

Федеральная целевая программа “Интеграция”

Санкт-Петербургский государственный университет

В. Н. Троян, Ю. В. Киселев

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ОБРАБОТКИ И
ИНТЕРПРЕТАЦИИ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ**

Санкт-Петербург
1999

СЕРИЯ УЧЕБНИКОВ
ПО ПРЯМЫМ И ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ
ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
СЕЙСМИЧЕСКИХ И АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

УДК 550.834
ББК 26.2:22.172
Т70

Р е ц е н з е н т ы: д-р физ.-мат. наук проф. П.В.Крауклис
(С.-Петербург. отд-е Матем. ин-та им. В.А.Стеклова РАН)
д-р тех. наук проф. А.А.Молчанов (С.-Петербург. горн. ин-т)

Троян В.Н., Киселев Ю.В.

Т70 Статистические методы обработки и интерпретации
геофизических данных: Учебник. — СПб.: Изд-во С.-Петербург.
ун-та, 2000. — 578 с.
ISBN 5-288-02444-8

Предлагаемый учебник основан на курсах лекций “Статистические методы обработки геофизических данных” и “Обратные задачи геофизики”, читаемых авторами магистрантам и аспирантам кафедры физики Земли на физическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета в течение последних десяти лет.

Рассмотрен широкий круг проблем, связанных с обработкой геофизических данных. Для удобства читателя даны введения в теорию вероятностей, математическую статистику, методы решения прямых геофизических задач.

Учебник рассчитан на студентов, магистрантов и аспирантов геофизических специальностей. Однако он может быть полезен студентам и аспирантам других специальностей, которые связаны с анализом и обработкой сигналов любой физической природы (радиофизика, оптика, астрофизика, физическая медицина и др.).

ББК 26.2:22.172

*Издание осуществлено при финансовой поддержке
Федеральной целевой программы “Государственная поддержка
интеграции высшего образования и фундаментальной науки
на 1997 – 2000 годы”*

ISBN 5-288-02444-8

© В.Н.Троян, Ю.В.Киселев, 2000
© Центр “Интеграция”, 2000

aaa

Оглавление

Предисловие	19
1. Основные понятия теории вероятностей	25
1.1. Определение вероятности	25
1.1.1. Пространство элементарных событий	25
1.1.2. Вероятностная модель с конечным числом исходов	29
1.1.3. Частотное определение вероятности	30
1.1.4. Классическое определение вероятности	30
1.1.5. Геометрическое определение вероятности	31
1.1.6. Задачи	31
1.2. Основные свойства вероятности	33
1.2.1. Сложение вероятностей	33
1.2.2. Зависимые и независимые события	35
1.2.3. Формула Байеса и формула полной вероятности . .	37
1.2.4. Задачи	37
1.3. Функции распределения	39
1.3.1. Случайные величины	39
1.3.2. Функция распределения	40
1.3.3. Функция плотности распределения вероятностей .	41
1.3.4. Закон распределения функции случайного аргумента	43
1.3.5. Случайные векторы	44
1.3.6. Маргинальные и условные распределения	46
1.3.7. Закон распределения двух случайных величин . .	47
1.3.8. Задачи	51
1.4. Числовые характеристики распределений вероятностей . .	52
1.4.1. Математическое ожидание	53
1.4.2. Дисперсия и коэффициент корреляции	54
1.4.3. Квантили	57

1.4.4.	Характеристики плотности распределения вероятностей	58
1.4.5.	Задачи	61
1.5.	Характеристические и производящие функции	62
1.5.1.	Производящие функции моментов	64
1.5.2.	Производящая функция вероятностей	65
1.5.3.	Семиинварианты, или кумулянты	65
1.5.4.	Задачи	66
1.6.	Предельные теоремы теории вероятностей	67
1.6.1.	Сходимость по вероятности	67
1.6.2.	Неравенство Чебышева	68
1.6.3.	Закон больших чисел (теорема Чебышева)	68
1.6.4.	Обобщенная теорема Чебышева	70
1.6.5.	Теорема Маркова	70
1.6.6.	Теорема Бернулли	71
1.6.7.	Теорема Пуассона	71
1.6.8.	Центральная предельная теорема	71
1.6.9.	Задачи	73
1.7.	Дискретные функции распределения	74
1.7.1.	Биномиальное распределение	74
1.7.2.	Распределение Пуассона	76
1.7.3.	Геометрическое распределение	78
1.7.4.	Задачи	79
1.8.	Непрерывные распределения	81
1.8.1.	Нормальное одномерное распределение	81
1.8.2.	Многомерное нормальное распределение	84
1.8.3.	Равномерное распределение	88
1.8.4.	Распределение χ^2	89
1.8.5.	Распределение Стьюдента (t -распределение)	91
1.8.6.	Распределение Фишера и Z -распределение	92
1.8.7.	Треугольное распределение	93
1.8.8.	Бета-распределение	94
1.8.9.	Экспоненциальное распределение	94
1.8.10.	Распределение Лапласа	95
1.8.11.	Распределение Коши	96
1.8.12.	Логарифмически нормальное распределение	97
1.8.13.	Значение нормального распределения	97
1.8.14.	Доверительные интервалы	98
1.8.15.	Задачи	101
1.9.	Информация и энтропия	102

1.9.1.	Энтропия множества дискретных состояний системы	102
1.9.2.	Энтропия сложной системы	103
1.9.3.	Информация Шеннона (дискретный случай)	105
1.9.4.	Энтропия и информация для систем с непрерывным множеством состояний	107
1.9.5.	Информация Фишера	112
1.9.6.	Задачи	115
1.10.	Случайные функции и их свойства	116
1.10.1.	Свойства случайных функций	119
1.10.2.	Свойства корреляционной функции	121
1.10.3.	Действие линейного оператора на случайную функ- цию	122
1.10.4.	Взаимная корреляционная функция связи	123
1.10.5.	Теорема Винера–Хинчина и спектр мощности	124
1.10.6.	Определение оценок характеристик случайных величин	127
2.	Элементы математической статистики	129
2.1.	Основные понятия теории решений	130
2.1.1.	Класс распределений статистической задачи	132
2.1.2.	Структура пространства решений и функция потерь	132
2.1.3.	Решающее правило	136
2.1.4.	Достаточные статистики	139
2.2.	Свойства оценок	140
2.2.1.	Состоятельность	141
2.2.2.	Смещение	141
2.2.3.	Неравенство Рао–Крамера. Эффективность	143
2.2.4.	Достаточность	147
2.2.5.	Асимптотическая нормальность	147
2.2.6.	Устойчивость	149
3.	Модели экспериментального материала	150
3.1.	Аддитивные модели	151
3.2.	Модели количественной интерпретации	152
3.3.	Регрессионная модель	154
3.4.	Модели качественной интерпретации	156
3.5.	Модели качественно-количественной интерпретации	158
3.6.	Случайная компонента модели и ее свойства	159
3.7.	Модель со случайными параметрами	165
3.8.	Учет априорной информации	166

4. Функциональные связи полей зондирующих сигналов и параметров среды	169
4.1. Сейсмология и сейсморазведка	169
4.2. Акустика океана	179
4.3. Волновые электромагнитные поля в задачах геоэлектрики и зондирования ионосферы	184
4.4. Зондирование атмосферы	191
5. Лучевая теория распространения волновых полей	194
5.1. Основы лучевой теории	194
5.2. Лучевая аппроксимация решения скалярного волнового уравнения	198
5.3. Коротковолновая асимптотика решения одномерного уравнения Гельмгольца (Метод ВКБ)	206
5.4. Элементы лучевой теории упругих волн	209
5.5. Лучевое описание почти стратифицированной среды	210
5.6. Поверхностные волны в вертикально-неоднородной среде .	217
5.7. Лучевое приближение электромагнитных полей	221
5.8. Постановка задачи кинематической лучевой томографии .	225
6. Методы оценивания параметров геофизических объектов	230
6.1. Метод моментов	230
6.2. Метод максимального правдоподобия	231
6.3. Метод Ньютона–Лекама	233
6.4. Метод наименьших квадратов	236
6.5. МНК – нелинейный случай	238
6.6. МНК – ортогональные полиномы (полиномы Чебышева) .	239
6.7. МНК при наличии линейных связей	242
6.8. Метод линейного оценивания в случае нестационарной модели	244
6.9. Критерий Байеса и метод статистической регуляризации .	246
6.10. Критерий максимума апостериорной вероятности	247
6.11. Рекуррентный алгоритм (МНК)	250
6.12. Сингулярный анализ и метод наименьших квадратов	251
6.12.1. Матрица разрешения	258
6.13. Метод наименьших модулей	259
6.14. Робастные методы оценивания	261
6.14.1. Алгоритм репараметризации	262
6.14.2. Алгоритм Хьюбера	264
6.14.3. Алгоритм Эндрюса	264
6.15. Интервальное оценивание	267

6.16. Метод Бейкуса–Гильберта для решения обратных линей- ных задач	270
6.17. Генетический алгоритм	273
6.17.1. Кодирование	274
6.17.2. Отбор	275
6.17.3. Скрещивание	275
6.17.4. Мутация	277
6.17.5. Выбор	277
7. Статистические критерии выбора модели	280
7.1. Проверка параметрических гипотез	280
7.2. Критерий отношения апостериорных вероятностей	282
7.3. Разрешающая способность приема сигналов	287
7.4. Информационный критерий выбора модели	290
7.5. Метод разделения интерферирующих сигналов	294
8. Алгоритмы аппроксимации геофизической информации	300
8.1. Алгоритм одномерной аппроксимации кубическими сплайнами	300
8.2. Периодические и параметрические сплайн-функции	308
8.3. Применение сплайн-функций для сглаживания гистограмм	312
8.4. Алгоритмы аппроксимации сейсмического горизонта с уче- том скважинных наблюдений	314
8.4.1. Марковский тип корреляционной связи по горизонту и отсутствие корреляции между горизонтами	316
8.4.2. Марковский тип корреляционной связи между горизонтами и отсутствие корреляции по горизонту	317
8.4.3. Проверка соответствия сейсмических наблюдений скважинным данным о глубине горизонта	317
8.4.4. Учет случайного характера измерений глубины по скважинным данным	320
8.4.5. Применение метода апостериорной вероятности к аппроксимации сейсмического горизонта	322
8.4.6. Случай некоррелированных компонент случайных векторов	324

8.4.7. Аппроксимация параметров аппроксимирующей плоскости ортогональными полиномами	327
8.4.8. Численные иллюстрации применения алгоритмов аппроксимации	328
8.5. Алгоритм аппроксимации пластовой скорости по данным площадных сейсмических наблюдений с учетом скважинных измерений	332
9. Элементы математического аппарата в терминах функционального анализа для решения задач оценивания параметров геофизических объектов	338
9.1. Элементы прикладного функционального анализа	339
9.2. Некорректно поставленные задачи	363
9.3. Статистические критерии получения оценок в терминах функционального анализа	372
9.4. Элементы математического планирования эксперимента .	395
10. Построение и интерпретация томографических функционалов	399
10.1. Построение линейных функционалов измерений	400
10.2. Томографический функционал	404
10.3. Примеры построения и интерпретации томографических функционалов	406
10.3.1. Скалярное волновое уравнение	406
10.3.2. Уравнение Ламе для однородной изотропной безграничной среды	407
10.3.3. Уравнение переноса стационарного зондирующего сигнала	417
10.3.4. Уравнение диффузии	418
10.4. Лучевые томографические функционалы в динамико-кинематической интерпретации данных дистанционного зондирования	419
10.5. Построение падающего и обращенного полей в слоистой опорной среде	423
11. Томографические методы восстановления изображения среды	427
11.1. Элементы линейной томографии	428
11.1.1. Замена переменных	429
11.1.2. Дифференцирование обобщенных функций	430

11.2. Применение инверсии Радона в дифракционной томографии	436
11.3. Принципы построения алгоритмов реконструктивной томографии	442
11.4. Ошибки восстановления, разрешающая длина и метод Бейкуса–Гильберта	452
11.5. Обратное проецирование в дифракционной томографии .	459
11.6. Методы регуляризации в задачах трехмерной лучевой томографии	469
11.7. Построение функций Грина для некоторых типов зондиру- ющих сигналов	473
11.7.1. Функция Грина для волнового уравнения	474
11.7.2. Функция Грина для “уравнения Пуассона”	477
11.7.3. Функция Грина для уравнения Ламе в однородной изотропной неограниченной среде	478
11.7.4. Функция Грина для уравнения диффузии	483
11.7.5. Функция Грина для операторного уравнения второго рода	484
11.8. Примеры восстановления параметров локальных неодно- родностей методом дифракционной томографии	484
11.8.1. Оценка разрешающей способности	485
11.8.2. Оценка точности восстановления параметров неоднородностей	488
12. Методы преобразования и анализа геофизических сигна- лов	497
12.1. Преобразование Фурье	497
12.1.1. Ряды Фурье	497
12.1.2. Интеграл Фурье	499
12.2. Преобразование Лапласа	501
12.3. Z-преобразование	502
12.4. Преобразование Радона сейсмограмм	503
12.5. Преобразование Гильберта и аналитический сигнал	506
12.6. Кепстральное преобразование	508
12.7. Биспектральный анализ	509
12.8. Фильтр Калмана	511
12.9. Многофакторный анализ временных рядов	514
12.10.Фильтр Винера	520
12.11.Фильтр ошибки предсказания и принцип максимальной энтропии	522
Литература	529

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Компьютерные упражнения	539
A.1. Статистические методы	540
A.1.1. Численное моделирование случайных величин	540
A.1.2. Построение гистограмм	541
A.1.3. Описание случайных переменных	542
A.1.4. Генераторы случайных чисел	549
A.1.5. Доверительные интервалы	551
A.1.6. Временные ряды	551
A.2. Преобразования	552
A.2.1. Преобразование Фурье	552
A.2.2. Простейшие сигналы и их спектральные характеристики	552
A.2.3. Многофакторный анализ	554
A.2.4. Кепстральное преобразование	558
A.3. Решение прямых и обратных задач	561
A.3.1. Моделирование гравитационного поля	561
A.3.2. Моделирование магнитного поля	562
A.3.3. Моделирование сейсмического поля	562
A.3.4. Деконволюция с использованием фильтра Винера .	565
A.3.5. Количественная интерпретация	567
A.3.6. Качественная интерпретация	569
A.3.7. Дифракционная томография	571

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблицы	575
----------------	------------

Summary	577
----------------	------------

Contents

Introduction	19
1. Basic concepts of the theory of probabilities	25
1.1. The definition of probability	25
1.1.1. Space of elementary events	25
1.1.2. Probability model with a finite number of outcomes	29
1.1.3. Relative-frequency definition of probability	30
1.1.4. Classical definition of probability	30
1.1.5. Geometrical definition of probability	31
1.1.6. Exercises	31
1.2. The basic properties of probability	33
1.2.1. Addition of probabilities	33
1.2.2. Dependent and independent events	35
1.2.3. The Bayes formula and formula of complete probability . . .	37
1.2.4. Exercises	37
1.3. Distribution functions	39
1.3.1. Random values	39
1.3.2. Distribution function	40
1.3.3. Density function	41
1.3.4. The distribution function for a function of random argument	43
1.3.5. Random vectors	44
1.3.6. Marginal and conditional distributions	46
1.3.7. Joint distribution of two random values	47
1.3.8. Exercises	51
1.4. Numerical characteristics of distributions	52
1.4.1. Mathematical expectation	53
1.4.2. Variance and correlation coefficient	54
1.4.3. Quantiles	57
1.4.4. Characteristics of the density function	58
1.4.5. Exercises	61
1.5. Characteristic and generating functions	62
1.5.1. Moment generating functions	64
1.5.2. Probability generating function	65

1.5.3.	Semi-invariants or cumulants	65
1.5.4.	Exercises	66
1.6.	The limit theorems	67
1.6.1.	Convergence in probability	67
1.6.2.	Chebyshev inequality	68
1.6.3.	Chebyshev theorem	68
1.6.4.	Generalized Chebyshev theorem	70
1.6.5.	Markov theorem	70
1.6.6.	Bernoulli theorem	71
1.6.7.	Poisson theorem	71
1.6.8.	The central-limit theorem	71
1.6.9.	Exercises	73
1.7.	Discrete distribution functions	74
1.7.1.	Binomial distribution	74
1.7.2.	Poisson distribution	76
1.7.3.	Geometrical distribution	78
1.7.4.	Exercises	79
1.8.	Continuous distributions	81
1.8.1.	Univariate normal distribution	81
1.8.2.	Multivariate normal distribution	84
1.8.3.	Uniform distribution	88
1.8.4.	χ^2 -distribution	89
1.8.5.	Student's distribution	91
1.8.6.	Fisher distribution and Z-distribution	92
1.8.7.	Triangular distribution	93
1.8.8.	Beta distribution	94
1.8.9.	Exponential distribution	94
1.8.10.	Laplace distribution	95
1.8.11.	Cauchy distribution	96
1.8.12.	Logarithmic normal distribution	97
1.8.13.	Significance of the normal distribution	97
1.8.14.	Confidence intervals	98
1.8.15.	Exercises	101
1.9.	Information and entropy	102
1.9.1.	Entropy of the set of discrete states of system	102
1.9.2.	Entropy of complex system	103
1.9.3.	Shannon information (discrete case)	105
1.9.4.	Entropy and information for system with continuous set of states	107
1.9.5.	Fisher information	112
1.9.6.	Exercises	115
1.10.	Random functions and its properties	116
1.10.1.	Properties of random functions	119
1.10.2.	Properties of correlation function	121
1.10.3.	Action of the linear operator on a random function	122
1.10.4.	Cross correlation function	123
1.10.5.	Wiener-Kinchin theorem and power spectrum	124
1.10.6.	Definition of estimates for characteristics of random values .	127

2. Elements of mathematical statistics	129
2.1. Basic concepts of the decision theory	130
2.1.1. Class of distributions of a statistical problem	132
2.1.2. Structure of the decision space and loss function	132
2.1.3. Decision rule	136
2.1.4. Sufficient statistics	139
2.2. Properties of estimates	140
2.2.1. Consistency	141
2.2.2. Bias	141
2.2.3. Rao-Cramer inequality. Efficiency	143
2.2.4. Sufficiency	147
2.2.5. Asymptotic normality	147
2.2.6. Robust estimator	149
3. Models of measurement data	150
3.1. Additive models	151
3.2. Models of quantitative interpretation	152
3.3. Regression model	154
3.4. Models of qualitative interpretation	156
3.5. Models of qualitative-quantitative interpretation	158
3.6. Random component of model and its properties	159
3.7. Model with random parameters	165
3.8. A priori information about field of parameters	166
4. Functional connections of the sounding signals and parameters of medium	169
4.1. Seismology and seismic exploration	169
4.2. Acoustics of ocean	179
4.3. Electromagnetic wave fields in problems of the geoelectric investigation and sounding of the ionosphere	184
4.4. Sounding of the atmosphere	191
5. The ray method of propagation of the wave fields	194
5.1. Basis of the ray method	194
5.2. The ray approximation of the solution of the scalar wave equation .	198
5.3. Short-wave asymptotics of the solution of the 1-D Helmholtz equation	206
5.4. Elements of the ray theory of elastic waves	209
5.5. Ray description of almost stratified medium	210
5.6. Surface waves in a vertical-nonuniform medium	217
5.7. Ray approximation of electromagnetic fields	221
5.8. Formulation of a problem of the kinematic ray tomography	225
6. Methods for estimation of the parameters of geophysical objects	230
6.1. Moments method	230
6.2. Maximum likelihood method	231
6.3. Newton-Lecame method	233
6.4. Method of least squares (MLS)	236
6.5. MLS — nonlinear case	238

6.6. MLS — orthogonal polynomials (Chebyshev polynomials)	239
6.7. MLS with linear constraints	242
6.8. Method of a linear estimation in case of non-stationary model	244
6.9. The Bayes criterion and method of the statistical regularization	246
6.10. Criterion of a maximum of a posteriori probability	247
6.11. The recursion algorithm (case of MLS)	250
6.12. Singular analysis and method of least squares	251
6.12.1. Resolution matrix	258
6.13. Method of the least modules	259
6.14. Robust estimator	261
6.14.1. Reparametrization algorithm	262
6.14.2. Huber algorithm	264
6.14.3. Andrews algorithm	264
6.15. Interval estimation	267
6.16. The method of Backus and Gilbert for the solution of the linear inverse problems	270
6.17. Genetic algorithm	273
6.17.1. Coding	274
6.17.2. Selection	275
6.17.3. Crossover	275
6.17.4. Mutation	277
6.17.5. Choice	277
7. Statistical criteria for choice of model	280
7.1. Parametric hypotheses test	280
7.2. Criterion of a posteriori probability ratio	282
7.3. The signal resolution problem	287
7.4. Information criteria for choice of model	290
7.5. Method of separation of interfering signals	294
8. Algorithms for approximation of the geophysical data	300
8.1. Algorithms of one-dimensional approximation using cubic spline . .	300
8.2. Periodic and parametric splines	308
8.3. Application of splines for smoothing of histograms	312
8.4. Algorithms of approximation of seismic horizon with the account of a well observations	314
8.4.1. Markovian type of correlation along horizon with absence of a correlation between horizons	316
8.4.2. Markovian type of correlation between horizons with absence of a correlation along horizon	317
8.4.3. Checkout of correspondence of seismic observations about the depth of horizon to the data obtained in wells	317
8.4.4. The account of random character of measurements of depth using well observations	320
8.4.5. Applying of a method of a posterior probability to approximation of seismic horizon	322
8.4.6. Case of uncorrelated components of random vectors	324
8.4.7. Approximation of parameters of an approximate plane by orthogonal polynomials	327

8.4.8. Numerical illustrations of applying of algorithms of approximation	328
8.5. Algorithm for approximation of bed velocity	332
9. Elements of the mathematical means in the terms of the functional analysis	338
9.1. Elements of the applied functional analysis	339
9.2. Ill-posed problems	363
9.3. Statistical estimation in the terms of the functional analysis	372
9.4. Elements of the mathematical designing of experiment	395
10. A construction and interpretation of tomography functionals	399
10.1. A construction of the linear functionals of measurings	400
10.2. Tomography functional	404
10.3. Examples of the construction and interpretation of the tomography functionals	406
10.3.1. The scalar wave equation	406
10.3.2. The Lame equation for homogeneous isotropic uniform medium	407
10.3.3. The transport equation for a stationary sounding signal	417
10.3.4. The diffusion equation	418
10.4. The ray tomography functionals in dynamic and cinematic interpretation of the remote sounding	419
10.5. A construction of incident and inverted fields in a layered reference medium	423
11. The tomography methods of restoration of an image of medium	427
11.1. Elements of the linear tomography	428
11.1.1. Change of variables	429
11.1.2. Differentiation of generalized functions	430
11.2. Application of the Radon inversion in diffraction tomography	436
11.3. Principles of construction of algorithms of the reconstruction tomography	442
11.4. Error of restoration, resolution length and the Backus- Gilbert method	452
11.5. Back projection in the diffraction tomography	459
11.6. Regularization in problems of 3-D ray tomography	469
11.7. Construction of the source functions for some types of sounding signals	473
11.7.1. Source function for the wave equation	474
11.7.2. Source function for “Poisson equation”	477
11.7.3. Source function for the Lame equation in homogeneous isotropic unbounded medium	478
11.7.4. Source function for the diffusion equation	483
11.7.5. Source function for the operator equations of the second kind	484
11.8. Examples of restoration of parameters of local inhomogeneities by the diffraction tomography method	484
11.8.1. Estimation of resolution	485

11.8.2. Estimation of accuracy of restoration of parameters of inhomogeneities	488	
12. Methods of processing and analysis of geophysical signals	497	
12.1. Fourier transform	497	
12.1.1. Fourier series	497	
12.1.2. Fourier integral	499	
12.2. Laplace transform	501	
12.3. Z-transform	502	
12.4. The Radon transform of seismograms	503	
12.5. Hilbert transform and analytical signal	506	
12.6. Cepstral transform	508	
12.7. Bispectra analysis	509	
12.8. Kalman filter	511	
12.9. Multifactor analysis of time series	514	
12.10. Wiener filter	520	
12.11. The error prediction filter and principle of the maximum entropy	522	
References	529	
APPENDIX A		
Computer exercises		539
A.1. Statistical methods and transforms	540	
A.1.1. Numerical simulation of random values	540	
A.1.2. Construction of histograms	541	
A.1.3. Description of random variables	542	
A.1.4. Generators of random numbers	549	
A.1.5. Confidence intervals	551	
A.1.6. Time series	551	
A.2. Transforms	552	
A.2.1. Fourier transform	552	
A.2.2. Simplest signals and their spectral characteristics	552	
A.2.3. Multifactor analysis	554	
A.2.4. Cepstral transformation	558	
A.3. Solution of direct and inverse problems	561	
A.3.1. Computing of a gravitational field	561	
A.3.2. Computing of a magnetic field	562	
A.3.3. Computing of a seismic field	562	
A.3.4. Deconvolution with use of the Wiener filter	565	
A.3.5. Quantitative interpretation	567	
A.3.6. Qualitative interpretation	569	
A.3.7. Diffraction tomography	571	
APPENDIX B		
Tables		575
Summary	577	

Предисловие

Изучение строения Земли и околоземного космического пространства требует одновременной обработки и интерпретации большого объема экспериментальных данных. Наличие случайной ошибки, которая неизбежна при измерениях, а также обнаруживается в волновых полях случайных помех, искажая полезные сигналы, приводит к необходимости использования вероятностно-статистических методов для анализа и интерпретации геофизической информации [34, 83, 91, 101, 105, 111]. В настоящее время широко используется цифровая регистрация геофизических полей и обработка данных на компьютерах с последующей интерпретацией. Формализация процесса интерпретации требует задания связи измеряемого поля с параметрами и состоянием изучаемого объекта, которую принято называть моделью экспериментального материала. Такая модель в концентрированном виде включает схему эксперимента, решение прямой задачи (физический закон, связывающий наблюдаемое геофизическое поле с параметрами и состоянием изучаемой среды) и наличие случайной функции расхождения реального и “идеализированного” полей (решение прямой задачи). Основная цель обработки и интерпретации геофизических данных состоит в восстановлении искомых параметров и состояний среды. Для решения этой сложной задачи необходимо использовать максимум априорной информации о среде, полученной на основе предыдущих исследований. Системы обработки и интерпретации геофизических данных на практике, как правило, являются интерактивными, что позволяет наряду со строгими математическими методами и процедурами в качестве неформализованного элемента включить интуицию и опыт геофизика-исследователя.

Предлагаемый учебник базируется на курсах лекций “Статистические методы обработки геофизических данных” и “Обратные задачи геофизики”, читаемых авторами магистрантам и аспирантам кафедры физики Земли на физическом факультете Санкт-Пе-

тербургского государственного университета в течение последних десяти лет.

В первой главе даются основные понятия теории вероятностей. Вводится пространство элементарных событий, а также частотное, классическое и геометрическое определение вероятности. Даётся формула полной вероятности и формула Байеса [29, 47, 46, 68]. Вводится функция распределения вероятностей и рассматриваются ее свойства [22, 68]. Подробно анализируются числовые характеристики распределения вероятностей: математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции, медиана, начальные и центральные моменты, коэффициент асимметрии и эксцесс. Рассматриваются характеристические функции и их свойства. Даются предельные теоремы теории вероятностей [29, 47]. Подробно анализируются различные виды распределений вероятностей: биномимальное, Пуассона, геометрическое, нормальное, равномерное, Стьюдента, Фишера, экспоненциальное, Лапласа, Коши, логнормальное, χ^2 -распределение и др. [68, 70]. Исследуются возможности их применения для описания геофизических полей. Вводится понятие энтропии и информации. Рассматривается информация Шеннона и информация Фишера; анализируются возможности их использования для описания качества интерпретации геофизических данных [70]. Приводятся свойства случайных функций. Вводятся автокорреляционные и взаимокорреляционные функции. Рассматривается связь автокорреляционной функции со спектром мощности процесса [68].

Вторая глава посвящена изложению основных элементов математической статистики. Представлены основные понятия теории решений: структура пространства решений, функция потерь, решающее правило и достаточные статистики. Подробно исследованы свойства оценок: состоятельность, смещение, эффективность, достаточность, нормальность, робастность. Рассмотрены примеры оценок точности и надежности интерпретации геофизических полей [37, 34, 47, 59, 68, 101, 105].

В третьей главе вводится понятие модели экспериментального материала как совокупности априорных представлений о связи наблюдаемого геофизического поля с состоянием и параметрами изучаемой среды и случайного поля расхождения. Отличительной чертой статистической теории интерпретации является допущение о случайности наблюдаемого геофизического поля. В зависимости

от постановки задачи и цели интерпретации, модели экспериментального материала подразделяются на количественную, когда задача состоит в нахождении оценок искомых параметров среды, качественную, когда задача состоит в выборе состояния объекта (проверка гипотез) и качественно-количественную, когда одновременно находятся оценки параметров и выбирается состояние исследуемого объекта. Важными элементами при описании модели является задание свойств случайной компоненты и учет априорной информации о свойствах изучаемой среды [34, 91, 101].

Четвертая глава посвящена описанию функциональной связи зондирующих сигналов или геофизических полей с параметрами среды (примеры решения прямой задачи геофизики). Детально рассмотрены поля упругих волн, используемые для определения строения Земли в задачах сейсмологии и сейсморазведки. Представлены основные уравнения акустики, используемые при изучении океанической толщи и океанического осадочного чехла. Описана математическая модель распространения электромагнитных сигналов в земной коре и ионосфере. Представлено уравнение переноса для задач дистанционного зондирования атмосферы [1, 2, 5, 9, 24, 25, 48, 61–65, 123].

