Tarea 2

Topología y Geometría II

Jhonny Lanzuisi

9 de Junio de 2022

Índice

1. Primera pregunta 1
1.1. Puntos y valores críticos 1
1.2. Superficie regular 2

2. Segunda pregunta 2
2.1. S es superficie regular 2
2.2. X es parametrización de S 2
2.2.1. X es diferenciable 2
2.2.2. X es homeomorfismo 2
2.2.3. X es regular 3

A. Gráficos 4


```
# Configuración de python y gráficos
import sympy as sym
import numpy as np
import matplotlib.style
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

matplotlib.style.use('seaborn')

matplotlib.rcParams.update({
    'figure.autolayout': True,
})

def lp(input_list):
    for i in input_list:
        print('$$' + sym.latex(i) + '$$')
```

1. Primera pregunta

Sea $f(x, y, z) = xyz^2$.

1.1. Puntos y valores críticos

Calculamos primero el diferencial, los puntos donde este no sea sobreyectivo son son puntos críticos. Las derivadas parciales de f son:

```
x,y,z,f = sym.symbols('x,y,z,f')

f = x*y*z**2

derivatives = [
    sym.Derivative(f,x),
    sym.Derivative(f,y),
    sym.Derivative(f,z)
]

lp(
    [
        sym.Eq(derivatives[0], derivatives[0].doit()),
        sym.Eq(derivatives[1], derivatives[1].doit()),
        sym.Eq(derivatives[2], derivatives[2].doit())
    ]
)
```

$$\frac{\partial}{\partial x} xyz^2 = yz^2$$
$$\frac{\partial}{\partial y} xyz^2 = xz^2$$
$$\frac{\partial}{\partial z} xyz^2 = 2xyz$$

El diferencial esta dado, en la base canonica, por:

```
df = sym.Matrix([
    derivatives[0],
    derivatives[1],
    derivatives[2]
])
lp([df.doit()])
```

$$\begin{bmatrix} yz^2 \\ xz^2 \\ 2xyz \end{bmatrix}$$

Entonces los puntos críticos son los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de la forma:

$$(x, y, 0) \text{ o } (0, 0, z) \text{ o } (0, 0, 0) .$$

Y los valores críticos son la imagen de f sobre las 3 clases de puntos anteriores, en este caso solamente el cero puesto que $f(x, y, 0) = f(0, 0, z) = f(0, 0, 0) = 0$.

1.2. Superficie regular

La superficie es regular para todo punto c que no sea un valor crítico, por lo que $f(x,y,z) = c$ es regular siempre que $c \neq 0$.

2. Segunda pregunta

Sea $X(u,v) = (u+v, u-v, 4uv)$.

2.1. S es superficie regular

Consideremos la funcion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z.$$

Entonces S será una superficie regular siempre que 0 no sea un valor crítico de f.

Para verficar esto último, calculemos las derivadas parciales:

```
f = x**2 - y**2 - z

derivatives = [
    sym.Derivative(f,x),
    sym.Derivative(f,y),
    sym.Derivative(f,z)
]

lp([
    sym.Eq(derivatives[0], derivatives[0].doit()),
    sym.Eq(derivatives[1], derivatives[1].doit()),
    sym.Eq(derivatives[2], derivatives[2].doit())
])
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2 - z\right) = 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y^2 - z\right) = -2y$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 - y^2 - z\right) = -1$$

Entonces f no tiene puntos ni valores críticos, puesto que el diferencial nunca se hace cero. En particular 0 no es un valor crítico y S es regular.

2.2. X es parametrización de S

Veamos primero el grafico de X en la figura 1.

```
u,v = sym.symbols('u,v')

x = u+v
y = u-v
z = 4*u*v

p1 = sym.plotting.plot3d_parametric_surface(
    x,y,z, show=False
)
p1.save('p1.pdf')
```

Para verificar que X es una parametrizacion hay que ver que cumpla con las 3 condiciones de la definicion.

2.2.1. X es diferenciable

Consideremos las funciones componentes de X:

$$x(u,v) = u+v, \quad y(u,v) = u-v, \quad z(u,v) = 4uv.$$

Estas funciones son C^∞ puesto que son polinomicas. Se sigue entonces que X es diferenciable.

2.2.2. X es homeomorfismo

Basta con ver que $X^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es continua.

Primeros, hallemos la función inversa. Esto equivale a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x = u+v, \quad y = u-v, \quad z = 4uv, \quad z = x^2 - y^2.$$

De las primeras dos ecuaciones tenemos que

$$u = \frac{x+y}{2},$$

y sustituyendo en la expresión para z se obtiene:

$$v = \frac{z}{2(x+y)},$$

finalmente, al sustituir $z = x^2 - y^2$ en la ecuación anterior

$$v = \frac{x-y}{2}$$

Entonces la función inversa X^{-1} viene dada por:

$$X^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right).$$

Esta función es continua puesto que sus componentes son funciones continuas. Luego, X es homeomorfismo.

2.2.3. X es regular

La condición de regularidad equivale a que las columnas del diferencial de X sean linealmente independientes. Calculemos el diferencial.

