

resources/usblogo.png

**UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR**  
**DECANATO DE ESTUDIOS PROFESIONALES**  
**COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS**

**ESTUDIO COMPARATIVO DE TRES DEMOSTRACIONES DEL  
TEOREMA DE INCONSISTENCIA DE KUNEN.**

Por:  
Jhonny Lanzuisi Berrizbeitia

Realizado con la asesoría de:  
Jesús Nieto Martínez

**PROYECTO DE GRADO**  
Presentado ante la Ilustre Universidad Simón Bolívar  
como requisito parcial para optar al título de  
Licenciatura en Matemáticas Puras

Sartenejas, 18 de junio de 2024

## LISTA DE SÍMBOLOS

15 En la lista siguiente,  $C$  es un conjunto.

Símbolo	Significado
$\mathcal{P}(C)$	Conjunto de partes.
$\sup(C)$	Supremo, es decir, $\bigcup C$ .
$\text{cf } C$	Cofinalidad

## LISTA DE ABREVIATURAS

Abreviatura	Significado
ZF	Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.
AC	Axioma de elección.
ZFC	ZF al añadir AC.
NBG	Teoría de conjuntos de Von Neumann, Bernays y Gödel.
CH	Hipótesis del continuo: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ .
c. n. a.	Cerrado no acotado.

## ÍNDICE GENERAL

20	<b>1. Nociones básicas</b>	<b>1</b>
21	1.1. Filtros . . . . .	1
22	1.2. Conjuntos Estacionarios . . . . .	2
23	1.3. Teoría de Modelos . . . . .	5
24	1.4. Ultrapotencias e Inmersiones Elementales . . . . .	6

# CAPÍTULO 1

## NOCIONES BÁSICAS

Este capítulo establece varios conceptos básicos que serán necesarios más adelante. Las nociones de filtro, ultrafiltro y filtro  $\kappa$ -completo junto con los conjuntos no acotados y estacionarios componen las definiciones de conjuntos más elementales que harán falta. Luego, un rápido repaso de la teoría de modelos permitirá abordar las inmersiones elementales, que son una pieza central del teorema de Kunen.

Es bien sabido que existen diversos sistemas axiomáticos con los cuales se puede desarrollar la teoría de conjuntos. En todo este texto, se usará el de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección, tal como aparece en cualquiera de las referencias estándar [1, 2]. Más aún, se asume familiaridad con las nociones elementales de la teoría de conjuntos y de la lógica de primer orden.

### 1.1 Filtros

Esta sección se ocupa de dar las definiciones básicas de filtros, que serán necesarias a lo largo del texto. Los filtros caracterizan a conjuntos “grandes” dentro de un conjunto dado  $C$ .

DEFINICIÓN 1.1. Sea  $C$  un conjunto no vacío. Un conjunto  $F \subset \mathcal{P}(C)$  es un *filtro* si se cumplen las siguientes condiciones:

- a)  $C \in F$  y  $\emptyset \notin F$ .
- b) Si  $X, Y \in F$  entonces  $X \cap Y \in F$ .
- c) Si  $X, Y \subset C$ ,  $X \in F$  y  $X \subset Y$  entonces  $Y \in F$ .

DEFINICIÓN 1.2. Sea  $F$  un filtro sobre  $C$ .  $F$  es *ultrafiltro* si, para todo  $X \subset C$ , se tiene que  $X \in F$  o  $X - S \in F$ .

Una caracterización para ultrafiltros viene dada por la propiedad de maximalidad:

TEOREMA 1.1. Sea  $F$  un filtro sobre  $C$ .  $F$  es *ultrafiltro* si, y solo si, es maximal.

La siguiente definición es central para la teoría de cardinales medibles.

DEFINICIÓN 1.3. Sea  $\kappa$  un cardinal regular y  $F$  un filtro sobre  $C$ .  $F$  es  $\kappa$ -completo siempre que dada una familia de conjuntos  $\{X_\alpha \in F : \alpha < \kappa\}$ , se tiene que

$$\bigcap X_\alpha \in F.$$

Un ejemplo que une los conceptos tratados hasta ahora es, como ya se mencionó, la definición de cardinal medible.

