Tarea 3

Topología y Geometría II

Jhonny Lanzuisi

19 de Junio de 2022

Índice


```python
# Configuración de python y gráficos
import sympy as sym
import numpy as np
import matplotlib.style
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

matplotlib.style.use('seaborn')

matplotlib.rcParams.update({
        'figure.autolayout': True,
})

def lp(input_list):
    for i in input_list:
        print('$$' + sym.latex(i) + '$$')
```

Primera pregunta

Sean

$$E = \left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \right\} \quad \text{y} \quad S^2 = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

el elipsoide y la esfera, respectivamente.

Queremos hallar una función $f\colon S^2 \to E$. Esto es lo mismo que decir que f debe cumplir:

$$\frac{f_x}{a^2} + \frac{f_y}{b^2} + \frac{f_z}{c^2} = 1.$$

Si hacemos $f_x = ax, f_y = by, f_z = cz$ entonces la ecuación anterior se cumple, tomando en cuenta que $(x, y, z) \in S^2$.

Tenemos entonces la función f definida por:

$$f(x, y, z) = (ax, by, cz).$$

Esta función es claramente continua y diferenciable, pues sus componentes lo son. Más aún, su inversa

$$f^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$$

es igualmente continua y diferenciable siempre que a, c, b no sea ninguno cero, lo cual se cumple para todos los puntos del dominio.

Por último, notemos que f es un mapa lineal y $\ker f = \{0\}$ lo que nos dice que f es biyectiva.

Tenemos entonces que f es un difeomorfismo de S^2 a E.

Segunda pregunta

El mapa A es lineal puesto que sus componentes son mapas lineales. Un mapa lineal entre espacios de dimensión finita siempre es diferenciable, por lo que A es diferenciable.

También, A^{-1} es un mapa lineal puesto que $A = A^{-1}$.

Por último el $\ker A = \{0\}$, por lo que A tiene rango máximo y es biyectiva.

Se tiene entonces que A es un difeomorfismo.

Tercera pregunta

Hace falta comprobar las tres propiedades de toda relación de equivalencia.

Reflexividad

Sea S una superficie regular y consideremos el difeomorfismo dado por la función identidad. Es claro que la identidad es biyectiva y que su inversa es diferenciable. Tenemos entonces que S es difeomorfa a si misma, que es lo que queríamos demostrar.

Simetría

Sea S_1, S_2 superficies regulares difeomorfas por una función f. Entonces por definición f^{-1} es diferenciable y al ser f una biyección f^{-1} también lo es. Se cumple entonces que S_1 es difeomorfo a S_2 (por f) si, y solo si, S_2 es difeomorfo a S_1 (por f^{-1}).

Transitividad

Sean S_1, S_2, S_3 superficies regulares. Sean $f\colon S_1 \to S_2$ y $g\colon S_2 \to S_3$ difeomorfismos. Entonces la composición $g \circ f\colon S_1 \to S_3$ es un difeomorfismo, pues el hecho de que f, g y f^{-1}, g^{-1} sean diferenciables implica que $g \circ f$ y su inversa $f^{-1} \circ g^{-1}$ son diferenciables, además la biyectividad de f, g implica la biyectividad de la composición.

Cuarta pregunta

Sea $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Basta con ver que $\mathrm{d}f_{p_0}$ es perpendicular al plano tangente, pues la ecuación del plano esta dada por un vector normal y un punto del plano.

Por la definición del plano tangente existe una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0)$ es un vector que esta en el plano tangente.

Notemos que
$$f \circ \alpha = 0$$
puesto que la imagen de f para cualquier punto de S es cero y el codominio de α es S.

Podemos entonces, usando la regla de la cadena, calcular $(f \circ \alpha)'(0)$:

$$(f \circ \alpha)'(0) = \langle \mathrm{d}f_{\alpha(0)}, \alpha'(0) \rangle,$$

pero como $f \circ \alpha = 0$ la derivada anterior también debe ser cero.

Se sigue entonces que $\mathrm{d}f_{p_0}$ es perpendicular a $\alpha'(0)$ y por lo tanto al plano tangente.

Quinta pregunta

El dibujo de φ se encuentra en la figura 1.

```
x,y,z,u,v,a = sym.symbols('x,y,z,u,v,a')

x = v*sym.cos(u)
y = v*sym.sin(u)
z = a*u

graph = sym.plotting.plot3d_parametric_surface(
    x,y,z.subs(a,1),
    (u,-3,3),
    (v,-3,3),
    show=False,
)

graph.save('p1.pdf')
```

El vector normal viene dado por

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}(u, v)$$

Podemos usar sympy para calcular las derivadas y el producto externo. Primero φ_u:

```
phiv, phiu = sym.symbols('phiv, phiu')

phiu = sym.Matrix([x.diff(u),y.diff(u),z.diff(u)])
lp([phiu])
```

$$\begin{bmatrix} -v \sin(u) \\ v \cos(u) \\ a \end{bmatrix}$$

Ahora, φ_v:

```
phiv = sym.Matrix([x.diff(v),y.diff(v),z.diff(v)])
lp([phiv])
```

$$\begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{bmatrix}$$

El vector normal es entonces:

```
outp = phiu.cross(phiv)
outpnorm = sym.sqrt(outp.dot(outp))

lp([sym.simplify(outp/outpnorm)])
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{a \sin(u)}{\sqrt{a^2+v^2}} \\ \frac{a \cos(u)}{\sqrt{a^2+v^2}} \\ -\frac{v}{\sqrt{a^2+v^2}} \end{bmatrix}$$

