А.1.3. Описание случайных величин

Выполнил Лапин Ярослав. 18/05/2011.

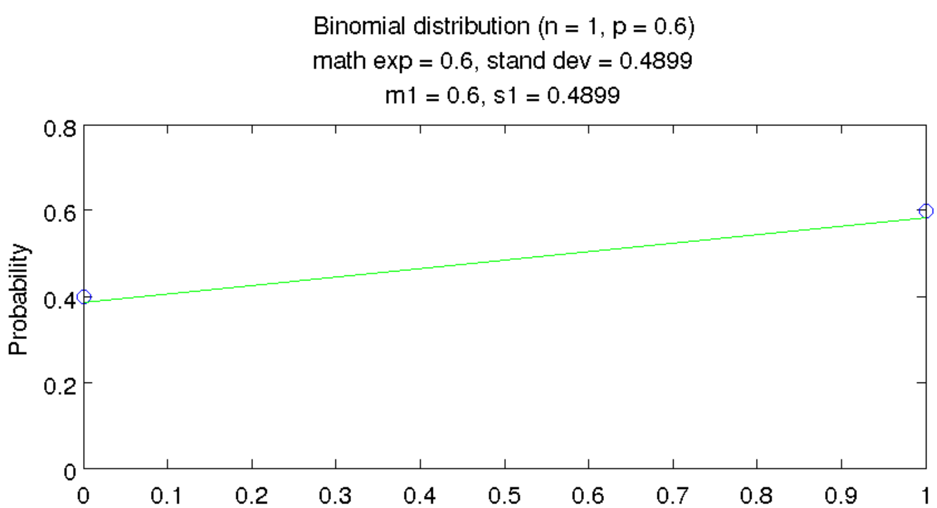
Лирическое отступление

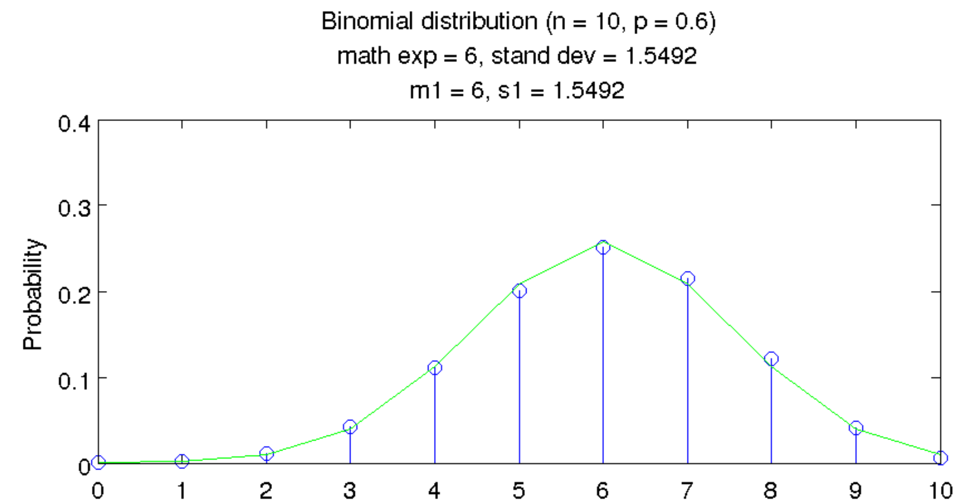
Так как в matlab 7.12 отсутствует функция d_gauss, то в скрипте нужно было заменить d_gauss на normpdf

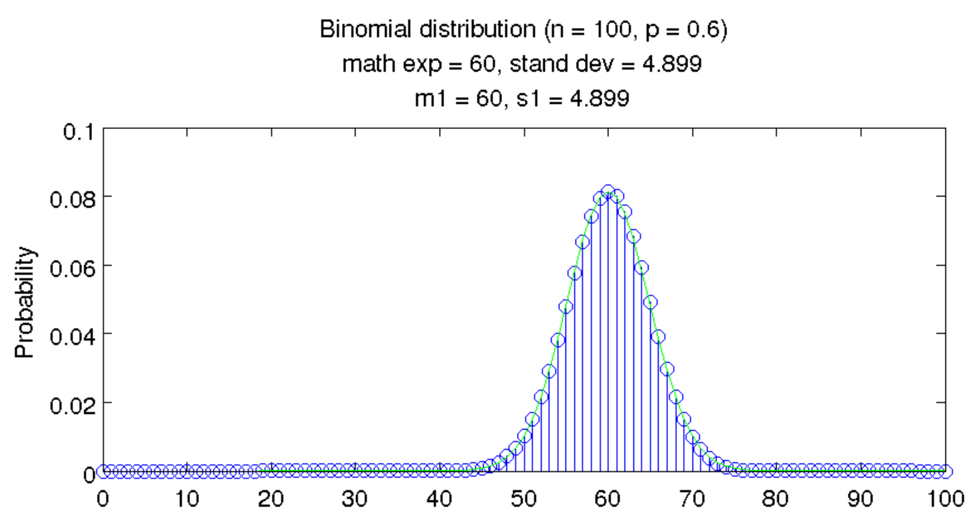
Биномиальное распределение

График представляет какая вероятность получить m успешных испытаний при n попытках и вероятности успеха p.

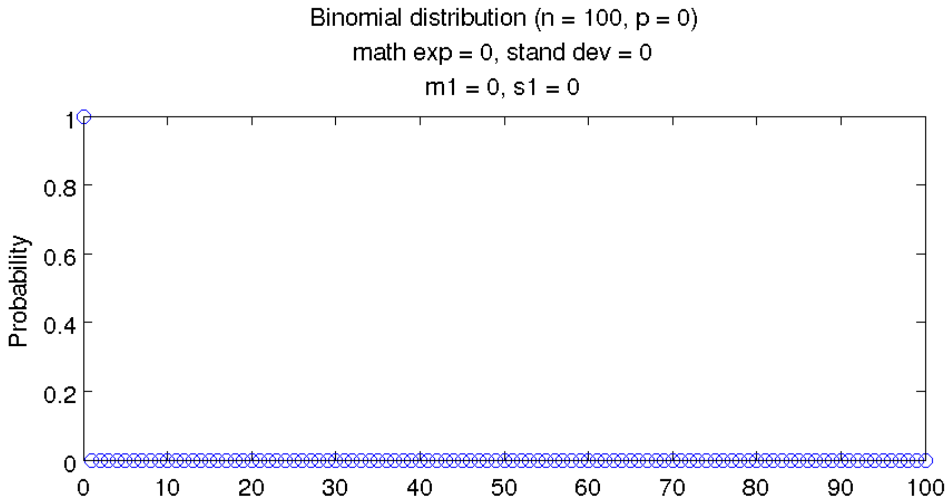
Зависимость от n.