DEFINICIÓN 1.4. Sea  $\kappa > \omega$  un cardinal.  $\kappa$  es *medible* si existe un ultrafiltro  $\kappa$ -completo sobre  $\kappa$ .

## 1.2 Conjuntos Estacionarios

El principal objetivo de esta sección es establecer un teorema de Solovay, acerca de particiones con conjuntos estacionarios, usando el teorema 1.3 de Fodor.

Sea  $C$  un conjunto y  $X \subset C$ , diremos que  $X$  es *no acotado* en  $C$  si  $\sup(X) = C$ . Si  $C$  es además un conjunto de ordinales, un ordinal límite  $\alpha$  es *punto límite* de  $C$  si  $\sup(C \cap \alpha) = \alpha$ .

DEFINICIÓN 1.5. Sea  $\kappa$  un cardinal regular no numerable. Un conjunto  $C \subset \kappa$  es *cerrado no acotado* (c. n. a.) si  $C$  es no acotado en  $\kappa$  y contiene a todos sus puntos límites menores que  $\kappa$ . Un conjunto  $S \subset \kappa$  es *estacionario* si para cada conjunto c. n. a.  $C \subset \kappa$  se tiene  $S \cap C \neq \emptyset$ .

Será de utilidad saber el comportamiento de los conjuntos c. n. a. bajo intersecciones. Para este fin, definimos, dada  $\langle X_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$  una sucesión de subconjuntos de  $\kappa$ , la *intersección diagonal* de  $X_\alpha$  como:

$$\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \left\{ \epsilon < \kappa : \epsilon \in \bigcap_{\alpha < \epsilon} X_\alpha \right\}.$$

TEOREMA 1.2. Sea  $\kappa$  un cardinal regular no numerable y  $\{C_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$  una familia de c. n. a. en  $\kappa$ , entonces:

a)  $C_\alpha \cap C_\beta$  es c. n. a.  $(\alpha, \beta < \kappa)$ .

b)  $\bigcap_{\alpha < \kappa} C_\alpha$  es c. n. a.

72 c)  $\Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha$  es c. n. a.

73 *Demostración.* Veamos cada parte por separado.

74 a) Es claro que  $C \cap D$  es cerrado. Veamos que es no acotado. Sea  $\alpha < \kappa$ . Dado que  $C$  es  
 75 no acotado, existe  $\alpha_1 \in C$  tal que  $\alpha_1 > \alpha$ . De la misma forma, existe  $\alpha_2 \in D$  tal que  
 76  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Podemos seguir con este proceso para obtener una sucesión creciente:

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

77 Sea  $\beta$  el límite de la sucesión de arriba. Entonces  $\beta < \kappa$  y  $\beta \in C$  y  $\beta \in D$ .

78 b) La demostración será por inducción. Sea  $\lambda < \kappa$  y  $\langle C_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$  una sucesión de conjuntos  
 79 c. n. a. en  $\kappa$ . Para los ordinales sucesores, podemos simplemente aplicar el punto a). Si  
 80  $\lambda$  es ordinal límite, asumiremos que el teorema es cierto para cada  $\alpha < \lambda$ . Podemos  
 81 ahora sustituir cada  $C_\alpha$  por  $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$  y obtenemos una sucesión decreciente con la misma  
 82 intersección. Entonces a partir de ahora:

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots$$

83 serán c. n. a. y  $C = \bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$ . Por la misma razón que el punto a), no es difícil ver que  
 84  $C$  es cerrado. Veamos que es no acotado. Sea  $\alpha < \kappa$ , construiremos una sucesión de la  
 85 siguiente forma: sea  $\beta_0 \in C_0$  mayor que  $\alpha$ , y para cada  $\xi < \lambda$  se tomará  $\beta_\xi \in C_\xi$  tal  
 86 que  $\beta_\xi > \sup \{\beta_\nu : \nu < \xi\}$ . Dado que  $\kappa$  es regular y  $\lambda < \kappa$ , la sucesión que se acaba  
 87 de describir existe y su límite  $\beta$  es menor que  $\kappa$ . Para cada  $\eta < \lambda$ ,  $\beta$  es límite de una  
 88 sucesión  $\langle \beta_\xi : \eta \leq \xi < \lambda \rangle$  en  $C_\eta$ , por lo que  $\beta \in C_\eta$  y esto implica  $\beta \in C$ .