```
N = sym.simplify(outp/outpnorm)
```

Calculemos ahora la tangente del ángulo que forman el plano tangente $T_{\phi(u_0,v)S}$ y el eje z.

La tangente entre dos vectores u, v esta dada por

$$\tan(\theta) = \frac{|u \wedge v|}{\langle u, v \rangle},$$

podemos usar la expresión anterior para calcular la tangente buscada, tomando en cuenta que el ángulo entre el vector normal N y el eje z es complementario al ángulo entre el plano y el eje, la tangente buscada esta dada por

$$\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(\theta)}{-\sin(\theta)} = \frac{\langle u, v \rangle}{-|u \wedge v|}$$

```

zunit = sym.Matrix([0,0,1])

tang = N.dot(N)/-sym.sqrt(
            N.cross(zunit).dot(N.cross(zunit))
        )

lp([sym.simplify(tang)])
```

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2+v^2}}}$$

La expresión anterior se puede simplificar a

$$-\frac{|v|}{|a|},$$

Que es proporcional a v, la distancia del punto $\varphi(u_0, v)$ al eje z.

Gráficos

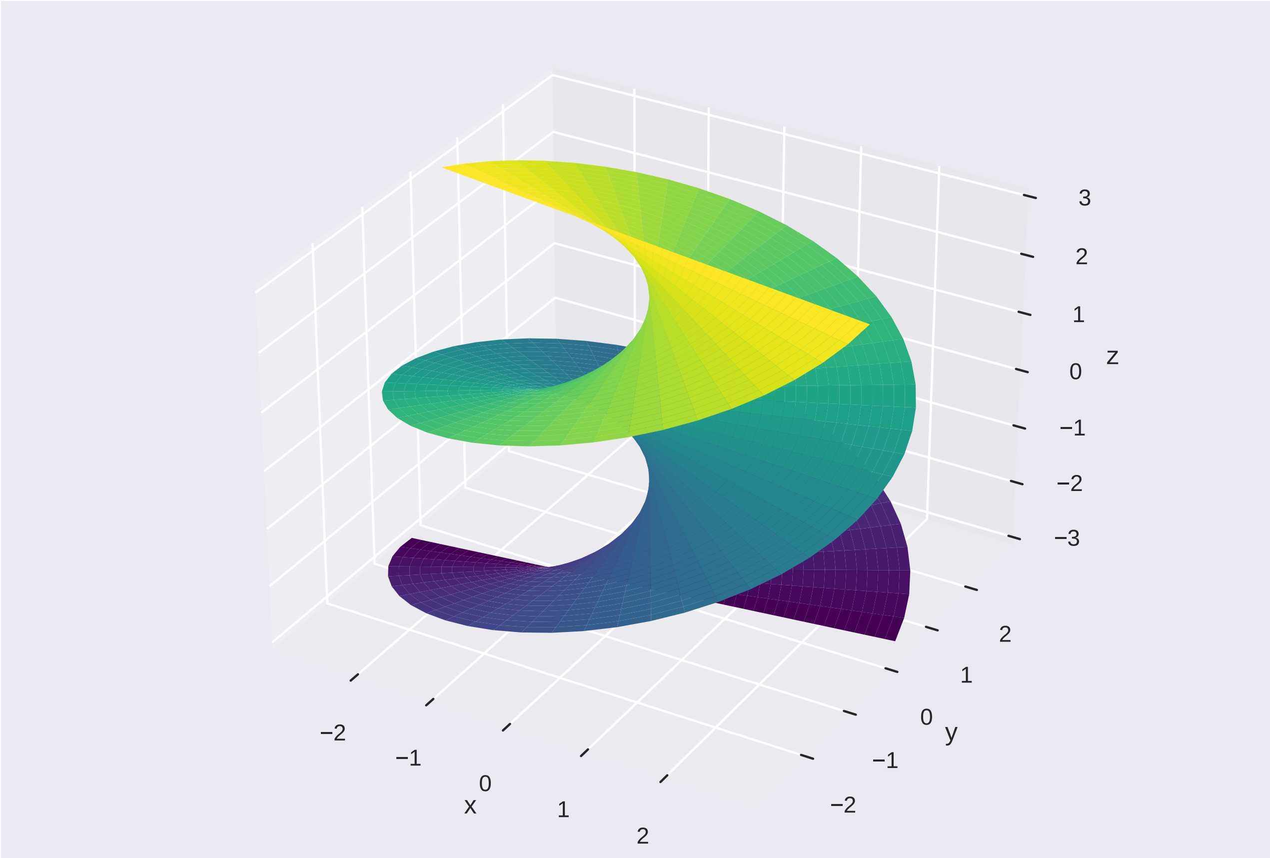

Figura 1: Grafico $\varphi(u, v)$ para $a = 1$