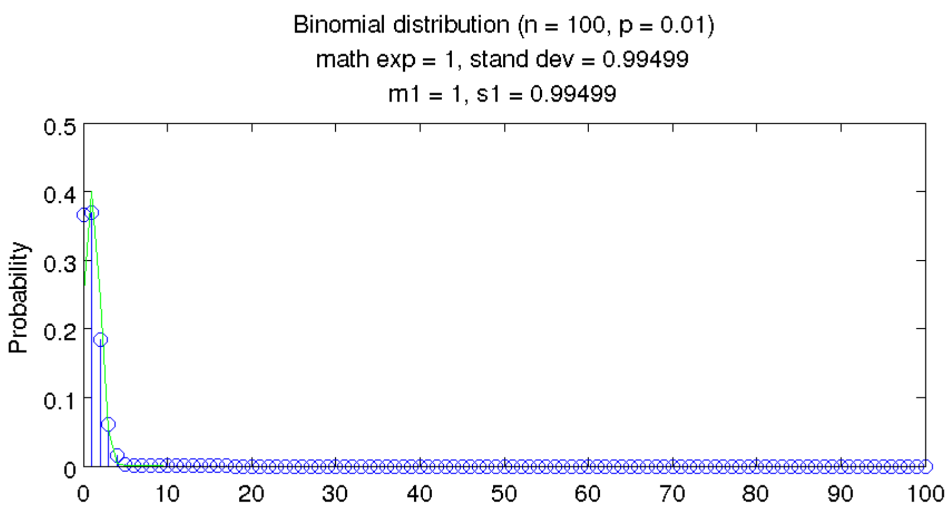


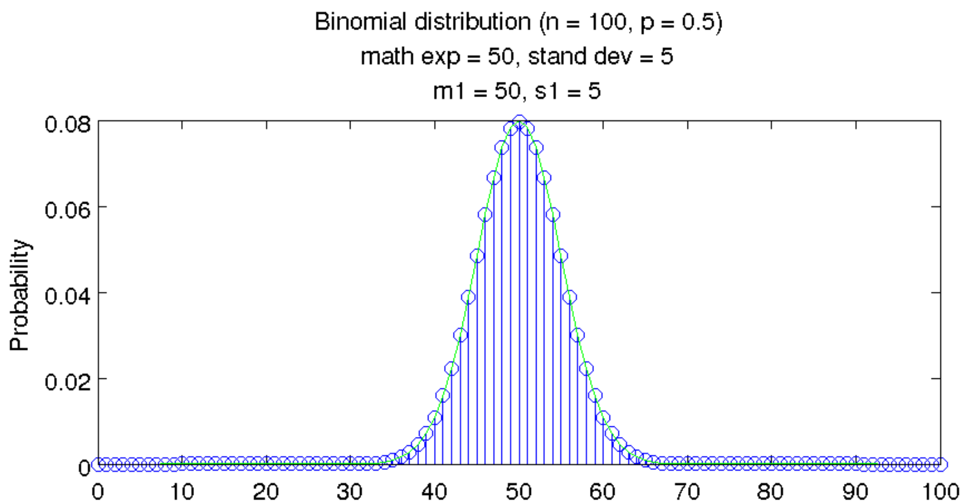

Binomial distribution (n = 10, p = 0.6)
math exp = 6, stand dev = 1.5492
m1 = 6, s1 = 1.5492
Probability
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

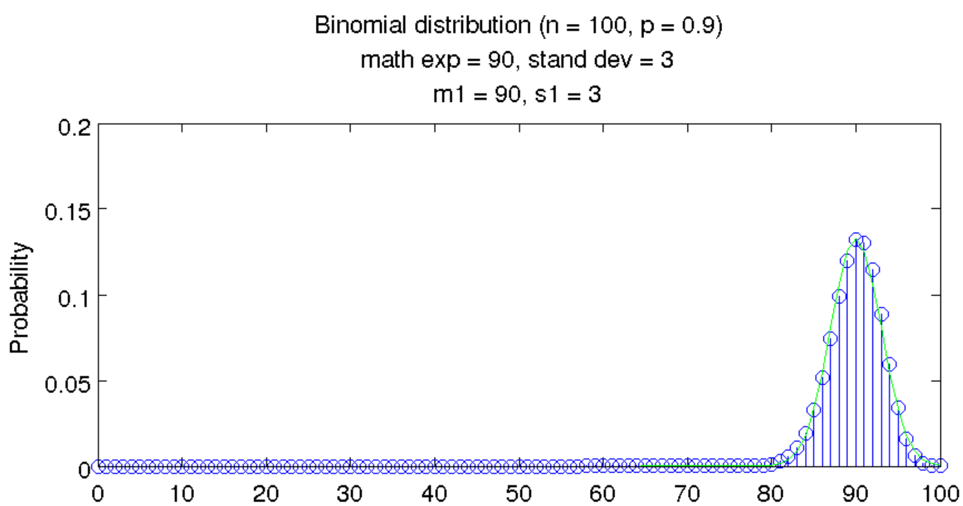

Binomial distribution (n = 100, p = 0.6)
math exp = 60, stand dev = 4.899
m1 = 60, s1 = 4.899
Probability
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

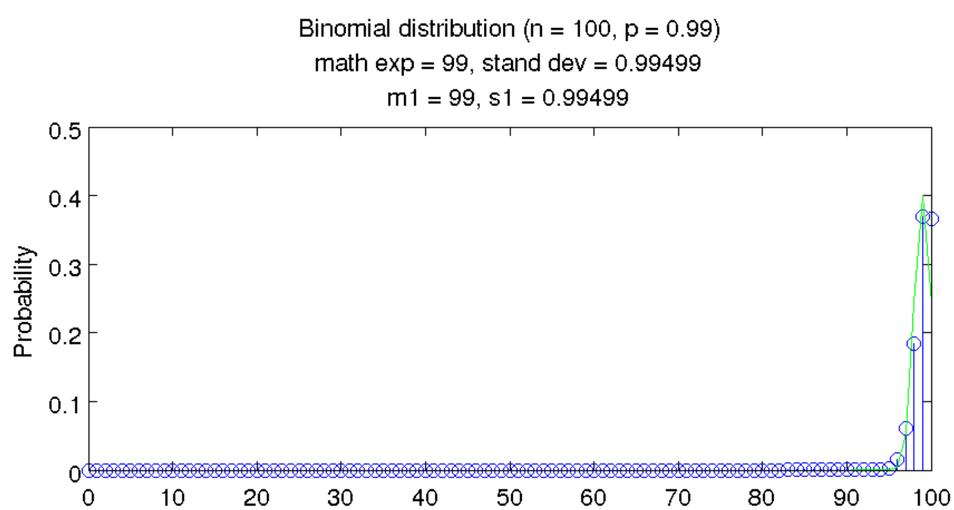
Зависимость от p.






