Topología y Geometría II

# Primera Tarea

*Curvas paramétricas, curvatura, torsión*

Jhonny Lanzusi

June 1, 2022

## 1 Primera pregunta

Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y sea $v \in \mathbb{R}$ un vector fijo. Si $\alpha'(t)$ es ortogonal a $v$ para todo $t \in I$ y $\alpha(0)$ también es ortogonal a $v$, demuestre que $\alpha(t)$ es ortogonal a $v$ para todo $t \in I$.

### 1.1 Solución

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

para todo $t \in I$. Además, hagamos $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Entonces la derivada de $\langle \alpha, v \rangle$ respecto de $t$ viene dada por:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(t), v \rangle' &= \alpha_1'(t)v_1 + \alpha_2'(t)v_2 + \alpha_3'(t)v_3 \\
&= \langle \alpha'(t), v \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora integrando respecto de $t$ en un intervalo cualquiera $(0, x) \in I$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \langle \alpha(t), v \rangle' \, \mathrm{d}t = \int_0^x \alpha_1'(t)v_1 + \alpha_2'(t)v_2 + \alpha_3'(t)v_3 \, \mathrm{d}t = 0 \\
\implies\ & v_1 \int_0^x \alpha_1'(t) \, \mathrm{d}t + v_2 \int_0^x \alpha_2'(t) \, \mathrm{d}t + v_3 \int_0^x \alpha_3'(t) \, \mathrm{d}t = 0 \\
\implies\ & v_1(\alpha_1(x) - \alpha_1(0)) + v_2(\alpha_2(x) - \alpha_2(0)) + v_3(\alpha_3(x) - \alpha_3(0)) = 0 \\
\implies\ & \langle \alpha(x), v \rangle - \langle \alpha(0), v \rangle = 0 \\
\implies\ & \langle \alpha(x), v \rangle = 0.
\end{aligned}$$

# 2 Segunda Pregunta

## 2.1 Solución

### 2.1.1 Parametrizada por longitud de arco

Basta con revisar que la norma de $\alpha'$ es 1, pues en ese caso $s = L(t) = t - t_0$. Para los cálculos usaremos la librería sympy de python.

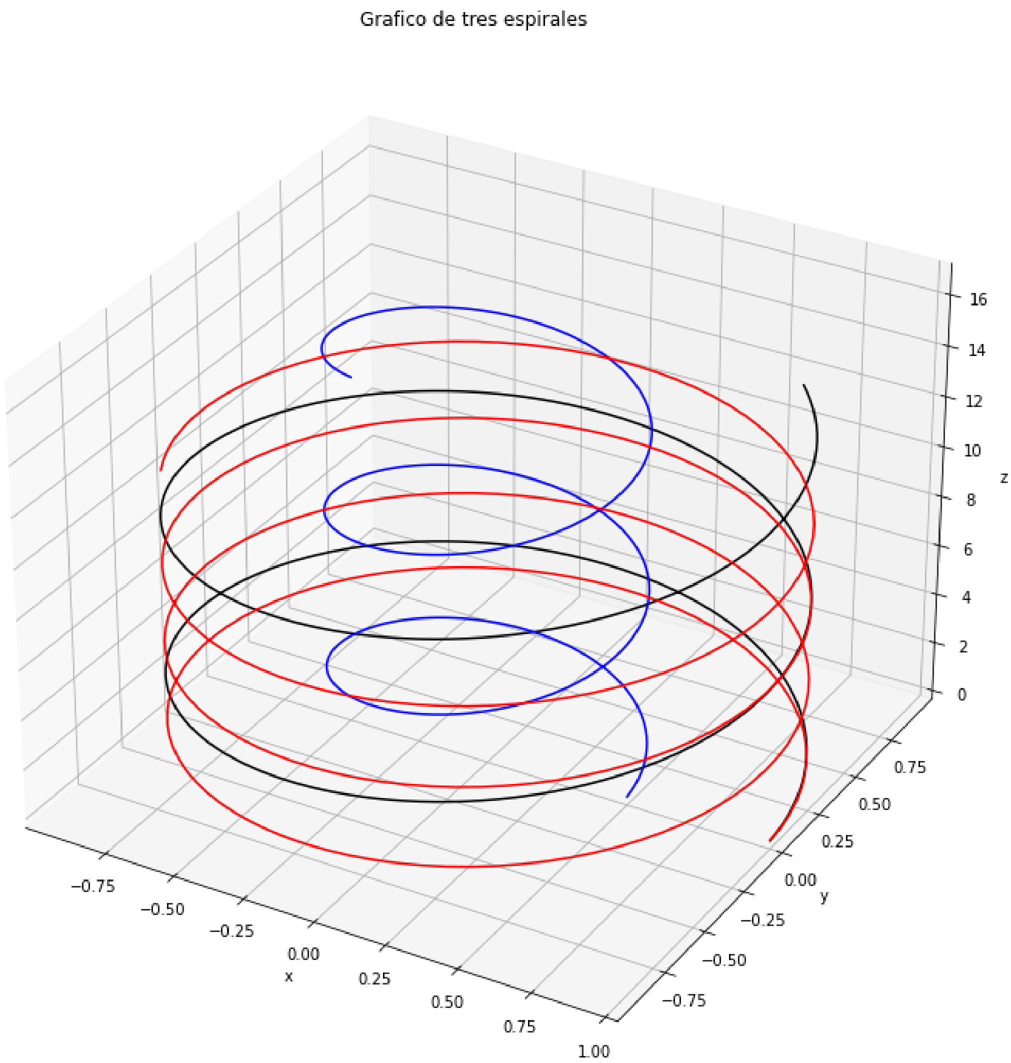
[1]:
```
# Import required libraries
from sympy import *
from sympy.vector import *
from sympy.plotting import *
from matplotlib import *
```

