

## TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA II

## Primera Tarea

*Curvas paramétricas, curvatura, torsión*

Jhonny Lanzusi

June 2, 2022

## CONTENTS

<b>1</b>	<b>Primera pregunta</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Segunda Pregunta</b>	<b>2</b>
2.1	Parametrizada por longitud de arco . . . . .	2
2.2	Curvatura y torsión . . . . .	5
2.3	Plano osculante . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Tercera pregunta</b>	<b>8</b>
3.1	Parametrización por longitud de arco . . . . .	9
3.2	Curvatura . . . . .	10

## 1 PRIMERA PREGUNTA

Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  funciones  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que:

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

para todo  $t \in I$ . Además, hagamos  $v = (v_1, v_2, v_3)$ .

Entonces la derivada de  $\langle \alpha, v \rangle$  respecto de  $t$  viene dada por:

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t), v \rangle' &= \alpha'_1(t)v_1 + \alpha'_2(t)v_2 + \alpha'_3(t)v_3 \\ &= \langle \alpha'(t), v \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

## Primera Tarea

Ahora integrando respecto de  $t$  en un intervalo cualquiera  $(0, x) \in I$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^x \langle \alpha(t), v \rangle' dt &= \int_0^x \alpha'_1(t)v_1 + \alpha'_2(t)v_2 + \alpha'_3(t)v_3 dt = 0 \\ \implies v_1 \int_0^x \alpha'_1(t) dt + v_2 \int_0^x \alpha'_2(t) dt + v_3 \int_0^x \alpha'_3(t) dt &= 0 \\ \implies v_1(\alpha_1(x) - \alpha_1(0)) + v_2(\alpha_2(x) - \alpha_2(0)) + v_3(\alpha_3(x) - \alpha_3(0)) &= 0 \\ \implies \langle \alpha(x), v \rangle - \langle \alpha(0), v \rangle &= 0 \\ \implies \langle \alpha(x), v \rangle &= 0.\end{aligned}$$

## 2 SEGUNDA PREGUNTA

### 2.1 Parametrizada por longitud de arco

Basta con revisar que la norma de  $\alpha'$  es 1, pues en ese caso  $s = L(t) = t - t_0$ . Para los cálculos usaremos la librería sympy de python.

```
[166]: from sympy import *
from sympy.vector import *
from sympy.plotting import *
import matplotlib

matplotlib.use("pgf")
matplotlib.rcParams.update({
    "pgf.texsystem": "pdflatex",
    'font.family': 'serif',
    'text.usetex': True,
    'pgf.rcfonts': False,
    'grid.alpha': 0.5,
    'figure.autolayout': True,
})
```

Generemos unos gráficos para ver el trazo de  $\alpha$ . Primero (en negro) los valores  $a = b = 1$ , luego (en azul) los valores  $a = 1/2, b = 1$  y por último (en rojo)  $a = 1, b = 1/2$ .

