

resources/usblogo.png

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DECANATO DE ESTUDIOS PROFESIONALES
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

**ESTUDIO COMPARATIVO DE TRES DEMOSTRACIONES DEL
TEOREMA DE INCONSISTENCIA DE KUNEN.**

Por:
Jhonny Lanzuisi Berrizbeitia

Realizado con la asesoría de:
Jesús Nieto Martínez

PROYECTO DE GRADO
Presentado ante la Ilustre Universidad Simón Bolívar
como requisito parcial para optar al título de
Licenciatura en Matemáticas Puras

Sartenejas, 26 de julio de 2024

LISTA DE SÍMBOLOS

15 En la lista siguiente, C es un conjunto.

Símbolo	Significado
$\mathcal{P}(C)$	Conjunto de partes.
$\sup(C)$	Supremo, es decir, $\bigcup C$.
$\text{cf } C$	Cofinalidad

16

LISTA DE ABREVIATURAS

Abreviatura	Significado
ZF	Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.
AC	Axioma de elección.
ZFC	ZF al añadir AC.
NBG	Teoría de conjuntos de Von Neumann, Bernays y Gödel.
CH	Hipótesis del continuo: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.
c. n. a.	Cerrado no acotado.

ÍNDICE GENERAL

20	1. Nociones básicas	1
21	1.1. Filtros	1
22	1.2. Conjuntos Estacionarios	2
23	1.3. Teoría de Modelos	5
24	1.4. Inmersiones Elementales	6
25	1.5. Ultrapotencias	8

CAPÍTULO 1

NOCIONES BÁSICAS

Este capítulo establece varios conceptos básicos que serán necesarios más adelante. Las nociones de filtro, ultrafiltro y filtro κ -completo junto con los conjuntos no acotados y estacionarios componen las definiciones de conjuntos más elementales que harán falta. Luego, un rápido repaso de la teoría de modelos permitirá abordar las inmersiones elementales, que son una pieza central del teorema de Kunen.

Es bien sabido que existen diversos sistemas axiomáticos con los cuales se puede desarrollar la teoría de conjuntos. En todo este texto, se usará el de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección, tal como aparece en cualquiera de las referencias estándar [1, 2]. Más aún, se asume familiaridad con las nociones elementales de la teoría de conjuntos y de la lógica de primer orden.

1.1 Filtros

Esta sección se ocupa de dar las definiciones básicas de filtros, que serán necesarias a lo largo del texto. Los filtros caracterizan a conjuntos “grandes” dentro de un conjunto dado C .

DEFINICIÓN 1.1. Sea C un conjunto no vacío. Un conjunto $F \subset \mathcal{P}(C)$ es un *filtro* si se cumplen las siguientes condiciones:

- a) $C \in F$ y $\emptyset \notin F$.
- b) Si $X, Y \in F$ entonces $X \cap Y \in F$.
- c) Si $X, Y \subset C$, $X \in F$ y $X \subset Y$ entonces $Y \in F$.

DEFINICIÓN 1.2. Sea F un filtro sobre C . F es *ultrafiltro* si, para todo $X \subset C$, se tiene que $X \in F$ o $X - S \in F$.

Una caracterización para ultrafiltros viene dada por la propiedad de maximalidad:

TEOREMA 1.1. Sea F un filtro sobre C . F es *ultrafiltro* si, y solo si, es maximal.

La siguiente definición es central para la teoría de cardinales medibles.

DEFINICIÓN 1.3. Sea κ un cardinal regular y F un filtro sobre C . F es κ -completo siempre que dada una familia de conjuntos $\{X_\alpha \in F \mid \alpha < \kappa\}$, se tiene que

$$\bigcap X_\alpha \in F.$$

Un ejemplo que une los conceptos tratados hasta ahora es, como ya se mencionó, la definición de cardinal medible.

DEFINICIÓN 1.4. Sea $\kappa > \omega$ un cardinal. κ es *medible* si existe un ultrafiltro κ -completo sobre κ .

1.2 Conjuntos Estacionarios

El principal objetivo de esta sección es establecer un teorema de Solovay, acerca de particiones con conjuntos estacionarios, usando el teorema 1.3 de Fodor.

