Tarea 4

Topología y Geometría II

Jhonny Lanzuisi

23 de Junio de 2022

Índice


```python
import sympy as sym

def lp(input_list):
    for i in input_list:
        print('$$' + sym.latex(i) + '$$')
```

Primera pregunta

Veamos los coeficientes de la primera forma fundamental en un punto p.

Calculemos primero ϕ_u:

```python
a,u,v,b = sym.symbols('a,u,v,b')

phi = sym.Matrix([
            a*u*sym.cosh(v),
            b*u*sym.sinh(v),
```

```
                u**2
])

phi_u = sym.Derivative(phi, u)

lp([phi_u.doit()])
```

$$\begin{bmatrix} a\cosh(v) \\ b\sinh(v) \\ 2u \end{bmatrix}$$

Luego φ_v:

```
phi_v = sym.Derivative(phi, v)

lp([phi_v.doit()])
```

$$\begin{bmatrix} au\sinh(v) \\ bu\cosh(v) \\ 0 \end{bmatrix}$$

El primer coficiente $E(u,u) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$ es:

```
E = phi_u.doit().dot(phi_u.doit())

lp([E])
```

$$a^2\cosh^2(v) + b^2\sinh^2(v) + 4u^2$$

El segundo coeficiente $F(u,v) = \langle \phi_u, \phi_v \rangle$ es:

```
F = phi_u.doit().dot(phi_v.doit())

lp([F])
```

$$a^2u\sinh(v)\cosh(v) + b^2u\sinh(v)\cosh(v)$$

Y el tercer coeficiente $G(v,v) = \langle \phi_v, \phi_v \rangle$ es:

```
G = phi_v.doit().dot(phi_v.doit())

lp([G])
```

$$a^2u^2 \sinh^2(v) + b^2u^2 \cosh^2(v)$$

Entonces, dado un vector $\omega \in T_pS$ escrito en la base de T_pS inducida por φ, $\omega = r\varphi_u + s\varphi_v$, $I(w)$ viene dado por:

```
omega,r,s = sym.symbols('omega,r,s')

omega = r*phi_u.doit() + s*phi_v.doit()

lp([omega.dot(omega)])
```

$$4r^2u^2 + (ar\cosh(v) + asu\sinh(v))^2 + (br\sinh(v) + bsu\cosh(v))^2$$

Segunda pregunta

Veamos los coeficientes de la primera forma fundamental.

Calculemos primero φ_ρ:

```
rho,theta = sym.symbols('rho,theta')

phi = sym.Matrix([
            rho*sym.cos(theta),
            rho*sym.sin(theta)
])

phi_rho = sym.Derivative(phi, rho)

lp([phi_rho.doit()])
```

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{bmatrix}$$

Luego φ_θ:

```
phi_theta = sym.Derivative(phi, theta)

lp([phi_theta.doit()])
```

$$\begin{bmatrix}-\rho\sin(\theta)\\ \rho\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

El primer coficiente $E(\rho,\rho) = \langle \varphi_\rho, \varphi_\rho \rangle$ es:

```
E = phi_rho.doit().dot(phi_rho.doit())

lp([sym.simplify(E)])
```

$$1$$

El segundo coeficiente $F(\rho, \theta) = \langle \phi_\rho, \phi_\theta \rangle$ es:

```
F = phi_rho.doit().dot(phi_theta.doit())

lp([F])
```

$$0$$

Y el tercer coeficiente $G(\theta, \theta) = \langle \phi_\theta, \phi_\theta \rangle$ es:

```
G = phi_theta.doit().dot(phi_theta.doit())

lp([sym.simplify(G)])
```

$$\rho^2$$

Entonces, dado un vector $\omega \in T_pS$ escrito en la base de T_pS inducida por φ, $\omega = r\varphi_u + s\varphi_v$, $I(w)$ viene dado por:

```
omega = r*phi_rho.doit() + s*phi_theta.doit()

lp([sym.simplify(omega.dot(omega))])
```