В пятой главе рассмотрены элементы лучевой теории распространения волновых полей. Приводится описание метода геометрической оптики [12, 13, 48, 123], который является коротковолновой асимптотикой поля в плавно-неоднородных, стационарных и слабо-консервативных средах: характерные неоднородности много больше длины волн. Даётся пространственно-временная аппроксимация решения скалярного волнового уравнения [13]. Представлена коротковолновая асимптотика решения однородного уравнения Гельмгольца (метод ВКБ). Рассмотрена лучевая теория распространения упругих волн в предположении более быстрого изменения характеристик волнового процесса в направлении нормали к фронту по сравнению с изменением характеристик среды [9]. Для описания распространения акустических волн в океане предлагается использовать лучевую аппроксимацию распространения в почти стратифицированной среде, т.е. в среде с плавным (по сравнению с глубиной) изменением скорости распространения сигнала в горизонтальной плоскости. Представлено лучевое описание поверхностных волн в вертикально-неоднородной среде. Приведенная лучевая аппроксимация распространения электромагнитных полей является

ся основой описания процессов распространения в неоднородных средах, а также имеет важное методологическое значение. На ее базе можно получить уравнение переноса и установить связь между статистическими характеристиками среды и параметрами феноменологической теории переноса электромагнитного излучения.

В шестой главе описываются методы оценивания параметров геофизических объектов [34, 59, 61, 83–101]. Представлены алгоритмы и примеры применения основных методов оценивания параметров, получивших широкое распространение при решении геофизических задач: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод Ньютона-Ле-Кама, различные модификации метода наименьших квадратов, критерий Байеса и метод статистической регуляризации, критерий максимума апостериорной вероятности, метод сингулярного анализа, метод наименьших модулей, робастные методы (репараметризации Хьюбера, Эндрюса), метод Бейкса-Гильберта, метод интервального оценивания и генетический алгоритм. Все представленные в этой главе методы могут быть использованы при решении задач количественной интерпретации.

В седьмой главе даны статистические критерии выбора модели, которые призваны решать задачи качественной интерпретации [34, 101]. Детально рассмотрена проблема проверки параметрических гипотез и критерий отношения апостериорных вероятностей. Особое внимание уделено исследованию разрешающей способности приема сигналов различной геофизической природы. Представлен информационный критерий выбора модели, базирующийся на методе максимального правдоподобия и информации Шеннона. Рассмотрена итерационная процедура оценки параметров интерферирующих сигналов с одновременным определением числа сигналов [114].

Восьмая глава посвящена задачам аппроксимации геофизических полей [101]. Представлены методы сплайн-аппроксимации, включая алгоритм одномерной аппроксимации кубическими сплайнами, периодические и параметрические сплайн-функции, применение сплайн-функций для сглаживания гистограмм, двумерные сплайны. Рассмотрены алгоритмы кусочно-полиномиальной аппроксимации сейсмического горизонта и скоростного закона с учетом скважинных наблюдений.

В девятой главе представлены элементы математического аппарата в терминах функционального анализа для решения задач оце-

нивания параметров геофизических объектов [83]. Кратко описаны основные понятия и соотношения прикладного функционального анализа, которые использованы в 10-й и 11-й главах. Даётся определение некорректно поставленных задач и обсуждаются способы их решения. Представлены некоторые статистические критерии в терминах функционального анализа. На базе введенных информационных мер предлагаются постановки задач математического планирования геофизического эксперимента: выбор частотного и временного интервалов измерений, выбор геометрии расстановки источников и приемников, а также их число.

Десятая глава посвящена проблеме построения и интерпретации томографических функционалов, которые имеют смысл функций влияния различных пространственных областей среды на отдельное измерение [83]. Норма томографического функционала определяется интенсивностью взаимодействия падающего и обращенного полей. Представлены примеры построения и интерпретации томографических функционалов для скалярного волнового уравнения, уравнения Ламе, для уравнения переноса стационарного зондирующего сигнала и для уравнения диффузии. Рассмотрено построение падающего и обращенного полей в слоистой опорной среде применительно к задачам распространения упругих, акустических и электромагнитных волн.

В одиннадцатой главе представлены томографические методы восстановления изображения среды [83]. Рассмотрено преобразование Радона, лежащее в основе классической лучевой томографии, для четно- и нечетно-мерных пространств. Показана возможность применения обратного преобразования Радона в задачах дифракционной томографии. Предложен алгоритм реконструктивной томографии на базе метода статистической регуляризации. Проведено сравнение этого метода с методом Бейкуса–Гильберта. Введенная мера информационной чувствительности поля наблюдений относительно линейного функционала параметров поля может служить эффективным инструментом выбора физически обоснованной модели. Представлен оригинальный алгоритм регуляризации в задачах трехмерной лучевой томографии.

Двенадцатая глава посвящена методам преобразования и анализа геофизических сигналов. Представлены традиционные преобразования, такие как преобразование Фурье, преобразование Лапласа, преобразование Радона и Гильберта применительно к анализу

зу сейсмограмм, так и сравнительно новые методы кепстрального и биспектрального анализа. Рассмотрены традиционные алгоритмы винеровской фильтрации, обратной фильтрации, динамической фильтрации (фильтр Калмана). Представлен оригинальный алгоритм факторного анализа, который можно успешно применять для поиска скрытых периодичностей и для широкого круга интерпретационных задач.

В приложении представлены задачи и компьютерные упражнения с описанием необходимых программ в системе МАТЛАБ. Выполнение этих компьютерных упражнений позволит читателю глубже понять содержание и возможности представленных в книге методов анализа и обработки геофизической информации.

Учебник рассчитан на студентов, магистрантов и аспирантов геофизических специальностей. Однако он может быть полезен для студентов и аспирантов других специальностей, которые связаны с анализом и обработкой сигналов любой физической природы (радиофизика, оптика, астрофизика, физическая медицина, и др.).

Мы благодарны Федору Марковичу Гольцману (к сожалению, недавно безвременно ушедшему от нас) — яркому ученому, идеологу статистической теории интерпретации [33], которая лежит в основе предлагаемой книги.

Авторы выражают благодарность Геннадию Антоновичу Рыжикову за плодотворное обсуждение материалов, вошедших в книгу, в том числе полученных совместно с ним и опубликованных в монографии [83] и ряде статей [73–82], а также Юрию Михайловичу Соколову, соавтору многих работ [101], результаты которых нашли отражение в книге.

Выход в свет этой книги стал возможен благодаря финансовой поддержке, полученной по проекту Федеральной целевой программы “Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 годы”, а также исследовательскому гранту РФФИ № 99-05-64127, гранту РФФИ по ведущей научной школе № 00-15-98555 и гранту Минобразования РФ № Е00-9.0-82.

Г л а в а 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предметом *теории вероятностей* является математический анализ *случайных событий*, которые при соблюдении заданных условий идеализированного эксперимента обладают статистической регулярностью (статистической устойчивостью частот).

Теория вероятностей строится дедуктивно на принятых аксиомах, и является базой для методов *математической статистики*, в основе которой лежит индуктивный метод принятия решения о свойствах объекта или гипотезы о природе изучаемого явления по данным, полученным в результате проведения эксперимента.

1.1. Определение вероятности

1.1.1. Пространство элементарных событий

Пусть в некотором опыте имеется конечное число допустимых исходов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Исходы $\omega_1, \dots, \omega_n$ принято называть *элементарными событиями*, а их совокупность

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

(конечным) *пространством элементарных событий* или *пространством исходов*.

Рассмотрим примеры описания пространства элементарных событий.

П р и м е р 1. При однократном подбрасывании монеты пространство элементарных событий $\Omega = \{\Gamma, P\}$ состоит из двух точек: Г — герб, Р — решетка.

П р и м е р 2. При n -кратном подбрасывании монеты пространство элементарных событий Ω состоит из сочетаний исходов однократного эксперимента

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad a_i = \Gamma \text{ или } P\}$$

с общим числом исходов $N(\omega) = 2^n$.

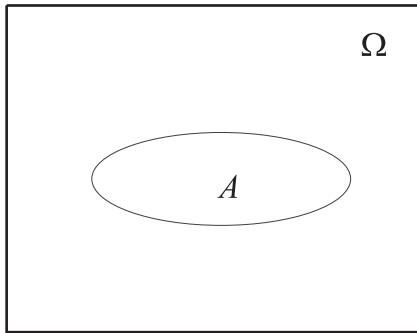


Рис. 1.1. Множество A является подмножеством множества Ω .

Будем называть *случайным событием* (или просто — *событием*) все те подмножества $A \subseteq \Omega$ (рис. 1.1) для которых по условиям эксперимента возможен ответ: исход $\omega \in A$ или исход $\omega \notin A$. Исходя из заданной системы множеств, которые составляют события, можно образовать новые события, используя логическую сумму, логическое произведение и логическое отрицание.

Объединение. Если A_1 и A_2 — два множества, то под их объединением (рис. 1.2), обозначаемым $A_1 \cup A_2$, понимается множество, состоящее из точек, входящих или в A_1 , или в A_2 :

$$A_1 \cup A_2 = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \text{ или } \omega \in A_2\}.$$

В терминах теории вероятностей $A_1 \cup A_2$ — событие состоящее в том, что произошло или событие A_1 , или событие A_2 .

Пересечение. Пересечением двух множеств A_1 и A_2 , обозначаемым $A_1 \cap A_2$, называют множество, состоящее из точек, входящих и в A_1 , и в A_2 (рис. 1.3):

$$A_1 \cap A_2 \equiv AB = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \text{ и } \omega \in A_2\}.$$

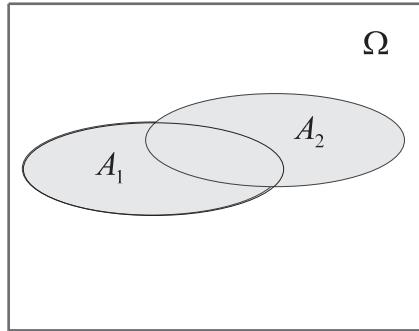


Рис. 1.2. Объединение двух множеств.

Событие $A_1 \cap A_2$ состоит в том, что одновременно произошло и событие A_1 , и событие A_2 .

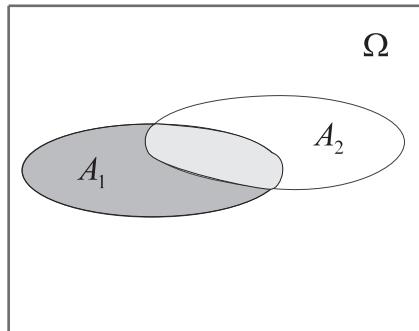


Рис. 1.3. Пересечение двух множеств.

Дополнение. Если A — подмножество Ω , то под его дополнением \bar{A} понимается множество точек из Ω не входящих в A (рис. 1.4). Обозначим $B \setminus A$ разность множеств B и A , которая включает множество точек, входящих в B и не входящих в A . Тогда $\bar{A} = \Omega \setminus A$ — событие, состоящее в ненаступлении события A .

П р и м е р. Если событие $A = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}\}$, то $\bar{A} = \{\text{PP}\}$ — событие, состоящее в последовательном выпадении двух “решеток”. Множества \bar{A} и A не имеют общих точек, а значит пересечение $A \cap \bar{A}$ является пустым, т. е. $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

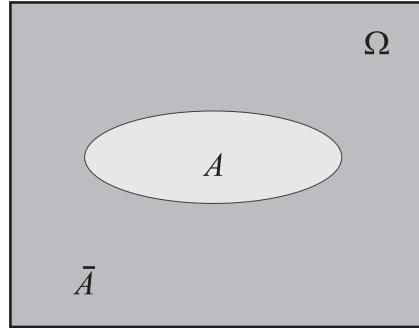


Рис. 1.4. Событие \bar{A} является дополнением события A .

В теории вероятностей множество \emptyset называется *невозможным событием*, а множество Ω — *достоверным событием*.

Если класс подмножеств \mathcal{A} удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\Omega \in \mathcal{A}$ (включает достоверное событие);
- 2) $\emptyset \in \mathcal{A}$ (содержит невозможное событие);
- 3) если $A \in \mathcal{A}$, то $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ($\bar{A} = \Omega \setminus A$) (включает дополнение);
- 4) если $A_1 \in \mathcal{A}$ и $A_2 \in \mathcal{A}$, то $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ и $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ (содержит объединение и пересечение),

то \mathcal{A} называется *алгеброй событий*. Если Ω конечно, \mathcal{A} совпадает с классом всех подмножеств Ω .

Примером случайного эксперимента является эксперимент, в котором измеряется некоторая величина ζ , например, напряженность магнитного поля Земли. В качестве элементарных событий можно взять события вида $(\zeta = x)$, где x — фиксированное значение. Множество элементарных событий можно отождествить с множеством точек на прямой. Если априори известно, что ζ может принимать значения из некоторого множества X , то это множество и следует рассматривать как множество элементарных событий. Естественно предполагать возможность наблюдения события $\{a \leq \zeta < b\}$, где $a < b$ — произвольные числа. Возможные конечные

суммы таких полуинтервалов можно рассматривать как алгебру событий, связанных с экспериментом.

1.1.2. Вероятностная модель с конечным числом исходов

Вероятностная модель с конечным числом исходов включает:

- 1) пространство элементарных событий Ω ;
- 2) систему подмножеств \mathcal{A} , образующих алгебру и называемых событиями;
- 3) вероятность $p(\omega_i)$ исхода ω_i , $\omega_i \in \Omega$ ($i = 1, \dots, n$) ($p(\omega_i)$ — “вес” элементарного события), обладающую следующими свойствами:
 - $0 \leq p(\omega_i) \leq 1$ (неотрицательность);
 - $p(\omega_1) + \dots + p(\omega_n) = 1$ (нормированность).

Вероятность $P(A)$ любого события A для $A \in \mathcal{A}$ равна выражению

$$P(A) = \sum_{\{i: \omega_i \in A\}} p(\omega_i).$$

Итак, триада (Ω, \mathcal{A}, P) определяет *вероятностную модель* или *вероятностное пространство* эксперимента с пространством исходов $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ и алгеброй событий \mathcal{A} .

Из определения вероятности события вытекают следующие свойства:

- 1) $P(\emptyset) = 0$ — вероятность невозможного события равна нулю;
- 2) $P(\Omega) = 1$ — вероятность достоверного события равна 1;
- 3) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;
если события A_1 и A_2 несовместны, т. е. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то
 $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$;
- 4) При $A_1 \subset A_2$ справедливо неравенство $P(A_1) \leq P(A_2)$;
- 5) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

6) Если A_1, A_2, \dots, A_n попарно непересекающиеся события, то

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i);$$

7) Для любых A_1, A_2, \dots, A_n справедливо неравенство

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i);$$

8) Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — некоторые события и
 $A_{i_1 i_2 \dots i_k} = A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}$. Тогда

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \dots + \\ &+ (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} P(A_{i_1 \dots i_k}) + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} P(A_{1 \dots n}). \end{aligned}$$

1.1.3. Частотное определение вероятности

Рассмотрим n случайных экспериментов. Обозначим их исходы точками $\omega_1, \dots, \omega_n$ в пространстве элементарных событий Ω . Пусть \mathcal{A} — алгебра событий, наблюдаемых в эксперименте, $A \in \mathcal{A}$. Обозначим число появления события A в n экспериментах через $K_n(A)$. Если $\omega_i \in A$ то A произошло в i -м эксперименте. Величина

$$\nu_n(A) = K_n(A)/n$$

называется *частотой появления события A в n экспериментах*. Частоту события иногда называют *статистической вероятностью*. При увеличении числа опытов частота $\nu_n(A)$ стремится к вероятности события A .

1.1.4. Классическое определение вероятности

Предположим, что в эксперименте имеется полная группа элементарных событий E_1, E_2, \dots, E_n , составляющих множество Ω . Тогда каждое событие из \mathcal{A} имеет вид

$$A = \sum_{k=1}^m E_{i_k},$$

где (i_1, i_2, \dots, i_m) — некоторое подмножество множества Ω . Отсюда, используя свойства вероятности попарно непересекающихся событий, получим

$$P(A) = \sum_{k=1}^m P(E_{i_k}).$$

Значит, в случае конечного эксперимента вероятность любого события определяется вероятностями элементарных событий. Если, например, учитывая симметрию эксперимента, можно априори установить, что элементарные события имеют одинаковую вероятность, то вероятность элементарного события равна $1/n$ (n — число равновозможных исходов), а вероятность события A вычисляется как отношение числа благоприятствующих исходов m к числу равновозможных исходов n :

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Обычно расчет равновозможных и благоприятствующих исходов проводится комбинаторными методами.

1.1.5. Геометрическое определение вероятности

В случаях экспериментов с бесконечным числом равновозможных исходов, когда результат эксперимента можно связать с точкой, принадлежащей R^m , вероятности некоторых событий можно определить геометрически как отношение евклидова объема (площади, длины) части фигуры к объему (площади, длине) всей фигуры. Иллюстрация геометрического определения вероятности дана на рис. 1.5.

1.1.6. Задачи

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях — четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.
2. В контейнере имеется 10 одинаковых приборов, помеченных номерами $1, 2, \dots, 10$. Наудачу взяты 6 приборов. Найти вероятность того, что среди извлеченных приборов окажутся: а) прибор номер 1; приборы с номерами 1 и 2.

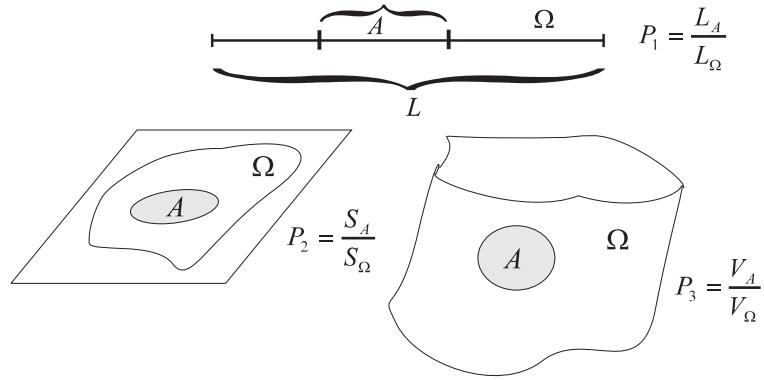


Рис. 1.5. Иллюстрация геометрического определения вероятностей.

3. В партии из N сейсмоприемников n стандартных. Наудачу отобраны m приемников. Найти вероятность того, что среди отобранных приемников — k стандартных.

4. Задача Бюффона. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$ ($l < a$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

5. На отрезке OA длины L числовой оси $0x$ произвольно отмечены две точки $B(x_1)$ и $C(x_2)$. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

6. В приемное устройство поступают сигналы от двух источников, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T . Приемник срабатывает, если разность между моментами вступления сигналов равна t ($t < T$). Найти вероятность того, что приемник сработает за время T , если каждый из источников пошлет по одному сигналу.

7. Из курса статистической физики известно, что неразличимые частицы (электроны, протоны, нейтроны) подчиняются принципу запрета Паули и статистике Ферми–Дирака. Определить число возможных исходов распределения n по M состояниям. (Можно использовать аналогию размещения n дробинок по M без возвращения, выборка неупорядоченная.)

8. Фотон и π -мезон удовлетворяют статистике Бозе-Эйнштейна, причем частицы считаются неразличимыми и не подчиняются принципу запрета Паули. Определить число возможных исходов распределения n частиц по M состояниям. (Можно использовать аналогию по размещению n неразличимых дробинок по M ящикам.)

1.2. Основные свойства вероятности

1.2.1. Сложение вероятностей

Если A_1 и A_2 — два взаимно исключающих множества, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2), \quad (1.1)$$

или для A_1, A_2, \dots, A_n

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.2)$$

Если A_1 и A_2 — два взаимно неисключающих множества, т. е. элементарные события ω_i могут принадлежать как A_1 , так и A_2 , то

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2), \quad (1.3)$$

и для произвольного числа множеств A_1, A_2, \dots, A_n

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i} \sum_{j} P(A_iA_j) + \\ &+ \sum_{i} \sum_{j} \sum_{k} P(A_iA_jA_k) + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\dots A_n). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Формула (1.4) выражает вероятность суммы любого числа событий через вероятности произведений этих событий.

Из формулы (1.3) можно выразить вероятность произведения двух событий через вероятности отдельных событий и вероятность суммы событий

$$P(A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 + A_2). \quad (1.5)$$

Общая формула для произвольного числа событий n имеет вид

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \dots A_n) &= \sum_i P(A_i) - \sum_i \sum_j P(A_i + A_j) + \\ &+ \sum_i \sum_j \sum_k P(A_i + A_j + A_k) + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 + \dots + A_n). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Формулы (1.4) и (1.6) можно использовать при преобразовании различных выражений, содержащих суммы и произведения событий.

П р и м е р. Электронная схема содержит два дублирующих элемента A_1 и A_2 и один элемент C , который не дублирован. Событие B , состоящее в выходе из строя схемы, соответствует ситуации, когда отказывают элементы A_1 и A_2 или C :

$$B = A_1 A_2 + C,$$

где A_1 — отказ элемента A_1 , A_2 — отказ элемента A_2 и C — отказ элемента C . Необходимо выразить вероятность события C через вероятности событий, содержащих только суммы, а не произведения элементарных событий A_1 , A_2 и C . По формуле (1.3) имеем

$$P(B) = P(A_1 A_2) + P(C) - P(A_1 A_2 C). \quad (1.7)$$

Из формулы (1.5) следует

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 + A_2). \quad (1.8)$$

Далее, используя формулу (1.6) для трех событий, имеем

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 C) &= P(A_1) + P(A_2) + P(C) - P(A_1 + A_2) - \\ &- P(A_1 + C) - P(A_2 + C) + \\ &+ P(A_1 + A_2 + C). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставляя формулы (1.8) и (1.9) в равенство (1.7), получим

$$P(B) = P(A_1 + C) + P(A_2 + C) - P(A_1 + A_2 + C).$$

1.2.2. Зависимые и независимые события

Событие A_1 называется *независимым* от события A_2 , если вероятность события A_1 не зависит от того, произошло событие A_2 или нет.

Пример 1. Подбрасываются две монеты. Рассматриваются два события:

A_1 — появление герба на 1-й монете,

A_2 — появление решетки на 2-й монете.

Вероятность события A_1 не зависит от того, произошло событие A_2 или нет. Событие A_1 независимо от события A_2 .

Событие A_1 называется *зависимым* от события A_2 , если вероятность события A_1 меняется в зависимости от того, произошло событие A_2 или нет.

Пример 2. В урне 5 шаров — два белых и два черных. Экспериментаторы вынимают из урны по одному шару. Рассматриваются события: A_1 — появление белого шара у 1-го экспериментатора, A_2 — появление белого шара у 2-го экспериментатора. До того как что-либо известно о событии A_2 $P(A_1) = 2/5$. Если известно, что событие A_2 произошло, то событие A_1 имеет вероятность, равную $1/4$. Откуда следует, что событие A_1 зависит от события A_2 .

Вероятность события A_1 , вычисленная при условии, что произошло другое событие A_2 , называется *условной вероятностью* события A_1 и обозначается $P(A_1/A_2)$. В рассмотренном примере $P(A_1) = 2/5$, $P(A_1/A_2) = 1/4$.

Условие независимости события A_1 от события A_2 можно записать в виде

$$P(A_1/A_2) = P(A_1).$$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1), \quad (1.10)$$

или

$$P(A_1 A_2) = P(A_2)P(A_1/A_2).$$

Если событие A_1 не зависит от события A_2 , то и событие A_2 не зависит от события A_1 .

$$\begin{aligned} P(A_1/A_2) &= P(A_1), \\ P(A_2/A_1) &= P(A_2). \end{aligned}$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2). \quad (1.11)$$

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий при условии, что предыдущие события произошли,

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \dots A_n) &= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_2 A_1) \dots \\ &\dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n). \quad (1.13)$$

П р и м е р 3. Усилитель цифровой сейсмической станции имеет три основных элемента, которые обеспечивают надежную работу в течение времени t . Вероятности безотказной работы элементов: $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.8$, $p_3 = 0.8$. Усилитель выходит из строя при отказе любого из элементов. Рассмотрим следующие события:

- B — безотказная работа усилителя,
- A_1 — безотказная работа 1-го элемента,
- A_2 — безотказная работа 2-го элемента,
- A_3 — безотказная работа 3-го элемента,

$$B = A_1 A_2 A_3.$$

Для независимых событий можно записать

$$P(B) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.576.$$

1.2.3. Формула Байеса и формула полной вероятности

Найдем вероятность события A , которое может произойти с одним из событий B_1, B_2, \dots, B_n , образующих полную группу несовместных событий, обычно называемых гипотезами:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i). \quad (1.14)$$

Выражение (1.14) называют *формулой полной вероятности*.

Найдем условную вероятность гипотезы B_i из полной группы несовместных событий B_1, B_2, \dots, B_n , при условии, что произошло событие A . Будем считать известными вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$, которые обычно называют априорными, т. е. заданными до проведения эксперимента.

Используя теорему умножения, получим

$$P(AB_i) = P(A)P(B_i/A) = P(B_i)P(A/B_i),$$

или

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Применяя формулу полной вероятности (1.14), запишем *формулу Байеса*:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)}. \quad (1.15)$$

Вероятность $P(B_i/A)$ называют апостериорной вероятностью гипотезы B_i при условии, что произошло событие A .

1.2.4. Задачи

1. Доказать, что если событие A влечет за собой событие B , то $P(B) \geq P(A)$.
2. В ящике 15 сейсмоприемников, из них 5 высокочувствительных. Наудачу берется три приемника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых трех приемников окажется высокочувствительным.

3. Вероятность появления сигнала, отраженного от горизонта A , равна P_1 , а от горизонта B — P_2 . Найти вероятность появления хотя бы одного из этих сигналов, считая отраженные сигналы независимыми.

4. Найти вероятность $P(A_1 \bar{A}_2)$ по известным вероятностям:

$$P(A_1) = P_1, \quad P(A_2) = P_2, \quad P(A_1 + A_2) = P_3.$$

5. Вероятность того, что во время работы цифровой сейсмостанции произойдет сбой в усилителе, преобразователе аналог–код (ПАК), при записи на магнитную ленту (МЛ), относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в усилителе, ПАК, при записи на МЛ соответственно равны 0,8; 0,4; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в станции сбой будет обнаружен.

6. Два из трех независимо работающих канала сейсмостанции отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй каналы, если вероятности отказа первого, второго и третьего каналов соответственно равны 0,2; 0,4 и 0,3.

7. Появление отраженного сигнала равновозможно в любой момент промежутка времени $t_2 - t_1 = T$. Вероятность появления сигнала (за этот промежуток времени) равна P . Известно, что за время $t < T$ сигнал не появится. Найти вероятность появления сигнала в оставшийся промежуток времени.

8. На сейсмограмме в заданном временном окне принимаются сигналы, отраженные от горизонтов A и B . Статистические свойства помех таковы, что сигнал от горизонта A искажается в среднем с вероятностью $2/5$, а от горизонта B — $1/5$. Анализ сейсмограмм соседнего района показал, что сигнал от горизонта A находится в отношении 3:7 к сигналу от горизонта B . Найти вероятность того, что

- a) принят сигнал от горизонта A ,
- б) принят сигнал от горизонта B .

1.3. Функции распределения

1.3.1. Случайные величины

Пусть (Ω, \mathcal{A}, P) — вероятностная модель некоторого эксперимента с конечным числом исходов $n(\Omega) < \infty$ и алгеброй \mathcal{A} всех подмножеств Ω . Введем понятие *случайной величины*, подлежащей измерению в случайных экспериментах. Всякая числовая функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на конечном пространстве элементарных событий, называется *дискретной случайной величиной*.

Пример. Определим случайную величину для модели с двукратным подбрасыванием монеты и пространством исходов

$$\omega_1 = \Gamma\Gamma, \quad \omega_2 = \Gamma\text{P}, \quad \omega_3 = \text{P}\Gamma, \quad \omega_4 = \text{P}\text{P}.$$

Каждому исходу поставим в соответствие числовую характеристику ξ , которая определяет число выпавших гербов Γ :

$$\xi(\omega_1) = 2, \quad \xi(\omega_2) = 1, \quad \xi(\omega_3) = 1, \quad \xi(\omega_4) = 0.$$

Другим примером случайной величины может быть индикатор некоторого множества: $A \in \mathcal{A}$

$$\xi = I_A(\omega), \quad I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Введем распределение вероятностей на множество значений случайной величины. Так как в рассматриваемом случае Ω состоит из конечного числа точек, то множество значений X случайной величины также конечно. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где различными числами исчерпываются все значения ξ , тогда

$$P_\xi(x_i) = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}, \quad x_i \in X.$$

Совокупность чисел $\{P_\xi(x_1), \dots, P_\xi(x_n)\}$ называется *распределением вероятностей случайной величины* ξ . На рис. 1.6 дан пример графического представления распределения вероятностей. Вероятностная структура дискретной случайной величины полностью описывается распределением вероятностей.

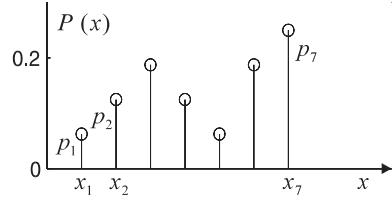


Рис. 1.6. Графическое представление распределения вероятностей.

1.3.2. Функция распределения

Если $x \in R^1$, то случайная величина ξ принимает любые значения на числовой оси $(-\infty, \infty)$. Для описания непрерывной случайной величины ξ вводится *функция распределения*

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}.$$

Иногда функцию распределения называют *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения*.

Функция распределения непрерывной случайной величины в графическом виде представлена на рис. 1.7.

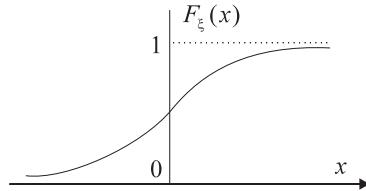


Рис. 1.7. Графическое представление функции распределения непрерывной случайной величины.

Функция распределения — универсальная характеристика случайной величины, она существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин:

$$F_\xi(x) = \sum_{\{i: x_i \leq x\}} P_\xi(x_i),$$

где

$$P_\xi(x_i) = F_\xi(x_i) - F_\xi(x_i^-), \quad F_\xi(x_i^-) = \lim_{y \rightarrow x_i} F_\xi(y).$$

Если считать, что $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, и положить $F_\xi(x_0) = 0$, то

$$P_\xi(x_i) = F_\xi(x_i) - F_\xi(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пример графического представления функции распределения дискретной случайной величины дан на рис. 1.8.