Sea C un conjunto y $X \subset C$, diremos que X es *no acotado* en C si $\sup(X) = C$. Si C es además un conjunto de ordinales, un ordinal límite α es *punto límite* de C si $\sup(C \cap \alpha) = \alpha$.

DEFINICIÓN 1.5. Sea κ un cardinal regular no numerable. Un conjunto $C \subset \kappa$ es *cerrado no acotado* (c. n. a.) si C es no acotado en κ y contiene a todos sus puntos límites menores que κ . Un conjunto $S \subset \kappa$ es *estacionario* si para cada conjunto c. n. a. $C \subset \kappa$ se tiene $S \cap C \neq \emptyset$.

Será de utilidad saber el comportamiento de los conjuntos c. n. a. bajo intersecciones. Para este fin, definimos, dada $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ una sucesión de subconjuntos de κ , la *intersección diagonal* de X_α como:

$$\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \left\{ \epsilon < \kappa \mid \epsilon \in \bigcap_{\alpha < \epsilon} X_\alpha \right\}.$$

TEOREMA 1.2. Sea κ un cardinal regular no numerable y $\{C_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ una familia de c. n. a. en κ , entonces:

a) $C_\alpha \cap C_\beta$ es c. n. a. $(\alpha, \beta < \kappa)$.

b) $\bigcap_{\alpha < \kappa} C_\alpha$ es c. n. a.

73 c) $\Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha$ es c. n. a.

74 *Demostración.* Veamos cada parte por separado.

75 a) Es claro que $C \cap D$ es cerrado. Veamos que es no acotado. Sea $\alpha < \kappa$. Dado que C es
 76 no acotado, existe $\alpha_1 \in C$ tal que $\alpha_1 > \alpha$. De la misma forma, existe $\alpha_2 \in D$ tal que
 77 $\alpha_2 > \alpha_1$. Podemos seguir con este proceso para obtener una sucesión creciente:

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

78 Sea β el límite de la sucesión de arriba. Entonces $\beta < \kappa$ y $\beta \in C$ y $\beta \in D$.

79 b) La demostración será por inducción. Sea $\lambda < \kappa$ y $\langle C_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ una sucesión de
 80 conjuntos c. n. a. en κ . Para los ordinales sucesores, podemos simplemente aplicar el
 81 punto a). Si λ es ordinal límite, asumiremos que el teorema es cierto para cada $\alpha < \lambda$.
 82 Podemos ahora sustituir cada C_α por $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$ y obtenemos una sucesión decreciente
 83 con la misma intersección. Entonces a partir de ahora:

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots$$

84 serán c. n. a. y $C = \bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$. Por la misma razón que el punto a), no es difícil ver que
 85 C es cerrado. Veamos que es no acotado. Sea $\alpha < \kappa$, construiremos una sucesión de la
 86 siguiente forma: sea $\beta_0 \in C_0$ mayor que α , y para cada $\xi < \lambda$ se tomará $\beta_\xi \in C_\xi$ tal
 87 que $\beta_\xi > \sup \{\beta_\nu \mid \nu < \xi\}$. Dado que κ es regular y $\lambda < \kappa$, la sucesión que se acaba
 88 de describir existe y su límite β es menor que κ . Para cada $\eta < \lambda$, β es límite de una
 89 sucesión $\langle \beta_\xi \mid \eta \leq \xi < \lambda \rangle$ en C_η , por lo que $\beta \in C_\eta$ y esto implica $\beta \in C$.

90 c) Llamemos D a $\Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha$. Veamos primero que D es cerrado. Sea entonces $\lambda < \kappa$ tal
 91 que $D \cap \lambda$ no está acotado en λ , esto es, que λ es punto límite de D . Tomemos $\beta \in \lambda$,
 92 entonces existe $\epsilon \in \lambda \cap D$ tal que $\beta < \epsilon$ pues $D \cap \lambda$ es no acotado. Como $\epsilon \in D$,
 93 existe C_α , con $\alpha < \epsilon < \lambda$, al que ϵ pertenece. Pero entonces, lo que hemos demostrado
 94 es que siempre que tomemos $\beta \in \lambda$ existe $\epsilon \in C_\alpha \cap \lambda$ que esta por encima de β o,
 95 equivalentemente, que $C_\alpha \cap \lambda$ es no acotado en λ . Al ser C_α cerrado tenemos $\lambda \in C_\alpha$ y
 96 esto implica $\lambda \in D$. Luego D es cerrado.