Binomial distribution (n = 100, p = 0.5)
math exp = 50, stand dev = 5
m1 = 50, s1 = 5
Probability
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


Binomial distribution (n = 100, p = 0.9)
math exp = 90, stand dev = 3
m1 = 90, s1 = 3
Probability
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

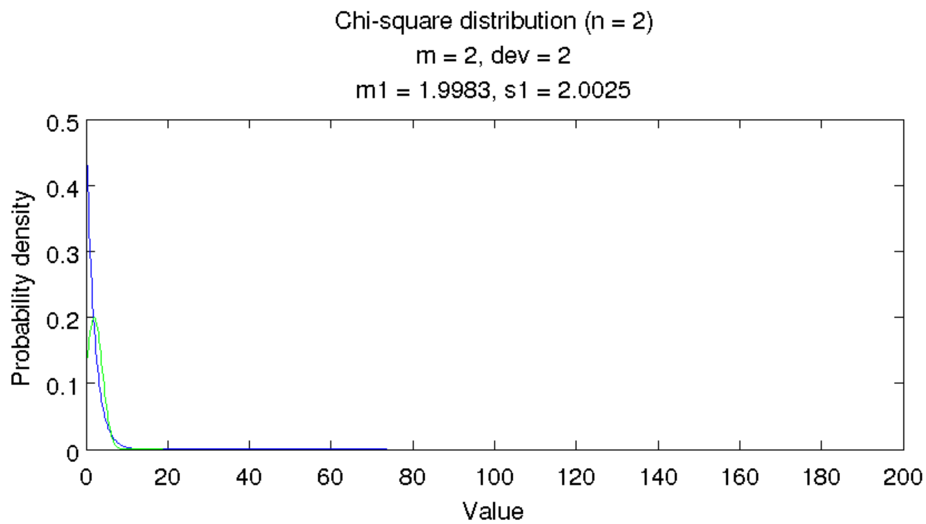

Binomial distribution (n = 100, p = 0.99)
math exp = 99, stand dev = 0.99499
m1 = 99, s1 = 0.99499
Probability
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

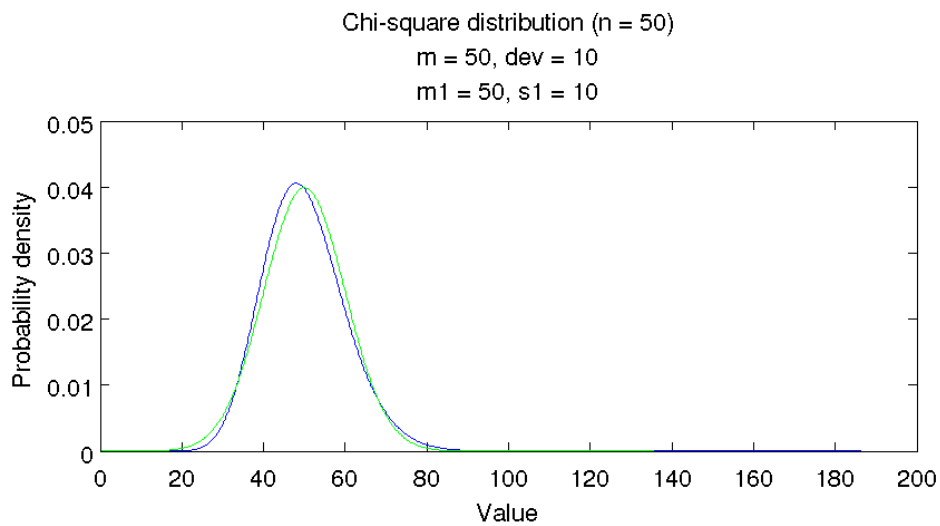
Вывод

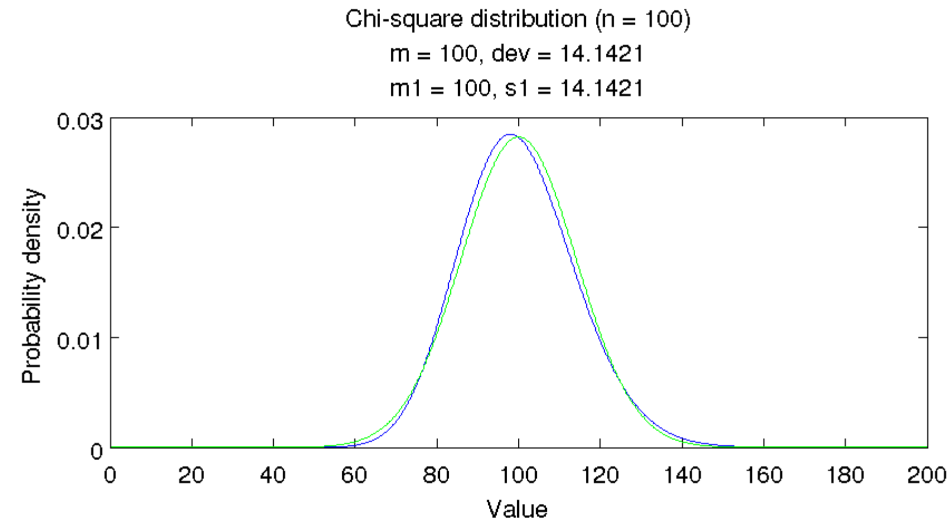
Распределение при n = 1 является распределением Бернулли. При больших n распределение совпадает с нормальным распределением с мат ожиданием np и дисперсией $np(1-p)$. Кроме того для фиксированного числа $\lambda <= n$ и большого n распределение с вероятностью λ/n совпадает с распределением Пуассона с параметром λ.

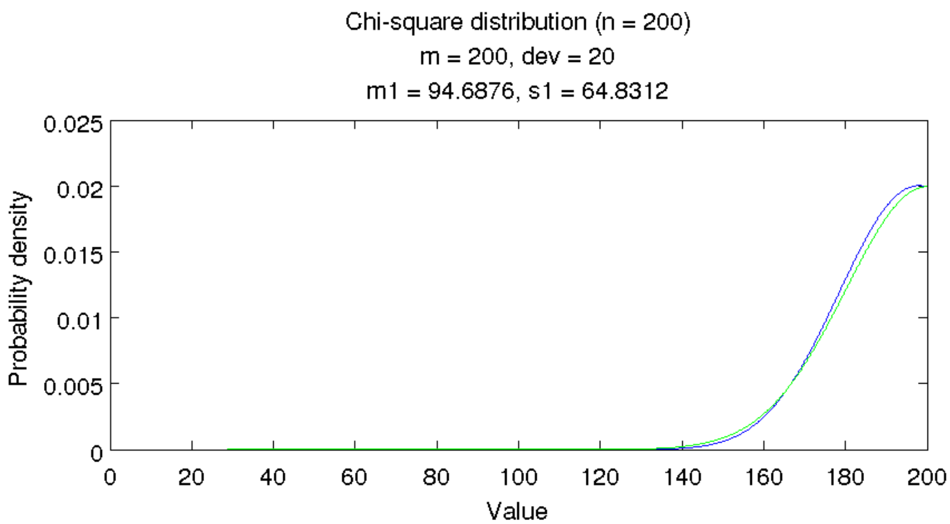
χ^2 распределение

χ^2 распределение с k степенями свободы это сумма квадратов (независимых) нормальных распределений.









Вывод

При k = 2, распределение совпадает с экспоненциальным распределением. При $n \to \infty$ распределение совпадает с нормальным распределением с мат. ожиданием k и дисперсией 2k.