Nota: en el código se usa  $r$  en vez de  $\alpha$  para hacer más sencilla la escritura.

```
[171]: r,a,b,s,x,y,z = symbols('r,a,b,s,x,y,z', real=True)

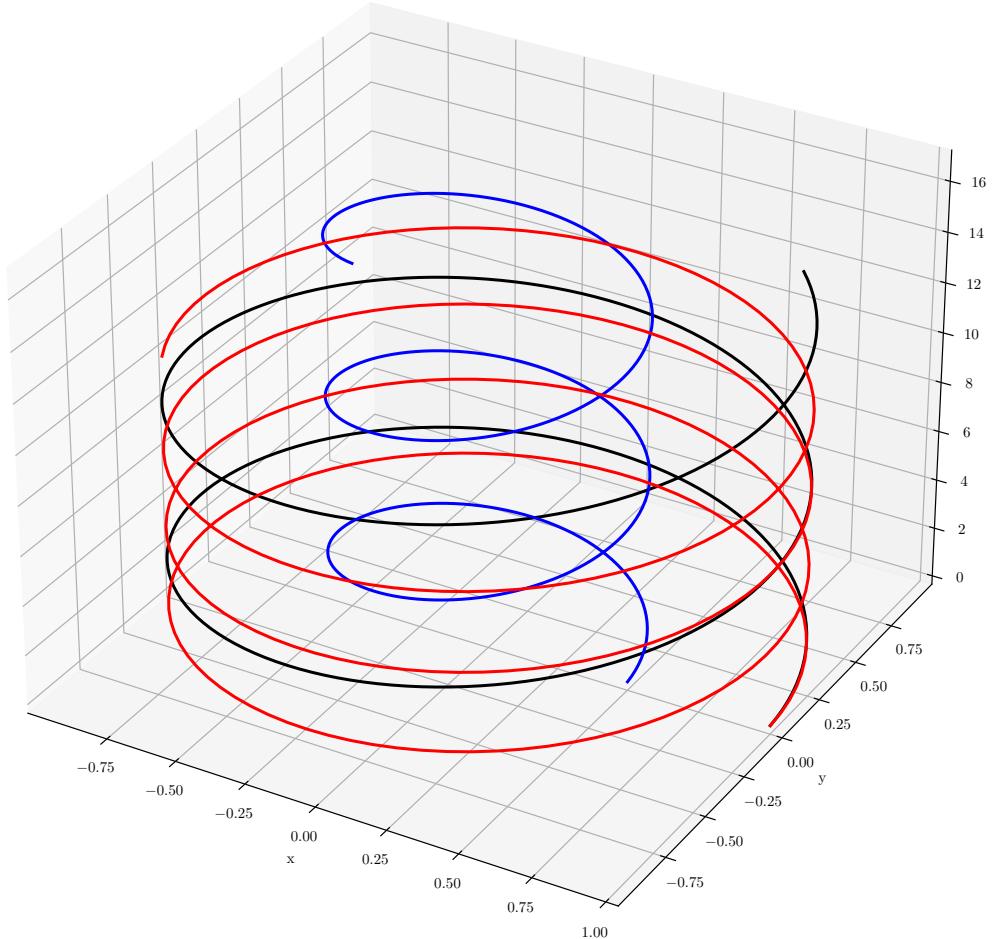
# Substitute c = sqrt(a^2+b^2) to make computations simpler
x = a*cos(s/sqrt(a**2+b**2))
y = a*sin(s/sqrt(a**2+b**2))
z = b*s/sqrt(a**2+b**2)

p = plot3d_parametric_line(
    (
        x.subs([(a,1),(b,1)]),
        y.subs([(a,1),(b,1)]),
```

## Primera Tarea

```
z.subs([(a,1),(b,1)],  
       (s,0,6*pi))  
,  
(  
    x.subs([(a,1/2),(b,1)]),  
    y.subs([(a,1/2),(b,1)]),  
    z.subs([(a,1/2),(b,1)]),  
    (s,0,6*pi)),  
,  
(  
    x.subs([(a,1),(b,1/2)]),  
    y.subs([(a,1),(b,1/2)]),  
    z.subs([(a,1),(b,1/2)]),  
    (s,0,8*pi)),  
,  
show=False,  
label='Grafico de tres espirales',  
)  
  
p[0].line_color='black'  
p[1].line_color='blue'  
p[2].line_color='red'  
p.save('Tarea1_files/Tarea1_5_0.pdf')
```

## Primera Tarea



Calculemos ahora  $\alpha'$ .

[111]: `r = Matrix([x,y,z])`

```
d_r_ds = diff(r,s)
d_r_ds
```

[111]:

$$\left[ \begin{array}{c} -\frac{a \sin \left( \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array} \right]$$

Podemos obtener su norma y simplificar.

## Primera Tarea

```
[112]: norm_d_r_ds = sqrt(d_r_ds.dot(d_r_ds))  
norm_d_r_ds
```

$$[112]: \sqrt{\frac{a^2 \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{a^2+b^2} + \frac{a^2 \cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}}$$

```
[113]: simplify(norm_d_r_ds)
```

```
[113]: 1
```

Con lo que la norma es 1, que es lo que queríamos demostrar.