97 Solo falta ver que D es no acotado en κ . Para esto notemos que, debido al punto b),
 98 se puede reemplazar cada C_α por $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$ y obtenemos una sucesión decreciente $C_0 \subset$
 99 $C_1 \subset \dots$ que no cambia el valor de D . Sea $\gamma \in \kappa$. Como cada C_α es no acotado en κ ,
 100 podemos construir una sucesión $\langle \beta_n \mid n \in \omega \rangle$ de la siguiente forma: tomamos $\beta_0 \in C_0$

mayor que γ , luego dado β_n , tomamos $\beta_{n+1} \in C_{\beta_n}$ mayor que β_n . Llamemos $\beta = \lim_n \beta_n$ y tomemos $\xi < \beta$. Entonces existe $\beta_n > \xi$ y cada β_k con $k > n$ pertenece a C_{β_n} , pues los C_α están encajados, por lo que $\beta \in C_{\beta_n}$ y $\beta \in C_\xi$. Pero esto muestra que $\beta \in D$ y que D es no acotado.

105

DEFINICIÓN 1.6. Una función de ordinales f en un conjunto S es *regresiva*, si $f(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha \in S$.

TEOREMA 1.3 (Fodor). Sea f una función regresiva en un conjunto estacionario $E \subset \kappa$. Entonces existe $\alpha \in \kappa$ tal que $f^{-1}(\{\alpha\})$ es estacionario.

Demostración. Supongamos, en busca de una contradicción, que $f^{-1}(\{\alpha\})$ no es estacionario para todo $\alpha < \kappa$. Entonces existen conjuntos c. n. a. C_α tales que $C_\alpha \cap f^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$, esto es, que $f(\gamma) \neq \alpha$ para todo $\gamma \in E \cap C_\alpha$. Si $D = \Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha$, por el teorema 1.2, D es c. n. a. en κ . Pero entonces $D \cap E \neq \emptyset$ y podemos tomar $\gamma \in D \cap E$, luego, $f(\gamma) \neq \alpha$ para todo $\alpha < \gamma$ lo que implica $f(\gamma) \geq \gamma$ y esto es una contradicción.

El siguiente es un teorema auxiliar, que será de utilidad para el teorema 1.5.

TEOREMA 1.4. Sea $E \subset \kappa$ un conjunto estacionario en κ y supongamos que todo ordinal perteneciente a E es regular no numerable. Entonces el conjunto

$$T = \{\alpha \in E \mid E \cap \alpha \text{ no es un subconjunto estacionario de } \alpha\}$$

es estacionario en κ .

Demostración. Veamos que T intersecta a todos los c. n. a. de κ . Sea C c. n. a. en κ y C' el subconjunto de los puntos límite de C . Tenemos que C' también es c. n. a. en κ por lo que podemos tomar el menor $\alpha \in C' \cap E$. Puesto que α es regular y punto límite de C , $C_\alpha \cap \alpha$ es un subconjunto c. n. a. de α , como también lo es $C' \cap \alpha$. Dado que α es el elemento más pequeño de $C' \cap E$, $C' \cap E \cap \alpha = \emptyset$. Esto último dice que $E \cap \alpha$ es no estacionario en α , y $\alpha \in T \cap C$.

TEOREMA 1.5 (Solovay). Sea κ un cardinal regular no numerable. Entonces cada subconjunto estacionario de κ es la unión disjunta de κ subconjuntos estacionarios.