89 c) Llamemos  $D$  a  $\Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha$ . Veamos primero que  $D$  es cerrado. Sea entonces  $\lambda < \kappa$  tal  
 90 que  $D \cap \lambda$  no está acotado en  $\lambda$ , esto es, que  $\lambda$  es punto límite de  $D$ . Tomemos  $\beta \in \lambda$ ,  
 91 entonces existe  $\epsilon \in \lambda \cap D$  tal que  $\beta < \epsilon$  pues  $D \cap \lambda$  es no acotado. Como  $\epsilon \in D$ ,  
 92 existe  $C_\alpha$ , con  $\alpha < \epsilon < \lambda$ , al que  $\epsilon$  pertenece. Pero entonces, lo que hemos demostrado  
 93 es que siempre que tomemos  $\beta \in \lambda$  existe  $\epsilon \in C_\alpha \cap \lambda$  que esta por encima de  $\beta$  o,  
 94 equivalentemente, que  $C_\alpha \cap \lambda$  es no acotado en  $\lambda$ . Al ser  $C_\alpha$  cerrado tenemos  $\lambda \in C_\alpha$  y  
 95 esto implica  $\lambda \in D$ . Luego  $D$  es cerrado.

96 Solo falta ver que  $D$  es no acotado en  $\kappa$ . Para esto notemos que, debido al punto b),  
 97 se puede reemplazar cada  $C_\alpha$  por  $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$  y obtenemos una sucesión decreciente  $C_0 \subset$   
 98  $C_1 \subset \dots$  que no cambia el valor de  $D$ . Sea  $\gamma \in \kappa$ . Como cada  $C_\alpha$  es no acotado en  $\kappa$ ,  
 99 podemos construir una sucesión  $\langle \beta_n : n \in \omega \rangle$  de la siguiente forma: tomamos  $\beta_0 \in C_0$

mayor que  $\gamma$ , luego dado  $\beta_n$ , tomamos  $\beta_{n+1} \in C_{\beta_n}$  mayor que  $\beta_n$ . Llamemos  $\beta = \lim_n \beta_n$  y tomemos  $\xi < \beta$ . Entonces existe  $\beta_n > \xi$  y cada  $\beta_k$  con  $k > n$  pertenece a  $C_{\beta_n}$ , pues los  $C_\alpha$  están encajados, por lo que  $\beta \in C_{\beta_n}$  y  $\beta \in C_\xi$ . Pero esto muestra que  $\beta \in D$  y que  $D$  es no acotado.

104

DEFINICIÓN 1.6. Una función de ordinales  $f$  en un conjunto  $S$  es *regresiva*, si  $f(\alpha) < \alpha$  para todo  $\alpha \in S$ .

TEOREMA 1.3 (Fodor). Sea  $f$  una función regresiva en un conjunto estacionario  $E \subset \kappa$ . Entonces existe  $\alpha \in \kappa$  tal que  $f^{-1}(\{\alpha\})$  es estacionario.

*Demostración.* Supongamos, en busca de una contradicción, que  $f^{-1}(\{\alpha\})$  no es estacionario para todo  $\alpha < \kappa$ . Entonces existen conjuntos c. n. a.  $C_\alpha$  tales que  $C_\alpha \cap f^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$ , esto es, que  $f(\gamma) \neq \alpha$  para todo  $\gamma \in E \cap C_\alpha$ . Si  $D = \Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha$ , por el teorema 1.2,  $D$  es c. n. a. en  $\kappa$ . Pero entonces  $D \cap E \neq \emptyset$  y podemos tomar  $\gamma \in D \cap E$ , luego,  $f(\gamma) \neq \alpha$  para todo  $\alpha < \gamma$  lo que implica  $f(\gamma) \geq \gamma$  y esto es una contradicción.

El siguiente es un teorema auxiliar, que será de utilidad para el teorema 1.5.

TEOREMA 1.4. Sea  $E \subset \kappa$  un conjunto estacionario en  $\kappa$  y supongamos que todo ordinal perteneciente a  $E$  es regular no numerable. Entonces el conjunto

$$T = \{\alpha \in E : E \cap \alpha \text{ no es un subconjunto estacionario de } \alpha\}$$

es estacionario en  $\kappa$ .

