in \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ ,

$$\prod_U \mathfrak{A}_i \models \phi((f_1)_U, \dots, (f_n)_U) \quad \text{si, y solo si,} \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \phi(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U.$$

Como es usual para esta clase de teoremas en la teoría de modelos, el resultado anterior se demuestra haciendo inducción sobre la complejidad de  $\phi$  [3, Teorema 4.1.9]. El teorema 1.7 tiene varios corolarios importantes, de mayor utilidad será el hecho de que existe una inmersión elemental  $j: \mathfrak{A} \prec \prod_U \mathfrak{A}$  [3, Corolario 4.1.13], llamada normalmente inmersión canónica. En efecto, se define  $j$  para todo  $\alpha \in \mathfrak{A}$  como la clase de equivalencia de la función constantemente igual a  $\alpha$ .

La primera dificultad para extender el concepto de ultrapotencia al universo proviene de que, dada  $f: I \rightarrow V$  y  $U$  ultrafiltro sobre  $I$ , la clase de equivalencia  $f_U$  como se definió anteriormente es una clase propia. Esto motiva un pequeño ajuste a la definición:

$$(f)_U^0 = \{g \in f_U \mid \forall h (h \in f_U \implies \text{rank}(g) \leq \text{rank}(h))\},$$

es decir, por la clase de  $f$  se entiende ahora el conjunto de las funciones de dicha clase con rango mínimo. Entonces, si  $\alpha$  es el ordinal más pequeño para el que existe una función de rango  $\alpha$  en  $(f)_U^0$  esta clase de equivalencia estará contenida en  $V_{\alpha+1}$  y será por tanto un conjunto. Se puede entonces definir el universo del modelo de ultraproducto que se busca

235 como el conjunto de todas las  $(f)_U^0$ . Si a este universo le añadimos la relación  $\in_U$  dada por:

$$(g)_U^0 \in_U (f)_U^0 \quad \text{si, y solo si,} \quad \{i \in I \mid g(i) \in f(i)\} \in U,$$

236 se obtiene un modelo llamado ultrapotencia del universo y denotado por  $\text{Ult}(V, U)$ .

237 Vale la pena destacar que el teorema 1.7 sigue aplicando para  $\text{Ult}(V, U)$  con la acotación de  
 238 que, puesto que ahora esta involucrada la relación de satisfacción para clases propias, debe  
 239 ser interpretado como un esquema infinito de teoremas.

240 La última herramienta teórica relacionada a ultrapotencias que será necesaria viene dada  
 241 por el siguiente hecho, donde una condición extra sobre  $U$  da como resultado modelos bien  
 242 fundados.

243 **TEOREMA 1.8.** Si  $U$  es  $\omega_1$ -completo entonces  $\in_U$  es una relación bien fundada.

244 *Demostración.* Para la implicación directa, sea  $\langle (f_n)_U^0 \mid n < \omega \rangle$  tal que  $(f_{n+1})_U^0 \in_U (f_n)_U^0$   
 245 para  $n < \omega$ , entonces  $\bigcap_n \{i \in I \mid f_{n+1}(i) \in f_n(i)\} \neq \emptyset$  da una sucesión infinita descendiente  
 246 de  $\in$ .

247 Ahora, sean  $\{X_n \mid n \in \omega\}$  subconjuntos de  $U$  tales que  $\bigcap_{n < \omega} X_n \notin U$  entonces se definen  
 248  $g_k: I \rightarrow V$  para  $k < \omega$  de la siguiente forma:

$$g_k(i) = \begin{cases} n - k & \text{si } i \in (\bigcap_{m < n} X_m) - X_n \text{ y } n \geq k, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

250

## REFERENCIAS

251 [⟨Arreglar formato⟩](#)

- 252 [1] K. Kunen, “Set theory”, Rev. ed, College Publ, London, 402, (2013)
- 253 [2] T. J. Jech, “Set theory”, The 3rd millennium ed., Springer, Berlin ; New York, 769,  
254 (2003)
- 255 [3] C. C. Chang y H. J. Keisler, “Model theory”, Dover ed, Dover Publications, Mineola,  
256 N.Y, 650, (2012)
- 257 [4] A. Kanamori, “The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings”,  
258 2nd ed, Springer, Berlin, 536, (2009)