127 *Demostración.* Sea E un subconjunto estacionario de κ . Por el teorema 1.4, asumiremos que
 128 el conjunto W consistente de todos los $\alpha \in E$ tales que α es cardinal regular y $E \cap \alpha$ no es
 129 estacionario en α , es estacionario en κ . Existe entonces un conjunto c. n. a. $C_\alpha \subset \alpha$ tal que
 130 $E \cap C_\alpha = \emptyset$, pero $W \subset E$ por lo que $C_\alpha \cap W = \emptyset$. Sea $\langle a_\xi^\alpha \mid \xi < \alpha \rangle$ una enumeración creciente
 131 de C_α . Se tiene entonces que $\lim_{\xi \rightarrow \alpha} a_\xi^\alpha = \alpha$ y $a_\xi^\alpha \notin W$ para todo ξ, α .

132 Veamos, en primer lugar, que existe ξ tal que, para todo $\eta < \kappa$, el conjunto:

$$\{\alpha \in W \mid a_\xi^\alpha \geq \eta\} \quad (1.1)$$

133 es estacionario. Si este no fuese el caso, para cada ξ tendríamos un $\eta(\xi)$ y un conjunto c. n. a.
 134 C_ξ , tal que $a_\xi^\alpha < \eta(\xi)$ para todo $\alpha \in W \cap C_\xi$, siempre que a_ξ^α este definida. Sea C la intersección
 135 diagonal de los C_ξ . Entonces si α es un elemento de $W \cap C$, se tiene que $a_\xi^\alpha < \eta(\xi)$ para todo
 136 $\xi < \alpha$. Consideremos ahora el conjunto D de los $\gamma \in C$ tales que $\eta(\xi) < \gamma$ para todo $\xi < \gamma$,
 137 este conjunto es c. n. a. y $W \cap D$ es estacionario. Sean $\alpha < \gamma$ dos ordinales en $W \cap D$, si $\xi < \gamma$
 138 entonces $a_\xi^\alpha < \eta(\xi) < \gamma$, lo cual implica que $a_\gamma^\alpha = \gamma$. Pero esto es una contradicción puesto
 139 que $\gamma \in W$ y $a_\gamma^\alpha \notin W$.

140 Tenemos ahora ξ tal que (1.1) es estacionario. Sea f una función en W definida por $f(\alpha) =$
 141 a_ξ^α . Por la definición de a_ξ^α la función f es regresiva, por lo que para cada $\eta < \kappa$ el teorema 1.3
 142 de Fodor nos da un conjunto estacionario E_η de (1.1) y un $\gamma_\eta \geq \eta$ que es testigo de que E_η
 143 sea estacionario. Ahora, si $\gamma_\eta \neq \gamma_{\eta'}$ entonces $E_\eta \cap E_{\eta'} = \emptyset$ y, puesto que κ es regular, se tiene
 144 también $|\{E_\eta \mid \eta < \kappa\}| = |\{\gamma_\eta \mid \eta < \kappa\}| = \kappa$. ■

145 1.3 Teoría de Modelos

146 La teoría de modelos es un área relativamente joven [3, pág. 3]. No obstante, su desarrollo
 147 ha sido crucial para la teoría de conjuntos y los cardinales grandes [4, pág. xv].

148 Se quiere definir lo que es un modelo para un lenguaje formal \mathcal{L} . Un lenguaje \mathcal{L} es un
 149 conjunto de símbolos relacionales, funcionales y constantes. Los símbolos relacionales y fun-
 150 cionales pueden tener cualquier cantidad finita de argumentos, lo que se conoce usualmente
 151 como su aridad, excepto cero.

152 Dado un conjunto cualquiera A , interesa darle significado a los símbolos de un lenguaje \mathcal{L}
 153 en A . Esto se logra a través de una *interpretación*, esto es, una correspondencia que asigna a
 154 cada relación n -aria P una relación $R \subset A^n$, a cada función m -aria una función $G: A^m \rightarrow A$
 155 y a cada constante c un elemento $x \in A$.

156 DEFINICIÓN 1.7. Sea \mathcal{L} un lenguaje formal. Un *modelo* \mathfrak{A} para \mathcal{L} se define como,

$$\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle.$$

157 Donde A , que es un conjunto cualquiera, es el *universo* de \mathfrak{A} y \mathcal{I} es una interpretación de
158 los símbolos de \mathcal{L} en A .