*Demostración.* Veamos que  $T$  intersecta a todos los c. n. a. de  $\kappa$ . Sea  $C$  c. n. a. en  $\kappa$  y  $C'$  el subconjunto de los puntos límite de  $C$ . Tenemos que  $C'$  también es c. n. a. en  $\kappa$  por lo que podemos tomar el menor  $\alpha \in C' \cap E$ . Puesto que  $\alpha$  es regular y punto límite de  $C$ ,  $C_\alpha \cap \alpha$  es un subconjunto c. n. a. de  $\alpha$ , como también lo es  $C' \cap \alpha$ . Dado que  $\alpha$  es el elemento más pequeño de  $C' \cap E$ ,  $C' \cap E \cap \alpha = \emptyset$ . Esto último dice que  $E \cap \alpha$  es no estacionario en  $\alpha$ , y  $\alpha \in T \cap C$ .

TEOREMA 1.5 (Solovay). Sea  $\kappa$  un cardinal regular no numerable. Entonces cada subconjunto estacionario de  $\kappa$  es la unión disjunta de  $\kappa$  subconjuntos estacionarios.



126 *Demostración.* Sea  $E$  un subconjunto estacionario de  $\kappa$ . Por el teorema 1.4, asumiremos que  
 127 el conjunto  $W$  consistente de todos los  $\alpha \in E$  tales que  $\alpha$  es cardinal regular y  $E \cap \alpha$  no es  
 128 estacionario en  $\alpha$ , es estacionario en  $\kappa$ . Existe entonces un conjunto c. n. a.  $C_\alpha \subset \alpha$  tal que  
 129  $E \cap C_\alpha = \emptyset$ , pero  $W \subset E$  por lo que  $C_\alpha \cap W = \emptyset$ . Sea  $\langle a_\xi^\alpha : \xi < \alpha \rangle$  una enumeración creciente  
 130 de  $C_\alpha$ . Se tiene entonces que  $\lim_{\xi \rightarrow \alpha} a_\xi^\alpha = \alpha$  y  $a_\xi^\alpha \notin W$  para todo  $\xi, \alpha$ .

131 Veamos, en primer lugar, que existe  $\xi$  tal que, para todo  $\eta < \kappa$ , el conjunto:

$$\{\alpha \in W : a_\xi^\alpha \geq \eta\} \quad (1.1)$$

132 es estacionario. Si este no fuese el caso, para cada  $\xi$  tendríamos un  $\eta(\xi)$  y un conjunto c. n. a.  
 133  $C_\xi$ , tal que  $a_\xi^\alpha < \eta(\xi)$  para todo  $\alpha \in W \cap C_\xi$ , siempre que  $a_\xi^\alpha$  este definida. Sea  $C$  la intersección  
 134 diagonal de los  $C_\xi$ . Entonces si  $\alpha$  es un elemento de  $W \cap C$ , se tiene que  $a_\xi^\alpha < \eta(\xi)$  para todo  
 135  $\xi < \alpha$ . Consideremos ahora el conjunto  $D$  de los  $\gamma \in C$  tales que  $\eta(\xi) < \gamma$  para todo  $\xi < \gamma$ ,  
 136 este conjunto es c. n. a. y  $W \cap D$  es estacionario. Sean  $\alpha < \gamma$  dos ordinales en  $W \cap D$ , si  $\xi < \gamma$   
 137 entonces  $a_\xi^\alpha < \eta(\xi) < \gamma$ , lo cual implica que  $a_\gamma^\alpha = \gamma$ . Pero esto es una contradicción puesto  
 138 que  $\gamma \in W$  y  $a_\gamma^\alpha \notin W$ .