Generemos unos gráficos para ver el trazo de $\alpha$. Primero (en negro) los valores $a = b = 1$, luego (en azul) los valores $a = 1/2, b = 1$ y por último (en rojo) $a = 1, b = 1/2$.

*Nota:* en el código se usa $r$ en vez de $\alpha$ para hacer más sencilla la escritura.

[28]:
```
r,a,b,s,x,y,z = symbols('r,a,b,s,x,y,z')

# Subtitute c = sqrt(a^2+b^2) to make computations simpler
x = a*cos(s/sqrt(a**2+b**2))
y = a*sin(s/sqrt(a**2+b**2))
z = b*s/sqrt(a**2+b**2)

rcParams['figure.figsize'] = 10, 10

p = plot3d_parametric_line(
    (
        x.subs([(a,1),(b,1)]),
        y.subs([(a,1),(b,1)]),
        z.subs([(a,1),(b,1)]),
        (s,0,6*pi)
    ),
    (
        x.subs([(a,1/2),(b,1)]),
        y.subs([(a,1/2),(b,1)]),
        z.subs([(a,1/2),(b,1)]),
        (s,0,6*pi),
    ),
    (
        x.subs([(a,1),(b,1/2)]),
        y.subs([(a,1),(b,1/2)]),
        z.subs([(a,1),(b,1/2)]),
        (s,0,8*pi),
    ),
```

```
    show=False,
    title='Grafico de tres espirales',
)

p[0].line_color='black'
p[1].line_color='blue'
p[2].line_color='red'
p.show()
```




Calculemos ahora $\alpha'$.

[6]:
```
r = Matrix([x,y,z])

drds = diff(r,s)
drds
```

[6]:
$$\left[\begin{matrix}-\frac{a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}\\\frac{a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}\\\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{matrix}\right]$$

Podemos obtener su norma y simplificar.

[7]:
```
normdrds = sqrt(drds.dot(drds))
normdrds
```

[7]:
$$\sqrt{\frac{a^2\sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{a^2+b^2}+\frac{a^2\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}}$$

[8]:
```
simplify(normdrds)
```

[8]:
$$1$$

Con lo que la norma es 1, que es lo que queríamos demostrar.

### 2.1.2 Curvatura y torsión

La curvatura es la norma de la derivada segunda de $\alpha$ con respecto de $s$. Primero calculamos $\alpha''$ y luego su norma:

[9]:
```
ddrdss = diff(drds,s)
ddrdss
```

[9]:
$$\left[\begin{matrix}-\frac{a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{a^2+b^2}\\-\frac{a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{a^2+b^2}\\0\end{matrix}\right]$$

[10]:
```
normddrdss = sqrt(ddrdss.dot(ddrdss))
normddrdss
```

[10]:
$$\sqrt{\frac{a^2\sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}+\frac{a^2\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}}$$

[11]:
```
simplify(normddrdss)
```

[11]:
$$\sqrt{\frac{a^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}}$$

La expresión anterior nos da la curvatura de $\alpha$.