## 2.2 Curvatura y torsión

La curvatura es la norma de la derivada segunda de  $\alpha$  con respecto de  $s$ . Primero calculamos  $\alpha''$  y luego su norma:

```
[114]: d_r_dss = diff(d_r_ds,s)  
d_r_dss
```

$$[114]: \begin{bmatrix} -\frac{a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{a^2+b^2} \\ -\frac{a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{a^2+b^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
[115]: norm_d_r_dss = sqrt(d_r_dss.dot(d_r_dss))  
norm_d_r_dss
```

$$[115]: \sqrt{\frac{a^2 \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{(a^2+b^2)^2} + \frac{a^2 \cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{(a^2+b^2)^2}}$$

```
[116]: simplify(norm_d_r_dss)
```

$$[116]: \frac{|a|}{a^2+b^2}$$

La expresión anterior nos da la curvatura de  $\alpha$ .

La torsión es el múltiplo escalar por el que difieren el vector normal y la primera derivada del vector binormal. Podemos comparar ambos vectores para conseguir ese múltiplo. Calculamos primero el vector normal:

## Primera Tarea

[117]: `norm_d_r_dss = simplify(norm_d_r_dss)`  
`n = d_r_dss/norm_d_r_dss`  
`n`

[117]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{|a|} \\ -\frac{a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{|a|} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora el vector tangente usando la primera derivada:

[118]: `norm_d_r_ds = simplify(norm_d_r_ds)`  
`t = d_r_ds/norm_d_r_ds`  
`t`

[118]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$$

Podemos entonces calcular el vector binormal y simplificarlo:

[119]: `bi = t.cross(n)`  
`bi`

[119]:

$$\begin{bmatrix} \frac{ab \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2} |a|} \\ -\frac{ab \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2} |a|} \\ \frac{a^2 \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + a^2 \cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2} |a|} \end{bmatrix}$$

[120]: `simplify(bi)`

[120]:

## Primera Tarea

$$\begin{bmatrix} ab \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ \frac{\sqrt{a^2+b^2}|a|}{ab \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)} \\ -\frac{ab \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}|a|} \\ \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}|a|} \end{bmatrix}$$

Solo falta la derivada del vector binormal:

```
[121]: bi = simplify(bi)
d_bi_ds = diff(bi,s)
d_bi_ds
```

$$\begin{bmatrix} ab \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ \frac{(a^2+b^2)|a|}{ab \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)} \\ -\frac{ab \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{(a^2+b^2)|a|} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos entonces comparar  $b'$  con  $n$ :

```
[122]: display(Eq(d_bi_ds,n))
```

$$\begin{bmatrix} ab \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ \frac{(a^2+b^2)|a|}{ab \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)} \\ -\frac{ab \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{(a^2+b^2)|a|} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ \frac{|a|}{a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)} \\ -\frac{|a|}{a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde podemos ver que la torsión es:

$$\frac{b}{a^2+b^2}$$

### 2.3 Plano osculante

En la ecuación del plano en el punto  $s = (s_1, s_2, s_3)$ :

$$a(x - s_1) + b(y - s_2) + c(z - s_3),$$

los coeficientes  $a, b, c$  coinciden con los del vector normal:

```
[123]: n
```

```
[123]:
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{|a|} \\ -\frac{a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{|a|} \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3 TERCERA PREGUNTA

Veamos primero el trazo de la curva  $\alpha$ .