139 Tenemos ahora  $\xi$  tal que (1.1) es estacionario. Sea  $f$  una función en  $W$  definida por  $f(\alpha) =$   
 140  $a_\xi^\alpha$ . Por la definición de  $a_\xi^\alpha$  la función  $f$  es regresiva, por lo que para cada  $\eta < \kappa$  el teorema 1.3  
 141 de Fodor nos da un conjunto estacionario  $E_\eta$  de (1.1) y un  $\gamma_\eta \geq \eta$  que es testigo de que  $E_\eta$   
 142 sea estacionario. Ahora, si  $\gamma_\eta \neq \gamma_{\eta'}$  entonces  $E_\eta \cap E_{\eta'} = \emptyset$  y, puesto que  $\kappa$  es regular, se tiene  
 143 también  $|\{E_\eta : \eta < \kappa\}| = |\{\gamma_\eta : \eta < \kappa\}| = \kappa$ . ■

### 144 1.3 Teoría de Modelos

145 La teoría de modelos es un área relativamente joven [3, pág. 3]. No obstante, su desarrollo  
 146 ha sido crucial para la teoría de conjuntos y los cardinales grandes [4, pág. xv].

147 Se quiere definir lo que es un modelo para un lenguaje formal  $\mathcal{L}$ . Un lenguaje  $\mathcal{L}$  es un  
 148 conjunto de símbolos relacionales, funcionales y constantes. Los símbolos relacionales y fun-  
 149 cionales pueden tener cualquier cantidad finita de argumentos, lo que se conoce usualmente  
 150 como su aridad, excepto cero.

151 Dado un conjunto cualquiera  $A$ , interesa darle significado a los símbolos de un lenguaje  $\mathcal{L}$   
 152 en  $A$ . Esto se logra a través de una *interpretación*, esto es, una correspondencia que asigna a  
 153 cada relación  $n$ -aria  $P$  una relación  $R \subset A^n$ , a cada función  $m$ -aria una función  $G: A^m \rightarrow A$   
 154 y a cada constante  $c$  un elemento  $x \in A$ .

155 DEFINICIÓN 1.7. Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal. Un *modelo*  $\mathfrak{A}$  para  $\mathcal{L}$  se define como,

$$\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle.$$

156 Donde  $A$ , que es un conjunto cualquiera, es el *universo* de  $\mathfrak{A}$  y  $\mathcal{I}$  es una interpretación de  
157 los símbolos de  $\mathcal{L}$  en  $A$ .

158 Dada una sentencia  $\phi$  de un lenguaje  $\mathcal{L}$  y  $\mathfrak{A}$  un modelo para  $\mathcal{L}$ , se escribirá  $\mathfrak{A} \models \phi$  si la  
159 fórmula  $\phi$  se satisface en  $\mathfrak{A}$ . Intuitivamente, la relación  $\models$  quiere decir que  $\phi$  es verdadera en  
160 el modelo. Una definición rigurosa de  $\models$  es posible, y requiere inducción sobre la complejidad  
161 de  $\phi$  (véase [3, §1.3] ó [2, §12]).

162 Dados dos modelos  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  se dirá que  $\mathfrak{A}$  es *elementalmente equivalente* a  $\mathfrak{B}$ , en símbolos  
163  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ , si toda sentencia que es verdadera en  $\mathfrak{A}$  lo es también en  $\mathfrak{B}$  y viceversa.

164 La definición 1.7 esta dada en forma general. Normalmente interesarán modelos del lenguaje  
165 de la teoría de conjuntos, denotado  $\mathcal{L}_\in$ , el cual consiste de la lógica de primer orden con la  
166 relación de igualdad y el símbolo binario  $\in$ . Los  $\in$ -modelos de la forma  $\langle A, \in \rangle$ , a los que  
167 denotaremos solamente por  $A$ , son los modelos de  $\mathcal{L}_\in$  con los que se trabajará la mayoría del  
168 tiempo. Existe una clase de  $\in$ -modelos de gran importancia, que se definen a continuación.

169 DEFINICIÓN 1.8. Un *modelo interno* de ZF es un  $\in$ -modelo transitivo donde se satisfacen los  
170 axiomas y que contiene a los ordinales.

## 171 1.4 Ultrapotencias e Inmersiones Elementales

172 El objetivo de este capítulo es establecer los resultados básicos sobre las inmersiones ele-  
173 mentales de modelos internos de ZFC y demostrar el teorema [reference needed](#) que se usará  
174 en una de las demostraciones del teorema de Kunen. Se establecerá también un teorema  
175 de Scott [Citation needed](#) donde se muestra que la existencia de cardinales medibles implica  
176  $V \neq L$ .