Нормальное распределение

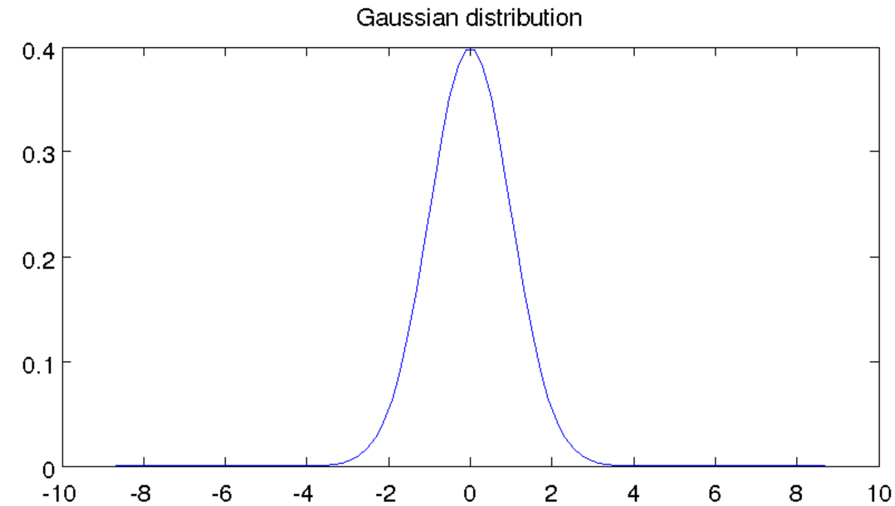


Figure 1: N(0,1)

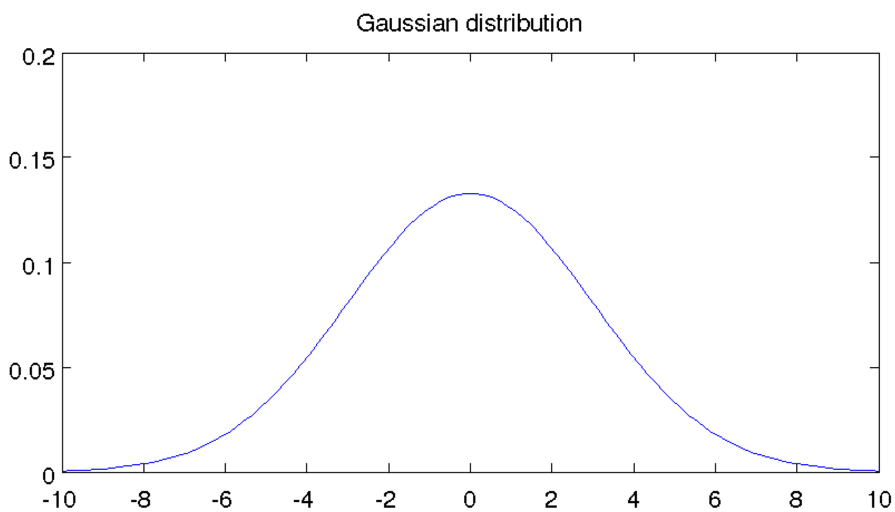


Figure 2: N(0,3)

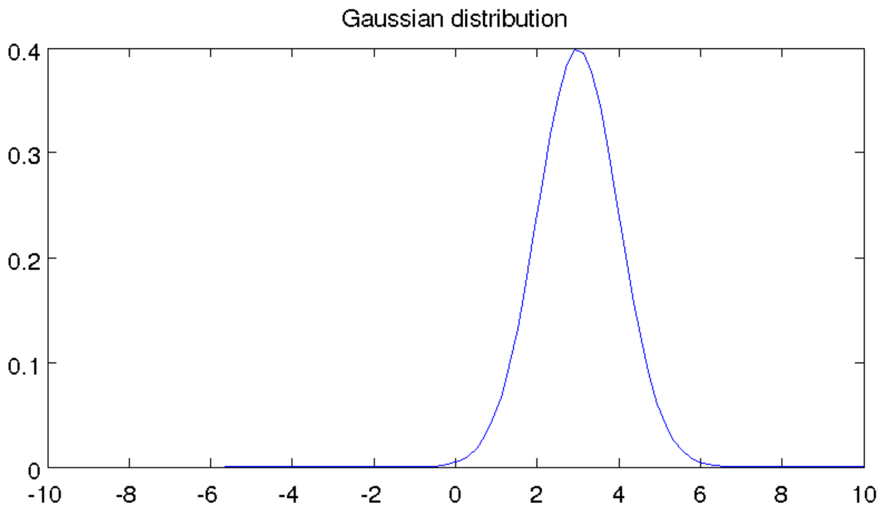
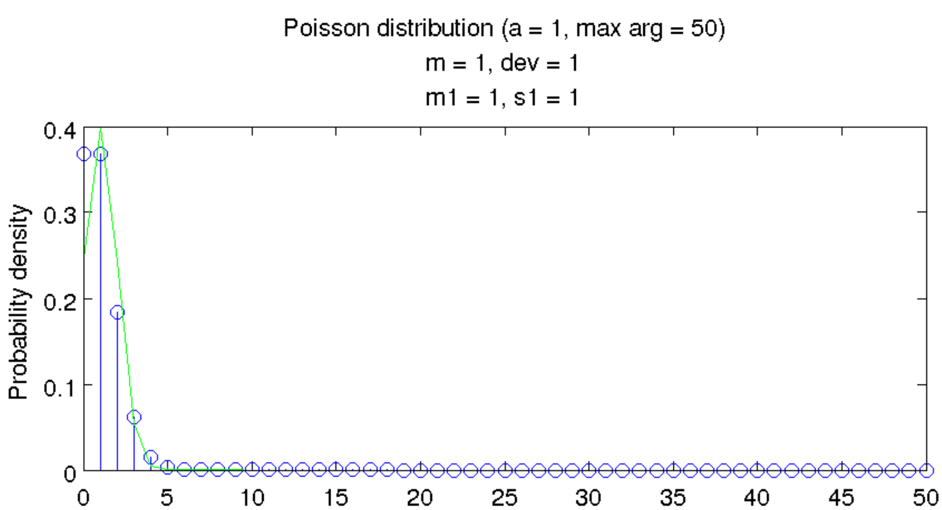
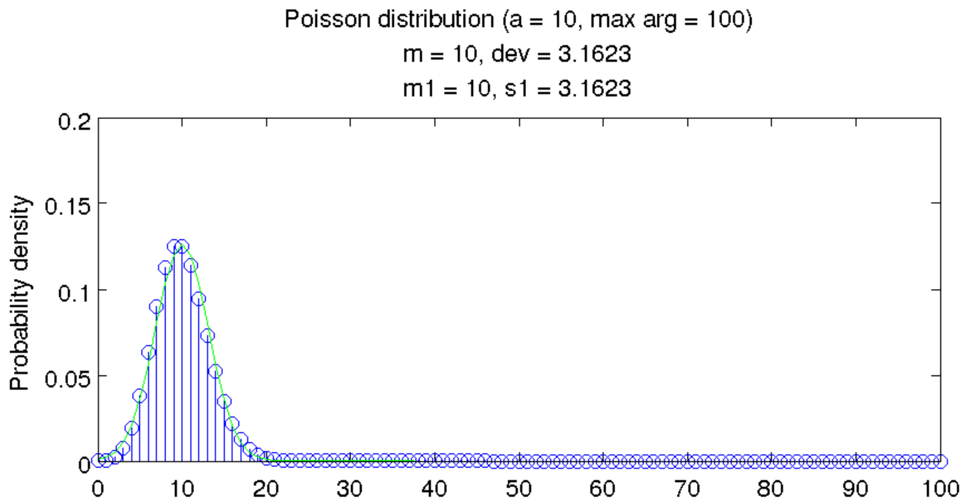