```
u,v = sym.symbols('u,v')

dX = sym.Matrix([
    [x.diff(u), x.diff(v)],
    [y.diff(u), y.diff(v)],
    [z.diff(u), z.diff(v)],
])

lp([dX])
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4v & 4u \end{bmatrix}$$

Como dos vectores son linealmente independientes si uno no es múltiplo escalar del otro, se sigue que las columnas del diferencial son independientes, pues el -1 en la segunda columna hace que siempre difieran por un signo, y que X es regular.

Se tiene entonces que X es una parametrización de S.

A. Gráficos

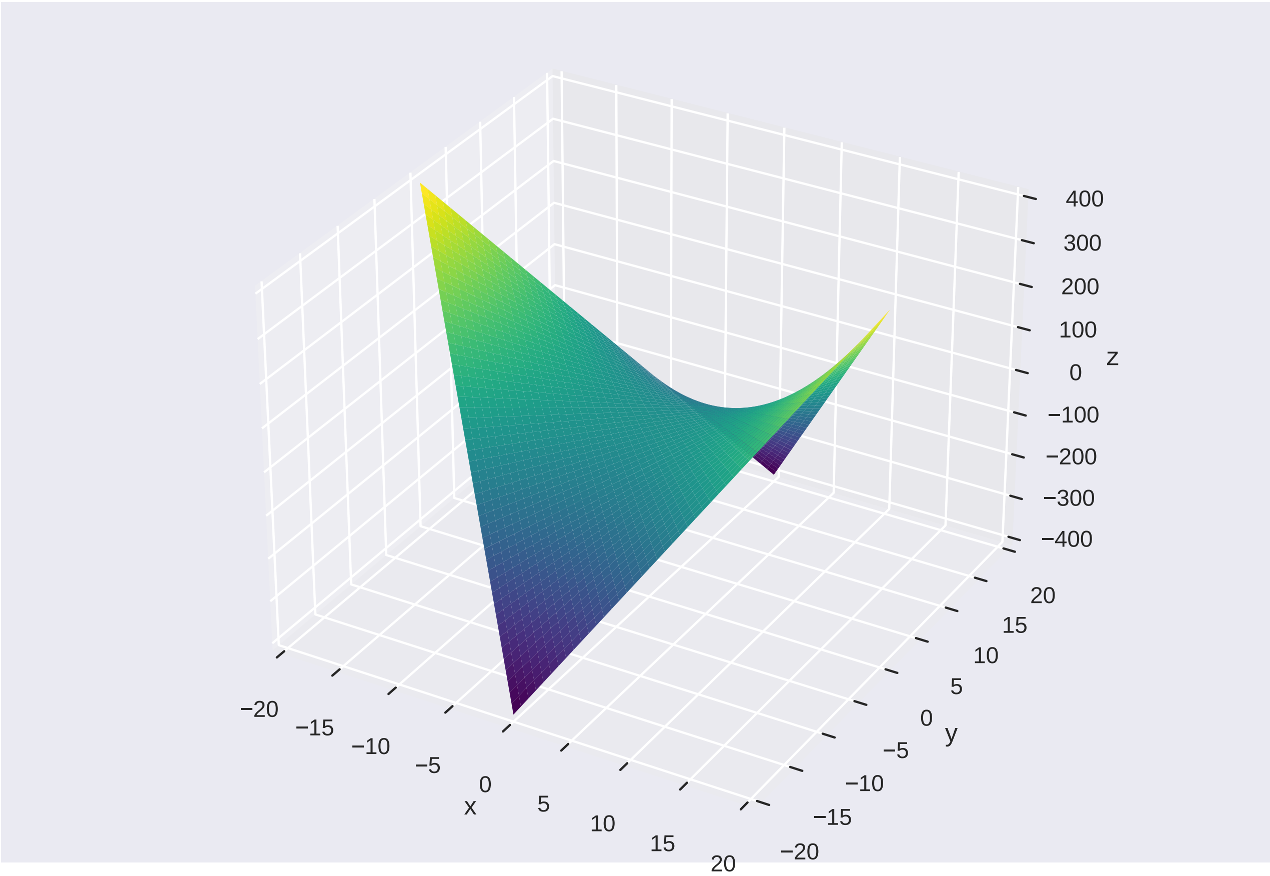

Figura 1: Gráfico de $X(u,v) = (u+v, u-v, 4uv)$