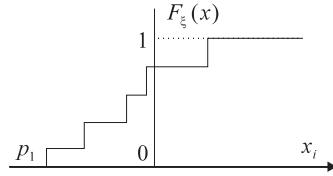


Рис. 1.8. Графическое представление функции распределения дискретной случайной величины.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

- 1) является неубывающей функцией своего аргумента x : $F(x_2) \geq F(x_1)$, $x_2 > x_1$;
- 2) равна нулю при $x = -\infty$: $F_\xi(-\infty) = 0$;
- 3) равна единице при $x = +\infty$: $F_\xi(+\infty) = 1$.

На основании определения функции распределения можно показать, что вероятность попадания случайной величины ξ в заданный интервал (α, β) равна приращению функции распределения на этом интервале

$$P_\xi(\alpha < \xi \leq \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha).$$

1.3.3. Функция плотности распределения вероятностей

Случайная величина ξ называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна по x . Случайная величина на-

зывается *абсолютно непрерывной*, если существует неотрицательная функция $f_\xi(x)$, называемая *плотностью распределения вероятностей*, такая, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(y) dy, \quad x \in R^1.$$

Плотность распределения есть производная от функции распределения

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x).$$

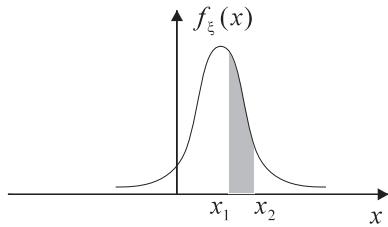


Рис. 1.9. Определенный интеграл от плотности распределения вероятностей имеет смысл вероятности.

Вероятность события $\alpha < \xi \leq \beta$ дается определенным интегралом (рис. 1.9)

$$P(\alpha < \xi \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x) dx.$$

Свойства (функции) плотности распределения вероятности:

1) $f_\xi(x) \geq 0;$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = 1.$

1.3.4. Закон распределения функции случайного аргумента

Имеется непрерывная случайная величина ξ с плотностью распределения $f_\xi(x)$, другая случайная величина η связана с ней функциональной зависимостью

$$\eta = \varphi(\xi).$$

Функцию φ полагаем непрерывной, дифференцируемой и монотонной по ξ . Для нахождения плотности распределения $f_\eta(y)$ необходимо найти функцию ψ , обратную функции φ , и ее производную ψ' , тогда

$$f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y))|\psi'(y)|.$$

В случае немонотонности функции φ на интервале (a, b) поступают следующим образом (рис. 1.10). Проводят прямую l , параллель-

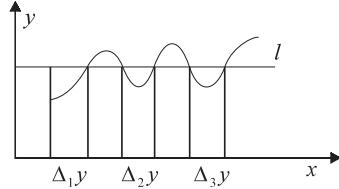


Рис. 1.10. Построение плотности распределения вероятностей в случае немонотонной зависимости $\nu = \varphi(\xi)$.

ную оси x , и выбирают участки кривой $y = \varphi(x)$, на которых выполняется условие $\eta < y$. Обозначим эти участки на оси абсцисс $\Delta_1(y), \Delta_2(y), \dots, \Delta_n(y)$. Событие $\eta \leq y$ равносильно попаданию случайной величины η в один из участков $\Delta_1(y), \Delta_2(y), \dots$:

$$\begin{aligned} F_\eta(y) &= P\{\omega : \eta(\omega) \leq y\} = \\ &= P\{\omega : (\xi(\omega) \in \Delta_1(y) + \xi(\omega) \in \Delta_2(y) + \dots)\} = \\ &= \sum_i P\{\omega : \xi(\omega) \in \Delta_i(y)\}. \end{aligned}$$

П р и м е р. Найти закон распределения линейной функции от случайного аргумента, подчиненного нормальному закону

$$\xi \in N(m_\xi, \sigma_\xi^2), \quad f_\xi(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi},$$

где $\eta = a_1 + a_2\xi$, а a_1 и a_2 — неслучайные константы. По определению $f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y))|\psi'(y)|$, откуда следует, что $\psi(y) = (y - a_1)/a_2$, $|\psi'(y)| = 1/|a_2|$, а это нормальный закон распределения с параметрами $m_\eta = a_2m_\xi + a_1$, $\sigma_\eta = |a_2|\sigma_\xi$,

$$f_\eta(y) = \frac{1}{|a_2|\sigma_\xi\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[y - (a_2m_\xi + a_1)]^2}{2|a_2|^2\sigma_\xi^2}\right)$$

— линейная функция от случайной величины, распределенной по нормальному закону распределена также распределена по нормальному закону.

1.3.5. Случайные векторы

На практике возникает необходимость наряду со случайными величинами рассматривать случайные векторы $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, компоненты которых являются случайными величинами. Набор вероятностей

$$P_\xi(x_1, \dots, x_m) = P\{\omega : \xi_1(\omega) = x_1, \dots, \xi_m(\omega) = x_m\},$$

где $x_i \in X_i$ — области допустимых значений ξ_i , называется *распределением вероятностей случайного вектора* $\boldsymbol{\xi}$. Функция

$$F_\xi(x_1, \dots, x_m) = P\{\omega : \xi_1(\omega) \leq x_1, \dots, \xi_m(\omega) \leq x_m\}$$

называется *функцией распределения случайного вектора* $\boldsymbol{\xi}$. В прикладной литературе по теории вероятностей компоненты случайного вектора называют *системой случайных величин* или пользуются геометрической интерпретацией случайной точки с координатами, соответствующими компонентам вектора. В частном случае, когда вектор $\boldsymbol{\xi}$ имеет две компоненты (ξ, η) , функция распределения имеет вид

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\omega : \xi(\omega) \leq x, \eta(\omega) \leq y\}.$$

Рассмотрим свойства функции распределения вероятностей (двух случайных величин).

1. $F_{\xi\eta}(x, y)$ — неубывающая функция своих аргументов, т. е.
 при $x_2 > x_1$, $F_{\xi\eta}(x_2, y) \geq F_{\xi\eta}(x_1, y)$,
 при $y_2 > y_1$, $F_{\xi\eta}(x, y_2) \geq F_{\xi\eta}(x, y_1)$.
 2. При равенстве одного или обоих аргументов минус бесконечности функция распределения равна нулю:
- $$F_{\xi\eta}(x, -\infty) = F_{\xi\eta}(-\infty, y) = F_{\xi\eta}(-\infty, -\infty) = 0.$$
3. При равенстве одного из аргументов плюс бесконечности функция распределения системы случайных величин превращается в функцию распределения случайной величины, соответствующей одному аргументу, т. е.
- $$F_{\xi\eta}(x, +\infty) = F_\xi(x), \quad F_{\xi\eta}(+\infty, y) = F_\eta(y).$$
4. При равенстве обоих аргументов плюс бесконечности, функция распределения равна 1:
- $$F_{\xi\eta}(+\infty, +\infty) = 1$$

Плотностью распределения вероятностей случайного вектора, содержащего две компоненты, назовем функцию

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Вероятность попадания в прямоугольник \mathcal{D} , ограниченный абсциссами α и β и ординатами γ и δ , можно записать как интеграл от плотности распределения вероятностей

$$P\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in \mathcal{D}\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{\gamma}^{\delta} f_{\xi\eta}(x, y) dx dy.$$

Функция распределения через плотность распределения выражается в следующей форме:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^x \int\limits_{-\infty}^y f_{\xi\eta}(x, y) dx dy.$$

1.3.6. Маргинальные и условные распределения

Имея закон распределения двух случайных величин или случайного вектора с двумя компонентами, можно получить закон распределения одной из величин

$$F_\xi(x) = F_{\xi\eta}(x, \infty), \quad F_\eta(y) = F_{\xi\eta}(\infty, y).$$

Выразим их через плотности распределений:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy, \quad (1.16)$$

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy. \quad (1.17)$$

Далее, дифференцируя соответственно по x (1.16) и по y (1.17), получим

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Плотности вероятностей $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, полученные путем интегрирования в бесконечных пределах двумерной плотности $f_{\xi\eta}(x, y)$ соответственно по переменным y и x , называются *маргинальными*. Условная плотность определяется как

$$f_{\xi/\eta}(x/y) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_\eta(y)} = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dy},$$

$$f_{\eta/\xi}(y/x) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_\xi(x)} = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dx}.$$

Совместная плотность распределения вероятностей может быть записана через условную и маргинальную плотности:

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\eta(y) f_{\xi/\eta}(x/y), \quad (1.18)$$

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x)f_{\eta/\xi}(y/x). \quad (1.19)$$

Условную плотность $f_{\xi\eta}(x/y_0)$ геометрически можно представить как сечение двумерной плотности $f_{\xi\eta}(x/y)$ вертикальной плоскостью, ортогональной оси y в точке $y = y_0$ (рис. 1.11). Компоненты

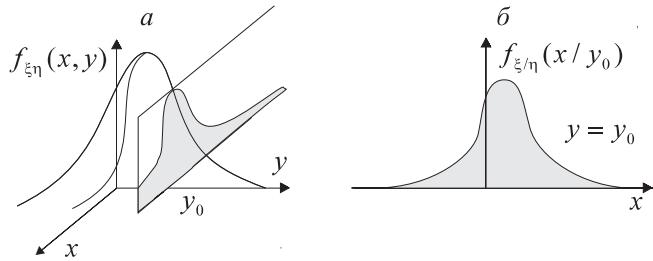


Рис. 1.11. Графическое представление совместной (а) и условной плотностей распределения вероятностей (б).

случайного вектора ξ и η называются *независимыми случайными величинами*, если

$$f_{\xi/\eta}(x/y) = f_\xi(x) \quad \text{и} \quad f_{\eta/\xi}(y/x) = f_\eta(y),$$

т. е. условные плотности равны маргинальным. Для независимых случайных величин справедливо равенство

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y).$$

Используя формулы (1.18) и (1.19), можно получить *аналог формулы Байеса для непрерывных случайных величин*

$$f_{\xi/\eta}(x/y) = \frac{f_\xi(x)f_{\eta/\xi}(y/x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y)dx}. \quad (1.20)$$

Эта формула в дальнейшем будет использована для нахождения оценок параметров по критерию Байеса.

1.3.7. Закон распределения двух случайных величин

Пусть имеется система двух непрерывных случайных величин (ξ, η) с плотностью распределения $f_{\xi\eta}(x, y)$. Случайная величина ζ

связана с ξ и η функциональной зависимостью

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta).$$

Найдем закон распределения ζ . Используем геометрическую интерпретацию получения закона распределения ζ

$$F_\zeta(z) = P\{\omega : \zeta(\omega) < z\} = P\{\omega : \varphi(\xi(\omega), \eta(\omega)) < z\},$$

представленную на рис. 1.12. Проведем плоскость Q параллельно

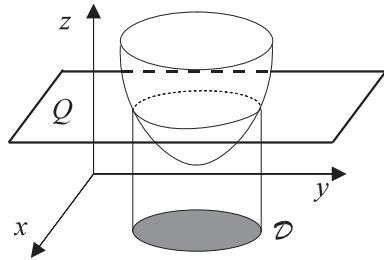


Рис. 1.12. Геометрическая иллюстрация к выводу закона распределения функции двух случайных аргументов.

плоскости $x0y$ на расстоянии z от нее. Обозначим через \mathcal{D} область на плоскости $x0y$, для которой выполняется условие $\varphi(\xi, \eta) < z$. Тогда

$$F_\zeta(z) = P\{\omega : (\xi, \eta) \in \mathcal{D}\} = \iint_{\mathcal{D}(z)} f_{\xi\eta}(x, y) dx dy.$$

В качестве примера найдем закон распределения суммы случайных величин $\zeta = \xi + \eta$. На плоскости $x0y$ построим линию, заданную уравнением $z = x + y$. Эта прямая делит плоскость на две части: правее и выше $\xi + \eta > z$, левее и ниже $\xi + \eta < z$ — (рис. 1.13). Область \mathcal{D} в нашем случае — левая и нижняя часть плоскости (заштрихованная). Представим функцию распределения $F_\zeta(z)$ как интеграл от плотности распределения $f_{\xi\eta}(x, y)$:

$$F_\zeta(z) = \iint_{\mathcal{D}(z)} f_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{\xi\eta}(x, y) dx dy =$$

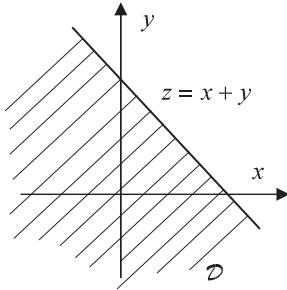


Рис. 1.13. Область интегрирования на плоскости (x, y) .

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{z-x} f_{\xi\eta}(x, y) dy \right\} dx.$$

Дифференцируя это выражение по z (верхний предел интегрирования внутреннего интеграла), получим выражение для плотности

$$f_{\zeta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, z - x) dx, \quad (1.21)$$

или, исходя из симметрии задачи,

$$f_{\zeta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(z - y, y) dy. \quad (1.22)$$

Если случайные величины ξ и η независимы, то закон распределения суммы этих величин представляет собой *композицию законов распределения*

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_{\xi}(x)f_{\eta}(y),$$

и формулы (1.21), (1.22) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_{\zeta}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x)f_{\eta}(z - x) dx, \\ f_{\zeta}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(z - y)f_{\eta}(y) dy. \end{aligned}$$

Используя обозначение * (свертка), получим $f_\zeta(z) = f_\xi * f_\eta$.

П р и м е р. Рассмотрим композицию нормальных законов:

$$\begin{aligned}\xi &\in N(m_\xi, \sigma_\xi^2), \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma_\xi \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right), \\ \eta &\in N(m_\eta, \sigma_\eta^2), \quad f_\eta(y) = \frac{1}{\sigma_\eta \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - m_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2}\right)\end{aligned}$$

и найдем закон распределения

$$\zeta = \xi + \eta.$$

Применим общую формулу свертки для композиции:

$$\begin{aligned}g(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z - x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2} - \frac{(z - x - m_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2}\right) dx.\end{aligned}$$

Раскрывая скобки в показателе степени экспоненты, получим

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a_2 x^2 + 2a_1 x - a_0) dx, \\ a_2 &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}{\sigma_\xi\sigma_\eta}, \quad a_1 = \frac{m_\xi}{2\sigma_\xi^2} + \frac{z - m_\eta}{2\sigma_\eta^2}, \\ a_0 &= \frac{m_\xi^2}{2\sigma_\xi^2} + \frac{(z - m_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2}.\end{aligned}$$

Используя табличный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a_2 x^2 + 2a_1 x - a_0) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a_2}} \exp\left(-\frac{a_2 a_0 - a_1^2}{a_2}\right),$$

получим после преобразований

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}} \exp\left(-\frac{[z - (m_\xi + m_\eta)]^2}{2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)}\right).$$

Это нормальный закон с математическим ожиданием $m_\zeta = m_\xi + m_\eta$ и дисперсией $\sigma_\zeta^2 = \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2$.

1.3.8. Задачи

1. Случайная величина ξ подчинена закону Коши с плотностью распределения

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Величина η связана с ξ зависимостью

$$\eta = 1 - \xi^3.$$

Найти плотность распределения величины η .

2. Случайная величина ξ подчинена закону с равномерной плотностью на участке $(-\pi/2, \pi/2)$:

$$f_\xi = \begin{cases} 1/\pi, & \text{при } |x| < \pi/2, \\ 0, & \text{при } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти закон распределения $\eta = \cos \xi$.

3. Случайна величина ξ подчинена нормальному закону

$$\xi \in N(m_\xi, \sigma_\xi^2), \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left\{-\frac{(x-m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right\},$$

а случайна величина η имеет равномерную плотность

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \text{при } \alpha < y < \beta.$$

Найти плотность распределения $\zeta = \eta + \xi$.

4. Случайная величина ξ распределена равномерно на интервале

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/\pi, & \text{при } x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ 0, & \text{при } x \notin (-\pi/2, \pi/2). \end{cases}$$

Найти плотность распределения $\eta = \sin \xi$.

5. Случайная величина ξ распределена по закону Релея с плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{при } x > 0.$$

Найти плотность распределения $\eta = e^{-\xi^2}$.

6. При интерпретации геофизических данных часто возникает необходимость определения закона распределения случайной величины η при условии, что случайная величина $\xi = \ln \eta$ имеет нормальное распределение с параметрами m_ξ и σ_ξ^2 . Найти плотность распределения вероятностей случайной величины η .

7. Система случайных величин (ξ, η) подчинена закону распределения с плотностью $f_{\xi\eta}(x, y)$. Найти плотность распределения $f_\zeta(z)$ случайной величины $\zeta = \xi\eta$.

Указание. Задаем некоторое значение z и на плоскости $x0y$ строим кривую, уравнение которой $z = xy$. Это — гипербола. Функция распределения дается формулой

$$F_\zeta(z) = P((\xi, \eta) \in D) = P(\xi\eta < z), \quad f_\zeta(z) = G'_\zeta(z).$$

8. Система случайных величин (ξ, η) имеет совместную плотность $f_{\xi\eta}(x, y)$. Найти плотность $f_\zeta(z)$ их отношения $\zeta = \eta/\xi$.

9. Найти закон распределения $\zeta = \eta/\xi$ двух независимых нормально распределенных величин ξ, η с параметрами $m_\xi = m_\eta = 0$, σ_ξ, σ_η .

10. Найти закон распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$, причем ξ и η — независимые случайные величины, каждая из которых распределена по экспоненциальному закону с плотностями

$$f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0), \quad f_\eta(y) = \mu e^{-\mu y} \quad (y > 0).$$

1.4. Числовые характеристики распределений вероятностей

Пусть (Ω, \mathcal{A}, P) — конечное вероятностное пространство и $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина, принимающая значения в множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Если $A_i = \{\omega : \xi = x_i\}$ ($i = 1, \dots, n$), то ξ

можно представить в виде

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i I(A_i), \quad I(A_i) = \begin{cases} 1 & \omega \in A_i, \\ 0 & \omega \notin A_i, \end{cases}$$

где A_1, \dots, A_n образуют разбиение пространства Ω , т. е. попарно не пересекаются, и их сумма равна Ω .

1.4.1. Математическое ожидание

Математическим ожиданием, или средним значением случайной величины $\xi = \sum_{i=1}^n x_i I(A_i)$, называется число

$$M\xi = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i).$$

Учитывая, что $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$ и $P_\xi(x_i) = P(A_i)$, получим

$$M\xi = \sum_{i=1}^n x_i P_\xi(x_i). \quad (1.23)$$

Если случайна величина $\xi \in R^1$ является непрерывной, то ее математическое ожидание определяется как

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx. \quad (1.24)$$

Математическое ожидание является мерой положения случайной величины ξ и характеризует “центр” распределения. Пример плотностей распределения вероятностей с различными математическими ожиданиями дан на рис. 1.14.

Математическое ожидание случайной величины обладает следующими свойствами:

- 1) если $\xi \geq 0$, то $M\xi \geq 0$;
- 2) $M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$, a и b — константы;
- 3) если $\xi \geq \eta$, то $M\xi \geq M\eta$;
- 4) $|M\xi| \leq M|\xi|$;

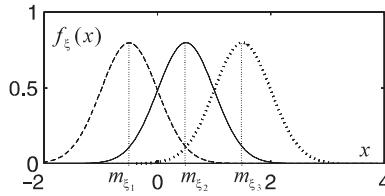


Рис. 1.14. Нормальные плотности вероятностей с различными математическими ожиданиями. Стандартные отклонения: $\sigma_{\xi_1} = \sigma_{\xi_2} = \sigma_{\xi_3} = 0.5$. Математические ожидания: $m_{\xi_1} = -0.5$, $m_{\xi_2} = 0.5$, $m_{\xi_3} = 1.5$.

- 5) если ξ и η — независимы, то $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$;
- 6) $(M(\xi \cdot \eta))^2 \leq M\xi^2 \cdot M\eta^2$ — неравенство Коши–Буняковского.

Наряду с введенным обозначением математического ожидания, используются следующие обозначения: $\langle \xi \rangle$, m_ξ .

Для функции случайной величины $\varphi(\xi)$ математическое ожидание определяется для дискретной случайной величины

$$M\varphi(\xi) = \sum_i \varphi(x_i) P_\xi(x_i) \quad (1.25)$$

и для непрерывной случайной величины

$$M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_\xi(x) dx. \quad (1.26)$$

1.4.2. Дисперсия и коэффициент корреляции

Дисперсией случайной величины $\xi(\omega)$ называется величина

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \quad (1.27)$$

Величина $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ называется *стандартным, или среднеквадратичным, отклонением*. Пример некоррелированных гауссовских временных рядов с различными стандартными отклонениями дан на рис. 1.15.

Дисперсия случайной величины обладает следующими свойствами:

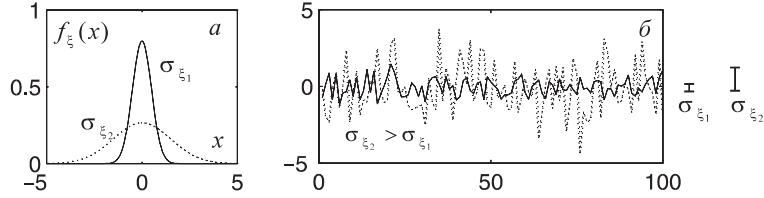


Рис. 1.15. Нормальные плотности распределения вероятностей (а) и отвечающие им некоррелированные временные ряды (б). Стандартные отклонения: $\sigma_{\xi_1} = 0.5$, $\sigma_{\xi_2} = 1.5$. Математические ожидания: $m_{\xi_1} = m_{\xi_2} = 0$.

- 1) $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$;
- 2) $D(\xi) \geq 0$;
- 3) $D(a_1 + a_2\xi) = a_2^2 D\xi$, a_1 и a_2 — константы. $Da_1 = 0$, $D(a_2\xi) = a_2^2 D\xi$;
- 4) $D(\xi + \eta) = M((\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 = D\xi + D\eta + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$.

Обозначим $\text{cov}(\xi, \eta) = R_{\xi\eta} = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$. Эта величина называется *ковариацией случайных величин* ξ и η (часто для ковариации используют обозначение $R_{\xi\eta}$). Если $D\xi > 0$, $D\eta > 0$, то можно ввести нормированную ковариацию

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}, \quad (1.28)$$

которая называется *коэффициентом корреляции* случайных величин ξ и η . Коэффициент корреляции изменяется в интервале

$$-1 \leq r(\xi, \eta) \leq 1,$$

причем знак равенства достигается при условии, если ξ и η связаны линейной зависимостью

$$\eta = a_1\xi + a_2.$$

Если $a_1 > 0$, то $r(\xi, \eta) = 1$. Если $a_1 < 0$, то $r(\xi, \eta) = -1$. Если ξ и η независимы, то

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi) \cdot M(\eta - M\eta) = 0$$

и для независимых ξ и η дисперсия суммы равна сумме дисперсий:

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Выборки из нормального двумерного распределения при различных значениях коэффициентов корреляции представлены на рис. 1.16. Учитывая определение ковариации, математическое ожи-

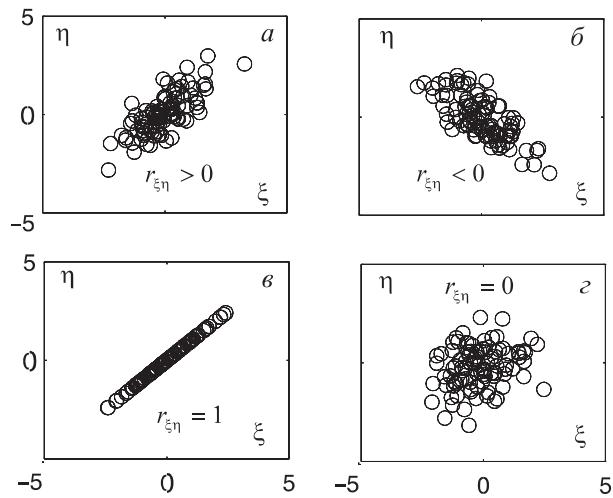


Рис. 1.16. Графическое представление выборок из двумерного гауссовского распределения случайных величин ξ and η . $M\xi = M\eta = 0$; $r_{\xi\eta} = 0.75$ (а); $r_{\xi\eta} = -0.75$ (б); $r_{\xi\eta} = 1$ (с); $r_{\xi\eta} = 0$ (д). Объем выборки — 100.

дание произведения случайных величин ξ и η можно записать в виде

$$M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta + \text{cov}(\xi, \eta).$$

Для некоррелированных случайных величин $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$. Дисперсия линейной функции от случайных величин ξ_i ($i = 1, \dots, n$) принимает вид

$$D \left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i + a_0 \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D\xi_i + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \text{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

Если ξ_i и ξ_j некоррелированы, то

$$D \left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i + a_0 \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D \xi_i.$$

Если ξ и η независимые случайные величины, то

$$D(\xi \cdot \eta) = D\xi \cdot D\eta + M\xi \cdot D\eta + M\eta \cdot D\xi.$$

1.4.3. Квантили

Квантиль порядка p одномерного распределения есть такое значение x_p случайной величины ξ , для которого

$$P(\xi < x_p) = F_\xi(x_p) = p, \quad 0 < p < 1,$$

(рис. 1.17).

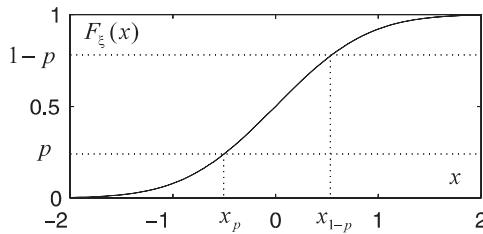


Рис. 1.17. Функция распределения и квантили порядка p и $1 - p$. Нормальное распределение: $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi = 1$.

Величину $x_{1/2}$ называют медианой распределения (рис. 1.18). Геометрический смысл медианы — абсцисса точки, в которой пло-

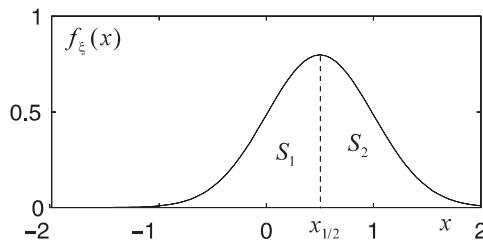


Рис. 1.18. Плотность распределения вероятностей и медиана. Нормальное распределение: $m_\xi = 0.5$, $\sigma_\xi = 0.5$.

щадь, ограниченная кривой плотности распределения, делится пополам. *Квартили* $x_{1/4}, x_{1/2}, x_{3/4}$, *децили* $x_{0.1}, x_{0.2}, \dots, x_{0.9}$ и *процентили* $x_{0.01}, x_{0.02}, \dots, x_{0.99}$ делят область изменения x соответственно на 4, 10 и 100 интервалов, попадания в которые имеют равные вероятности (рис. 1.19).

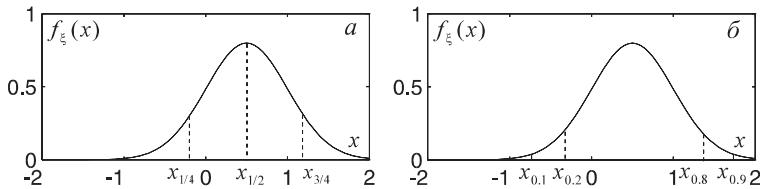


Рис. 1.19. Плотность распределения вероятностей и ее характеристики: квартили (а) и децили (б). Нормальное распределение: $m_\xi = 0.5$, $\sigma_\xi = 0.5$.

1.4.4. Характеристики плотности распределения вероятностей

Характеристикой положения распределения случайной величины ξ кроме математического ожидания $M\xi$ и медианы $x_{1/2}$ является *мода непрерывного распределения* — точка максимума плотности распределения вероятности. Распределения, имеющие одну, две и более мод, называют одномодальными, двумодальными и много-модальными (рис. 1.20). Кроме введенных выше дисперсии $D\xi$ и

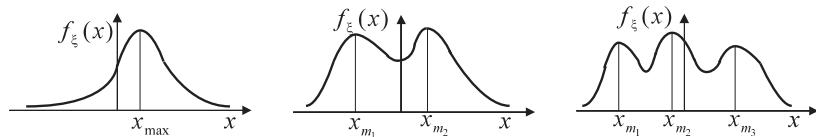


Рис. 1.20. Разномодальные плотности распределения вероятностей.

стандартного отклонения σ_ξ , в качестве характеристик рассеяния случайной величины ξ используются следующие величины:

- коэффициент вариации — $\sigma_\xi/M\xi$;
- среднее абсолютное отклонение $M|\xi - M\xi|$;

- интерквартильная ширина $x_{3/4} - x_{1/4}$ (рис. 1.21);
- 10 – 20 %-ная ширина $x_{0.9} - x_{0.1}$.

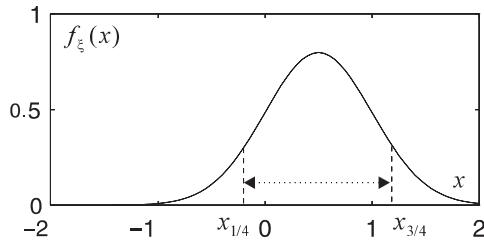


Рис. 1.21. Плотность распределения и интерквартильная ширина.
Нормальное распределение: $m_\xi = 0.5$, $\sigma_\xi = 0.5$.

Для дискретной случайной величины определяют *размах* $|x_{\max} - x_{\min}|$ вероятностного ряда $P_\xi(x_i)$ (рис. 1.22).

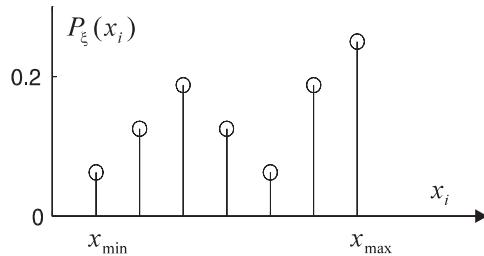


Рис. 1.22. Распределение вероятностей дискретной случайной величины и размах.