Figure 3: N(3,1)

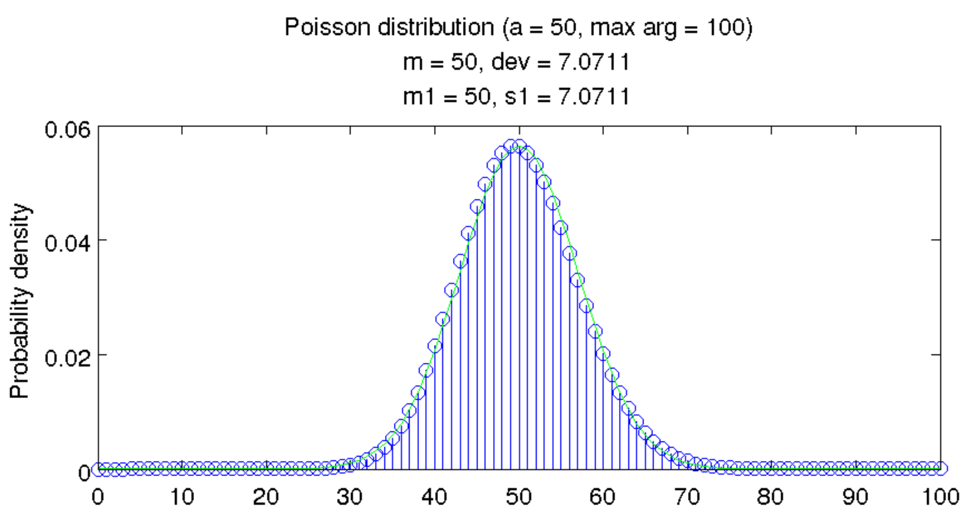
Нормальное распределение для различных значений мат. ожидания и дисперсии.

Распределение Пуассона

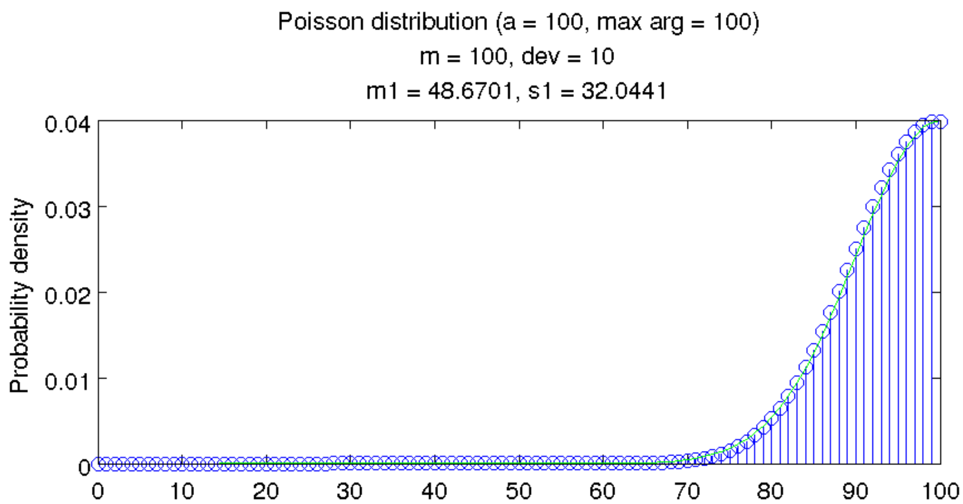




Poisson distribution (a = 10, max arg = 100)
m = 10, dev = 3.1623
m1 = 10, s1 = 3.1623
Probability density
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100



Poisson distribution (a = 50, max arg = 100)
m = 50, dev = 7.0711
m1 = 50, s1 = 7.0711
Probability density
0.06
0.04
0.02
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