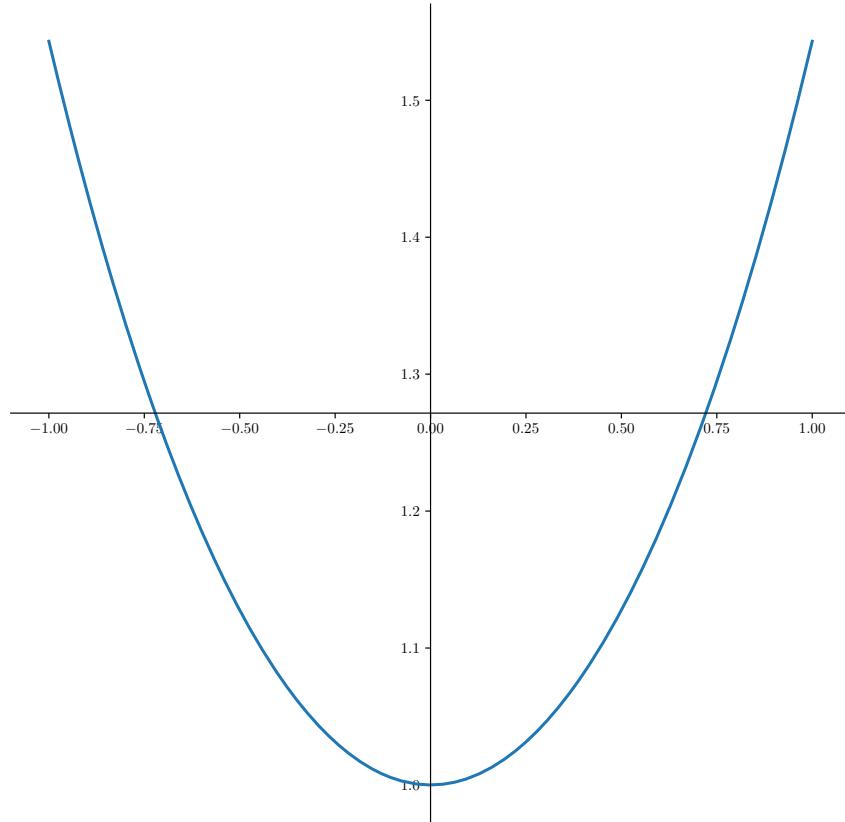
```
[165]: matplotlib.rcParams.update({
    'lines.linewidth': 2,
})

t = symbols('t', real=True)

x = t
y = cosh(t)

p2 = plot_parametric(
    (x, y, (t, -1, 1)),
    label='Catenaria',
    show=False,
)

p2.save('Tarea1_files/Tarea1_33_0.pdf')
```



### 3.1 Parametrización por longitud de arco

Calculamos primero  $\alpha'$ :

```
[125]: r = Matrix([x,y])
d_r_dt = diff(r,t)
d_r_dt
```

$$[125]: \begin{bmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{bmatrix}$$

Luego, su norma:

```
[126]: norm_d_r_dt = sqrt(d_r_dt.dot(d_r_dt))
norm_d_r_dt
```

[126]:

## Primera Tarea

$$\sqrt{\sinh^2(t) + 1}$$

[127]: `simplify(norm_d_r_dt)`

[127]:  $\cosh(t)$

Como  $\cosh$  es siempre positiva calcular la longitud de arco equivale a integrar la función  $\cosh(t)$  en el intervalo  $(0, t)$  que es conveniente puesto que  $\sinh(0) = 0$ .

[128]: `u = symbols('u', real=True)  
integrate(cosh(u), (u, 0, t))`

[128]:  $\sinh(t)$

Podemos entonces despejar  $t$  en función de  $s$  usando la inversa del seno hiperbólico.

[129]: `display(Eq(t, asinh(s)))`

$$t = \operatorname{asinh}(s)$$

La reparametrización por longitud de arco viene dada entonces por  $\alpha(L^{-1}(s))$ :

[130]: `r_by_arc_length = r.subs(t, asinh(s))  
r_by_arc_length`

[130]: 
$$\begin{bmatrix} \operatorname{asinh}(s) \\ \sqrt{s^2 + 1} \end{bmatrix}$$

Podemos revisar rápidamente que la norma de la derivada es 1:

[131]: `d_r_by_arc_length_ds = diff(r_by_arc_length, s)  
d_r_by_arc_length_ds`

[131]: 
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \\ \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} \end{bmatrix}$$

[132]: `simplify(sqrt(d_r_by_arc_length_ds.dot(d_r_by_arc_length_ds)))`

[132]: 1

### 3.2 Curvatura

Como  $\alpha$  ya esta parametrizada por longitud de arco, basca con ver el módulo de su segunda derivada:

[133]: `d_r_by_arc_length_dss = diff(r_by_arc_length_ds, s)  
d_r_by_arc_length_dss`

[133]:

## Primera Tarea

$$\begin{bmatrix} -\frac{s}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{s^2}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \end{bmatrix}$$

```
[134]: norm_d_r_by_arc_length_dss = sqrt(d_r_by_arc_length_dss.  
    ↪dot(d_r_by_arc_length_dss))
```

```
[135]: kappa = symbols('kappa')  
display(Eq(kappa, simplify(norm_d_r_by_arc_length_dss)))
```

$$\kappa = \frac{1}{s^2 + 1}$$