Начальным моментом s -го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание s -й степени случайной величины:

$$\alpha_s = M\xi^s.$$

Центрированной случайной величиной называется случайная величина $\xi - M\xi$. *Центральным моментом* порядка s называют математическое ожидание от s -й степени центрированной случайной величины

$$\mu_s(\xi) = M(\xi - M\xi)^s,$$

при $s = 2$ мы получаем значение дисперсии $D\xi$. Существует связь между начальными и центральными моментами

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= \alpha_2 - m_\xi^2, \\ \mu_3 &= \alpha_3 - 3m_\xi\alpha_2 + 2m_\xi^2,\end{aligned}$$

.....

Третий центральный момент μ_3 характеризует асимметрию распределения. Если распределение симметрично относительно m_ξ , то все моменты нечетного порядка равны нулю. Поэтому в качестве меры асимметрии берут третий момент. Вводят *безразмерный коэффициент асимметрии* $\gamma_1 = \mu_3/\sigma^3$ — рис. 1.23. Четвертый централь-

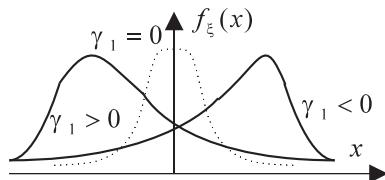


Рис. 1.23. Плотность распределения и коэффициент асимметрии.

ный момент используют для характеристики “крутизны” или остроты вершинности распределения. Вводят *экцесс* случайной величины $\gamma_2 = (\mu_4/\sigma^4) - 3$ (рис. 1.24). Отметим, что $\mu_4/\sigma_4 = 3$ для нормаль-

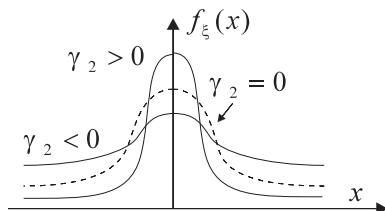


Рис. 1.24. Плотность распределения и эксцесс.

ального распределения. Значит эксцесс является мерой отклонения от нормального распределения, для которого он равен нулю.

Если кривая плотности более остроконечная, чем в случае нормального распределения, то $\gamma_2 > 0$, если более плоскоконечная, то $\gamma_2 < 0$.

1.4.5. Задачи

1. Случайная величина ξ подчиняется биномиальному закону распределения

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \exp(a\xi)$.

2. Индикатор кругового обзора навигационной станции, работающей на геофизическом судне, представляет собой круг радиуса a . Вследствие помех может появиться пятно с центром в любой точке этого круга. Определить математическое ожидание и дисперсию расстояние центра пятна от центра круга.

3. Случайная величина ξ имеет функцию плотности $f_\xi(x) = 0.5 \cdot \sin x$ в интервале $(0, \pi)$. Вне этого интервала $f_\xi = 0$. Найти математическое ожидание функции $\eta = \xi^2$.

4. Случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятностей $f_\xi(x) = 2 \cos 2x$ в интервале $(0, \pi/4)$. Вне этого интервала $f_\xi(x) = 0$. Найти моду и медиану ξ .

5. Доказать, что математическое ожидание непрерывной случайной величины заключено между ее наименьшим и наибольшим значениями.

6. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} x^n \exp(-x)/n!, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию.

Указание. Целесообразно воспользоваться выражением для гамма функции

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} dx.$$

7. Доказать, что если случайные величины η и ξ связаны линейной зависимостью $\eta = a_1\xi + a_0$, то их коэффициенты корреляции равны (± 1) в зависимости от знака a_1 .

8. Доказать, что для любых случайных величин $|r_{\xi\eta}| \leq 1$.

9. Случайная величина ξ подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m_\xi = 0$. Задан интервал (α, β) , не включающий начало координат. При каком значении среднего квадратного отклонения σ вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (α, β) достигнет максимума.

10. Случайная величина ξ подчиненациальному закону с математическим ожиданием m_ξ и дисперсией σ_ξ^2 . Требуется приблизенно заменить нормальный закон равномерным законом в интервале (α, β) ; границы α и β подобрать так, чтобы сохранить неизменным математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ .

1.5. Характеристические и производящие функции

Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция вида

$$g(t) = M(\exp(it\xi)), \quad (1.29)$$

где i — мнимая единица. Если ξ — дискретная случайная величина, то ее характеристическая функция записывается как

$$g(t) = \sum_{k=1}^n \exp(itx_k) P_\xi(x_k). \quad (1.30)$$

Если ξ — непрерывная случайная величина с плотностью распределения f_ξ , то ее характеристическая функция имеет вид

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) f_\xi(x) dx. \quad (1.31)$$

Выражение (1.31) можно рассматривать с точностью до знака показателя экспоненты как преобразование Фурье функции плотности распределения вероятностей. Тогда расчет функции плотности

$f_\xi(x)$ по известной характеристической функции сводится к (обратному) преобразованию Фурье вида

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx) g(t) dt. \quad (1.32)$$

Свойства характеристических функций.

1. Если ξ и η связаны соотношением $\eta = a\xi$ (a — константа), то $g_\eta(t) = g_\xi(at)$,

$$g_\eta(t) = M \exp(it\eta) = M \exp(ita\xi) = M \exp(i(at)\xi) = g_\xi(at).$$

2. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины с характеристическими функциями $g_{\xi_1}(t), g_{\xi_2}(t), \dots, g_{\xi_n}(t)$, тогда характеристическая функция их суммы $\eta = \sum_{k=1}^n \xi_k$ имеет вид

$$\begin{aligned} g_\eta(t) &= M(\exp(it\eta)) = M\left(\exp\left(it \sum_k \xi_k\right)\right) = \\ &= M\left[\prod_k \exp(it\xi_k)\right] = \prod_k g_{\xi_k}(t). \end{aligned}$$

3. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с распределениями $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ соответственно. Найдем плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$. В п. 1.3.7 показано, что плотность $f_\zeta(z)$ находится в результате операции свертки функций плотностей $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, что отвечает произведению соответствующих характеристических функций, т. е.

$$g_\zeta(t) = g_\xi(t) \cdot g_\eta(t).$$

Функцию плотности $f_\zeta(z)$ можно получить, взяв обратное преобразование Фурье от функции $g_\zeta(t)$

$$f_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\zeta(t) \exp(-itz) dt,$$

являющейся произведением характеристических функций $g_\xi(t)$ и $g_\eta(t)$.

1.5.1. Производящие функции моментов

Набор моментов $\{\alpha\}$ характеризует распределение случайной величины. Целесообразно ввести функцию, которая зависела бы от всех моментов и давала бы простой способ нахождения момента любого порядка.

Производящей функцией начальных моментов случайной величины называют функцию

$$\alpha_\xi(t) = M(\exp(\xi t)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(xt) f_\xi(x) dx, & \text{непрерывная с.в.,} \\ \sum_{k=1}^n \exp(x_k t) P_\xi(x_k), & \text{дискретная с.в.} \end{cases}$$

Раскладывая экспоненту в ряд, получим

$$\begin{aligned} \alpha_\xi(t) &= M \left[1 + \xi t + \frac{(\xi t)^2}{2!} + \frac{(\xi t)^3}{3!} + \dots \right] = \\ &= 1 + \alpha_1 t + \alpha_2 \frac{t^2}{2!} + \alpha_3 \frac{t^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (1.33)$$

Итак, начальный момент порядка s является коэффициентом при $t^s/s!$ в выражении (1.33). Второй способ нахождения начального момента порядка s по производящей функции моментов сводится к дифференцированию $\alpha_\xi(t)$ по t s раз:

$$\frac{\partial^s \alpha_\xi(t)}{\partial t^s} = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \exp(xt) f_\xi(x) dx,$$

откуда

$$\alpha_s = \left. \frac{\partial^s \alpha_\xi(t)}{\partial t^s} \right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f_\xi(x) dx. \quad (1.34)$$

Аналогично определяется *производящая функция центральных моментов* случайной величины ξ :

$$\mu_\xi(t) = M[\exp\{(\xi - m_\xi)t\}].$$

Раскладывая экспоненту в ряд, получим

$$\begin{aligned}\mu_\xi(t) &= M \left[1 + (\xi - m_\xi)t + (\xi - m_\xi)^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right] = \\ &= 1 + \mu_2 \frac{t^2}{2!} + \mu_3 \frac{t^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

Центральный момент μ_s является коэффициентом при $t^s/s!$.

1.5.2. Производящая функция вероятностей

Производящей функцией вероятностей называют функцию

$$G_\xi(t) = M(t^\xi) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} t^x f_\xi(x) dx, & \text{непрерывная с.в.,} \\ \sum_{k=1}^n t^k P_\xi(x_k), & \text{дискретная с.в.,} \end{cases}$$

причем $G_\xi(1) = 1$ из условия нормировки. Легко установить связь производящей функции вероятностей с моментами. Обозначив $\partial G/\partial t$ через G' , получим

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= G'_\xi(1), \quad \alpha_2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1), \\ \alpha_3 &= G'''_\xi(1) + 3G''_\xi(1) + G'_\xi(1) \dots\end{aligned}$$

Для дисперсии

$$\mu_2 = D\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - [G'_\xi(1)]^2.$$

1.5.3. Семиинварианты, или кумулянты

Если для одномерного распределения существуют моменты s -го порядка, то существуют и *семиинварианты (кумулянты)*, которые определяются как коэффициенты $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_s$ разложения в ряд Тейлора логарифма производящей функции моментов

$$\ln \alpha_\xi(t) = \varkappa_1 t + \varkappa_2 \frac{t^2}{2!} + \varkappa_3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Отсюда

$$\varkappa_s = \left[\frac{\partial^s}{\partial t^s} \ln \alpha_\xi(t) \right]_{t=0},$$

причем $\varkappa_1 = m_\xi$, $\varkappa_2 = D\xi$, $\varkappa_3 = \mu_3$, $\varkappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$ и т.д.

1.5.4. Задачи

1. Найти характеристическую функцию $g_\xi(t)$ случайной величины ξ с плотностью вероятности

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

2. Случайная величина ξ имеет характеристическую функцию

$$g_\xi(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Найти плотности вероятности этой случайной величины.

3. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{(x-m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}.$$

Определить его характеристическую функцию.

4. Найти с помощью характеристической функции композицию двух нормальных законов $\xi \in N(0, \sigma_\xi)$, $\eta \in N(0, \sigma_\eta)$. Найти $g_\zeta(t)$ для $\zeta = \xi + \eta$.

5. Случайная величина ξ дискретного типа подчиняется закону Пуассона

$$P(\xi = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Найти

- 1) характеристическую функцию;
- 2) $M\xi$ и $D\xi$, используя $g(z)$.

6. Найти характеристическую функцию и начальные моменты случайной величины с плотностью вероятностей

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{для } x \geq 0, \\ 0 & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

7. Найти характеристическую функцию равномерно распределенной в интервале (a, b) случайной величины и все ее начальные моменты.

8. Случайная величина ξ имеет плотность вероятностей

$$f_\xi(x) = 2h_2^x e^{-h^2 x^2} \quad (x \geq 0).$$

Найти ее характеристическую функцию.

9. Найти характеристическую функцию случайной величины с плотностью вероятностей

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (|x| < a).$$

10. Случайная величина ξ подчинена закону Коши:

$$f_\xi(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{(x - c)^2 + a^2}.$$

Найти ее характеристическую функцию.

1.6. Пределевые теоремы теории вероятностей

Анализ массовых явлений, которые носят случайный характер, показывает, что сохраняется устойчивость средних значений, т. е. при большом числе случайных явлений средний их результат перестает быть случайным и может быть предсказуем с большой степенью определенности.

Этот факт определяет физическое содержание *закона больших чисел*. Возможности предсказаний в области массовых случайных явлений расширяются, если удается найти предельные законы распределения. Это позволяет сделать группу теорем, объединенных под названием *центральной предельной теоремы*.

1.6.1. Сходимость по вероятности

Случайная величина ξ_n сходится по вероятности к величине a , если при увеличении n вероятность того, что ξ_n и a будут сколь угодно близки, неограниченно приближается к 1. Это значит, что при достаточно большом n

$$P(|\xi_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta,$$

где ε и δ — произвольные малые положительные величины.

1.6.2. Неравенство Чебышева

Пусть имеется случайная величина ξ с математическим ожиданием m_ξ и дисперсией $D\xi$. Для любого $\alpha > 0$ справедливы неравенства

$$P(|\xi - m_\xi| \geq \alpha) \leq \frac{D\xi}{\alpha^2} \quad (1.35)$$

(в случае дискретной случайной величины ξ) и

$$P(|\xi - m_\xi| > \alpha) \leq \frac{D\xi}{\alpha^2} \quad (1.36)$$

(в случае непрерывной случайной величины ξ). Докажем неравенство (1.36) для непрерывной случайной величины

$$\begin{aligned} P(|\xi - m_\xi| > \alpha) &= \int_{|\xi - m_\xi| > \alpha} f_\xi(x) dx, \\ D\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x - m_\xi|^2 f_\xi(x) dx \geq \\ &\geq \int_{|x - m_\xi| > \alpha} |x - m_\xi|^2 f_\xi(x) dx. \end{aligned}$$

Заменяя $|x - m_\xi|$ под знаком интеграла через α :

$$D\xi \geq \alpha^2 \int_{|x - m_\xi| > \alpha} f_\xi(x) dx = \alpha^2 P(|\xi - m_\xi| > \alpha),$$

получаем неравенство (1.36).

1.6.3. Закон больших чисел (теорема Чебышева)

При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.

Пусть ξ — случайная величина с математическим ожиданием m_ξ и дисперсией $D\xi$. Рассмотрим n таких независимых случайных

величин ξ_1, \dots, ξ_n в качестве модели эксперимента из n независимых реализаций (опытов) исходной случайной величины. Запишем среднее арифметическое значений n случайных величин

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}.$$

Математическое ожидание m_η и дисперсия $D\eta$ имеют вид

$$m_\eta = M\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i = \frac{1}{n} nm_\xi = m_\xi,$$

$$D\eta = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D\xi_i = \frac{D\xi}{n}.$$

Запишем теорему Чебышева в форме

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - m_\xi \right| < \varepsilon \right) > 1 - \delta. \quad (1.37)$$

Доказательство. Применим к случайной величине η неравенство Чебышева (1.35), полагая $\alpha = \varepsilon$, получим

$$P(|\eta - m_\eta| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\eta}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{n\varepsilon^2}.$$

Каким бы малым ни был ε , можно взять n таким большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{D\xi}{n\varepsilon^2} < \delta,$$

где δ — сколь угодно малое число. Тогда

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - m_\xi \right| \geq \varepsilon \right) < \delta,$$

или переходя к противоположному событию, получим

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - m_\xi \right| < \varepsilon \right) > 1 - \delta,$$

что и доказывает теорему.

1.6.4. Обобщенная теорема Чебышева

Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями

$$m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, \dots, m_{\xi_n}$$

и дисперсиями

$$D_{\xi_1}, D_{\xi_2}, \dots, D_{\xi_n},$$

и если все дисперсии ограничены сверху одним и тем же числом C

$$D\xi_i < C \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то при возрастании n среднее арифметическое наблюдаемых значений величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_{\xi_i}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы Чебышева для одной случайной величины.

1.6.5. Теорема Маркова

Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — зависимые случайные величины, и если $D(\sum_{i=1}^n \xi_i)/n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то среднее арифметическое значение наблюдаемых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Доказательство. Рассмотрим случайную величину η с дисперсией $D\eta$:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}, \quad D\eta = \frac{D\left[\sum_{i=1}^n \xi_i\right]}{n^2}.$$

Применим к η неравенство Чебышева

$$P(|\eta - m_\eta| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\eta}{\varepsilon^2}.$$

Так как $D\eta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то для достаточно больших n

$$P(|\eta - m_\eta| \geq \varepsilon) < \delta,$$

или, переходя к противоположному событию, получим

$$P(|\eta - m_\eta| < \varepsilon) = P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_{\xi_i}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta.$$

1.6.6. Теорема Бернулли

Пусть производится n независимых опытов. Вероятность реализации события A в каждом опыте равна p . Теорема Бернулли утверждает, что при неограниченном увеличении числа опытов n частота появления \tilde{p} события A сходится по вероятности к вероятности его реализации p ,

$$P(|\tilde{p} - p| < \varepsilon) > 1 - \delta,$$

где ε и δ — сколь угодно малые положительные числа.

1.6.7. Теорема Пуассона

Если производится n независимых опытов и вероятность появления события A в i -м опыте равна p_i , то при увеличении n частота события A сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_i :

$$P\left(\left|\tilde{p} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta.$$

Теорема Пуассона важна для практического применения теории вероятностей, так как учитывает различные условия опыта.

1.6.8. Центральная предельная теорема

Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m_ξ и дисперсией σ_ξ^2 , то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы $\eta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ неограниченно приближается к нормальному.

Доказательство. Согласно свойству характеристических функций

$$g_\eta(t) = [g_\xi(t)]^n.$$

Разложим $g_\xi(t)$ в ряд Маклорена в окрестности $t = 0$ и, ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим

$$g_\xi(t) \approx g_\xi(0) + g'_\xi(0)t + [g''_\xi(0)/2 + \alpha(t)]t^2,$$

где $\alpha(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, $g_\xi(0) = 1$, $g'_\xi(0) = im_\xi$, полагая $m_\xi = 0$, получим $g'_\xi(0) = 0$, $g''_\xi(0) = -\sigma^2$. Формулу для $g_\xi(t)$ с учетом найденных $g_\xi(0)$, $g'_\xi(0)$ и $g''_\xi(0)$ перепишем в виде

$$g_\xi(t) = 1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha(t) \right] t^2.$$

Введем нормированную случайную величину $\zeta_n = \eta_n / (\sigma\sqrt{n})$. Покажем, что характеристическая функция η_n при увеличении n приближается к характеристической функции нормального закона

$$g_\zeta(t) = g_\eta \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = \left[g_\xi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n,$$

или, используя разложение $g_\xi(t)$, получим

$$g_\zeta(t) = \left\{ 1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right] \frac{t^2}{\sigma^2 n} \right\}^n.$$

Логарифмируя $g_\eta(t)$ и вводя обозначение

$$\beta = \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right] \frac{t^2}{\sigma^2 n},$$

имеем

$$\ln g_\zeta(t) = n \ln(1 - \beta).$$

При увеличении n β будет стремиться к нулю, тогда можно ограничиться первым членом разложения

$$\ln(1 - \beta) \approx -\beta.$$

Переходя к пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln g_\zeta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(-\beta) = \lim \left\{ -\frac{t^2}{2} + \alpha \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \frac{t^2}{\sigma^2} \right\},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = 0, \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln g_\zeta(t) = \frac{-t^2}{2},$$

получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_\zeta(t) = \exp \left(\frac{-t^2}{2} \right),$$

но это и есть характеристическая функция нормального закона с параметрами $m_\zeta = 0$, $\sigma_\zeta = 1$.

1.6.9. Задачи

1. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить сверху вероятность того, что случайная величина ξ , имеющая математическое ожидание m_ξ и дисперсию σ_ξ^2 , отклонится от m_ξ меньше, чем на $3\sigma_\xi$.

2. Производится большое число n независимых опытов, в каждом из которых случайная величина ξ имеет равномерное распределение на интервале $(1, 2)$. Рассматривается среднее арифметическое $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i/n$ наблюденных значений случайной величины ξ .

На основе закона больших чисел выяснить, к какому числу a будет сходиться по вероятности величина η при $n \rightarrow \infty$. Оценить максимальную практическую возможную ошибку равенства $\eta \approx a$.

3. Рассматривается последовательность n случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, имеющих равномерное распределение соответственно в интервалах $(0, 1), (0, 2), \dots, (0, n)$. Что будет происходить с их средним арифметическим $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i/n$ при увеличении n ?

4. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ распределены равномерно на участках $(-1, 1), (-2, 2), \dots, (-n, n)$. Будет ли среднее арифметическое $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i/n$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ сходиться по вероятности к нулю при увеличении n ?

5. На космическом корабле установлен счетчик Гейгера для определения числа космических частиц, попадающих в него за некоторый интервал времени T . Поток космических частиц — пуссоновский с интенсивностью λ , каждая частица регистрируется счетчиком с вероятностью p . Счетчик включается на случайное время T , распределенное по показательному закону с параметром μ . Случайная величина ξ — число зарегистрированных частиц. Найти закон распределения случайной величины ξ .

1.7. Дискретные функции распределения

Законом распределения (рядом распределения) дискретной случайной величины называют совокупность ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан в виде таблицы

ξ	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

где $\sum_i p_i = 1$, или в аналитической форме

$$P(\xi = x_i) = \varphi(x_i).$$

Закон распределения можно изобразить также графически (рис. 1.25).

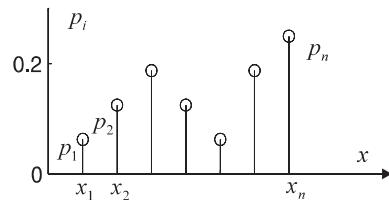


Рис. 1.25. Графическое представление распределения вероятностей дискретной случайной величины.

1.7.1. Биномиальное распределение

Случайная величина ξ распределена по биномиальному закону, если ее возможным значениям $0, 1, \dots, m, \dots, n$ соответствуют

вероятности

$$P_m = P(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (1.38)$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = 0, 1, \dots, n$ (рис. 1.26). Распределение

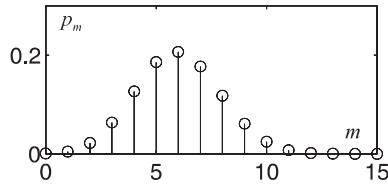


Рис. 1.26. Биномиальное распределение ($p = 0.4$, $n = 15$).

зависит от двух параметров n и p .

- Математическое ожидание $M\xi = np$.
- Дисперсия $D\xi = np(1 - p)$.
- Коэффициент асимметрии $\gamma_1 = (1 - 2p)/[np(1 - p)]^{1/2}$.
- Эксцесс $\gamma_2 = [1 - 6p(1 - p)]/[np(1 - p)]$.

Биномиальное распределение дает вероятность получения m успешных испытаний при общем числе испытаний n и при вероятности успеха в одном испытании p .

П р и м е р. Вероятность зарегистрировать поток космических лучей в заданном энергетическом диапазоне (событие A) по одному спутниковому наблюдению равна p . Найти число наблюдений такое, чтобы вероятность появления хотя бы одного события A была α . Итак, надо найти n , для которого

$$P(\xi \geq 1) \geq \alpha,$$

$$1 - P(\xi = 0) \geq \alpha, \quad P(\xi = 0) \leq 1 - \alpha.$$

Используя формулу (1.38) при $m = 0$, получим

$$(1 - p)^n \leq 1 - \alpha,$$

откуда

$$n \geq \ln(1 - \alpha) / \ln(1 - p).$$

1.7.2. Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина ξ распределена по закону Пуассона, если ее возможные значения — $0, 1, \dots, m, \dots$, а вероятность события $\xi = m$ выражается формулой

$$p_m = P(\xi = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.39)$$

где $a > 0$ (рис. 1.27).

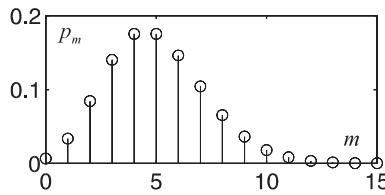


Рис. 1.27. Распределение Пуассона ($a = 5$).

Распределение Пуассона зависит от одного параметра a .

- Математическое ожидание $M\xi = a$.
- Дисперсия $D\xi = a$.
- Коэффициент асимметрии $\gamma_1 = 1/\sqrt{a}$.
- Эксцесс $\gamma_2 = 1/a$.

Распределение Пуассона дает вероятность наблюдения m событий в заданный промежуток времени при условии, что события независимы. Это распределение является предельным случаем для биномиального распределения при $p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, если $np = a = \text{const}$. Распределением Пуассона можно пользоваться приближенно в случаях, когда проводится большое число независимых опытов, в каждом из которых событие происходит с малой вероятностью. Распределение Пуассона используется для описания потока событий. *Потоком событий* называется последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени. Среднее число событий λ , приходящихся на единицу времени, называется *интенсивностью потока событий*. Величина λ может быть как постоянной, так и переменной.

Поток событий называется *потоком без последствия*, если вероятность попадания того или иного числа событий на какой-то временной интервал не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним интервал.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность появления на элементарном интервале Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события.

Ординарный поток событий без последствий называется *пуассоновским*. Если события образуют пуассоновский поток, то число ξ событий, попадающих на любой интервал времени $(t_0, t_0 + \tau)$, определено по закону Пуассона

$$p_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

где a — математическое ожидание числа точек, попадающих на участок:

$$a = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt.$$

Если $\lambda = \text{const}$, пуассоновский поток называется *стационарным*, в этом случае число событий, попадающих на участок времени τ , распределено по закону Пуассона с параметром $a = \lambda/\tau$.

Пуассоновский поток событий можно использовать для описания вступления сейсмических волн на сейсмограмме. Можно показать, что число вступлений волн для большого числа практических интересных ситуаций хорошо описывается распределением Пуассона.

Пример. От слоистой пачки на сейсмограмме регистрируется ряд отраженных волн, образующих стационарный пуассоновский поток с интенсивностью λ . Найти вероятность того, что за время τ происходят следующие события:

- 1) A — нет волн;
- 2) B — вступает не менее трех волн;
- 3) C — вступает три волны.

Математическое ожидание числа волн $a = \lambda\tau$, тогда

$$P(A) = P_0 = e^{-\lambda\tau}, \quad P(C) = ((\lambda\tau)^3 / 3!)e^{-\lambda\tau},$$

$$P(B) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 1 - e^{-\lambda\tau}[1 - \lambda\tau - 0.5(\lambda\tau)^2].$$

1.7.3. Геометрическое распределение

Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение, если ее возможные значения равны $0, 1, 2, \dots, m, \dots$, а вероятности этих значений

$$p_m = q^{m-1}p \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.40)$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ (рис. 1.28). Геометрическое распределение

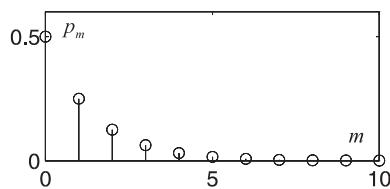


Рис. 1.28. Геометрическое распределение ($p = 0.5$).

дает вероятность получить m безуспешных попыток, предшествующих первой успешной попытке при условии, что вероятность успеха в одном испытании равна p . Вероятность p_m для ряда последовательных значений m образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем q .

- Математическое ожидание $M\xi = 1/p$.
- Дисперсия $D\xi = (1 - p)/p^2$.
- Коэффициент асимметрии $\gamma_1 = (2 - p)/(1 - p)^{1/2}$.
- Эксцесс $\gamma_2 = (p^2 - 6p + 6)/(1 - p)$.

П р и м е р. При передаче сообщения по радиоканалу наблюдаются помехи, препятствующие декодированию сообщения. С вероятностью p сообщение не удается декодировать. Сообщение

передается до тех пор, пока оно не будет декодировано. Продолжительность передачи сообщения равна 2 мин. Найти математическое ожидание времени, которое уйдет на передачу сообщения.

Случайная величина ξ — число “попыток” передать сообщение — имеет геометрическое распределение $T = 2\xi$ мин. Распределение T можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 6 & \dots & 2m & \dots \\ q & pq & p^2q & \dots & p^{m-1}q & \dots \end{array}$$

Поскольку $m_\xi = 1/p$, то $M[T] = 2/p$.

1.7.4. Задачи

1. На сейсмических станциях A и B зарегистрированы сейсмограммы. Пусть x_1 — событие, состоящее в выделении сигнала с вероятностью p_1 на заданном временном интервале на сейсмограмме A , а x_2 — событие выделения сигнала с вероятностью p_2 на станции B . Требуется найти ряд распределения случайной величины $z = x_1 + x_2$, т. е. вероятность выделения сигнала или на станции A , или на станции B .

2. Элемент блока цифровой сейсмостанции работает исправно в течение случайного времени T , после отказа этот элемент заменяют новым. Поток отказов стационарный с интенсивностью μ . Найти вероятность событий $A=\{\text{за время } \tau \text{ элемент не придется менять}\}$, $B=\{\text{элемент придется заменить три раза}\}$.

3. Блок сейсмостанции состоит из трех узлов. В первом узле n_1 элементов, во втором n_2 элементов, в третьем n_3 элементов. Первый узел безусловно необходим для работы, второй и третий дублируют друг друга. Потоки отказов являются стационарными; для элементов, входящих в первый узел, интенсивность потока отказов равна λ_1 , во второй или третий узел — λ_2 . Первый узел выходит из строя, если в нем отказалось не менее двух элементов. Второй (третий) узел выходит из строя при отказе хотя бы одного элемента. Для выхода из строя всего устройства достаточно, чтобы отказал первый узел или второй и третий вместе. Найти вероятность того, что за время τ устройство выйдет из строя.

4. Искусственный спутник Земли, движущийся по своей орбите в течение n суток, может случайно сталкиваться с метеоритами. Метеориты, пересекающие орбиту и сталкивающиеся со спутником, образуют стационарный пуассоновский поток с интенсивностью λ (метеоритов в сутки). Метеорит, попавший в спутник, пробивает его оболочку с вероятностью p_0 . Метеорит, пробивший оболочку с вероятностью p_1 , выводит из строя аппаратуру спутника. Найти вероятность следующих событий:

$$A = \{\text{за время полета оболочка спутника будет пробита}\};$$

$$B = \{\text{за время полета аппаратура спутника будет выведена из строя}\};$$

$$C = \{\text{за время полета будет пробита только оболочка спутника, а аппаратура не будет выведена из строя}\}.$$

5. “Идет охота на волков, идет охота . . .”. В.С.Высоцкий.
Охотники выстраиваются в цепь случайнным образом так, что образуют на оси Ox стационарный поток точек с интенсивностью λ (λ — число охотников на единицу длины). Волк бежит перпендикулярно цепи. Любой охотник стреляет по волку только в том случае, если волк удален от него не больше чем на расстоянии R_0 , и тогда убивает его с вероятностью p . Определить вероятность того, что волк не будет убит, если он не знает, где расположены охотники, и цепь имеет достаточную длину.