159 Dada una sentencia ϕ de un lenguaje \mathcal{L} y \mathfrak{A} un modelo para \mathcal{L} , se escribirá $\mathfrak{A} \models \phi$ si la
160 fórmula ϕ se satisface en \mathfrak{A} . Intuitivamente, la relación \models quiere decir que ϕ es verdadera en
161 el modelo. Una definición rigurosa de \models es posible, y requiere inducción sobre la complejidad
162 de ϕ (véase [3, §1.3] ó [2, §12]).

163 Dados dos modelos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ se dirá que \mathfrak{A} es *elementalmente equivalente* a \mathfrak{B} , en símbolos
164 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, si toda sentencia que es verdadera en \mathfrak{A} lo es también en \mathfrak{B} y viceversa.

165 La definición 1.7 esta dada en forma general. Normalmente interesarán modelos del lenguaje
166 de la teoría de conjuntos, denotado \mathcal{L}_\in , el cual consiste de la lógica de primer orden con la
167 relación de igualdad y el símbolo binario \in . Los \in -modelos de la forma $\langle A, \in \rangle$, a los que
168 denotaremos solamente por A , son los modelos de \mathcal{L}_\in con los que se trabajará la mayoría del
169 tiempo. Existe una clase de \in -modelos de gran importancia, que se definen a continuación.

170 DEFINICIÓN 1.8. Un *modelo interno* de ZF es un \in -modelo transitivo donde se satisfacen los
171 axiomas y que contiene a los ordinales.

172 1.4 Inmersiones Elementales

173 El objetivo de este capítulo es establecer los resultados básicos sobre las inmersiones ele-
174 mentales de modelos internos de ZFC.

175 DEFINICIÓN 1.9. Sean $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ y $\mathfrak{N} = \langle N, \dots \rangle$ dos modelos de un lenguaje \mathcal{L} . Una
176 función inyectiva $f: M \rightarrow N$ es una *inmersión elemental*, denotado por $f: \mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, si, y solo
177 si, para cualquier fórmula n -aria ϕ de \mathcal{L} y $x_1, \dots, x_n \in M$,

$$\mathfrak{M} \models \phi(x_1, \dots, x_n) \iff \mathfrak{N} \models \phi(f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

178 Si f es la función identidad, diremos que \mathfrak{M} es una subestructura elemental de \mathfrak{N} y se denotará
179 por $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

180 Hace falta una pequeña digresión para tratar el caso de inmersiones elementales entre clases

181 propias transitivas. Es sabido que en ZFC no es posible formalizar el concepto de inmersión
 182 elemental para clases propias, pues lo prohíbe el teorema de la indefinibilidad de la verdad de
 183 Tarski. A partir de ahora la noción de inmersión elemental se trabajará de manera informal,
 184 pero sin olvidar que, en los contextos que será utilizada, puede ser formalizada en ZFC. [\(citar](#)
 185 [a kanamori y la referencia que el hace de Gaifman pag 46\)](#).

186 De la definición de inmersión elemental se sigue que estas preservan todas las operaciones
 187 conjuntistas que son absolutas para modelos transitivos. En particular, las inmersiones envían
 188 ordinales en ordinales y preservan su orden.

189 **TEOREMA 1.6.** Sean M y N modelos internos de ZFC y $j: M \prec N$. Si j no es la función
 190 identidad, existe un ordinal δ tal que $j(\delta) > \delta$.

191 *Demostración.* Primero, $j(\delta)$ nunca es estrictamente menor que δ : si este fuese el caso, po-
 192 dríamos tomar el menor δ con dicha propiedad y puesto que $j(\delta) < \delta \in M$, y M transitivo,
 193 se tendría $j(\delta) \in M$ y al considerar ahora $j(j(\delta))$ se llega a la conclusión $j(j(\delta)) < j(\delta)$, pues
 194 las inmersiones preservan el orden.