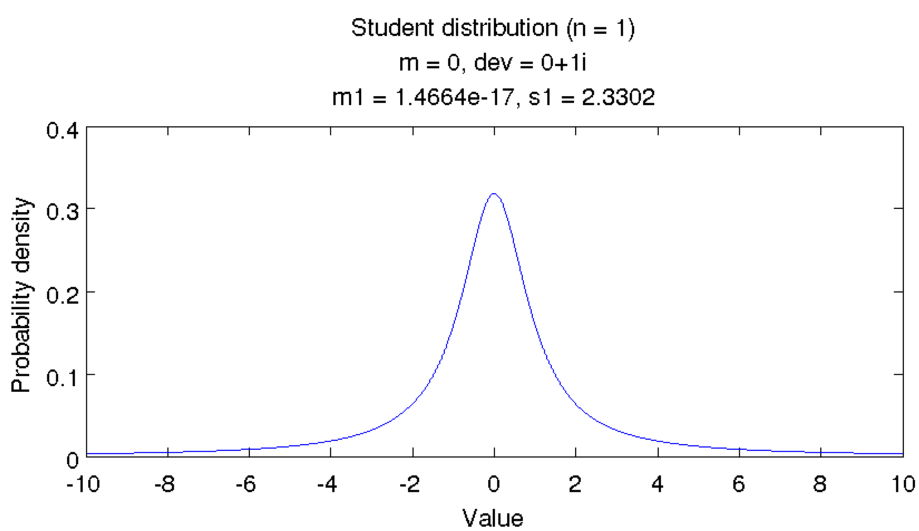


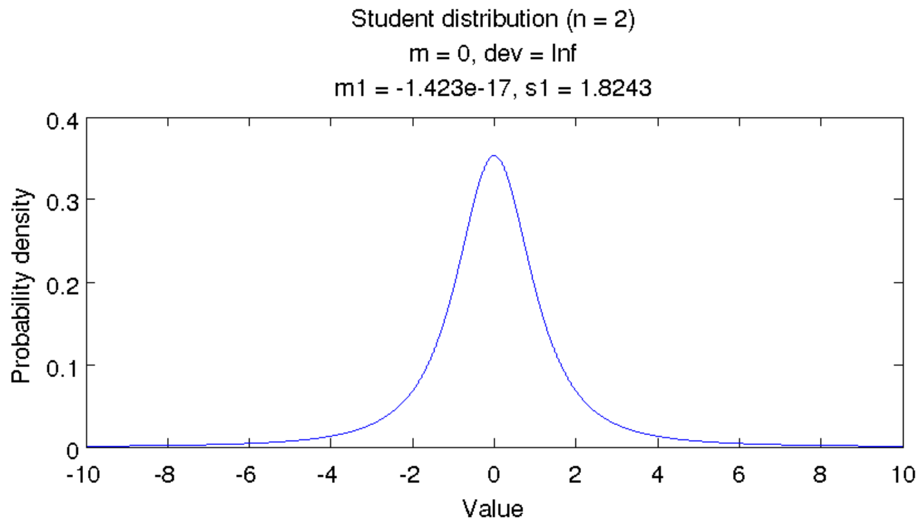
Вывод

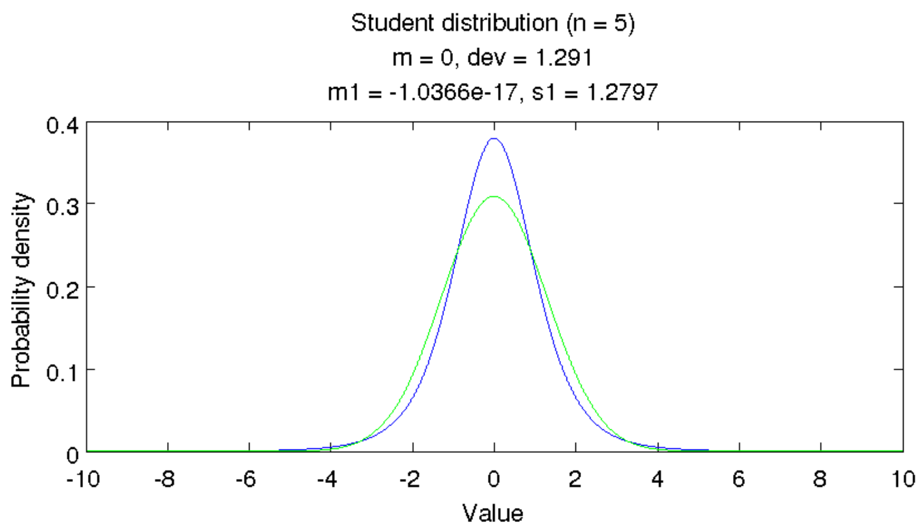
Распределение Пуассона $P(\lambda)$ имеет мат. ожидание и дисперсию λ (поэтому с увеличением λ увеличивается и "ширина" распределения, и как следствие уменьшение "высоты"). Распределение визуально очень схоже с нормальным начиная с довольно малых значений λ.

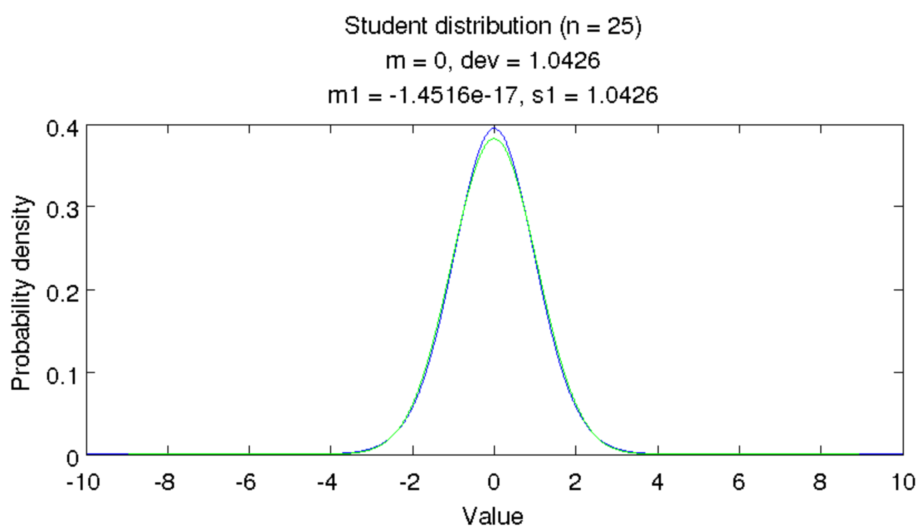
Распределение Стьюдента

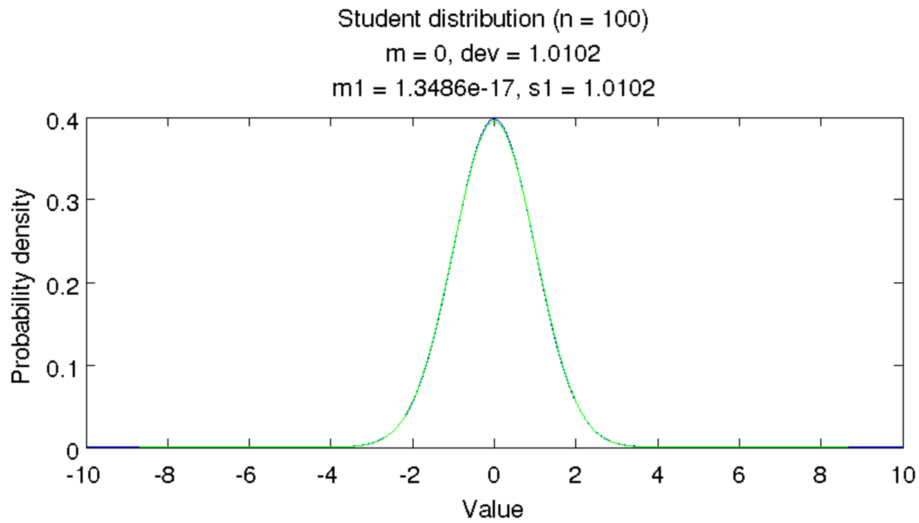
Распределение Стьюдента с n степенями свободы получается как $\frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_n^2}}$, где Y_n это независимые нормальные распределения. Мат ожидание 0, $n > 1$, дисперсия $n/(n-2)$, $n > 2$




Student distribution (n = 2)
m = 0, dev = Inf
m1 = -1.423e-17, s1 = 1.8243
Probability density
Value


Student distribution (n = 5)
m = 0, dev = 1.291
m1 = -1.0366e-17, s1 = 1.2797
Probability density
Value


Student distribution (n = 25)
m = 0, dev = 1.0426
m1 = -1.4516e-17, s1 = 1.0426
Probability density
Value