$$r^2 + \rho^2 s^2$$

Tercera pregunta

Basta con ver que, al sustituir la expresión para ∇f dada,

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = df_p(v)$$

para $v = \varphi_u, \varphi_v$, puesto que dado un v cualquiera podemos escribir $v = a\varphi_u + b\varphi_v$ y entonces:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, v \rangle_p &= \langle \nabla f, a\varphi_u + b\varphi_v \rangle_p \\ &= a\langle \nabla f, \varphi_u \rangle_p + b\langle \nabla f, \varphi_v \rangle_p.\end{aligned}$$

Notemos que $df_p(\varphi_u) = f_u$, por un lado, y que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, \varphi_u \rangle &= \left\langle \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2}\varphi_u + \frac{f_v G - f_u F}{EG - F^2}\varphi_v, \varphi_u \right\rangle \\
&= \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2}E + \frac{f_v G - f_u F}{EG - F^2}F \\
&= \frac{f_u(EG - F^2)}{EG - F^2} \\
&= f_u \\
&= df_p(\varphi_u).
\end{aligned}$$

Ahora, se puede hacer una verificación similar para φ_v:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, \varphi_v \rangle &= \left\langle \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2}\varphi_u + \frac{f_v G - f_u F}{EG - F^2}\varphi_v, \varphi_v \right\rangle \\
&= \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2}F + \frac{f_v G - f_u F}{EG - F^2}G \\
&= \frac{f_v(EG - F^2)}{EG - F^2} \\
&= f_v \\
&= df_p(\varphi_v).
\end{aligned}$$

Cuarta pregunta

Primera parte

Supongamos que S_1 es orientable. Entonces existe una familia de parametrizaciones $\{\varphi_\alpha\}$, $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to S_1$, que cubre a S_1 tal que si $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ entonces la función de cambio de variable $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ es tal que $\det(d(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)) > 0$.

Consideremos la familia de parametrizaciones de S_2 dada por $\{f \circ \varphi_\alpha\}$, $f \circ \varphi_\alpha \colon U_\alpha \to S_2$. Entonces si $p \in f \circ \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap f \circ \varphi_\beta(U_\beta)$ la función de cambio de coordenadas viene dada por:

$$(f \circ \varphi_\beta)^{-1} \circ (f \circ \varphi_\alpha) = \varphi_\beta^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha,$$

y $\det(d(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)) > 0$ como vimos antes. Por lo que S_2 es orientable.

Si suponemos ahora que S_2 es orientable. Entonces existe una familia de parametrizaciones $\{\varphi_\alpha\}$, $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to S_2$, que cubre a S_2 tal que si $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ entonces la función de cambio de variable $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ es tal que $\det(d(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)) > 0$.

Consideremos la familia de parametrizaciones de S_1 dada por $\{f^{-1} \circ \varphi_\alpha\}$, $f^{-1} \circ \varphi_\alpha \colon U_\alpha \to S_1$. Entonces si $p \in f^{-1} \circ \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap f^{-1} \circ \varphi_\beta(U_\beta)$ la función de cambio de coordenadas viene dada por:

$$(f^{-1} \circ \varphi_\beta)^{-1} \circ (f^{-1} \circ \varphi_\alpha) = \varphi_\beta^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ \varphi_\alpha = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha,$$

y $\det(d(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)) > 0$ como vimos antes. Por lo que S_1 es orientable.

Segunda parte

La orientación inducida por f viene dada por la familia $\{f \circ \varphi_\alpha\}$, $f \circ \varphi_\alpha \colon U_\alpha \to S_2$, del ejercicio anterior.

Como A es un operador lineal $dA = A$ y se sigue que

$$det(dA) = -1,$$

pues A es el negativo de la matriz identidad. Tenemos entonces que el operador A invierte la orientación.