6. Рассматриваются случайные события ξ и η , которые принимают значения $(0, 1)$ (наличие и отсутствие сигнала на двух участках сейсмограммы) с рядами распределений соответственно

$$\xi : \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline q_\xi & p_\xi \\ \hline \end{array} \quad \text{и} \quad \eta : \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline q_\eta & p_\eta \\ \hline \end{array}.$$

Построить ряды распределений:

- 1) для суммы $\zeta = \xi + \eta$;
- 2) для разности $\zeta = \xi - \eta$;
- 3) для произведения $\zeta = \xi \cdot \eta$.

7. В ячейке ЭВМ записано n -разрядное двоичное число, каждый знак этого числа, независимо от остальных, принимает с равной вероятностью значения 0 или 1. Случайная величина ξ — число

знаков “1” в записи двоичного числа. Найти вероятности событий $\{\xi = m\}$, $\{\xi \geq m\}$, $\{\xi < m\}$.

8. По каналу связи передается k сообщений, содержащих соответственно n_1, n_2, \dots, n_k двоичных знаков (“0” или “1”). Знаки с вероятностью 0.5 принимают значения 0 или 1 независимо друг от друга. Каждый знак искажается с вероятностью p . При кодировании сообщений применяется код, исправляющий ошибки в одном или двух знаках практически с полной достоверностью. Наличие ошибки хотя бы в одном знаке после исправления делает ошибочным все сообщение. Найти вероятность того, что хотя бы одно из k сообщений будет ошибочным.

1.8. Непрерывные распределения

Если функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ при любом x непрерывна и имеет производную $F'_\xi(x)$, то случайная величина ξ называется непрерывной.

Вероятность каждого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю. Вероятность попадания ξ в интервал (α, β) равна

$$P(\alpha < \xi \leq \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha).$$

Элементарной вероятностью в случае непрерывной случайной величины называется величина $f_\xi(x)dx$ ($f_\xi(x) = F'_\xi(x)$ — плотность вероятностей).

1.8.1. Нормальное одномерное распределение

Случайная величина ξ имеет *нормальное распределение*, если ее плотность вероятностей равна

$$f_\xi(x) = N(m_\xi, \sigma_\xi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left\{-\frac{(x - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}, \quad (1.41)$$

где m_ξ — математическое ожидание и σ_ξ^2 — дисперсия случайной величины ξ . Функция (нормального) распределения

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x - m_\xi}{\sigma_\xi}\right),$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy \quad (1.42)$$

— функция Лапласа (рис. 1.29), обладает следующими свойствами:

- 1) $\Phi(-\infty) = 0$;
- 2) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$;
- 3) $\Phi(\infty) = 1$.

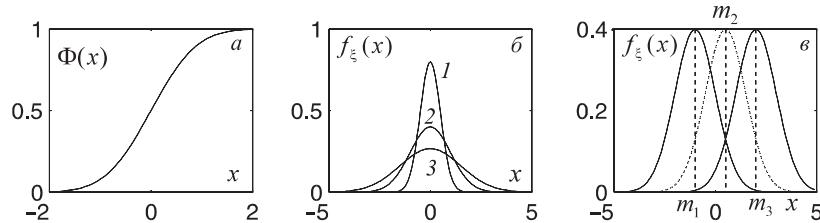


Рис. 1.29. Функция Лапласа и плотность нормального распределения.

a — функция Лапласа: $m = 0, \sigma = 0.5$; *б* — плотности нормального распределения: $m_1 = m_2 = m_3 = 0; \sigma_1 = 0.5, (1); \sigma_2 = 1.0, (2); \sigma_3 = 1.5, (3)$; *в* — плотности нормального распределения: $m_1 = -1; m_2 = 0.5; m_3 = 2; \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$.

Коэффициент асимметрии и эксцесс нормального распределения соответственно равны $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 0$, а характеристическая функция дается выражением

$$g(t) = \exp\left\{itm_\xi - \frac{1}{2}t^2\sigma_\xi^2\right\}.$$

Моменты нормального распределения записываются в следующем виде:

$$\mu_{2s} = \frac{(2s)!}{2^s s!} \sigma^{2s}, \quad \mu_{2s+1} = 0 \quad (s \geq 1).$$

Функция плотности вероятности нормального или *гауссовского* распределения $N(m, \sigma^2)$ является наиболее важным теоретическим распределением в статистике. Нормальное распределение возникает тогда, когда величина ξ образуется в результате суммирования

большого числа независимых (или слабозависимых) случайных слагаемых.

Вероятность попадания в симметричный интервал $(-l, l)$ относительно m_ξ равна

$$P(|\xi - m_\xi| < l) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma_\xi}\right).$$

Наиболее часто используются значения вероятностей попадания в интервалы

$$\begin{aligned} P(-1.64 < \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} < 1.64) &= 0.90, \\ P(-1.96 < \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} < 1.96) &= 0.95, \\ P(-2.58 < \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} < 2.58) &= 0.99. \end{aligned}$$

Функцию $N(0, 1)$ называют стандартной нормальной плотностью, а

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} dt$$

— стандартной нормальной функцией распределения. Для $N(0, 1)$ и $\Phi(x)$ составлены таблицы. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и распределены по нормальному закону, то их линейные комбинации обладают следующими свойствами.

- Любая линейная комбинация ξ_i также является нормальной. Предположим, что средние и дисперсии случайных величин ξ_1, ξ_2 обозначены соответственно m_1, m_2 и σ_1^2, σ_2^2 , тогда $a_1\xi_1$ и $a_2\xi_2$ являются независимыми нормальными величинами с характеристическими функциями

$$\begin{aligned} g_{a_1\xi_1}(t) &= \exp(it a_1 m_1 - \frac{1}{2} t^2 a_1^2 \sigma_1^2), \\ g_{a_2\xi_2}(t) &= \exp(it a_2 m_2 - \frac{1}{2} t^2 a_2^2 \sigma_2^2). \end{aligned}$$

Характеристическая функция $\eta = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ равна

$$g_\eta(t) = g_{a_1\xi_1} \cdot g_{a_2\xi_2} = \exp[it(a_1 m_1 + a_2 m_2) - \frac{1}{2} t^2 (a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2)],$$

т. е. η также подчиняется нормальному распределению со средним $m_\eta = a_1 m_1 + a_2 m_2$ и дисперсией $\sigma_\eta^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2$.

Аналогично можно показать, что $\eta = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i$ будет иметь нормальное распределение со средним $m_\eta = \sum_{i=1}^n a_i m_i$ и дисперсией $\sigma_\eta^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$.

2. Выборочное среднее

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$$

и выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2$$

являются независимыми случайными величинами, если ξ_i имеют одинаковое нормальное распределение (с одинаковыми m_ξ и σ_ξ). Это свойство присуще только нормальному распределению.

1.8.2. Многомерное нормальное распределение

Система случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ или n -мерный вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ имеют нормальное распределение, если их плотность вероятностей $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$ записывается в виде

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} |D_{\boldsymbol{\xi}}|^{-1/2} \exp \left\{ -(1/2)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_\xi)^T D_{\boldsymbol{\xi}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_\xi) \right\},$$

где математическое ожидание $M\boldsymbol{\xi} = \mathbf{m}_\xi$ и матрица ковариаций с элементами $[D_{\boldsymbol{\xi}}]_{ij} = M[(\xi_i - m_{\xi i})(\xi_j - m_{\xi j})]$ полностью определяют распределение. При этом характеристическая функция записывается следующим образом:

$$g_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{t}) = \exp \left\{ i \mathbf{t}^T \mathbf{m}_\xi - (1/2) \mathbf{t}^T D_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{t} \right\}.$$

В случае двухкомпонентного случайного вектора плотность распределения имеет вид

$$f_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - \right. \right.$$

$$- 2r \frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \Big] \Big\}, \quad (1.43)$$

$$D = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}, \quad r = \frac{M[(\xi_1 - m_1)(\xi_2 - m_2)]}{\sigma_1 \sigma_2},$$

где r — коэффициент корреляции случайных величин ξ_1 и ξ_2 (рис. 1.30). Найдем маргинальную плотность $f_{\xi_1}(x_1)$:

$$f_{\xi_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) dx_2.$$

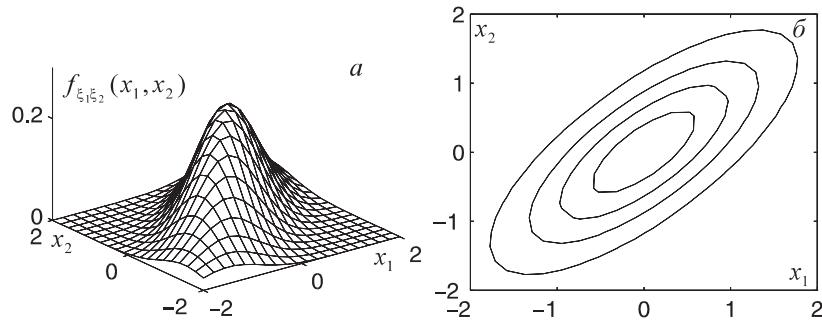


Рис. 1.30. Двумерная нормальная плотность для случайных величин ξ_1 и ξ_2 : $m_1 = m_2 = 0$; $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$; $r = 0.75$: а — трехмерное представление; б — представление на плоскости (x_1, x_2) .

Проводя интегрирование плотности вероятностей (1.43), получим

$$f_{\xi_1}(x_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\},$$

т. е. величина ξ_1 подчинена нормальному распределению со средним m_1 и дисперсией σ_1^2 . Аналогично можно показать, что

$$f_{\xi_2}(x_2) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}.$$

Найдем условную плотность вероятностей

$$f_{\xi_2/\xi_1}(x_2/x_1) = \frac{f_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2)}{f_{\xi_1}(x_1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_2 - m_2)}{\sigma_2} - r \frac{(x_1 - m_1)}{\sigma_1} \right]^2\right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-r^2)\sigma_2^2} \left[(x_2 - m_2) - r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - m_1) \right]^2\right\}
\end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned}
f_{\xi_1/\xi_2}(x_1/x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_1^2} \left[(x_1 - m_1) - r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - m_2) \right]^2\right\}.
\end{aligned}$$

Анализ $f_{\xi_2/\xi_1}(x_2/x_1)$ показывает, что это нормальное распределение с математическим ожиданием

$$m_{\xi_2/\xi_1} = m_2 + r(\sigma_2/\sigma_1)(x_1 - m_1)$$

и средним квадратичным отклонением

$$\sigma_{\xi_2/\xi_1} = \sigma_2 \sqrt{1 - r^2},$$

при этом m_{ξ_2/ξ_1} называют *условным математическим ожиданием*, а σ_{ξ_2/ξ_1}^2 — *условной дисперсией*. Зависимость m_{ξ_2/ξ_1} можно изобразить на плоскости в виде прямой, называемой линией регрессии ξ_2 на ξ_1 (рис. 1.31). При независимых ξ_1 и ξ_2 линии регрессии параллельны координатным осям. Сечение поверхности двумерного распределения вероятностей $f_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2)$ плоскостями, параллельными осям значений $f_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2)$, дает кривые, подобные кривым нормального распределения, а в сечении поверхности распределения плоскостями, параллельными $x_1 0 x_2$, получаем эллипсы

$$\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} = \lambda^2.$$

Центр эллипса находится в точке с координатами (m_1, m_2) . Направление осей симметрии составляют с осью $0x_1$ угол α :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}.$$

Такие эллипсы называются *эллипсами равной плотности* или *эллипсами рассеяния* (см. рис. 1.31, 2).

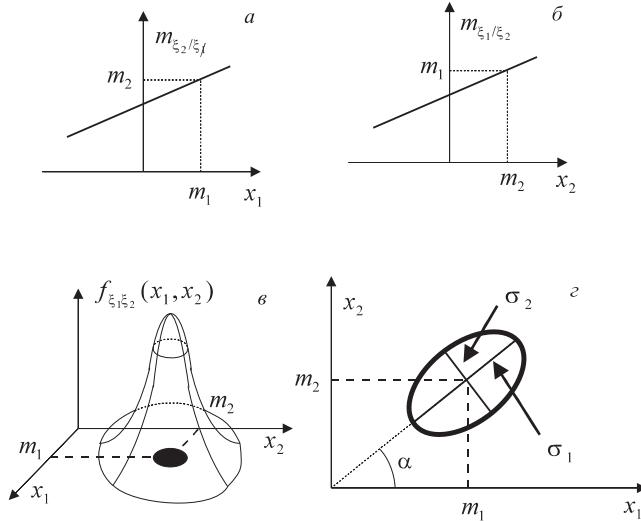


Рис. 1.31. Двумерное нормальное распределение: *а* и *б* — условные математические ожидания ξ_1 и ξ_2 соответственно; *в* — графическое представление плотности вероятностей; *г* — контур плотности вероятностей на плоскости (x_1, x_2) .

Производя перенос начала координат в точку (m_1, m_2) и поворот на угол α , получим каноническую форму эллипса.

Совокупность переменных, каждая из которых является линейной функцией переменных, распределенных нормально, также распределена по многомерному нормальному закону.

Пример. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) распределена по нормальному закону на плоскости с параметрами $m_1 = 1$, $m_2 = -2$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 4$, $r = 0$. Найти вероятность того, что случайная точка попадет внутрь области \mathcal{D} , ограниченной эллипсом

$$(x_1 - 1)^2 + \frac{(x_2 + 2)^2}{16} = 1.$$

Запишем плотность вероятностей в виде

$$f_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x_1 - 1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 + 2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}.$$

Эллипс рассеяния \mathcal{D}_k определяется формулой

$$\frac{(x_1 - 1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 + 1)^2}{\sigma_2^2} = k^2.$$

Сделаем замену переменных $(x_1 - 1)/\sigma_1 = u_1$, $(x_2 + 1)/\sigma_2 = u_2$ и преобразуем эллипс \mathcal{D}_k в круг c_k радиуса k . Тогда искомая вероятность попадания запишется следующим образом:

$$P((\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{D}_k) = \frac{1}{2\pi} \iint_{c_k} \exp \left\{ - \left(\frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} \right) \right\} du_1 du_2.$$

Перейдем к полярной системе координат

$$u_1 = \rho \cos \theta, \quad u_2 = \rho \sin \theta.$$

Якобиан преобразования равен ρ . Проводя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} P((\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{D}_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^k \rho \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2} \right\} d\rho d\theta = \\ &= \int_0^k \rho \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2} \right\} d\rho = 1 - \exp \left\{ -\frac{k^2}{2} \right\}, \end{aligned}$$

при этом в случае $k = 1$

$$P((\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{D}_1) = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \approx 0.393.$$

1.8.3. Равномерное распределение

Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на участке от a до b , если ее плотность

$$f_\xi(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1} & \text{при } x \in (a, b), \\ 0 & \text{при } x \notin (a, b) \end{cases} \quad (1.44)$$

на этом участке постоянна (рис. 1.32).

- Математическое ожидание $M\xi = (a+b)/2$.

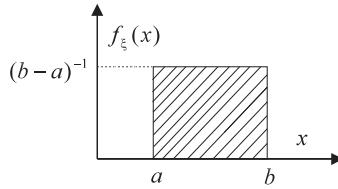


Рис. 1.32. Равномерное распределение.

- Дисперсия $D\xi = (b-a)^2/12$.
- Коэффициент асимметрии $\gamma_1 = 0$.
- Эксцесс $\gamma_2 = -1.2$.

Равномерное распределение имеют ошибки грубых измерений при помощи инструмента с крупными делениями. Типичные условия возникновения равномерного распределения состоят в следующем: точка M случайным образом бросается на ось $0x$, разделенную на равные интервалы длины l . Каждый из случайных отрезков ξ_1 и ξ_2 , на которые точка M делит интервал (на который она попала), имеет равномерное распределение на участке $(0, l)$.

1.8.4. Распределение χ^2

Случайная величина $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$, представляющая собой сумму квадратов независимых нормально распределенных величин со стандартным распределением $\xi_i \in N(0, 1)$, имеет распределение χ^2 с n степенями свободы (рис. 1.33):

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \left[(x/2)^{(n/2)-1} \exp(-x/2) \right] / (2\Gamma(n/2)), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

Плотность распределения $f_\eta(x)$ зависит от одного параметра n , называемого числом степеней свободы.

- Математическое ожидание $M\xi = n$.
- Дисперсия $D\xi = 2n$.
- Коэффициент асимметрии $\gamma_1 = 2\sqrt{2/n}$.

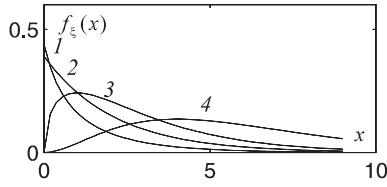


Рис. 1.33. Распределение χ^2 : 1 — $n = 1$; 2 — $n = 2$; 3 — $n = 3$; 4 — $n = 6$.

- Эксцесс $\gamma_2 = 12/n$.

Характеристическая функция распределения χ^2 имеет вид

$$g(t) = (1 - 2it)^{-n/2}.$$

В асимптотическом пределе при достаточно больших n распределение χ_n^2 стремится к нормальному, и при $n > 30$ с достаточно хорошей точностью это распределение можно считать нормальным. Распределение χ^2 нашло широкое применение в задачах проверки гипотез.

Итак, если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — выборка из нормальной совокупности $N(m, \sigma^2)$ с выборочным средним

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$$

и выборочной дисперсией

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2,$$

то случайная величина

$$\eta = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2 \in \chi_{n-1}^2$$

имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенью свободы.

1.8.5. Распределение Стьюдента (t -распределение)

Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — случайные величины, каждая из которых подчиняется нормальному закону распределения $N(m, \sigma^2)$, то случайная величина

$$\eta = \frac{\sqrt{n}(\bar{\xi} - m_\xi)}{s}, \quad (1.46)$$

где

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - m_\xi)^2,$$

соответственно выборочные среднее и дисперсия, имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Плотность вероятностей распределения Стьюдента дается формулой (рис. 1.34):

$$f_\eta(t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}. \quad (1.47)$$

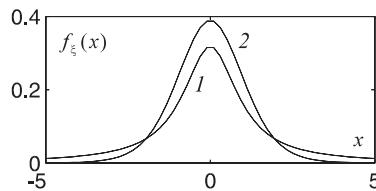


Рис. 1.34. Распределение Стьюдента: 1 — $n = 1$; 2 — $n = 10$.

- Математическое ожидание $M\eta = 0$.
- Дисперсия $D\eta = n/(n-2)$, $n > 2$.
- Коэффициент асимметрии $\gamma_1 = 0$.
- Эксцесс $\gamma_2 = 6/(n-4)$, $n > 4$.

В числителе случайной величины η стоит случайная величина

$$\eta_1 = \sqrt{n}(\bar{\xi} - m_\xi),$$

которая имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$. В знаменателе стоит величина η_2 , равная выборочной дисперсии, и, как было отмечено ранее, является независимой от η_1 , а величина $(n - 1)s^2/\sigma^2$ распределена как χ^2 -переменная с $(n - 1)$ степенями свободы.

Распределение Стьюдента симметрично относительно $t = 0$. При $n = 1$ оно переходит в распределение Коши, а при $n \rightarrow \infty$ — приближается к стандартному нормальному распределению $N(0, 1)$. С помощью функции распределения вероятностей Стьюдента можно построить доверительные границы для математического ожидания m_ξ .

1.8.6. Распределения Фишера и Z -распределение

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_1}$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n_2}$ — случайные величины из двух нормальных совокупностей $\xi_i \in N(m_1, \sigma_1^2)$ и $\eta_i \in N(m_2, \sigma_2^2)$, причем выборочные дисперсии

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (\xi_i - \bar{\xi})^2 \quad \text{и} \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (\eta_i - \bar{\eta})^2$$

независимы и величины $n_1 s_1^2 / \sigma_1^2$ и $n_2 s_2^2 / \sigma_2^2$ распределены как $\chi_{n_1}^2$ и $\chi_{n_2}^2$ соответственно, тогда говорят, что величина

$$\zeta = \frac{s_1^2}{\sigma_1^2} \frac{\sigma_2^2}{s_2^2} \tag{1.48}$$

имеет распределение Фишера или F -распределение с (n_1, n_2) степенями свободы (или распределение отношения дисперсий) (рис. 1.35):

$$f_\zeta(F) = \frac{n_1^{n_2/2} n_2^{n_1/2} F^{(n_1+n_2)/2}}{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2})} \frac{F^{(n_1/2)-1}}{(n_1 + n_2 F)^{(n_1+n_2)/2}},$$

где степени свободы n_1 и n_2 являются параметрами распределения.

- Математическое ожидание $M\zeta = n_2/n_2 - 2$, $n_2 > 2$.
- Дисперсия

$$D\zeta = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}, \quad n_2 > 4.$$

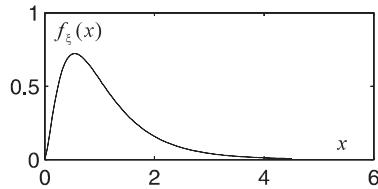


Рис. 1.35. Распределение Фишера ($n_1 = 5$, $n_2 = 50$).

Распределение Фишера — положительное, асимметричное и приближается к нормальному при $n_1, n_2 \rightarrow \infty$, но довольно медленно ($n_1, n_2 > 50$). Распределение Фишера используется в задачах проверки гипотез, например, при определении степени аппроксимирующего полинома.

У переменной $Z = (1/2) \ln F$ (Z — вещественное число) распределение гораздо ближе к нормальному и называется Z -распределение. Параметрами Z -распределения являются степени свободы n_1 и n_2 . Функция плотности вероятностей записывается следующим образом:

$$f(Z) = \frac{2n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2}}{B(n_1/2, n_2/2)} \frac{e^{n_1 z}}{[n_1 e^{2z} + n_2]^{(n_1+n_2)/2}},$$

При этом математическое ожидание и дисперсия даются соответственно формулами

$$M\zeta = \frac{1}{2}[n_2^{-1} - n_1^{-1}] - \frac{1}{6}[n_1^{-2} - n_2^{-2}]$$

и

$$D\zeta = \frac{1}{2}[n_1^{-1} + n_2^{-1}] + \frac{1}{2}[n_1^{-2} + n_2^{-2}] + \frac{1}{3}[n_1^{-3} + n_2^{-3}].$$

Z -распределение используется при оценке доверительного интервала коэффициента корреляции.

1.8.7. Треугольное распределение

Случайная величина ξ имеет треугольное распределение, если ее функция плотности имеет вид

$$f_\xi(x) = \begin{cases} r^{-1} + |x - m|/r^2 & \text{при } m - r < x < m + r, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Параметры распределения $m, r > 0$.

- Математическое ожидание $M\xi = m$.
- Дисперсия $D\xi = r^2/6$.
- Коэффициент асимметрии $\gamma_1 = 0$.
- Эксцесс $\gamma_2 = -0.6$.

В качестве примера появления треугольного распределения можно рассмотреть сумму двух величин ξ_1 и ξ_2 , каждое из которых выбрано независимо в соответствии с равномерным распределением.

1.8.8. Бета-распределение

Случайная величина ξ имеет бета-распределение, если ее плотность вероятностей представляется в виде

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)} x^{m-1} (1-x)^{n-1} & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при остальных } x, \end{cases}$$

где n и m — положительные целые числа.

- Математическое ожидание $M\xi = m/(m+n)$.
- Дисперсия

$$D\xi = \frac{mn}{(m+n)^2(m+n+1)}.$$

Бета-распределение является основным распределением в статистике для переменных, имеющих двустороннее ограничение, например $0 < x < 1$.

1.8.9. Экспоненциальное распределение

Случайная величина ξ , распределенная по экспоненциальному закону, имеет следующую плотность вероятностей:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (1.49)$$

где $\lambda > 0$ — положительное число (параметр распределения) (рис. 1.36).

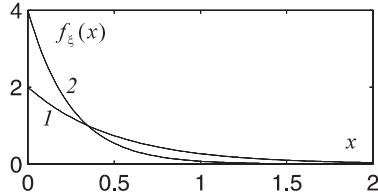


Рис. 1.36. Экспоненциальное распределение:
1 — $\lambda = 2$, 2 — $\lambda = 4$.

- Математическое ожидание $M\xi = \lambda^{-1}$.
- Дисперсия $D\xi = \lambda^{-2}$.
- Коэффициент асимметрии $\gamma_1 = 2$.
- Эксцесс $\gamma_2 = 6$.

Характеристическая функция дается выражением

$$g(t) = (1 - it/\lambda)^{-1}.$$

Экспоненциальное распределение имеет большое значение в теории марковских случайных процессов. Если на оси времени имеется стационарный пуссоновский поток с интенсивностью λ , то интервал времени между двумя соседними событиями имеет показательное распределение с параметром λ .

1.8.10. Распределение Лапласа

Случайная величина ξ подчинена закону Лапласа, если ее плотность

$$f_\xi(x) = (\lambda/2) \exp(-\lambda|x|), \quad (1.50)$$

где λ — параметр (рис. 1.37).

- Математическое ожидание $M\xi = 0$.
- Дисперсия $D\xi = 2/\lambda^2$.

Распределение Лапласа играет важную роль при построении робастных оценок, при условии, когда используется модель с резкими выбросами.

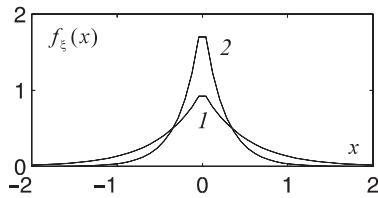


Рис. 1.37. Распределение Лапласа:
1 — $\lambda = 2$, 2 — $\lambda = 4$.

1.8.11. Распределение Коши

Случайная величина ζ с плотностью распределения

$$f_\zeta(x) = (1/\pi)(1/(1+x^2)) \quad (1.51)$$

имеет распределение Коши (рис. 1.38). Это распределение может

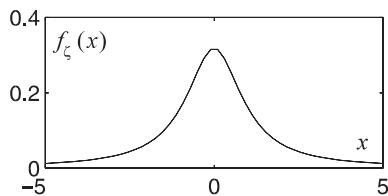


Рис. 1.38. Распределение Коши.

быть получено как распределение отношения $\zeta = \xi/\eta$ двух случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение $\xi \in N(0, 1)$, $\eta \in N(0, 1)$.

Математическое ожидание $M\zeta$ не определено, дисперсия, асимметрия, эксцесс — расходящиеся. Характеристическая функция имеет вид

$$g(t) = \exp(-|t|).$$

Распределение Коши занимает особое место в теории вероятностей и приложениях, так как его математическое ожидание не определено, а все другие моменты расходящиеся.

1.8.12. Логарифмически нормальное распределение

Если $\eta = \ln \xi$ распределена по нормальному закону, то плотность вероятностей $f_\xi(x)$ называется логарифмически нормальной и имеет следующий вид (рис. 1.39):

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(\ln x - m)^2\right\}, \quad (1.52)$$

где m, σ — параметры распределения.

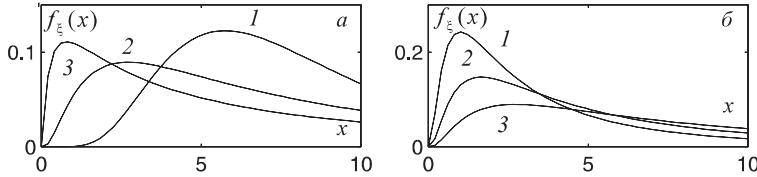


Рис. 1.39. Логарифмически нормальное распределение. a — $m = 2.0, \sigma = 0.5$ (1); 1.0 (2); 1.5 (3); b — $\sigma = 1.0, m = 1.0$ (1); 1.5 (2); 2.0 (3).

- Математическое ожидание $M\xi = \exp(m - \sigma^2/2)$.
- Дисперсия $D\xi = \exp(2m + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)$.
- Коэффициент асимметрии $\gamma_1 = (\exp(\sigma^2) - 1)^{1/2}(\exp(\sigma^2) + 2)$.
- Эксцесс

$$\gamma_2 = (\exp(\sigma^2) - 1)(\exp(3\sigma^2) + 3\exp(2\sigma^2) + 6\exp(\sigma^2) + 6).$$

Логарифмически нормальное распределение служит моделью для описания ошибки некоторого процесса, включающего большое число малых мультипликативных ошибок.

1.8.13. Значение нормального распределения

Анализ описанных распределений, наиболее часто используемых при описании моделей геофизических полей, показывает, что многие из них тесно связаны с нормальным распределением в двух

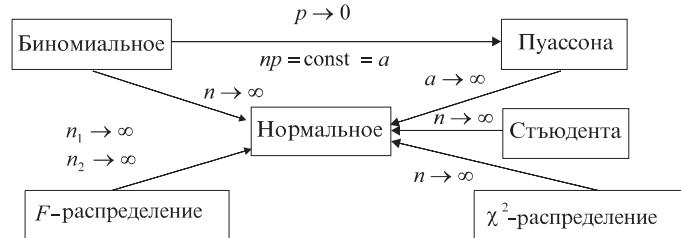


Рис. 1.40. Асимптотические свойства распределений и их связь с нормальным распределением.

аспектах — либо оно асимптотически переходит в нормальное, либо само появление распределения связано с нормальным распределением. Асимптотические свойства распределений и их связь с нормальным распределением представлены на рис. 1.40.

Распределения вероятностей случайных величин, являющихся функциями нормально распределенных случайных величин, представлены на рис. 1.41.