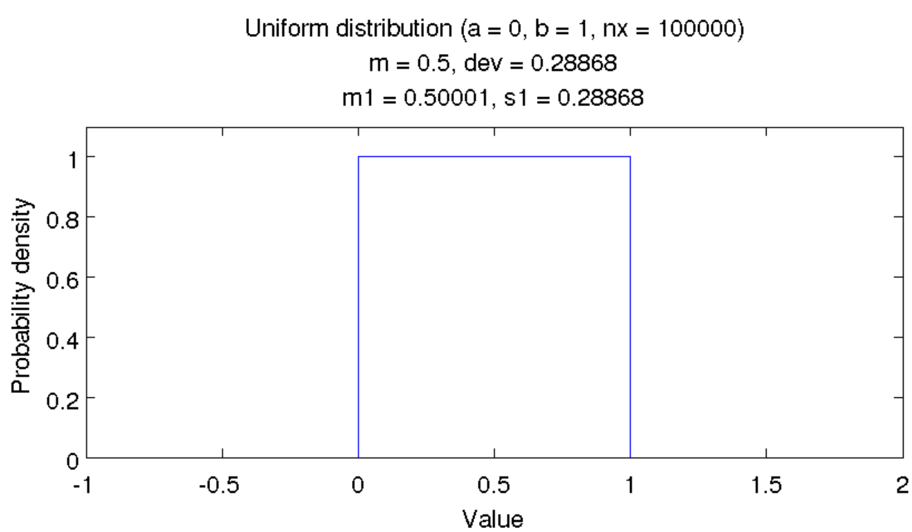
Вывод

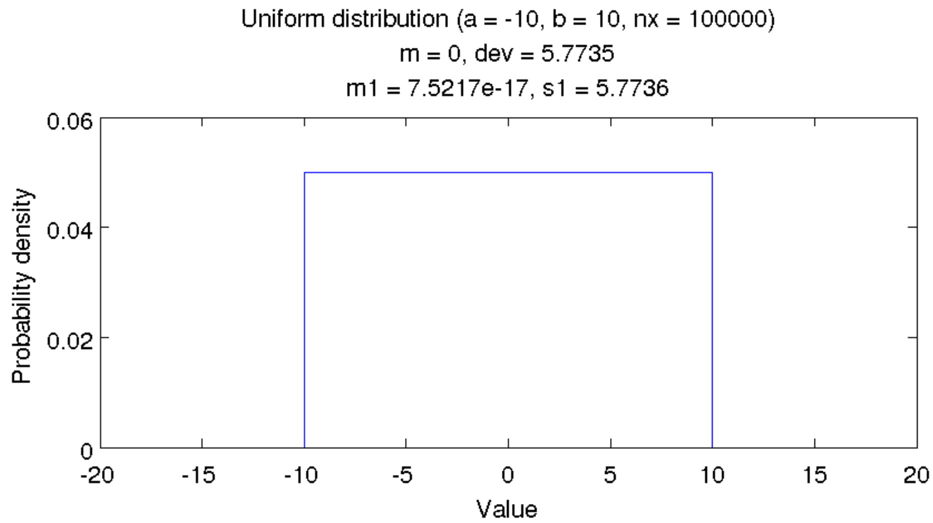
Распределение симметрично, дисперсия стремится к 1 и как следствие распределение стремится к нормальному с увеличением n. При $n = 1, 2$ формулы для дисперсии дают заведомо "странные" результаты (корень из -1 в первом случае и деление на ноль во втором).

Равномерное распределение

Случайная величина может принимать с равной вероятностью $(\frac{1}{b-a})$ любое значение в отрезке $[a, b]$ и вне его вероятность 0.

Мат. ожидание $\frac{a+b}{2}$, дисперсия $\frac{(a-b)^2}{12}$.

