Tarea 1, ejercicio 4

Jhonny Lanzuisi

2022-06-05

Contents

1

Dado que la longitud de arco $s(t)$ es:

$$\int_{t_o}^{t} |\alpha'| dt,$$

se sigue por el teorema fundamental del cálculo que:

$$\frac{ds}{dt} = |\alpha'|.$$

Entonces, por el teorema de la función inversa, se tiene que:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\alpha'|}.$$

Para la segunda derivada es conveniente escribir $|\alpha'| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. Tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\right) = -\frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^3},$$

y, finalmente,

$$\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{dt}{ds} = -\frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^3}\left(\frac{1}{|\alpha'|}\right) = -\frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^4}.$$

2

La primera derivada de α puede expresarse respecto de T, el vector unitario tangente,

$$T = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} \implies \alpha' = |\alpha'|T.$$

Podemos derivar la expresión anterior para obtener la segunda derivada de α

$$\alpha'' = |\alpha'|'T + |\alpha'|T' = |\alpha'|'T + |\alpha'|^2 \kappa N$$

donde el lado derecho es consecuencia de las ecuaciones de frenet y N es el vector normal a la curva.

El producto cruz es entonces:

$$\alpha' \wedge \alpha'' = |\alpha'||\alpha'|'(T \wedge T) + |\alpha'|^3\kappa(N \wedge T)$$

como el producto cruz de un vector con el mismo es cero y $N \wedge T = B$, el vector binormal, la expresión anterior se reduce a:

$$\alpha' \wedge \alpha'' = |\alpha'|^3\kappa B. \tag{$*$}$$

Si tomamos la norma a ambos lados de la expresión anterior, teniendo en cuenta que B es unitario, llegamos a que:

$$\kappa = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}. \tag{$**$}$$

3

Caculemos primero la tercera derivada de α, partiendo de la expresión para α'' hallada anteriormente:

$$\alpha''' = |\alpha'|''T + |\alpha'|'T' + (|\alpha'|^2\kappa)'N + |\alpha'|^2\kappa N'.$$

Dado que B es perpendicular a T, T', N,

$$\langle \alpha''', B \rangle = |\alpha'|^2\kappa\langle B, N' \rangle = |\alpha'|^3\kappa\tau,$$

de donde

$$\tau = \frac{\langle \alpha''', B \rangle}{|\alpha'|^3\kappa}.$$

Al despejar B de $(*)$ y usar la expresión para κ en $(**)$, la expresión anterior se reduce a:

$$\tau = \frac{\langle \alpha''', \alpha' \wedge \alpha'' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}.$$