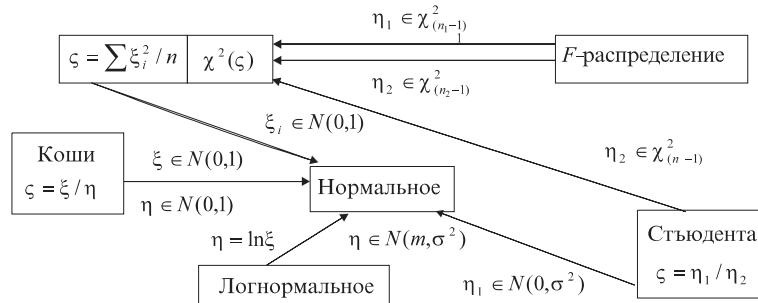


Рис. 1.41. Распределения вероятностей, определяемые на основе нормального распределения.

1.8.14. Доверительные интервалы

Вследствие случайности результатов опыта невозможно установить достаточно узкие пределы для возможных отклонений оценки параметра от его истинного значения. Поэтому возникает задача

определения по результатам опытов таких пределов, из которых ошибка оценки не выходила бы с заданной вероятностью.

Случайный интервал, который с заданный вероятностью β на-
крывает неизвестный параметр ρ

$$P(|\tilde{\rho} - \rho| < \varepsilon) = \beta, \quad P(\tilde{\rho} - \varepsilon < \rho < \tilde{\rho} + \varepsilon) = \beta,$$

называется доверительным интервалом этого параметра, а ве-
роятность β называется *доверительной вероятностью*. Величина
 $1 - \beta$ называется *уровнем значимости отклонения оценки*. Концы
доверительного интервала $I_\beta = (\tilde{\rho} - \varepsilon, \tilde{\rho} + \varepsilon)$ называются *довери-
тельныйми границами*.

Рассмотрим построение доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии. Отметим, что задача определения упомянутых доверительных интервалов для произвольного числа опытов n решена только для случая нормального распределения случайной величины ξ . При построении доверительных интервалов будем использовать выборочную оценку математического ожидания $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho} = \bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

являющуюся средним арифметическим значением случайных величин ξ_i , полученных в n независимых опытах.

Если дисперсия σ_ξ^2 случайной величины ξ известна, выборочное среднее $\bar{\xi}$ распределено по нормальному закону с математическим ожиданием m_ξ и со среднеквадратичным отклонением $\sigma_m = \sigma_\xi / \sqrt{n}$, поэтому

$$\begin{aligned} P\{-l \leq (\bar{\xi} - m_\xi) \sqrt{n} / \sigma_\xi \leq l\} &= 2\Phi(l) - 1, \\ P\{\bar{\xi} - l\sigma_\xi / \sqrt{n} \leq m_\xi \leq \bar{\xi} + l\sigma_\xi / \sqrt{n}\} &= 2\Phi(l) - 1. \end{aligned}$$

Если дисперсия σ_ξ^2 неизвестна, введем в рассмотрение случайную величину

$$\eta = \sqrt{n}(\bar{\xi} - m_\xi) / s,$$

где

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2 \tag{1.53}$$

— выборочная дисперсия случайной величины ξ . Можно показать, что случайная величина η распределена по закону Стьюдента, что позволяет определить доверительный интервал $P\{|\eta| < t_\beta\} = \beta$:

$$P\{\bar{\xi} - t_\beta s/\sqrt{n} \leq m_\xi \leq \bar{\xi} + t_\beta s/\sqrt{n}\} = \beta.$$

На рис. 1.42 представлен 5 %-ный доверительный интервал для распределения Стьюдента.

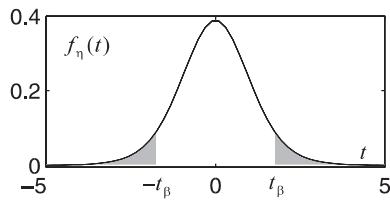


Рис. 1.42. Распределение Стьюдента ($n=10$) и 5 %-ный доверительный интервал.

Построим доверительный интервал для дисперсии σ_ξ^2 случайной величины ξ ($\xi_i \in N(m_\xi, \sigma_\xi^2)$). Последовательность значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ получены в результате n независимых опытов. Можно показать, что величина

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_\xi^2}$$

имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенью свободы. Принимая во внимание очевидные равенства

$$1 - P(\chi^2 > \chi_1^2) = P(\chi^2 < \chi_1^2) = \alpha/2, \quad P(\chi^2 > \chi_2^2) = \alpha/2,$$

$$P(\chi_1^2 < (n-1)s^2/\sigma^2 < \chi_2^2) = 1 - P(\chi^2 < \chi_1^2) - P(\chi^2 > \chi_2^2) = 1 - \alpha,$$

запишем выражение, связывающее величину доверительного интервала с уровнем значимости отклонения оценки α :

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}\right) = 1 - \alpha.$$

На рис. 1.43 отмечены области, отвечающие уровню значимости $\alpha=0.13$.

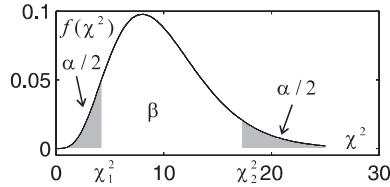


Рис. 1.43. χ^2 -распределение: $\alpha=0.13$.

1.8.15. Задачи

- Построить функции распределения $F_\xi(x)$ для случайной величины ξ , равномерно распределенной на участке (a, b) .
- Случайная величина подчинена закону Симпсона (треугольное распределение) на участке $(-a, a)$. Построить график функции распределения. Вычислить $M\xi$, $D\xi$, γ_1 . Найти вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $(a/2, a)$.
- Отбраковка детонаторов для подготовки взрывного источника в сейсморазведке производится следующим образом. Если детонатор имеет сопротивление R в интервале $R_1 < R < R_2$, то он считается приемлемым для работы, если условие не выполняется, то детонатор бракуется. Известно, что сопротивление детонатора имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $MR = (R_1 + R_2)/2$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma_R = (R_2 - R_1)/4$. Определить вероятность того, что детонатор будет забракован.
- В условиях предыдущей задачи найти среднее квадратичное отклонение σ_R сопротивления детонатора, если известно, что брак составит 10% всей продукции.
- При работе прибора в случайные моменты возникают неисправности. Время T работы прибора до первой неисправности распределено по показательному закону $f_\xi(t) = \nu \exp\{-\nu t\}$ с параметром ν ($t > 0$). При возникновении неисправности она немедленно обнаруживается и прибор поступает в ремонт. Продолжительность ремонта равна t_0 , после чего прибор снова поступает в работу. Найти плотность $f_\zeta(t)$ и функцию распределения $F_\zeta(t)$ промежутка времени ζ между двумя соседними неисправностями. Найти его

математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность того, что ζ будет больше $2t_0$.

6. Рассматривается пуассоновское поле точек на плоскости с постоянной плотностью λ . Найти закон распределения и числовые характеристики m_r , D_r расстояния от любой точки поля до ближайшей к ней соседней точки.

7. В некотором звездном скоплении звезды образуют трехмерное пуассоновское поле точек с плотностью λ (среднее количество звезд в единице объема). Фиксируется одна (произвольная) звезда и рассматриваются: ближайшая от нее звезда, следующая (вторая) по удаленности, третья и т. д. Найти закон распределения расстояния R_n от данной звезды до n -й в этом ряду.

8. Железисто-марганцевые конкреции (ЖМК) располагаются на дне океана в случайных точках, образуют пуассоновское поле с плотностью λ (среднее число конкреций на единицу площади). Выбирается производная точка O на дне. Рассматривается случайная величина R_1 — расстояние от точки O до ближайшей ЖМК. Найти распределение R_1 .

9. Будем рассматривать амплитуду сейсмического сигнала в заданный момент t_0 как нормально распределенную случайную величину ξ с математическим ожиданием $m_\xi = 0$. Задан интервал (α, β) , не включающий начало координат. При каком значении среднего квадрата отклонения вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (α, β) будет максимальным?

1.9. Информация и энтропия

Физическое содержание информации, вытекающее из термодинамики и статистической физики, основывается на понятии энтропии — меры неопределенности состояния физической системы.

1.9.1. Энтропия множества дискретных состояний системы

В случае конечного множества возможных состояний системы x_1, x_2, \dots, x_n , образующих полную группу несовместных событий,

и соответствующих им вероятностей p_1, p_2, \dots, p_n , энтропия определяется формулой

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i. \quad (1.54)$$

Выбор основания логарифма определяет единицу измерения энтропии 2 — *двоичная* (или *bit*¹), e — *натуральная*, 10 — *десятичная*. Так, при выборе 2 в качестве основания логарифма величина энтропии, равная единице, отвечает простейшей системе двух равновозможных состояний

$$\begin{array}{c|cc|c} x & x_1 & x_2 \\ \hline p & 1/2 & 1/2 \end{array},$$

а

$$H = - \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right) = 1$$

— это энтропия одного разряда двоичного числа, если он с одинаковой вероятностью может быть 0 и 1.

Если система имеет n равновероятных состояний x_i с вероятностями $p_i = 1/n$, то энтропия системы равна

$$H = -n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n.$$

Если априори состояние системы известно, то ее энтропия $H = 0$. В этом случае все $p_i = 0$ кроме одного $p_{i_0} = 1$. Энтропия системы с конечным множеством состояний достигает максимума, когда все состояния равновероятны.

Можно представить энтропию, как математическое ожидание

$$H_\xi = M[-\log p_\xi], \quad (1.55)$$

где $\log p_\xi$ — логарифм вероятности случайного состояния системы, рассматриваемой как случайная величина ξ .

1.9.2. Энтропия сложной системы

Рассмотрим объединение двух систем ξ и η с возможными состояниями x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n соответственно. Состояния (x_i, y_i) сложной системы (ξ, η) представляются сложными комбинациями x_i, y_i и соответствующими вероятностями (табл. 1.1).

¹Слово *bit* образовано от *binary digit* — двоичная цифра или двоичная единица.

Таблица 1.1. Представление совместной функции распределения двух дискретных случайных величин x_i и y_j

$y_i \setminus x_i$	x_1	x_2	\dots	x_{n-1}	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	\dots	$p_{1\ n-1}$	$p_{1\ n}$
y_2	p_{21}	p_{22}	\dots	$p_{2\ n-1}$	$p_{2\ n}$
\vdots	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot
y_m	p_{m1}	p_{m2}	\dots	$p_{m\ n-1}$	$p_{m\ n}$

Энтропия сложной системы записывается как

$$H_{\xi\eta} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \log p_{ij}, \quad H_{\xi\eta} = M[-\log p(\xi, \eta)].$$

Для независимых случайных величин

$$p(\xi, \eta) = p(\xi)p(\eta)$$

и

$$H_{\xi\eta} = H_\xi + H_\eta, \quad (1.56)$$

или обобщая на случай произвольного числа независимых систем, получим

$$H_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n} = H_{\xi_1} + H_{\xi_2} + \dots + H_{\xi_n}.$$

При объединении независимых систем их энтропии складываются.

В случае зависимых систем вводится понятие условной энтропии системы ξ при условии, что система η находится в состоянии y_j :

$$H_{\xi/y_j} = - \sum_{i=1}^n p(x_i/y_j) \log p(x_i/y_j), \quad (1.57)$$

или

$$H_{\xi/y_j} = M[-\log p(\xi/y_j)]. \quad (1.58)$$

Средняя или полная энтропия системы определяется как

$$H_{\xi/\eta} = \sum_{j=1}^m p_j H_{\xi/y_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_j p(x_i/y_j) \log p(x_i/y_j). \quad (1.59)$$

Учитывая, что $p_j p(x_i/y_j) = p_{ij}$ (совместная вероятность), получаем

$$H_{\xi/\eta} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \log p(x_i/y_j). \quad (1.60)$$

Энтропия объединенной системы (ξ, η) определяется формулами

$$H_{\xi\eta} = H_\xi + H_{\eta/\xi}, \quad \text{или} \quad H_{\xi\eta} = H_\eta + H_{\xi/\eta}, \quad (1.61)$$

что легко доказывается из определения энтропии и теоремы умножения вероятностей

$$p(\xi, \eta) = p(\xi)p(\eta/\xi) = p(\eta)p(\xi/\eta).$$

1.9.3. Информация Шеннона (дискретный случай)

Понятие количества информации тесно связано с понятием энтропии, являющейся мерой неопределенности. Получение информации сопровождается уменьшением неопределенности, поэтому количество информации можно измерить уменьшением неопределенности, т. е. энтропии.

Пусть ξ — наблюдаемая случайная величина, описывающая некоторую физическую систему. Энтропию до наблюдения (априорную) обозначим H_ξ^{apr} , а энтропию после наблюдения (апостериорную) — H_ξ^{apost} , тогда шенноновская информация определяется следующим образом:

$$I_\xi^{\text{Sh}} = H_\xi^{\text{apr}} - H_\xi^{\text{apost}}. \quad (1.62)$$

В частном случае, когда в результате наблюдения ξ состояние системы полностью определилось, т. е. $H_\xi^{\text{apost}} = 0$, информация равна

$$I_\xi^{\text{Sh}} = H_\xi^{\text{apr}} = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

или

$$I_\xi^{\text{Sh}} = M[-\log p(\xi)]. \quad (1.63)$$

Однако непосредственное наблюдение за случайной величиной ξ часто оказывается невозможным и заключение о состоянии системы, описываемой ξ , принимается по наблюдениям за другой случайной величиной η , связанной с ξ . Так например, в радиолокации

наблюдение ведется на экране локатора за отраженным сигналом η , а не непосредственно за самолетом ξ . В сейсморазведке заключение о внутреннем строении земной коры ξ производится на основе наблюдения сейсмического поля η на дневной поверхности. Количество информации о системе ξ при наблюдении системы η определяется как уменьшение энтропии системы ξ при наблюдении системы η :

$$I_{\eta \rightarrow \xi}^{\text{Sh}} = H_\xi - H_{\xi/\eta}, \quad (1.64)$$

$I_{\xi \rightarrow \eta}^{\text{Sh}}$ называется полной или средней информацией, содержащейся в системе η о системе ξ . Легко показать, что

$$I_{\xi \rightarrow \eta}^{\text{Sh}} = H_\eta - H_{\eta/\xi}. \quad (1.65)$$

Учитывая

$$H_{\xi\eta} = H_\xi + H_{\eta/\xi} = H_\eta + H_{\xi/\eta},$$

получим

$$I_{\xi \rightarrow \eta}^{\text{Sh}} = I_{\eta \rightarrow \xi}^{\text{Sh}} = I_{\eta \leftrightarrow \xi}^{\text{Sh}},$$

где $I_{\eta \leftrightarrow \xi}^{\text{Sh}}$ — полная взаимная информация. Если случайные величины ξ и η , описывающие системы, являются независимыми, то $I_{\eta \leftrightarrow \xi} = 0$, так как $H_{\eta/\xi} = H_\eta$, $H_{\xi/\eta} = H_\xi$. Можно представить $I_{\eta \leftrightarrow \xi}$ через энтропию объединенной системы

$$I_{\eta \leftrightarrow \xi} = H_\xi + H_\eta - H_{\xi\eta} \quad (1.66)$$

или, используя оператор математического ожидания,

$$\begin{aligned} I_{\eta \leftrightarrow \xi} &= M[-\log p(\xi) - \log p(\eta) + \log p(\xi, \eta)], \\ I_{\eta \leftrightarrow \xi} &= M \left[\log \frac{p(\xi, \eta)}{p(\xi)p(\eta)} \right], \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$I_{\eta \leftrightarrow \xi} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_{\xi i} p_{\eta j}}. \quad (1.68)$$

При решении практических задач может возникнуть необходимость в оценке частной информации $I_{y_j \rightarrow x}$ о системе ξ , содержащейся в отдельном сообщении, связанном с конкретным состоянием y_j , причем полная информация $I_{\eta \leftrightarrow \xi}$ является математическим

ожиданием по всем сообщениям y_j $j = 1, 2, \dots, m$, от частной информации

$$I_{\eta \leftrightarrow \xi} = \sum_{j=1}^m p_j I_{y_j \rightarrow \xi}, \quad (1.69)$$

где

$$I_{y_j \rightarrow \xi} = \sum_{i=1}^n p(x_i/y_j) \log \frac{p(x_i/y_j)}{p_{\xi i}}. \quad (1.70)$$

Выражение (1.70), определяющее частную информацию, можно переписать в следующем виде:

$$I_{y_j \rightarrow \xi} = M_{y_j} \left[\log \frac{p(\xi/y_j)}{p(\xi)} \right], \quad (1.71)$$

где M_{y_j} — оператор условного математического ожидания. Можно показать, что частная информация $I_{y_j \rightarrow \xi}$, так же как и полная $I_{\eta \rightarrow \xi}$, не может быть отрицательной. Частную информацию о событии x_i , получаемую в результате сообщения о другом событии y_j , можно представить в виде

$$I_{y_j \rightarrow x_i} = \log \frac{p(x_i/y_j)}{p_{\xi i}}. \quad (1.72)$$

Следует отметить, что такая частная информация от события к событию, в отличие от введенной выше полной $I_{\eta \leftrightarrow \xi}$ и частной $I_{y_j \rightarrow \xi}$ информации, может быть как положительной, так и отрицательной.

1.9.4. Энтропия и информация для систем с непрерывным множеством состояний

Мерой неопределенности системы, описываемой случайной величиной ξ , принимающей непрерывный ряд значений и заданной плотностью вероятностей, является дифференциальная энтропия H_ξ , определяемая формулой

$$H_\xi = - \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) \log f_\xi(x) dx,$$

или

$$H_\xi = M[-\log f_\xi(x)]. \quad (1.73)$$

При наличии двух непрерывных систем ξ и η , их совместной плотности $f_{\xi\eta}(x, y)$, маргинальных плотностей $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$ и условных плотностей $f_{\eta/\xi}(y/x)$, $f_{\xi/\eta}(x/y)$ можно ввести частную условную энтропию $H_{\eta/x}$, т. е. энтропию системы η при условии, что система ξ приняла определенное состояние

$$H(\eta/x) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta\xi}(y/x) \log f_{\eta\xi}(y/x) dy.$$

Полная или средняя условная энтропия определяется как

$$H(\eta/\xi) = - \iint_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_{\eta/\xi}(y/x) \log f_{\eta/\xi}(y/x) dx dy,$$

или, с учетом, что $f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_{\eta/\xi}(y/x)$,

$$H(\eta/\xi) = - \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y) \log f_{\eta/\xi}(y/x) dx dy.$$

Аналогично тому, как это было сделано для дискретного случая, можно показать, что энтропия объединенной системы (ξ, η) равна

$$H(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta/\xi), \quad (1.74)$$

для независимых случайных величин или состояний системы ξ и η

$$H(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta). \quad (1.75)$$

Пример 1. В классе непрерывных распределений $f_\xi(x)$ случайной величины ξ найти такое, которое при заданных математическом ожидании m_ξ и дисперсии σ_ξ^2 дает максимум энтропии H_ξ ($\max H_\xi$).

Дано:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = m_\xi,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 f_{\xi}(x) dx = \sigma_{\xi}^2.$$

Н а й т и:

$$\hat{f}_{\xi}(x) \Rightarrow \max \left[- \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) \log f_{\xi}(x) dx \right].$$

Нахождение $\hat{f}_{\xi}(x)$ сводится к решению вариационной задачи

$$\hat{f}_{\xi}(x) \Rightarrow \max \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f_{\xi}(x), x) dx \right]$$

при дополнительных условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(f_{\xi}(x), x) dx = c_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(f_{\xi}(x), x) &= -f_{\xi}(x) \log f_{\xi}(x), \\ \varphi_1 &= f_{\xi}(x), \quad c_1 = 1, \\ \varphi_2 &= x f_{\xi}(x), \quad c_2 = m_{\xi}, \\ \varphi_3 &= (x - m_{\xi})^2 f_{\xi}(x), \quad c_3 = \sigma_{\xi}^2. \end{aligned}$$

Запишем уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \partial \Phi_1 / \partial f &= 0, \\ \Phi_1(f, x) &= -f \log f + \lambda_1 f + \lambda_2 x f + \lambda_3 (x - m_{\xi})^2 f. \end{aligned}$$

Проводя дифференцирование, получим уравнение

$$-1 - \log f + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 (x - m_{\xi})^2 = 0,$$

решение которого относительно f можно записать следующим образом:

$$f_{\xi}(x) = \exp(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 (x - m_{\xi})^2 - 1).$$

Используя дополнительные условия

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3(x - m_{\xi})^2 - 1) dx &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3(x - m_{\xi})^2 - 1) dx &= m_{\xi}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 \exp(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3(x - m_{\xi})^2 - 1) dx &= \sigma_{\xi}^2, \end{aligned}$$

получим

$$\lambda_1 = 1 - \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}), \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -(2\sigma_{\xi}^2)^{-1}$$

и

$$\hat{f}_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma_{\xi}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - m_{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right\}.$$

Таким образом, нормальное распределение соответствует максимальной энтропии в классе распределений с заданными первыми двумя моментами.

Выражение для полной взаимной информации, содержащейся в двух непрерывных системах ξ и η , аналогично выражению (1.68) для дискретного случая, но с заменой вероятностей дискретных событий функциями распределения, может быть записано в виде

$$I_{\eta \leftrightarrow \xi} = \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y) \log \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_{\xi}(x)f_{\eta}(y)} dx dy,$$

или, применяя оператор математического ожидания,

$$I_{\eta \leftrightarrow \xi} = M [\log(f_{\xi\eta}/f_{\xi}f_{\eta})], \quad (1.76)$$

где $I_{\eta \leftrightarrow \xi}$ — неотрицательная величина, обращающаяся в нуль только для независимых ξ и η .

П р и м е р 2. Рассмотрим простую модель

$$\eta = \xi + \zeta,$$

где η — регистрируемый сигнал, ξ — переданный сигнал, имеющий нормальное распределение $N(m_\xi = 0, \sigma_\xi^2)$, ζ — аддитивный шум, имеющий нормальное распределение $N(m_\zeta, \sigma_\zeta^2)$, причем ξ и ζ независимы.

Н а й т и: $I_{\eta \leftrightarrow \xi}$ — количество информации о сигнале ξ , содержащееся в измерении η .

По определению

$$I_{\eta \leftrightarrow \xi} = M \left[\log \frac{f_{\xi \eta}}{f_\xi f_\eta} \right] = M \left[\log \frac{f_{\eta/\xi}}{f_\eta} \right] = M\kappa, \quad \kappa = \log \frac{f_{\eta/\xi}}{f_\eta}.$$

По условию задачи $\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2$,

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{y^2}{(\sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2)} \right\},$$

$$f_{\eta/\xi}(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\sqrt{1-r^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{y}{\sigma_\eta} - r \frac{x}{\sigma_\xi} \right]^2 \right\},$$

Найдем коэффициент корреляции η и ξ , учитывая, что $\eta = \xi + \zeta$:

$$r = \frac{1}{\sigma_\eta \sigma_\xi} M(\eta \cdot \xi) = \frac{1}{\sigma_\eta \sigma_\xi} [M(\xi^2) + M(\xi \zeta)] = \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}.$$

Подставляя r в $f_{\eta/\xi}(y/x)$, получим

$$f_{\eta/\xi}(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\zeta} \exp \left\{ -\frac{(y-x)^2}{2\sigma_\zeta^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\zeta} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma_\zeta^2} \right\}.$$

Воспользуемся полученными соотношениями и найдем величину κ :

$$\kappa = \log \frac{\sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2}}{\sigma_\zeta} + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{\zeta^2}{2\sigma_\zeta^2} - \frac{\eta^2}{2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2)} \right].$$

Теперь осталось вычислить математическое ожидание

$$M\kappa = I_{\eta \leftrightarrow \xi} = \log \frac{\sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2}}{\sigma_\zeta} + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{M\zeta^2}{2\sigma_\zeta^2} - \frac{M\eta^2}{2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2)} \right].$$

Учитывая, что $M\zeta^2 = \sigma_\zeta^2$, $M\eta^2 = \sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2$, получим

$$I_{\eta \leftrightarrow \xi} = \log \frac{\sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2}}{\sigma_\zeta}.$$

Итак, информация о сигнале ξ , содержащаяся в зарегистрированном сигнале η , равна логарифму отношения стандартного отклонения сигнала η (σ_η) к стандартному отклонению шума ζ (σ_ζ).

1.9.5. Информация Фишера

Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x, \theta)$, где θ — параметр распределения. Предположим, что $f_\xi(x, \theta)$ дифференцируема по θ , тогда под *фишеровской информацией* о неизвестном параметре θ , содержащейся в случайной величине ξ или ее функции плотности распределения $f_\xi(x, \theta)$, понимается уменьшение неопределенности о неизвестном значении θ после наблюдения случайной величины. Количество информации о θ , содержащееся в случайной величине ξ , определяется по Фишеру как

$$I_\xi^{(F)}(\theta) = M[(\partial \log f_\xi(x, \theta) / \partial \theta)^2]. \quad (1.77)$$

Для векторной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и вектора параметров распределения $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ вводится *матрица Фишера* размерности $[S \times S]$ с элементами

$$I_{ss'}^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) = M \left[\frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} \frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{s'}} \right]. \quad (1.78)$$

Информация Фишера обладает следующими свойствами.

1. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, $I_{\xi_1}^{(F)}(\theta)$, $I_{\xi_2}^{(F)}(\theta)$ — количество информации о θ , содержащееся в паре (ξ_1, ξ_2) . Тогда

$$I_{\xi_1 \xi_2}^{(F)}(\theta) = I_{\xi_1}^{(F)}(\theta) + I_{\xi_2}^{(F)}(\theta).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
I_{\xi_1 \xi_2}^{(F)}(\theta) &= M \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [\log f_{\xi_1}(x, \theta) \cdot f_{\xi_2}(x, \theta)] \right\}^2 = \\
&= M \left[\left(\frac{\partial \log f_{\xi_1}(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] + M \left[\left(\frac{\partial \log f_{\xi_2}(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\
&\quad + 2M \left[\frac{\partial \log f_{\xi_1}(x, \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \log f_{\xi_2}(x, \theta)}{\partial \theta} \right] = \\
&= I_{\xi_1}^{(F)}(\theta) + I_{\xi_2}^{(F)}(\theta),
\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
M \left[\frac{\partial \log f_{\xi_1}(x, \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \log f_{\xi_2}(x, \theta)}{\partial \theta} \right] &= \\
&= M \left[\frac{\partial \log f_{\xi_1}(x, \theta)}{\partial \theta} \right] \cdot M \left[\frac{\partial \log f_{\xi_2}(x, \theta)}{\partial \theta} \right] = 0.
\end{aligned}$$

2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые, одинаково распределенные величины и $I_{\xi}^{(F)}(\theta)$ — количество информации о θ , содержащееся в каждой из них. Тогда количество информации в $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ равно $nI_{\xi}^{(F)}(\theta)$. Аналогично скалярному случаю можно показать следующее:

- 1'. Если $I_{\xi_1}^{(F)}(\boldsymbol{\theta})$ и $I_{\xi_2}^{(F)}(\boldsymbol{\theta})$ — информационные матрицы, отвечающие случайнм величинам ξ_1 и ξ_2 , то информационная матрица, отвечающая паре (ξ_1, ξ_2) , равна

$$I_{\xi_1 \xi_2}^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) = I_{\xi_1}^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) + I_{\xi_2}^{(F)}(\boldsymbol{\theta}).$$

- 2'. Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые, одинаково распределенные величины и $I_{\xi}^{(F)}(\boldsymbol{\theta})$ — количество информации о $\boldsymbol{\theta}$, содержащееся в каждом из ξ_i , то количество информации в $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ равно $nI_{\xi}^{(F)}(\boldsymbol{\theta})$.

3. Пусть задана функция $T = T(\xi)$ случайной величины ξ , тогда

$$I_{\xi}^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) - I_T^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) \geq 0,$$

т. е. матрица является неотрицательно определенной, а в случае одного параметра θ

$$I_{\xi}^{(F)} \geq I_T^{(F)},$$

т. е. количество информации о θ , содержащееся в случайной величине, всегда больше или равно количеству информации, содержащейся в функции случайной величины $T = T(\xi)$.

Если по наблюденному значению случайной величины можно с вероятностью 1 точно восстановить значение параметра θ , то в этом случае говорят, что случайная величина содержит максимально возможную информацию о параметре. Но если распределение остается неизменным при всех значениях параметра, то нельзя судить о величине θ по результатам наблюдений за случайной величиной. Чувствительность случайной величины к параметру может быть измерена величиной изменения распределения этой случайной величины при изменении значения параметра.

В случае векторного параметра $\boldsymbol{\theta}$ роль расстояния между распределениями при переходе от $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ к $(\theta_1 + \delta\theta_1, \theta_2 + \delta\theta_2, \dots, \theta_s + \delta\theta_s)$ играет квадратичная форма

$$\sum_s \sum_{s'} I_{ss'}^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) \delta\theta_s \delta\theta_{s'}.$$

Формулу (1.77) для фишеровской информации можно переписать в виде

$$I_{\xi}^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) = M \left[-\frac{\partial^2 \log f_{\xi}(x, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \right], \quad (1.79)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log f}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} &= -\frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^2 + \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}; \quad \left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^2 = \left(\frac{\partial \log f}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^2, \\ M \left(\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x, \boldsymbol{\theta}) \frac{1}{f_{\xi}(x, \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial^2 f_{\xi}(x, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} dx = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x, \boldsymbol{\theta}) dx = 0. \end{aligned}$$

В случае векторного параметра $(\boldsymbol{\theta})$, используя аналогичные соотношения, будем иметь

$$I_{ss'}^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) = M \left[-\frac{\partial^2 \log f(x, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s \partial \theta_{s'}} \right]. \quad (1.80)$$

П р и м е р. Пусть переменная ξ распределена по нормальному закону с известной дисперсией σ_ξ^2 и неизвестным средним m_ξ . Найти количество информации о m_ξ , содержащейся в одном наблюдении ξ . Фишеровское количество информации о m_ξ , содержащееся в одном измерении, равно

$$\begin{aligned} I_\xi^{(F)}(m_\xi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial m_\xi^2} \left[-\frac{(x - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2} - \ln \sigma_\xi \sqrt{2\pi} \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp \left[-\frac{(x - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2} \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_\xi^2 \sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp \left[-\frac{(x - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2} \right] dx = \frac{1}{\sigma_\xi^2}. \end{aligned}$$

Если бы мы имели n наблюдений (x_1, \dots, x_n) , то

$$\begin{aligned} I_{\xi_1, \dots, \xi_n}^{(F)}(m) &= \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial m_\xi^2} \left[\sum_{i=1}^n \left(-\frac{(x_i - m_\xi)^2}{\sigma_\xi^2} \right) l \ln(\sigma_\xi \sqrt{2\pi}) \right] \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x_i - m_\xi)^2}{\sigma_\xi^2} \right] dx_1 \dots dx_n = \frac{n}{\sigma_\xi^2}. \end{aligned}$$

1.9.6. Задачи

1. Найти энтропию случайной величины ξ , соответствующей фазе сейсмического сигнала, при условии, что ξ имеет равномерное распределение на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$.
2. Найти энтропию случайной величины ξ , соответствующей амплитуде сейсмического сигнала, распределенной по нормальному закону $N(0, \sigma^2)$.