195 Sea $x \in M$ y $b = \text{tc}(\{x\})$ su clausura transitiva en V . Supongamos que $j(\delta) = \delta$ para todo
 196 ordinal $\delta \in M$. Si $x \in M$ es un conjunto de ordinales entonces $j(x) = x$. Dado que $M \models \text{AC}$,
 197 existe un ordinal γ y una biyección $e \in M$ que va de γ sobre b . Sea $E \in M$ la relación binaria
 198 sobre γ definida de la siguiente forma,

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in E \quad \text{si, y solo si,} \quad e(\alpha) \in e(\beta).$$

199 Se puede identificar a E con un conjunto de ordinales de la forma usual para obtener $j(E) =$
 200 E . Puesto que todo subconjunto no vacío de γ tiene un elemento E -minimal en V , se sigue
 201 que esto también ocurre en M y N y que E esta bien fundada en ambos conjuntos. Se pueden
 202 entonces usar el teorema de colapso de Mostowski para $\langle \gamma, E \rangle$ tanto en M como en N para
 203 obtener un isomorfismo entre $\langle \gamma, E \rangle$ y $\langle M, \in \rangle$ donde M es transitivo pero, como el isomorfismo
 204 antes mencionado es único, este ha de ser la biyección e y $\langle b, \in \rangle = \langle M, \in \rangle$.

205 Se sigue del párrafo anterior que $j(b) = b$, en efecto, se tiene que M se verifica la fórmula
 206 que dice “ $\langle b, \in \rangle$ es el colapso transitivo único de $\langle \gamma, E \rangle$ ”. Aplicando la elementalidad de j ,
 207 se debe verificar en N la fórmula “ $\langle j(b), \in \rangle$ es el colapso transitivo único de $\langle \gamma, j(E) \rangle$ ”, pero
 208 $j(E) = E$ y sabemos, por otro lado, que $\langle b, \in \rangle$ es el colapso transitivo de $\langle \gamma, E \rangle$ en N .
 209 Entonces $j(b) = b$ necesariamente. Pero x es definible como el elemento de mayor rango de
 210 b , por lo que también $j(x) = x$. Es decir, j es la función identidad. ■

211 A partir de ahora se considerarán solamente inmersiones elementales que no sean la iden-
 212 tidad entre modelos internos de ZFC. Esto permite dar un nombre al δ del teorema 1.6.

213 DEFINICIÓN 1.10. Sea $j: M \rightarrow N$ una inmersión elemental. El *punto crítico* de j es el menor
 214 ordinal α tal que $j(\alpha) > \alpha$.

215 1.5 Ultrapotencias

216 Sea I un conjunto no vacío, U un ultrafiltro sobre I y, para cada $i \in I$, sean A_i conjuntos no
 217 vacíos. Dadas dos funciones f y g pertenecientes al producto cartesiano de los A_i , se define
 218 la relación de *U -equivalencia*:

$$f =_U g \quad \text{si, y solo si,} \quad \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U.$$

219 La relación anterior es una relación de equivalencia [3, Proposición 4.1.5], por lo que pode-
 220 mos considerar la clase de equivalencia de una función dada f :

$$f_U = \left\{ g \in \prod_{i \in I} A_i \mid g =_U f \right\},$$

221 el *ultraproducto* de los A_i se define como el conjunto de todas las f_U , y lo denotamos por $\prod_U A_i$.
 222 En el caso de que los A_i sean todos iguales, digamos que a un conjunto A , el ultraproducto
 223 se conoce como *ultrapotencia* y se denota, naturalmente, por $\prod_U A$.

224 Si en la construcción anterior, para cada $i \in I$, se consideran modelos \mathfrak{A}_i entonces se puede
 225 contruir un modelo $\prod_U \mathfrak{A}_i$, al que llamaremos igualmente ultraproducto o ultrapotencia según
 226 sea el caso, haciendo de $\prod_U A_i$ el universo del modelo y dando una interpretación apropiada
 227 (es decir, definida en relación al ultrafiltro) a las relaciones, funciones n -arias y las constantes
 228 [3, Teorema 4.1.6], donde lo importante es que dicho modelo está bien definido. Conviene,
 229 sin embargo, enunciar el teorema fundamental de los ultraproductos, pues da la forma en la
 230 que podemos interpretar la satisfacción de fórmulas en estas estructuras.