177 DEFINICIÓN 1.9. Sean  $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$  y  $\mathfrak{N} = \langle N, \dots \rangle$  dos modelos de un lenguaje  $\mathcal{L}$ . Una  
178 función inyectiva  $f: M \rightarrow N$  es una *inmersión elemental*, denotado por  $f: \mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ , si, y solo  
179 si, para cualquier fórmula  $n$ -aria  $\phi$  de  $\mathcal{L}$  y  $x_1, \dots, x_n \in M$ ,

$$\mathfrak{M} \models \phi(x_1, \dots, x_n) \iff \mathfrak{N} \models \phi(f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

180 Si  $f$  es la función identidad, diremos que  $\mathfrak{M}$  es una subestructura elemental de  $\mathfrak{N}$  y se denotará

181 por  $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ .

182 Hace falta una pequeña digresión para tratar el caso de inmersiones elementales entre clases  
 183 propias transitivas. Es sabido que en ZFC no es posible formalizar el concepto de inmersión  
 184 elemental para clases propias, pues lo prohíbe el teorema de la indefinibilidad de la verdad de  
 185 Tarski. A partir de ahora la noción de inmersión elemental se trabajará de manera informal,  
 186 pero sin olvidar que, en los contextos que será utilizada, puede ser formalizada en ZFC. [\(citar](#)  
 187 [a kanamori y la referencia que el hace de Gaifman pag 46\)](#).

188 De la definición de inmersión elemental se sigue que estas preservan todas las operaciones  
 189 conjuntistas que son absolutas para modelos transitivos. En particular, las inmersiones envían  
 190 ordinales en ordinales y preservan su orden.

191 TEOREMA 1.6. Sean  $M$  y  $N$  modelos internos de ZFC y  $j: M \prec N$ . Si  $j$  no es la función  
 192 identidad, existe un ordinal  $\delta$  tal que  $j(\delta) > \delta$ .

193 *Demostración.* Primero,  $j(\delta)$  nunca es estrictamente menor que  $\delta$ : si este fuese el caso, po-  
 194 dríamos tomar el menor  $\delta$  con dicha propiedad y puesto que  $j(\delta) < \delta \in M$ , y  $M$  transitivo,  
 195 se tendría  $j(\delta) \in M$  y al considerar ahora  $j(j(\delta))$  se llega a la conclusión  $j(j(\delta)) < j(\delta)$ , pues  
 196 las inmersiones preservan el orden.

197 Sea ahora  $j(\delta) = \delta$  para todo ordinal  $\delta$ . Si  $x \in M$  es un conjunto de ordinales, se sigue  
 198 entonces que  $j(x) = x$ . Sea  $a \in M$  y  $b$  la clausura transitiva de  $a$  en  $V$  (lo cual implica que  
 199 también lo es en  $M$ ). Puesto que se tiene el axioma de elección, se puede identificar a  $b$  con  
 200 un ordinal  $\gamma$ , sea  $r$  la función testigo de este hecho. Se define una relación binaria  $R$  en  $M$   
 201 dada por:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in R \iff r(\alpha) \in r(\beta),$$

202

203 A partir de ahora se considerarán solamente inmersiones elementales que no sean la iden-  
 204 tidad entre modelos internos de ZFC. Esto permite dar un nombre al  $\delta$  del teorema 1.6.

205 DEFINICIÓN 1.10. Sea  $j: M \rightarrow N$  una inmersión elemental. El *punto crítico* de  $j$  es el menor  
 206 ordinal  $\alpha$  tal que  $j(\alpha) > \alpha$ .

207

## REFERENCIAS

208 [⟨Arreglar formato⟩](#)

- 209 [1] K. Kunen, “Set theory”, Rev. ed, College Publ, London, 402, (2013)
- 210 [2] T. J. Jech, “Set theory”, The 3rd millennium ed., Springer, Berlin ; New York, 769,  
211 (2003)
- 212 [3] C. C. Chang y H. J. Keisler, “Model theory”, Dover ed, Dover Publications, Mineola,  
213 N.Y, 650, (2012)
- 214 [4] A. Kanamori, “The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings”,  
215 2nd ed, Springer, Berlin, 536, (2009)