3. Состояние сейсмического сигнала характеризуется тремя случайными величинами: амплитудой ξ_A , распределенной по нормальному закону $N(0, \sigma_A^2)$; фазой ξ_φ , распределенной с равномерной плотностью в интервале $(0, \pi)$; моментом прихода с равномерной плотностью в интервале $(0, T)$. Найти энтропию системы, соответствующей сейсмическому сигналу.

4. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Из урны вынуто 5 шаров, из них 3 оказались черными и 2 белыми. Определить информацию, заключенную в наблюденном событии A_1 по отношению к событию A_2 : следующий вынутый шар будет черным.

5. На шахматной доске в одной из клеток произвольным образом поставлена фигура. Априори все положения фигур равнозначны. Определить информацию сообщения, в какой именно клетке находится фигура.

1.10. Случайные функции и их свойства

Случайной функцией $\xi(t)$ называют такую функцию своего аргумента, значение которой при любом значении t является случайной величиной. Аргумент t считается величиной неслучайной.

Во многих задачах геофизики роль аргумента t играет время, например, при записи сейсмических волн (сейсмическая трасса) или записи электромагнитного поля в заданной пространственной точке. Поэтому в дальнейшем аргумент t будем называть временем.

При анализе случайных функций встречаются два варианта описания.

1. Аргумент случайной функции t может принимать любые значения в заданном интервале (конечном или бесконечном).
2. Аргумент случайной функции может принимать только определенные дискретные значения.

В первом случае $\xi(t)$ называют случайным процессом, во втором — случайной последовательностью. Примером случайного процесса может быть аналоговая запись на фотобумаге сейсмической трассы, а примером случайной последовательности цифровая запись сейсмограммы на цифровой сейсмостанции. Рассмотрим случайную функцию $\xi(t)$ и предположим, что для ее исследования про-

изведено n — независимых опытов, например, регистрируется сейсмическая трасса от n идентичных взрывов. В каждом опыте получена своя *реализация* случайной функции $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Зафиксируем момент времени $t = t_1$. Если бы нас интересовали свойства $\xi(t_1)$ только в момент времени t_1 то для непрерывной случайной величины $\xi_1 = \xi(t_1)$ наиболее полное описание сводится к заданию плотности распределения вероятностей $f(x_1/t_1)$. Пример двух реализаций случайного процесса дан на рис. 1.44. Для более детального описания случайной функции вы-

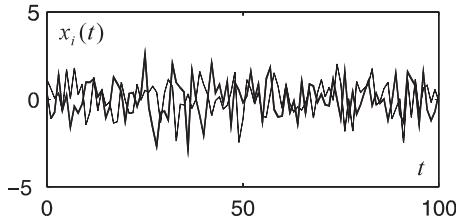


Рис. 1.44. Две реализации случайного процесса.

берем две точки t_1 и t_2 . Соответствующие им ординаты $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ будут случайными величинами ξ_1 и ξ_2 , которые полностью характеризуются двумерной плотностью распределения вероятностей $f(x_1, x_2/t_1, t_2)$. Случайную функцию можно считать заданной, если задана многомерная плотность распределения вероятностей $f(x_1, x_2, \dots, x_n/t_1, t_2, \dots, t_n)$. Хотя такое описание случайной функции является наиболее полным, на практике часто ограничиваются определением лишь первых двух моментов. *Начальный момент первого порядка*

$$m_{\xi_1} = M[\xi(t_1)] = \langle \xi(t_1) \rangle$$

является математическим ожиданием ординаты случайной функции в произвольный момент времени t_1 . Опуская индекс 1 у t , запишем

$$m_{\xi}(t) = M[\xi(t)] = \langle \xi(t) \rangle.$$

Функция $m_{\xi}(t)$ не является случайной и полностью определяется законом распределения $f(x/t)$:

$$m_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x/t)dx.$$

Центральные моменты второго порядка.

1. *Дисперсия* случайной функции $\xi(t)$ при фиксированном t

$$D[\xi(t)] = M[(\xi(t) - m_\xi(t))^2] = \langle (\xi(t) - m_\xi(t))^2 \rangle.$$

2. *Ковариационный момент связи* случайных функций $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \\ &= \text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = M[(\xi(t_1) - m_\xi(t_1)) \times \\ &\quad \times (\xi(t_2) - m_\xi(t_2))] = \langle (\xi(t_1) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2) - m_\xi(t_2)) \rangle. \end{aligned}$$

Функцию $R(t_1, t_2)$ в теории случайных функций называют *корреляционной функцией*, или *автокорреляционной функцией*. . Записывая явное выражение для математического ожидания, получим

$$\begin{aligned} D[\xi(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m_\xi(t))^2 f(x/t) dx, \\ R(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - m_\xi(t_1)) \times \\ &\quad \times (x(t_2) - m_\xi(t_2)) f(x_1, x_2/t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Раздел теории случайных функций, оперирующий только с моментами первых двух порядков, называют корреляционной теорией случайных функций. Для любого случайного процесса $\xi(t)$ среднее по времени (по параметру t) определяется формулой

$$\langle \xi(t) \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T \xi(t) dt,$$

если этот предел существует. В результате $\langle \xi(t) \rangle_T$ есть случайная величина.

1.10.1. Свойства случайных функций

Для стационарной случайной функции все многомерные законы распределения зависят только от взаимного расположения моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n , т. е. для стационарности случайной функции при любом n должно выполняться соотношение

$$f(x_1, \dots, x_n/t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n/t_1 + t_0, \dots, t_n + t_0),$$

где t_0 — любое число. В частном случае при $n = 1$ и $n = 2$, полагая $t_0 = -t_1$, для стационарных функций будем иметь соответственно

$$f(x_1/t_1) = f(x_1/0) = f(x_1)$$

и

$$f(x_1, x_2/t_1, t_2) = f(x_1, x_2/0, \tau),$$

где $\tau = t_2 - t_1$, т. е. одномерный закон распределения ординаты случайной функции не зависит от момента времени, для которого эта ордината выбрана, а двумерный закон зависит только от разности моментов времени. Используя выражения для законов распределения стационарных случайных функций, получим

$$\begin{aligned} m_\xi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \text{const}, \\ D[\xi(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m_\xi(t))^2 f(x)dx = \text{const}, \\ R(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - m_\xi(t_1))(x(t_2) - m_\xi(t_2)) \times \\ &\quad \times f(x_1, x_2/t_1, t_2) dx_1 dx_2 = R(t_2 - t_1) = R(\tau). \end{aligned}$$

Условия $m_\xi = \text{const}$, $D[\xi(t)] = \text{const}$ и $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1) = R(\tau)$ являются необходимыми условиями стационарности, но не достаточными, ибо они могут быть выполнены, но, начиная с некоторого n , закон распределения перестанет удовлетворять условию $f(x_1, \dots, x_n/t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n/t_1 + t_0, \dots, t_n + t_0)$, а значит

случайная функция $\xi(t)$ будет нестационарной. Однако для решения практических задач часто ограничиваются применением корреляционной теории, поэтому А.Я. Хинчин ввел понятие *стационарности в широком смысле*. Случайная функция называется стационарной в широком смысле, если ее математическое ожидание и дисперсия постоянны, а корреляционная функция зависит только от разности моментов времени, для которых взяты ординаты случайной функции. Примеры нестационарных в широком смысле случайных функций представлены на рис. 1.45.

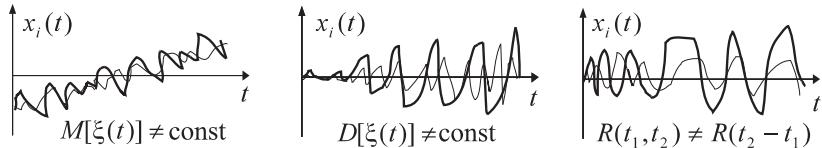


Рис. 1.45. Примеры нестационарных процессов.

Наиболее часто при исследовании случайных функций используется нормальный закон распределения. Исчерпывающей характеристикой нормального случайного процесса является его математическое ожидание и корреляционная функция. Значения ординат нормальной случайной функции в произвольные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n полностью описываются математическими ожиданиями и ковариационной матрицей

$$R_{ij} = R(t_i - t_j).$$

Если вероятностные свойства случайной функции в последующий промежуток времени полностью определяются значением ординаты этой функции в заданный момент времени и не зависят от ее значений в предыдущие моменты, то такая случайная функция называется *марковской*, в противном случае немарковской.

Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет *эргодической гипотезе*, если с вероятностью 1 среднее по времени равно среднему по множеству наблюдений

$$P [\langle \xi(t) \rangle_T = M [\xi(t)]] = 1$$

при условии, что эти средние существуют. Применение эргодической гипотезы дает возможность определить статистические ха-

рактеристики процесса по одной реализации, что очень важно для практических приложений.

1.10.2. Свойства корреляционной функции

1. Автокорреляционная функция является четной:

$$R(\tau) = R(-\tau).$$

2. Ордината вещественной автокорреляционной функции не больше дисперсии случайной функции:

$$R(0) \geq R(\tau).$$

3. Умножение $[\xi(t) - m_\xi(t)]$ на вещественную (неслучайную) функцию $z(t)$ приводит к выполнению неравенства вида

$$\int_a^b \int_a^b z(t_1)z(t_2)R(t_2 - t_1)dt_1 dt_2 \geq 0.$$

При достаточно большом значении интервала $\tau = t_2 - t_1$ отклонение ординаты случайной функции от ее математического ожидания в момент времени t_2 становится практически независимым от значения этого отклонения в момент времени t_1 . В этом случае функция $R(\tau)$, дающая значение момента связи между $\xi(t_2)$ и $\xi(t_1)$, при $\tau \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю. Наиболее часто используемые аппроксимации автокорреляционных функций представлены на рис. 1.46.

4. Добавление к случайной функции неслучайной величины или неслучайной функции не изменяет значения корреляционной функции. Пусть

$$\eta(t) = \xi(t) + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — неслучайная функция. Учитывая, что

$$m_\eta(t) = m_\xi(t) + \varphi(t),$$

получим

$$\begin{aligned} R_\eta(t_1, t_2) &= M[(\eta(t_1) - m_\eta(t_1)) \times (\eta(t_2) - m_\eta(t_2))] = \\ &= M[(\xi(t_1) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2) - m_\xi(t_2))] = R_\xi(t_1, t_2). \end{aligned}$$

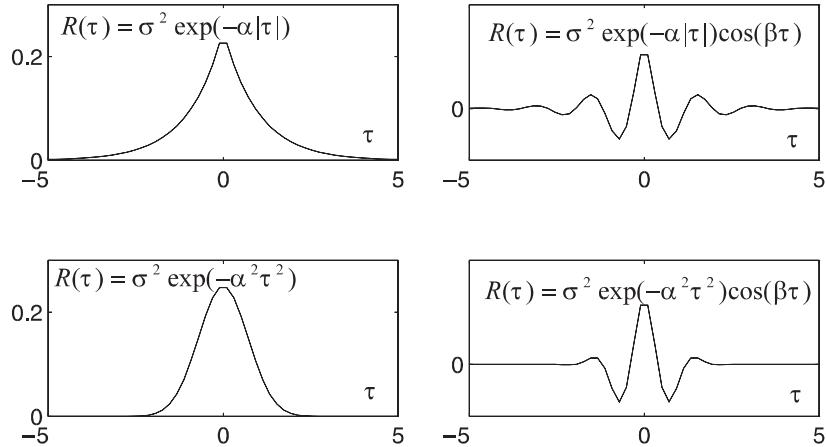


Рис. 1.46. Примеры аппроксимационных функций для автокорреляционных функций ($\sigma = 0.5$, $\alpha = 1.0$, $\beta = 4.0$).

1.10.3. Действие линейного оператора на случайную функцию

Линейным однородным оператором L называется оператор, который сохраняет линейные операции.

1. $L[c\xi(t)] = cL[\xi(t)]$, где c — константа.
2. $L[\xi_1(t) + \xi_2(t)] = L\xi_1(t) + L\xi_2(t)$.

Пусть $\xi(t)$ — случайная функция, математическое ожидание которой $m_\xi(t)$, а корреляционная функция, $R_\xi(t_1, t_2)$. Пусть $\eta(t)$ — другая случайная функция

$$\eta(t) = L[\xi(t)].$$

Найдем математическое ожидание

$$m_\eta(t) = M[L[\xi(t)]] = L[M[\xi(t)]] = Lm_\xi(t).$$

Определим корреляционную функцию

$$R_\eta(t_1, t_2) = M[(\eta(t_1) - m_\eta(t_1))(\eta(t_2) - m_\eta(t_2))] =$$

$$\begin{aligned}
&= M \{(L[\xi(t_1)] - L[m_\xi(t_1)])(L[\xi(t_2)] - L[m_\xi(t_2)])\} = \\
&= L_{t_1} L_{t_2} M[(\xi(t_1) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2) - m_\xi(t_2))] = \\
&= L_{t_1} L_{t_2} R_\xi(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

1.10.4. Взаимная корреляционная функция связи

Рассмотрим систему двух случайных функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$ и определим функцию взаимной корреляции в виде

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = M[(\xi(t_1) - m_\xi(t_1))(\eta(t_2) - m_\eta(t_2))].$$

Для вещественных случайных функций имеем

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = R_{\eta\xi}(t_2, t_1)$$

или для стационарных случайных функций

$$R_{\xi\eta}(\tau) = R_{\eta\xi}(-\tau).$$

В соответствии с определением корреляционной функции

$$\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - m_\xi(t_1))(y(t_2) - m_\eta(t_2)) \times \\
&\quad \times f_{\xi\eta}(x, y/t_1, t_2) dx dy.
\end{aligned}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - m_\xi(t_1))(y(t_2) - m_\eta(t_2)) f(x, y/t_1, t_2) dx dy \right]^2 \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - m_\xi(t_1))^2 f(x, y/t_1, t_2) dx dy \times \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} (y(t_2) - m_\eta(t_2))^2 f(x, y/t_1, t_2) dx dy,
\end{aligned}$$

откуда следует

$$[R_{\xi\eta}(t_1, t_2)] \leq \sqrt{R_\xi(t_1, t_1) R_\eta(t_2, t_2)},$$

или для стационарных случайных функций

$$R_{\xi\eta}(\tau) \leq \sqrt{D_\xi D_\eta}.$$

Таким образом, для безразмерной корреляционной функции связи

$$r_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \frac{R_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\sqrt{R_\xi(t_1, t_1)} \sqrt{R_\eta(t_2, t_2)}}$$

выполняются неравенства

$$-1 \leq r_{\xi\eta}(t_1, t_2) \leq 1.$$

1.10.5. Теорема Винера–Хинчина и спектр мощности

В большинстве приложений функция $\xi(t)$, описывающая стационарный случайный процесс, является действительной функцией со следующими свойствами:

1. Существуют конечные значения величин

$$\langle |\xi| \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T |x(t)| dt$$

и

$$\langle |\xi|^2 \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt.$$

Величину $\langle |\xi|^2 \rangle_T$ называют средней мощностью.

2. В каждом конечном интервале функция $\xi(t)$ есть функция с ограниченной вариацией.

Корреляционная функция (по времени) для действительной случайной функции $\xi(t)$ определяется формулой

$$R_\xi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) \xi(t + \tau) dt.$$

Этот предел существует всегда, когда существует $\langle |\xi|^2 \rangle_T$. Функция $R_\xi(\tau)$ действительна при действительной $\xi(t)$. Для эргодических

случайных процессов функция $R_\xi(\tau)$ с вероятностью 1 совпадает с корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$ по множеству наблюдений.

Взаимная корреляционная функция (по времени) для двух действительных функций $\xi(t)$, $\eta(t)$ определяется формулой

$$R_{\xi\eta}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t)\eta(t+\tau)dt.$$

Этот предел существует всегда, когда существует $\langle|\xi|^2\rangle_T$, $\langle|\eta|^2\rangle_T$. Функция $R_{\xi\eta}(\tau)$ действительна при действительных $\xi(t)$, $\eta(t)$. Спектральная плотность $R_\xi(\omega)$ для функции $\xi(t)$ и взаимная спектральная плотность $R_{\xi\eta}(\omega)$ для пары функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$ определяются с помощью соотношений Винера–Хинчина (*теорема Винера–Хинчина*):

$$\begin{aligned} R_\xi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) \exp\{-i\omega\tau\}d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_\xi(\tau) \cos\omega\tau d\tau, \\ R_\xi(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\omega) \exp\{i\omega\tau\}d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_\xi(\omega) \cos\omega\tau d\omega, \\ R_{\xi\eta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(\tau) \exp\{-i\omega\tau\}d\tau, \\ R_{\xi\eta}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(\omega) \exp\{i\omega\tau\}d\omega, \end{aligned}$$

где оба косинус-интеграла в правой части применимы только в случае действительных $R_\xi(\tau)$. Для действительного процесса $\xi(t)$ спектральная плотность $R_\xi(\omega)$ является четной функцией

$$R_\xi(\omega) = R_\xi(-\omega).$$

Полагая $\tau = 0$, можно получить выражение для дисперсии процесса через спектральную плотность

$$D_\xi = R_\xi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\omega)d\omega.$$

Рассмотрим три примера вычисления спектральной плотности.

П р и м е р 1. Пусть корреляционная функция аппроксимируется выражением (см. рис. 1.47)

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \exp\{-\alpha|\tau|\}, \quad (1.81)$$

тогда ее спектр дается выражением

$$\begin{aligned} R_\xi(\omega) &= \sigma_\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\omega\tau - \alpha|\tau|\} d\tau = \\ &= \sigma_\xi^2 \left[\int_0^{\infty} \exp\{-(i\omega + \alpha)\tau\} d\tau + \int_{-\infty}^0 \exp\{(\alpha - i\omega)\tau\} d\tau \right] = \\ &= \sigma_\xi^2 \left[\frac{1}{\alpha + i\omega} + \frac{1}{\alpha - i\omega} \right] = 2\sigma_\xi^2 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

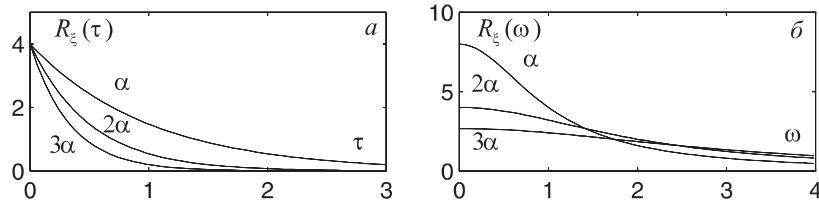


Рис. 1.47. Графическое представление: a — корреляционной функции (1.81), δ — спектра корреляционной функции (1.82), ($\sigma = 2$, $\alpha = 1$).

П р и м е р 2. Корреляционная функция имеет вид

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \exp\{-\alpha|\tau|\} \cos \omega_0 \tau.$$

Учитывая, что

$$\cos \omega_0 \tau = \frac{1}{2} (\exp\{i\omega_0 \tau\} + \exp\{-i\omega_0 \tau\}),$$

вычислим ее спектральную плотность:

$$\begin{aligned}
 R_\xi(\omega) &= \frac{\sigma_\xi^2}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\omega\tau - \alpha|\tau| + i\omega_0\tau\} d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\omega\tau - \alpha|\tau| - i\omega_0\tau\} d\tau \right] = \\
 &= \sigma_\xi^2 \left[\frac{\alpha}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha}{(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2} \right].
 \end{aligned}$$

П р и м е р 3. Корреляционная функция задана формулой

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \exp\{-\alpha^2\tau^2\} \cos\omega_0\tau.$$

Выражая $\cos\omega_0\tau$ через показательные функции, будем иметь для спектральной плотности

$$\begin{aligned}
 R_\xi(\omega) &= \frac{\sigma_\xi^2}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha^2\tau^2 + i\omega_0\tau - i\omega\tau\} d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha^2\tau^2 - i\omega_0\tau - i\omega\tau\} d\tau \right].
 \end{aligned}$$

Каждый из интегралов можно свести к интегралу типа Пуасона, если показатель в выражении, стоящем под знаком интеграла, привести к виду

$$\left(\alpha\tau + i\frac{\omega}{2\alpha} \mp i\frac{\omega_0}{2\alpha} \right)^2 + \frac{1}{4\alpha^2}(\omega \pm \omega_0)^2.$$

Вычисляя эти интегралы, получим

$$R_\xi(\omega) = \frac{\sigma_\xi^2 \sqrt{\pi}}{2\alpha} \left[\exp\left\{ \frac{-(\omega + \omega_0)^2}{4\alpha^2} \right\} + \exp\left\{ \frac{-(\omega - \omega_0)^2}{4\alpha^2} \right\} \right].$$

1.10.6. Определение оценок характеристик случайных величин

Пусть реализация случайного процесса зарегистрирована в цифровой форме с шагом дискретности $\Delta t = x(t_j)$, $j = 1, \dots, m$.

Оценка среднего значения определяется формулой

$$\hat{m}_\xi(t_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_j).$$

Оценка для корреляционной функции есть

$$\hat{R}_\xi(t_j, t_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i(t_j) - \hat{m}_\xi(t_j))(x_i(t_k) - \hat{m}_\xi(t_k))],$$

или

$$\hat{R}_\xi(t_j, t_k) = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i(t_j)x_i(t_k) - \frac{n}{n-1} m_\xi(t_j)m_\xi(t_k).$$

В случае стационарных эргодических случайных процессов в качестве оценки математического ожидания принимается следующее выражение:

$$\hat{m}_\xi = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x(t_j),$$

или, переходя к интегралу, получим

$$\hat{m}_\xi = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

Для автокорреляционной функции с учетом принятых предположений оценки в дискретной и интегральной формах записываются соответственно следующим образом:

$$\hat{R}_\xi(\tau) = \frac{1}{m-l-1} \sum_{j=1}^{m-l} (x(t_j) - \hat{m}_\xi)(x(t_j + \tau) - \hat{m}_\xi),$$

где $\tau = \Delta t l = t_l$, и

$$\hat{R}_\xi(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - \hat{m}_\xi][x(t+\tau) - \hat{m}_\xi] dt.$$

Г л а в а 2

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика занимается как статистическим описанием экспериментальных наблюдений, так и проверкой конкурирующих математических моделей, описывающих реальный физический процесс. Математическая статистика является основным инструментом обработки результатов физического, в том числе и геофизического, эксперимента с минимальной потерей информации об изучаемом объекте. Основным понятием математической статистики является *выборка* или совокупность наблюдений $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ какого-либо количественного показателя. Если этот показатель является случайной величиной, то выборка $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ является случайным вектором. Число n называется *объемом выборки*. Выборка называется *повторной*, если компоненты вектора ξ независимы и одинаково распределены. Всякая функция $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ наблюдений (x_1, x_2, \dots, x_n) называется *статистикой*.

Например, статистиками являются:

- выборочное среднее $\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$;
- выборочная дисперсия $s^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$;
- выборочный коэффициент вариации $v = s/\bar{x}$;
- наибольший элемент выборки x_{\max} ;
- наименьший элемент выборки x_{\min} .

Современный уровень геофизического эксперимента характеризуется большими потоками информации. Так, при проведении сейсмических работ на море за сутки регистрируется 10^{10} бит информации. При этом визуальный обзор данных, не говоря об интерпретации, невозможен без применения статистических методов обработки сейсмической информации на ЭВМ.

2.1. Основные понятия теории решений

Результаты реального геофизического эксперимента всегда случайны из-за неизбежного присутствия ошибок измерений. Эти результаты представляют собой значения случайного вектора ξ , распределение $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ которого считается частично известным. Предполагается, что параметр θ является элементом множества Ω (пространство параметров). Наблюдения ξ обычно используют для получения информации о распределении ξ или о значении параметра θ (вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$), от которого оно зависит. Проведение статистического анализа необходимо в связи с неопределенностью интерпретации результатов наблюдений, возникающих из-за незнания распределения ξ , а значит и основных элементов математической модели явления. Вследствие этого появляется неопределенность в выборе наилучшего “действия” по результатам наблюдений. Задача состоит в том, чтобы найти правило, устанавливающее соответствие между результатами наблюдений и принимаемым решением. Такое соответствие представляется *решающей функцией* $\delta(x_1, \dots, x_n)$ (правило решения, процедура решения), которая каждому набору экспериментальных данных x_1, \dots, x_n приписывает определенный способ действия или решение $d = \delta(x_1, \dots, x_n)$, причем областью определения этой функции является множество значений X , а областью значений — множество возможных решений \mathcal{D} . В теории решений для выбора функции δ вводится *функция потерь* $\varphi(\theta, d)$, характеризующая потери, связанные с выбором решения d при условии, что распределение ξ равно $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, а θ предполагается в качестве истинного параметра.

Можно выделить следующие основные элементы, определяющие решение задач математической статистики.

1. Класс распределений $\mathcal{F} = \{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Omega\}$, которому принадлежит распределение ξ .

2. Структура пространства \mathcal{D} возможных решений d , $d \in D$.
3. Формы функции потерь $\varphi(\theta, d)$.

При этом используются понятия трех различных пространств. *Пространство наблюдений* X содержит все возможные наблюдения. В *пространстве параметров* Ω содержатся все возможные значения параметра θ или вектора параметров $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. *Пространство решений* D содержит все возможные решения. Связь пространств X , D и Ω показана на рис. 2.1.

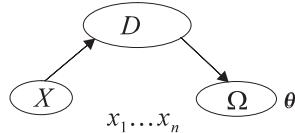


Рис. 2.1. Связь пространств X , D и Ω .

Функция потерь $\varphi(\theta, d)$ является случайной величиной, так как $d = \delta(\xi)$ зависит от случайного вектора ξ . Средний уровень потерь, возникающий от применения решающего правила $d = \delta(\xi)$ при большом числе повторных наблюдений в эксперименте, приближенно можно определить как математическое ожидание от функции потерь:

$$R_\delta(\theta) = M[\varphi(\theta, \delta(\xi))] = \int \dots \int \varphi(\theta, \delta(\xi)) f_\xi(\mathbf{x}, \theta) dx_1 \dots dx_n.$$

Функция $R_\delta(\theta)$ называется функцией риска для правила решения δ .

Если допустимо рассматривать θ как случайную величину и существует априорная плотность распределения $f(\theta)$, то вводится понятие *байесовского риска*:

$$r_{f(\theta)}(\delta) = \int R_\delta(\theta) f(\theta) d\theta,$$

или

$$r_{f(\theta)}(\delta) = M_\theta [M_\xi [\varphi(\theta, \delta(\xi))]].$$

Рассмотрим содержание основных элементов, определяющих постановку статистической задачи.

2.1.1. Класс распределений статистической задачи

Определение класса распределений $f(x, \theta)$ производится исходя из априорных представлений о свойствах случайных измерений и условий проведения эксперимента.

П р и м е р 1. Если в фиксированном временном или пространственном интервале вероятность появления более чем одного события (сейсмической волны) в малом промежутке времени является величиной более высокого порядка малости, чем вероятность появления одного события (сейсмической волны), и если такие события в непересекающихся интервалах статистически независимы, то при этих предположениях число появления событий (сейсмических волн) описывается распределением Пуассона

$$P(\xi = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 1, 2 \dots).$$

П р и м е р 2. Исследование микросейсм показывает, что они представляют собой результат суммарного действия большого числа независимых факторов, причем влияние каждого из них мало по сравнению со всей суммой, следовательно, при выполнении условий центральной предельной теоремы можно сделать предположение о нормальном распределении микросейсм $\xi \in N(\boldsymbol{m}_\xi, D_\xi)$.

Обычно тип распределения назначается из предварительного анализа постановки эксперимента и физической природы изучаемых полей и ошибок измерений, а вектор параметров θ определяется в процессе решения задачи.

2.1.2. Структура пространства решений и функция потерь

Структура пространства решений в значительной степени определяет тип решаемой статистической задачи, т. е. лежит в основе способа классификации статистических задач.

П р и м е р. Пусть (x_1, x_2, \dots, x_n) — выборка из совокупности с заданным распределением вероятностей $f(\mathbf{x}, \theta)$, θ — неизвестный параметр распределения, как, например, в ранее рассмотр-

ренных случаях распределения Пуассона ($\theta = a$) и нормального распределения $\boldsymbol{\theta} = (m_\xi, D_\xi)$, и пусть $\gamma = \gamma(\theta)$ — действительная функция от параметра.

А. Если необходимо решить, превосходит $\gamma(\theta)$ некоторое пороговое значение γ_0 или нет, то выбирают одно из решений: $d_0 : \gamma > \gamma_0$ или $d_1 : \gamma \leq \gamma_0$. Функция потерь $\varphi(\gamma, d)$ выбирается обычно так, чтобы она была равна нулю, если выбрано правильное решение, и являлась возрастающей функцией $|\gamma - \gamma_0|$ при неправильном решении. Такая постановка отвечает задаче выделения одиночного сигнала на фоне шума. В этом случае γ — отношение сигнал/шум, γ_0 — пороговое отношение сигнал/шум, d_0 — сигнал есть, d_1 — сигнала нет.