La torsión es el múltiplo escalar por el que diferen el vector normal y la primera derivada del vector binormal. Podemos comparar ambos vectores para conseguir ese múltiplo. Calculamos primero el vector normal:

[12]:
```
normddrdss = simplify(normddrdss) # Take the second derivative to be its␣
↪simplified form
n = ddrdss/normddrdss
n
```

[12]:

$$\left[\begin{matrix}- \frac{a \cos{\left(\frac{s}{\sqrt{a^{2} + b^{2}}} \right)}}{\sqrt{\frac{a^{2}}{\left(a^{2} + b^{2}\right)^{2}}} \left(a^{2} + b^{2}\right)}\\- \frac{a \sin{\left(\frac{s}{\sqrt{a^{2} + b^{2}}} \right)}}{\sqrt{\frac{a^{2}}{\left(a^{2} + b^{2}\right)^{2}}} \left(a^{2} + b^{2}\right)}\\0\end{matrix}\right]$$

Calculamos ahora el vector tangente usando la primera derivada:

[13]:
```
normdrds = simplify(normdrds)
t = drds/normdrds
t
```

[13]:

$$\left[\begin{matrix}- \frac{a \sin{\left(\frac{s}{\sqrt{a^{2} + b^{2}}} \right)}}{\sqrt{a^{2} + b^{2}}}\\\frac{a \cos{\left(\frac{s}{\sqrt{a^{2} + b^{2}}} \right)}}{\sqrt{a^{2} + b^{2}}}\\\frac{b}{\sqrt{a^{2} + b^{2}}}\end{matrix}\right]$$

Podemos entonces calcular el vector binormal y simplificarlo:

[14]:
```
bi = t.cross(n)
bi
```

[14]:

$$\left[\begin{matrix}\frac{a b \sin{\left(\frac{s}{\sqrt{a^{2} + b^{2}}} \right)}}{\sqrt{\frac{a^{2}}{\left(a^{2} + b^{2}\right)^{2}}} \left(a^{2} + b^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\\- \frac{a b \cos{\left(\frac{s}{\sqrt{a^{2} + b^{2}}} \right)}}{\sqrt{\frac{a^{2}}{\left(a^{2} + b^{2}\right)^{2}}} \left(a^{2} + b^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\\\frac{a^{2} \sin^{2}{\left(\frac{s}{\sqrt{a^{2} + b^{2}}} \right)}}{\sqrt{\frac{a^{2}}{\left(a^{2} + b^{2}\right)^{2}}} \left(a^{2} + b^{2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^{2} \cos^{2}{\left(\frac{s}{\sqrt{a^{2} + b^{2}}} \right)}}{\sqrt{\frac{a^{2}}{\left(a^{2} + b^{2}\right)^{2}}} \left(a^{2} + b^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{matrix}\right]$$

[15]:
```
simplify(bi)
```

[15]:

$$\begin{bmatrix} \frac{ab\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}}(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{ab\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}}(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}}(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

Solo falta la derivada del vector binormal:

[16]:
```
bi = simplify(bi)
dbids = diff(bi,s)
dbids
```

[16]:

$$\begin{bmatrix} \frac{ab\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}}(a^2+b^2)^2} \\ \frac{ab\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}}(a^2+b^2)^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos entonces comparar $b'$ con $n$:

[17]:
```
display(Eq(dbids,n))
```

$$\begin{bmatrix} \frac{ab\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}}(a^2+b^2)^2} \\ \frac{ab\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}}(a^2+b^2)^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}}(a^2+b^2)} \\ -\frac{a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}}(a^2+b^2)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde podemos ver que la torsión es:

$$\frac{b}{a^2+b^2}$$

### 2.1.3 Plano osculante

En la ecuación del plano en el punto $s = (s_1, s_2, s_3)$:

$$a(x - s_1) + b(y - s_2) + c(z - s_3),$$

los coeficientes $a, b, c$ coinciden con los del vector normal:

[18]:
```
n
```

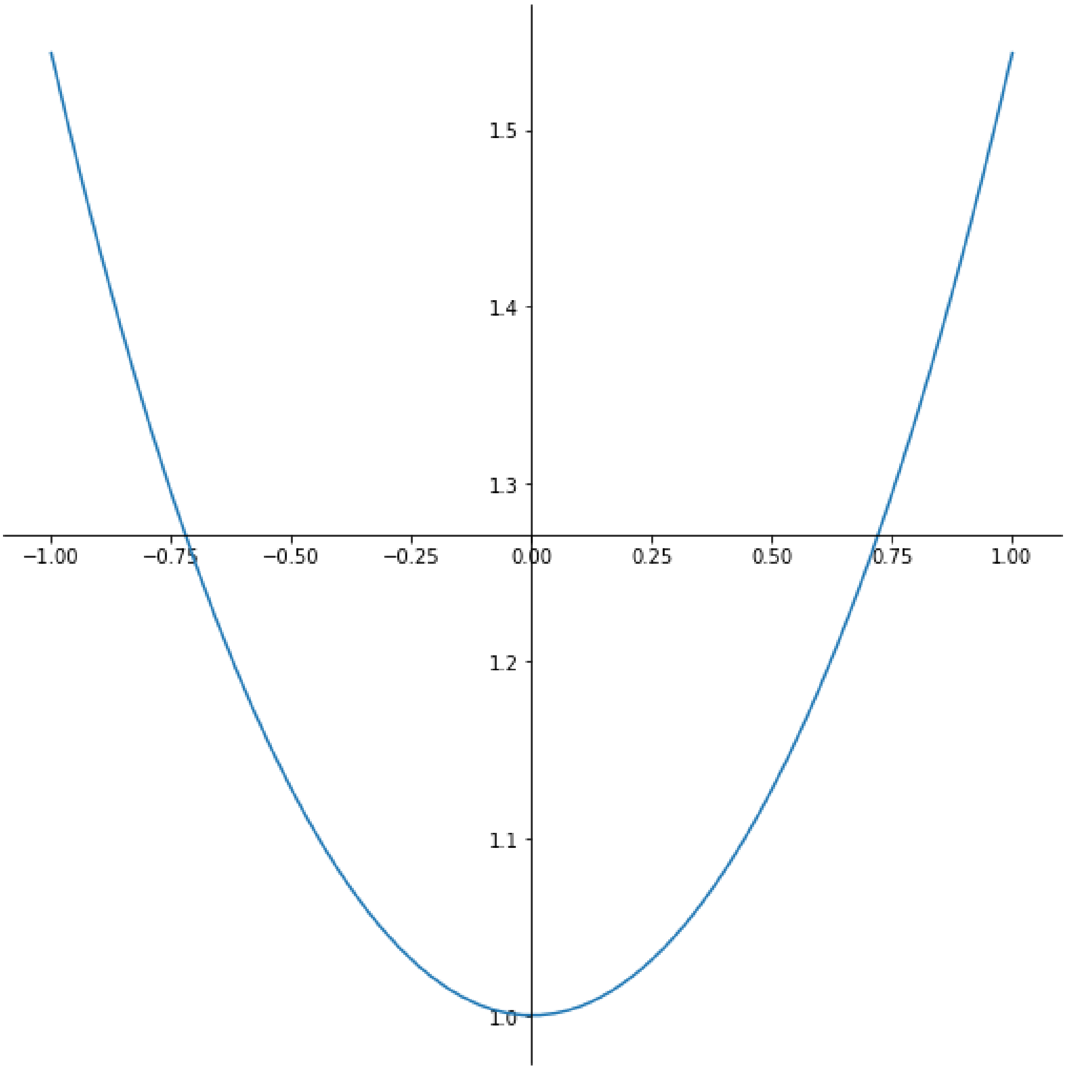
[18]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}(a^2+b^2)}} \\ -\frac{a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}(a^2+b^2)}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2.2 Tercera pregunta

Veamos primero el trazo de la curva $\alpha$.

[41]:
```
t = symbols('t')

x = t
y = (exp(t)+exp(-t))/2

rcParams['figure.figsize'] = 8, 8

plot_parametric(
    (x, y, (t, -1, 1)),
)
```




[41]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f02444de680>

### 2.2.1 Parametrización por longitud de arco

Calculamos primero $\alpha'$:

[51]:
```
dxdt = diff(x,t)
dydt = diff(y,t)
display(dxds,dyds)
```

$1$

$\frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2}$

Luego, su norma:

[52]:
```
normdrdt = sqrt(dxdt**2 + dydt**2)
normdrdt
```

[52]:

$$\sqrt{\left(\frac{e^{t}}{2} - \frac{e^{-t}}{2}\right)^{2} + 1}$$

[44]:
```
simplify(normdrdt)
```

[44]:

$$\frac{\sqrt{2\cosh\left(2t\right) + 2}}{2}$$

[56]:
```
integrate(sqrt(dxdt**2 + dydt**2), t)
```

[56]:

$$\frac{\int \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}\, dt}{2}$$

[ ]:
```

```