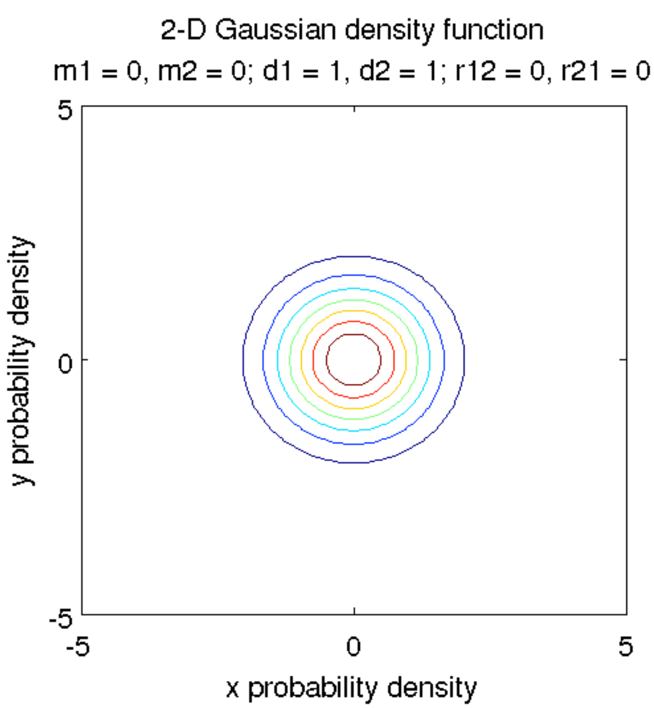


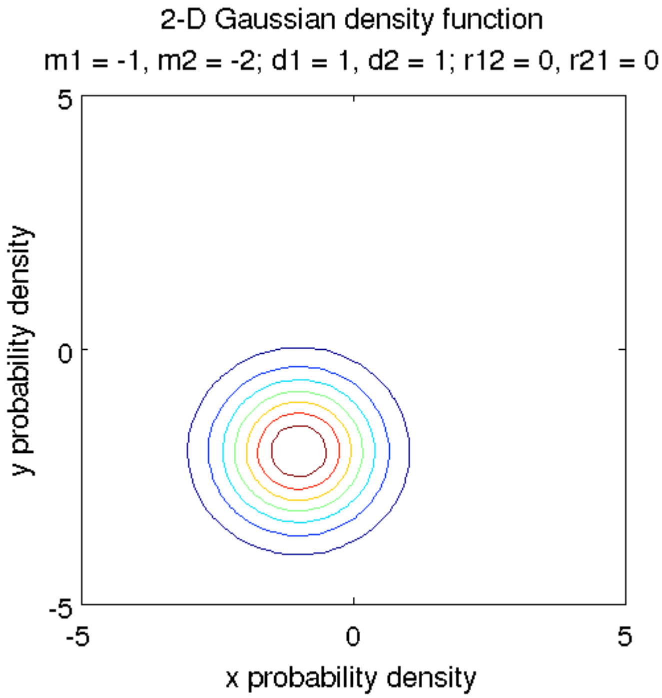


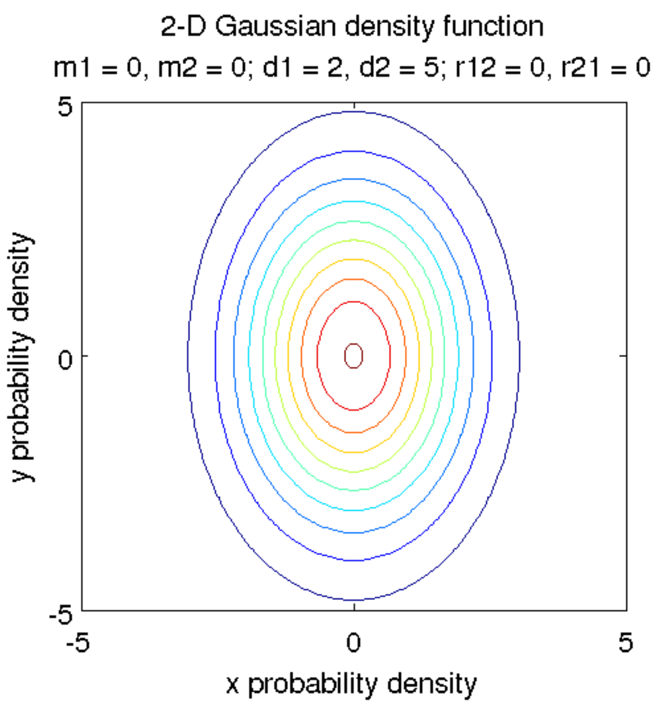
Двумерное нормальное распределение

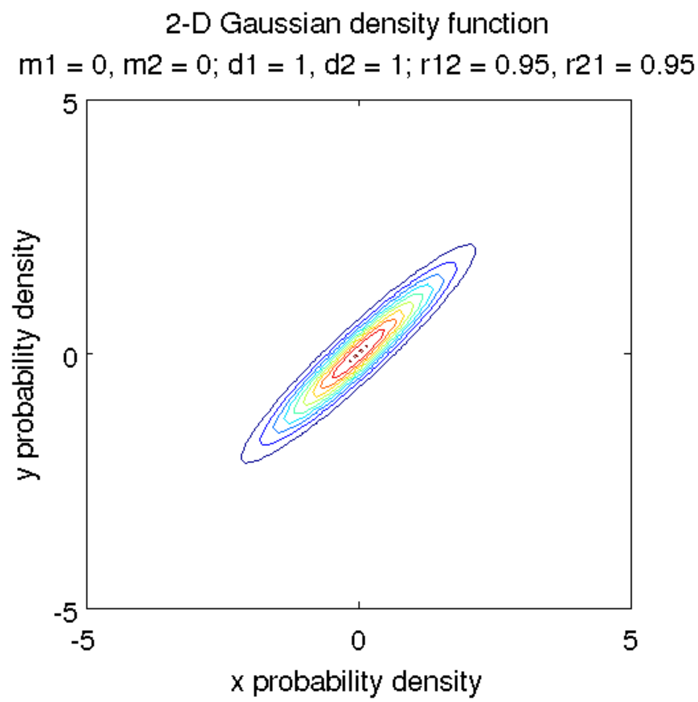
Распределение от переменных x и y называется нормальным, если для каждого фиксированного значения одной переменной распределение соответствующего значения другой переменной будет нормальным.

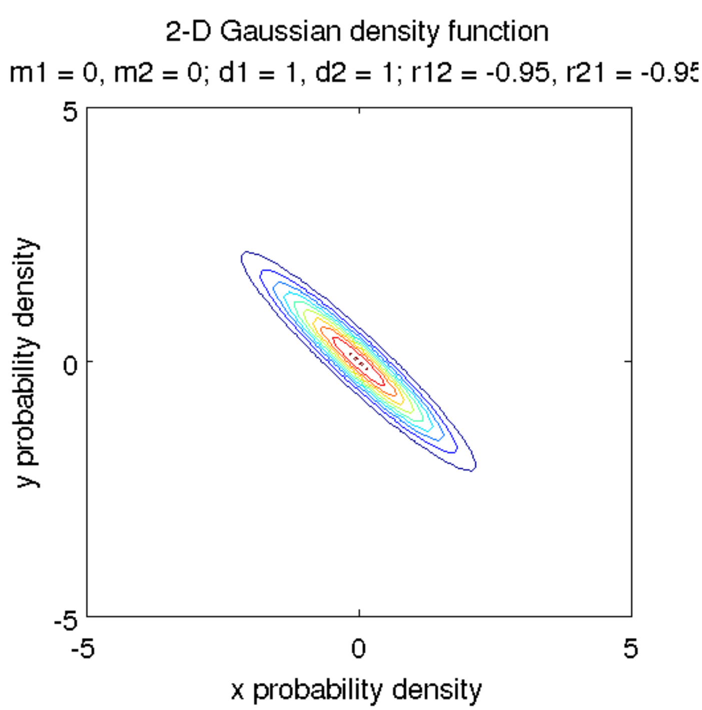
Матрица ковариации содержит дисперсии величин (диагональные элементы) и коэффициенты корреляции.

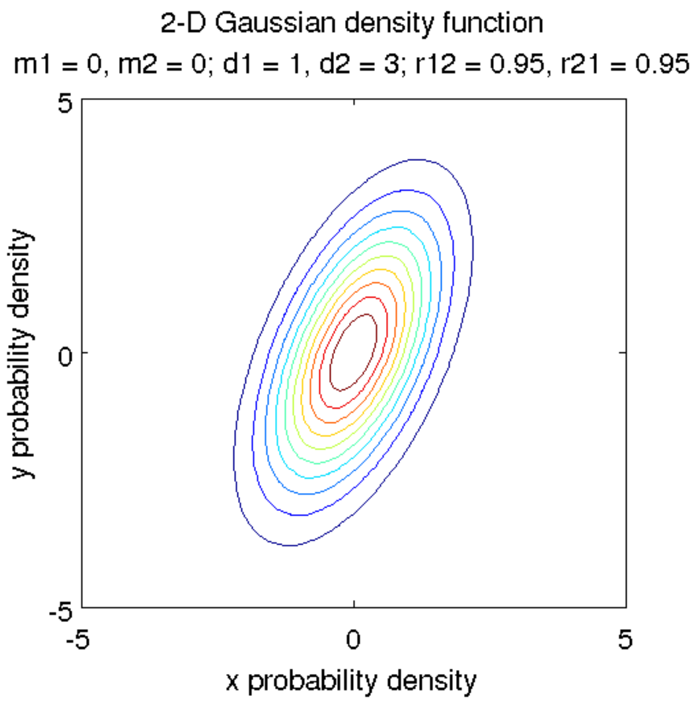



2-D Gaussian density function
m1 = -1, m2 = -2; d1 = 1, d2 = 1; r12 = 0, r21 = 0
5
0
-5
-5
0
5
x probability density
y probability density


2-D Gaussian density function
m1 = 0, m2 = 0; d1 = 2, d2 = 5; r12 = 0, r21 = 0
5
0
-5
-5
0
5
x probability density
y probability density


2-D Gaussian density function
m1 = 0, m2 = 0; d1 = 1, d2 = 1; r12 = 0.95, r21 = 0.95
5
0
-5
-5
0
5
y probability density
x probability density


2-D Gaussian density function
m1 = 0, m2 = 0; d1 = 1, d2 = 1; r12 = -0.95, r21 = -0.95
5
0
-5
-5
0
5
y probability density
x probability density



Вывод

Изменение мат. ожидания просто смещает всю картину так, что максимум будет находиться в точке с координатами с соответствующими значениям мат. ожидания. При корреляции 0, величина дисперсии будет увеличивать “ширину” распределения соответствующей координаты независимо от другой. Положительная корреляция “вытягивает” распределение при $d1 = d2$ вдоль прямой $y = x$, а отрицательная вдоль $y = -x$. В случае $d1 \neq d2$ распределение “вытянуто” вдоль прямой, угол между которой меньше с той осью, на которой больше дисперсия.