231 TEOREMA 1.7. Sea $\prod_U \mathfrak{A}_i$ un ultraproducto e I su conjunto de índices. Dada cualquier
 232 fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ del lenguaje y $(f_1)_U, \dots, (f_n)_U \in \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$,

$$\prod_U \mathfrak{A}_i \models \phi((f_1)_U, \dots, (f_n)_U) \quad \text{si, y solo si,} \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \phi(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U.$$

233 Como es usual para esta clase de teoremas en la teoría de modelos, el resultado anterior

se demuestra haciendo inducción sobre la complejidad de ϕ [3, Teorema 4.1.9]. El teorema 1.7 tiene varios corolarios importantes, de mayor utilidad será el hecho de que existe una inmersión elemental $j: \mathfrak{A} \prec \prod_U \mathfrak{A}$ [3, Corolario 4.1.13], llamada normalmente inmersión canónica. En efecto, se define $j(\alpha)$ para $\alpha \in \mathfrak{A}$ como la clase de equivalencia de la función constantemente igual a α .

La primera dificultad para extender el concepto de ultrapotencia al universo proviene de que, dada $f: I \rightarrow V$ y U ultrafiltro sobre I , la clase de equivalencia f_U como se definió anteriormente es una clase propia. Esto motiva un pequeño ajuste a la definición:

$$(f)_U^0 = \{g \in f_U \mid \forall h (h \in f_U \implies \text{rank}(g) \leq \text{rank}(h))\},$$

es decir, por la clase de f se entiende ahora el conjunto de las funciones de f_U con rango mínimo. Entonces, si α es el ordinal más pequeño para el que existe una función de rango α en $(f)_U^0$ esta clase de equivalencia estará contenida en $V_{\alpha+1}$ y será por tanto un conjunto. Se puede entonces definir el universo del modelo de ultraproducto que se busca como el conjunto de todas las $(f)_U^0$. Si a este universo le añadimos la relación \in_U dada por:

$$(g)_U^0 \in_U (f)_U^0 \quad \text{si, y solo si,} \quad \{i \in I \mid g(i) \in f(i)\} \in U,$$

se obtiene un modelo llamado ultrapotencia del universo y denotado por $\text{Ult}(V, U)$.

Vale la pena destacar que el teorema 1.7 sigue aplicando para $\text{Ult}(V, U)$ con la acotación de que, puesto que ahora está involucrada la relación de satisfacción para clases propias, debe ser interpretado como un esquema infinito de teoremas.

La última herramienta teórica relacionada a ultrapotencias que será necesaria viene dada por el siguiente hecho, donde una condición extra sobre U da como resultado modelos bien fundados.

TEOREMA 1.8. Si U es ω_1 -completo entonces \in_U es una relación bien fundada.

Demostración. Para la implicación directa, sea $\langle (f_n)_U^0 \mid n < \omega \rangle$ tal que $(f_{n+1})_U^0 \in_U (f_n)_U^0$ para $n < \omega$, entonces $\bigcap_n \{i \in I \mid f_{n+1}(i) \in f_n(i)\} \neq \emptyset$ da una sucesión infinita descendiente de \in .

Ahora, sean $\{X_n \mid n \in \omega\}$ subconjuntos de U tales que $\bigcap_{n < \omega} X_n \notin U$ entonces se definen

²⁵⁹ $g_k: I \rightarrow V$ para $k < \omega$ de la siguiente forma:

$$g_k(i) = \begin{cases} n - k & \text{si } i \in (\bigcap_{m < n} X_m) - X_n \text{ y } n \geq k, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

²⁶⁰

■

BORRADOR

261

REFERENCIAS

262 [⟨Arreglar formato⟩](#)

- 263 [1] K. Kunen, “Set theory”, Rev. ed, College Publ, London, 402, (2013)
- 264 [2] T. J. Jech, “Set theory”, The 3rd millennium ed., Springer, Berlin ; New York, 769,
265 (2003)
- 266 [3] C. C. Chang y H. J. Keisler, “Model theory”, Dover ed, Dover Publications, Mineola,
267 N.Y, 650, (2012)
- 268 [4] A. Kanamori, “The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings”,
269 2nd ed, Springer, Berlin, 536, (2009)