Б. Если необходимо найти численное значение для $\gamma(\theta)$, то в этом случае решение d равно оценке $\hat{\gamma}(\theta)$. Функция потерь обычно представляется в виде $\varphi(\gamma, d) = w(\gamma)\psi(|d - \gamma|)$, где $\psi(|d - \gamma|)$ — строго возрастающая функция ошибки $|\hat{\gamma} - \gamma|$, соответствующая отклонению оценки от истинного значения. Чаще всего в теории оценивания используется квадратичная функция потерь. Так, при $\gamma(\theta) = \theta$, $d = \hat{\theta}$ получим

$$\varphi(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) = (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T W (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

для векторного параметра и

$$\varphi(\theta - \hat{\theta}) = w(\theta - \hat{\theta})^2$$

для скалярного параметра θ .

Примером решения задачи точечного оценивания является определение параметров сигнала, принятого на фоне шума $u_i = A\varphi(t_i - \tau) + \varepsilon_i$ с вектором параметров $\boldsymbol{\theta} = (A, \tau)$.

В. Если в процессе принятия решения надо оценить интервал (α, β) , в котором с заданной вероятностью лежит оценка $\hat{\gamma}(\theta)$, в этом случае приходим к задаче интервального оценивания. Так как апостериорная плотность $f(\theta/\mathbf{x})$ является наиболее полной характеристикой параметра θ при заданной выборке наблюдений (x_1, \dots, x_n) , то проблему интервального оценивания можно сформулировать как задачу выбора интервала (α, β) значений θ , который наилучшим образом описывает $f(\theta/\mathbf{x})$. В этом случае функция потерь $\varphi(\theta; \alpha, \beta)$ является

функцией параметра θ и интервала. Например, функция потерь может иметь вид

$$\varphi(\theta; \alpha, \beta) = \begin{cases} w_1 (\beta - \alpha)^2, & \text{если } \theta \in (\alpha, \beta), \\ w_2 (\theta - \alpha)^2, & \text{если } \theta < (\alpha, \beta), \\ w_3 (\theta - \beta)^2, & \text{если } \theta > (\alpha, \beta), \end{cases}$$

а апостериорная потеря равна

$$\begin{aligned} M_{\theta/\xi}[\varphi(\theta; \alpha, \beta)] &= w_1 \int_{\alpha}^{\beta} (\beta - \alpha)^2 f(\theta/x_1, \dots, x_n) d\theta + \\ &+ w_2 \int_{\alpha}^{\beta} (\theta - \alpha)^2 f(\theta/x_1, \dots, x_n) d\theta + \\ &+ w_3 \int_{\alpha}^{\beta} (\theta - \beta)^2 f(\theta/x_1, \dots, x_n) d\theta. \end{aligned}$$

Выбор решения соответствует значению интервала, минимизирующего апостериорную потерю.

Г. С практической точки зрения, важна задача, в которой необходимо принять решение о состоянии объекта и произвести оценку искомых параметров, т. е. объединение задач типа *A* и *B* в одной задаче. В качестве примера можно привести задачу выделения сигнала на фоне шума с одновременной оценкой его параметров (амплитуды и момента прихода).

Статистическая классификация рассмотренных выше задач заключается в следующем:

Задачи типа А с двумя решениями формулируются обычно в терминах проверки гипотезы, которая должна быть принята или отвергнута. Такие задачи принадлежат широкому классу задач *проверки статистических гипотез*.

Задачи типа Б, в которых необходимо найти численное значение параметра, относятся к классу задач *точечного статистического оценивания*.

Задачи типа В, в которых определяется интервал, накрывающий оценку параметра с заданной вероятностью, относятся к классу задач *интервального статистического оценивания*.

В статистической теории интерпретации геофизических наблюдений используется следующая классификация рассмотренных в примере задач.

1. Задачи типа А, в которых необходимо определить количественное состояние геофизического объекта (есть ли сейсмический сигнал на заданном участке сейсмограммы или существует только сейсмический шум; существует ли намагниченный объект заданной формы или это реализация шума, зарегистрированная, например, на вертикальной компоненте магнитного поля и т.д.), получили название задач *качественной интерпретации*.
2. Задачи типа Б, в которых проводится точечное оценивание параметров геофизических объектов (определение амплитуды и момента прихода сейсмического сигнала; нахождение намагниченности и глубины залегания верхней кромки магнитного тела; определение концентрации электронов на заданной высоте и т.д.) называют задачами *количественной интерпретации* или *точечно-количественной интерпретации*.
3. Задачи типа В, в которых осуществляется интервальное оценивание параметров геофизических объектов (определение интервала глубины залегания отражающего сейсмического горизонта; нахождения интервала залегания верхней кромки намагниченного тела; определение интервала для величины концентрации электронов на заданной высоте и др.), называют задачами *интервально-количественной интерпретации*.
4. Задачи типа Г, в которых необходимо оценить как качественное состояние объекта, так и характеризующие его параметры (выделение сигнала на фоне шума и определение его параметров — амплитуды и момента прихода; обнаружение намагниченного тела и определение его параметров — намагниченности, глубины залегания и др.), называют задачами *количественно-качественной*, или *сложной, интерпретации*.

2.1.3. Решающее правило

Классический подход к выбору решающего правила (правила решения) $\delta(\xi)$ основан на функции риска $R_\delta(\theta)$. Наилучшим правилом решения является такое, которое дает наименьший риск. Пусть δ_1 и δ_2 — два различных решающих правила, если

$$R_{\delta_1}(\theta) < R_{\delta_2}(\theta) \quad \text{при всех } \theta,$$

то δ_1 — лучшее правило решения по сравнению с δ_2 .

Рассмотрим пример анализа трех функций риска, отвечающих трем правилам принятия решения.

В заданной области значений θ решающее правило δ_1 предпочтительней δ_2 . В то время как решающее правило δ_3 при некоторых значениях параметра имеет наименьшее значение функции риска по сравнению с δ_1 и δ_2 , а при других значениях большее, невозможно найти правило, наилучшее при всех θ , однако при фиксированном θ можно найти единственное наилучшее правило. Основная неопределенность в таком выборе связана с тем, что истинное значение θ неизвестно.

Правило решения δ ($\delta \in \mathcal{D}$) называется *допустимым*, если не существует правила δ_1 ($\delta_1 \in \mathcal{D}$) такого, что неравенство

$$R_\delta(\theta) \geq R_{\delta_1}(\theta)$$

справедливо для всех θ . Таким образом, если решающее правило допустимо, то в классе правил решений \mathcal{D} не найдется правила δ_1 , которое было бы не хуже чем δ для всех θ . Допустимых оценок обычно бывает много, поэтому необходимо предложить критерий выбора наилучшего правила из допустимых.

Байесовская процедура выбора правила решения δ для априорной плотности $f(\theta)$ основана на функции апостериорного риска $r_{f(\theta)}(\delta)$. Наилучшим, с точки зрения байесовского подхода, будет решающее правило, соответствующее наименьшему апостериорному риску

$$r_{f(\theta)}^{(B)}(\hat{\delta}) \leq r_{f(\theta)}(\delta)$$

для любого δ , или

$$\hat{\delta} = \arg \min_{\delta \in \mathcal{D}} \int_{\theta} R_\delta(\theta) f(\theta) d\theta.$$

Минимальный риск $r_{f(\theta)}^{(B)}(\hat{\delta})$ называется байесовским риском для априорной плотности $f(\theta)$. Но для того чтобы использовать этот критерий, необходимо предположить не только, что параметр θ является случайным, но и что его (априорное) распределение известно. Знание этого распределения не всегда возможно на практике. Часто $f(\theta)$ интерпретируют как весовую функцию, определяющую степень значимости различных значений параметра.

Если априорная информация о параметре θ отсутствует, целесообразно рассматривать максимум функции риска как ее наиболее важную характеристику. Из двух функций предпочтительней та, которая имеет минимальное значение максимума риска. Решающие процедуры, обеспечивающие минимум максимального риска называются *минимаксными*:

$$\hat{\delta}^{\min\max} = \arg \min_{\delta \in \mathcal{D}} \max_{\theta \in \Omega} R_\delta(\theta).$$

Так как максимум указывает на самые большие (в среднем) потери, которые могут возникнуть при использовании данной процедуры, то минимаксное решение по сравнению с другими дает самую большую защиту от больших потерь.

Другой критерий выбора решающего правила базируется на понятии *функции правдоподобия*. Рассмотрим выборку из n независимых наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n компонент случайного вектора ξ . Совместная функция плотности вероятностей вследствие независимости x_1, x_2, \dots, x_n будет равна

$$L(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$

Функция $L(\mathbf{x}, \theta)$ называется функцией правдоподобия для θ , если она рассматривается как функция θ или вектора $\boldsymbol{\theta}$ при фиксированных x_1, x_2, \dots, x_n и равных тем, которые зарегистрированы в эксперименте.

Если наше решение сводится к проблеме определения численного значения параметра θ , то в качестве оценки естественно выбрать такое значение θ , которое обладает наибольшей вероятностью при данной выборке экспериментальных наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n , т. е. максимизирующее функцию правдоподобия

$$\hat{\Theta}_{\text{МП}} = \arg \max_{\theta \in \Omega} L(\mathbf{x}, \theta).$$

Такой метод оценивания, когда в качестве оценки принимается значение параметра, соответствующее наибольшему значению функции правдоподобия называется *методом максимального правдоподобия*. Используя функцию правдоподобия, можно сформулировать процедуру выбора решения не в терминах потерь, а в терминах выигрышей. Выигрыш равен нулю ($\alpha(\theta) = 0$), если принято неправильное решение, и положителен $\alpha(\theta) > 0$, если принято правильное решение, где θ — истинное значение параметра. Тогда представляется целесообразным снабдить функцию правдоподобия весовой функцией, отвечающей соответствующим выигрышам, и определять значение θ , максимизируя произведение $\alpha(\theta)L(\mathbf{x}, \theta)$.

Если считать θ случайным и обозначить $\alpha(\theta)$ априорное распределение параметра, то апостериорное распределение параметра θ записывается в виде

$$p(\theta/\mathbf{x}) = \frac{1}{p(\mathbf{x})} \alpha(\theta)L(\mathbf{x}, \theta),$$

и в качестве оценки предполагается взять значение, соответствующее максимуму апостериорной вероятности:

$$\hat{\Theta}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta \in \Omega} p(\theta/\mathbf{x}) = \arg \max_{\theta \in \Omega} \alpha(\theta)L(\mathbf{x}, \theta)$$

(множитель $p(\mathbf{x})$ не влияет на значение аргумента максимума, поэтому мы его отбросили). Полученная оценка $\hat{\Theta}_{\text{MAP}}$ называется *оценкой максимума апостериорной вероятности*.

Рассмотрим двухальтернативную задачу. Пусть ω_0 и ω_1 обозначают множество значений θ , для которых правильными являются решения d_0 и d_1 соответственно, и пусть $\alpha(\theta) = \alpha_0$ при $\theta \in \omega_0$ и $\alpha(\theta) = \alpha_1$ при $\theta \in \omega_1$. Мы принимаем решение d_0 , если

$$\alpha_1 \max_{\theta \in \omega_1} L(\mathbf{x}, \theta) < \alpha_0 \max_{\theta \in \omega_0} L(\mathbf{x}, \theta),$$

$$\frac{\max_{\theta \in \omega_1} L(\mathbf{x}, \theta)}{\max_{\theta \in \omega_0} L(\mathbf{x}, \theta)} < \frac{\alpha_0}{\alpha_1},$$

и решение d_1 , если

$$\alpha_1 \max_{\theta \in \omega_1} L(\mathbf{x}, \theta) > \alpha_0 \max_{\theta \in \omega_0} L(\mathbf{x}, \theta),$$

$$\frac{\max_{\theta \in \omega_1} L(\mathbf{x}, \theta)}{\max_{\theta \in \omega_0} L(\mathbf{x}, \theta)} > \frac{\alpha_0}{\alpha_1}.$$

Такая процедура получила название *метода отношения правдоподобия*. Если θ можно считать случайным параметром, то α_0 и α_1 можно интерпретировать как априорные вероятности принадлежности параметра области ω_0 и ω_1 соответственно.

2.1.4. Достаточные статистики

Большое практическое значение имеет такое преобразование наблюдений x_1, \dots, x_n , которое приводит к сокращению числа экспериментальных данных, но при этом полностью сохраняется информация о параметре θ или векторе параметров $\boldsymbol{\theta}$ распределения $f(\mathbf{x}, \theta)$ или $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. Такой тип преобразования связан с понятием *достаточной статистики* $T(x_1, \dots, x_n)$, которая содержит всю информацию о параметре θ . Статистика $T(\mathbf{x})$ называется достаточной для θ , если условная функция плотности \mathbf{x} при данном T независима от θ , причем T и θ могут быть многомерными и иметь различные размерности. Необходимым и достаточным условием того, что $T(\mathbf{x})$ является достаточной статистикой для θ , состоит в том, что функция правдоподобия может быть представлена в виде

$$L(\mathbf{x}, \theta) = g(T, \theta)h(\mathbf{x}),$$

причем $h(\mathbf{x})$ не зависит от θ и $g(T, \theta)$ и пропорциональна $f(T/\theta)$ — условной плотности вероятностей распределения T при заданном параметре θ .

П р и м е р 1. Пусть вектор ξ распределен по нормальному закону $N(m_\xi, \sigma_\xi^2)$. Тогда функция правдоподобия

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, m_\xi, \sigma_\xi^2) &= (2\pi\sigma_\xi^2)^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\xi^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_\xi)^2 \right] = \\ &= (2\pi\sigma_\xi^2)^{-n/2} \exp \left[-\frac{n}{2\sigma_\xi^2} (\bar{x} - m_\xi)^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\xi^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right], \end{aligned}$$

где $\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$. Если σ_ξ^2 известно, то \bar{x} распределено по нормальному закону $N(m_\xi, \sigma_\xi^2/n)$, а функция правдоподобия может быть представлена в виде

$$L(\mathbf{x}, m_\xi) = g(\bar{x}, m_\xi)h(\mathbf{x}),$$

где

$$g(\bar{x}, m_\xi) = f(\bar{x}, m_\xi) = \left(\frac{n}{2\sigma_\xi^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{n}{2\sigma_\xi^2} (\bar{x} - m_\xi)^2 \right],$$

$$h(\mathbf{x}) = n^{-1/2} (2\pi\sigma_\xi^2)^{-(n-1)/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\xi^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right].$$

Следовательно, \bar{x} является достаточной статистикой для m_ξ . Ограничиваая рассмотрение достаточными статистиками, мы сокращаем количество данных, необходимых для оценивания параметров. Это особенно существенно при большом потоке информации.

П р и м е р 2. Пусть x_1, \dots, x_n — выборка независимых, нормально распределенных компонент вектора ξ . Функция правдоподобия имеет вид

$$L(\mathbf{x}, m_\xi, \sigma_\xi^2) =$$

$$= (2\pi\sigma_\xi^2)^{-n/2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_\xi^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{m_\xi}{\sigma_\xi^2} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{\sigma_\xi^2} m_\xi^2 \right).$$

Критерий факторизации показывает, что статистика $\mathbf{T}(x) = (\sum_i x_i, \sum_i x_i^2)$ достаточна для σ_ξ^2, m_ξ , т. е. для нахождения оценок параметров нормального распределения достаточно иметь сумму измерений и сумму квадратов измерений. Таким образом, в памяти ЭВМ следует хранить только два числа — $\sum_i x_i$ и $\sum_i x_i^2$, что может оказаться существенным при большом объеме выборки n .

2.2. Свойства оценок

Широкий класс практически важных задач обработки геофизической информации сводится к нахождению оценок искомых параметров (амплитуда и момент прихода сейсмического сигнала, намагниченность и глубина залегания намагниченного тела, концентрация электронов на заданной высоте и др.). Поскольку оценка является статистикой, то к ней применимо понятие достаточности, рассмотренное в п. 2.1.4. Нахождение оценки сводится к

выбору функции согласно принятому критерию. Качество критерия определяется следующими основными свойствами: состоятельность, несмешенность, эффективность и устойчивость (робастность).

2.2.1. Состоятельность

Оценка $\hat{\theta}_n$ для параметра θ называется состоятельной, если $\hat{\theta}_n$ сходится к истинному значению параметра θ_0 с увеличением числа наблюдений. Можно определить разные виды состоятельности, используя различные виды сходимости. В математической статистике при определении состоятельности чаще всего используется сходимость по вероятности. Оценка $\hat{\theta}_n$ является состоятельной, если при любых сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ существует такое N , что

$$P(|\hat{\theta}_n - \theta_0| < \varepsilon) > 1 - \eta$$

для всех $n > N$. В этом случае говорят, что $\hat{\theta}_n$ сходится по вероятности к θ_0 при возрастании n (рис. 2.2).

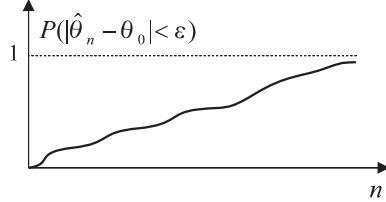


Рис. 2.2. Иллюстрация сходимости по вероятности.

2.2.2. Смещение

Смещением $b_n(\hat{\theta})$ оценки $\hat{\theta}$, полученной по n наблюдениям, называют отклонение математического ожидания оценки от истинного значения:

$$b_n(\hat{\theta}) = M[\hat{\theta}_n] - \theta_0.$$

Оценка $\hat{\theta}$ называется несмешенной, если для всех n

$$b_n(\hat{\theta}) = 0 \quad \text{или} \quad M[\hat{\theta}] = \theta_0.$$

На рис. 2.3 представлено поведение функций плотности распределения при увеличении числа наблюдений n (указанных стрелкой) при выполнении и нарушении условий состоятельности и несмещенности. Часто наряду со смещенными оценками параметра θ при-

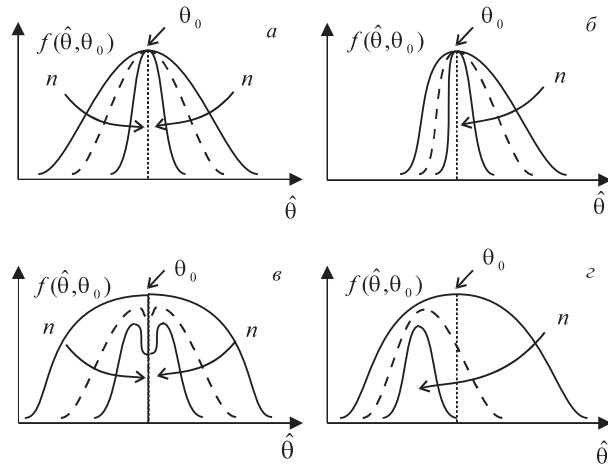


Рис. 2.3. Состоятельность и несмешенность. Оценка параметра $\hat{\theta}$: несмешенная и состоятельная (a); состоятельная, но смешенная (δ); несмешенная, но несостоятельная (ϵ); несостоятельная и смешенная (ε).

меняются *асимптотически несмешенные* оценки, т. е. такие, что $M[\hat{\theta}_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta_0$. При увеличении выборки математическое ожидание такой оценки стремится к истинному значению параметра.

П р и м е р. Пусть для повторной выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) нормальных наблюдений $\xi_i \in N(m_\xi, \sigma_\xi^2)$ надо найти оценку для σ_ξ^2 .

Используя выражение для выборочной дисперсии

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2,$$

получим

$$M(s^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[x_i^2] - M[\bar{x}^2] = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma_\xi^2.$$

Таким образом оценка σ_ξ^2 смещена в сторону меньших значений. Очевидно, что несмешенной оценкой для σ_ξ^2 будет оценка

$$S^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

так как

$$M[S^2] = \frac{n}{n-1} M[s^2] = \sigma_\xi^2.$$

Оценка s^2 является асимптотически несмешенной оценкой σ_ξ^2 , так как $M[s^2] - \sigma_\xi^2 = -\sigma_\xi^2/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

2.2.3. Неравенство Рао–Крамера. Эффективность

Вопрос о точности оценки параметров при заданном числе наблюдений или о существовании границы снизу для дисперсии оценки параметра был решен независимо С. Рао и Г. Крамером. Они доказали существование нижней границы для дисперсии оценки [70, 47].

Рассмотрим случай с одним параметром. Пусть функция правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ выборки x_1, x_2, \dots, x_n зависит от параметра θ и $\hat{\theta}$ — несмешенная оценка $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ параметра θ . Функция правдоподобия удовлетворяет условию нормировки

$$\int \dots \int L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) dx_1, \dots, dx_n = 1. \quad (2.1)$$

Полагая допустимым дифференцирование под знаком интеграла по параметру, получаем

$$\int \dots \int \frac{\partial L}{\partial \theta} dx_1, \dots, dx_n = 0. \quad (2.2)$$

Далее в силу несмешенности оценки $\hat{\theta}$ ($M\hat{\theta} = \theta$) имеем

$$\int \dots \int \hat{\theta} L dx_1, \dots, dx_n = \theta, \quad (2.3)$$

откуда

$$\int \dots \int \hat{\theta} \frac{\partial L}{\partial \theta} dx_1, \dots, dx_n = 1. \quad (2.4)$$

Учитывая выражения (2.2) и (2.4), запишем

$$\int \dots \int [\hat{\theta} - \theta] \frac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} dx_1, \dots, dx_n = 1, \quad (2.5)$$

или

$$\int \dots \int [\hat{\theta} - \theta] \left[\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right] L dx_1, \dots, dx_n = 1. \quad (2.6)$$

Перепишем равенство (2.6) в виде

$$M \left[(\hat{\theta} - \theta) \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \right] = 1. \quad (2.7)$$

Обозначим $\hat{\theta} - \theta = V$ и $(\frac{1}{L})(\partial L / \partial \theta) = W$ и используя аналог неравенства Коши–Буняковского

$$M[V^2] \cdot M[W^2] \geq (M[V \cdot W])^2,$$

получим

$$M[V^2] \cdot M[W^2] \geq 1 \quad \text{и} \quad M \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right] \cdot M \left[\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right]^2 \geq 1. \quad (2.8)$$

Проведем преобразование выражения $M[(1/L)(\partial L / \partial \theta)]$. Пусть $L \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} &= \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} &= -\frac{1}{L^2} \left[\frac{\partial L}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Умножим выражение (2.9) на L и, учитывая

$$M \left[\frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right] = \int \dots \int \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} dx_1, \dots, dx_n = 0,$$

получим математическое ожидание соответствующих величин

$$M \left[\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right]^2 = -M \left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right]. \quad (2.10)$$

С учетом равенства (2.10) неравенство (2.8) перепишется в виде

$$D(\hat{\theta}) = M(\hat{\theta} - \theta)^2 \geq \frac{1}{M[-\partial^2 \ln L / \partial \theta^2]}. \quad (2.11)$$

Выражение (2.11), дающее нижнюю границу для дисперсии оценки параметра, называют неравенством Рао–Крамера. Величина

$$M \left[-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right] = M \left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right]^2 = I^{(F)}(\theta) \quad (2.12)$$

является информационным количеством Фишера, которое было введено в п. 1.9.5. Значит нижней границей для дисперсии параметра является информационное количество Фишера:

$$D[\hat{\theta}] \geq (I^{(F)}(\theta))^{-1}. \quad (2.13)$$

Как уже отмечалось, эта величина не зависит от способа оценки $\hat{\theta}$ и представляет собой нижнюю границу точности для любой оценки. Итак, при данном объеме выборки точность оценки будет ограничена снизу. Для смещенной оценки со смещением $b(\theta)$ неравенство Рао–Крамера приобретает следующий вид:

$$D[\hat{\theta}] \geq \frac{1 + db/d\theta}{M [\partial \ln L / \partial \theta]}, \quad (2.14)$$

где $b(\theta) = M[\hat{\theta} - \theta]$.

Если выборка повторная, так что

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = f_\xi(x_1, \theta)f_\xi(x_2, \theta) \dots f_\xi(x_n, \theta)$$

и $f_\xi(x_i, \theta) \neq 0$, то

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta^2}$$

и

$$M \left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right] = \sum_{i=1}^n M \left[\frac{\partial^2 \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta^2} \right] = nM \left[\frac{\partial^2 \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta^2} \right].$$

Поскольку все величины $M [\partial^2 \ln f(x_i, \theta) / \partial \theta^2]$ одинаковы при всех i , получаем

$$D[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{nM [-\partial^2 \ln f(x, \theta) / \partial \theta^2]} = \frac{1}{nI^{(F)}(\theta)}. \quad (2.15)$$

В случае с несколькими параметрами $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_S)$ неравенство Рао–Крамера имеет вид

$$D[\hat{\boldsymbol{\theta}}] \geq (I^{(F)}(\boldsymbol{\theta}))^{-1}, \quad (2.16)$$

где

$$D[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = \|D_{ss'}\|_{s,s'=1}^S \quad \text{и} \quad I^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) = \|I_{ss'}^{(F)}\|_{s,s'=1}^S$$

соответственно ковариационная матрица вектора оценок параметров

$$D_{ss'} = M \left[(\hat{\theta}_s - \theta_s)(\hat{\theta}_{s'} - \theta_{s'}) \right]$$

и информационная матрица Фишера

$$I_{ss'}^{(F)} = M \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s \partial \theta_{s'}} \right] = M \left[\frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{s'}} \right].$$

Оценка параметра $\hat{\theta}$ называется *эффективной*, если дисперсия оценки достигает своей нижней границы, т. е. неравенство Рао–Крамера переходит в равенство

$$D[\hat{\theta}] = (I^{(F)}(\boldsymbol{\theta}))^{-1}. \quad (2.17)$$

В качестве меры эффективности используется функция

$$e(\hat{\theta}) = (I^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) D[\hat{\boldsymbol{\theta}}])^{-1}, \quad (2.18)$$

которая принимает значения от 0 до 1, причем для эффективной оценки $e(\hat{\theta}) = 1$. В случае повторной выборки эффективность имеет вид

$$e(\hat{\theta}) = n I^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) D[\hat{\boldsymbol{\theta}}]. \quad (2.19)$$

Оценку называют *асимптотически эффективной*, если $e(\hat{\theta}) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим случай векторного параметра $\boldsymbol{\theta}$. Пусть вектор $\mathbf{V} = \|V_s\|_{s=1}^S$ такой, что $\sum_{s=1}^S V_s^2 = 1$. Спроецируем на него случайный вектор оценок параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_S)$. Получим случайную величину с дисперсией $\mathbf{V}^T D(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{V}$, причем согласно неравенству Рао–Крамера будем иметь

$$\mathbf{V}^T D(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{V} \geq \mathbf{V}^T [I^{(F)}(\boldsymbol{\theta})]^{-1} \mathbf{V}. \quad (2.20)$$

Это означает, что корреляционный эллипсоид $\mathbf{V}^T D^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{V} = 1$ случайного вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ охватывает фиксированный эллипсоид $\mathbf{V}^T I^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{V} = 1$. Если корреляционный эллипсоид системы несмешенных оценок $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_S)$ имеет вид $\mathbf{V}^T D^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{V} = 1$ и совпадает с эллипсоидом $\mathbf{V}^T I^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{V} = 1$, то $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_S)$ называется системой *совместно эффективных* оценок. Системой *совместно асимптотически эффективных* оценок называют последовательность систем оценок $(\hat{\theta}_{1n}, \dots, \hat{\theta}_{Sn})$ для параметров $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_S)$, зависящих от объема выборки n , асимптотически несмешенных и имеющих корреляционные эллипсоиды $\mathbf{V}^T D^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{V} = 1$, которые при $n \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к даваемому информационной матрицей Фишера эллипсоиду $\mathbf{V}^T I^{(F)}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{V} = 1$.

2.2.4. Достаточность

Оценка $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ параметра θ называется достаточной оценкой, если функцию правдоподобия для выборки можно представить в виде

$$L(\mathbf{x}, \theta) = g(\hat{\theta}, \theta) h(\mathbf{x}), \quad (2.21)$$

где $h(\mathbf{x})$ не зависит от θ . В этом случае условное распределение вероятностей вектора \mathbf{x} при фиксированном $\hat{\theta}$ не зависит от θ , так что достаточная оценка $\hat{\theta}$ параметра θ аккумулирует всю информацию относительно θ , содержащуюся в выборке. Эффективная оценка обязательно является достаточной. Совокупность совместно достаточных оценок $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_S)$ требует допустимости представления функции правдоподобия в виде произведения функций

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = g(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}) h(\mathbf{x}), \quad (2.22)$$

где, как и ранее, $h(\mathbf{x})$ не зависит от θ .

2.2.5. Асимптотическая нормальность

Пусть имеется n измерений (x_1, \dots, x_n) случайной величины ξ с функцией плотности вероятностей $f_\xi(x, \theta)$, где θ — неизвестный параметр. Рассмотрим асимптотические свойства распределения оценки, которую будем считать состоятельной. Воспользуемся

центральной предельной теоремой. Из этой теоремы следует, что

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \quad (2.23)$$

в асимптотическом пределе ($n \rightarrow \infty$) распределено по нормальному закону со средним $M[g(\xi)]$ и дисперсией $D[g(\xi)]/n$, при условии, что $D[g(\xi)]$ конечна. Из закона больших чисел следует, что

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M[g(\xi)] = \int g(x)f(x, \theta)dx. \quad (2.24)$$

Допустим, существует такая функция $g(x)$, что правая часть уравнения (2.24) становится известной функцией $q(\theta)$:

$$M[g(\xi)] = \int g(x)f(x, \theta)dx = q(\theta). \quad (2.25)$$

Если равенство (2.25) справедливо для истинного значения θ_0 , то существует обратная функция q^{-1} для q , определенная выражением

$$q^{-1}[q(\theta_0)] \equiv \theta_0. \quad (2.26)$$

Используя равенство (2.24), получим

$$\theta_0 = q^{-1}\{M[g(\xi)]\}. \quad (2.27)$$

Для нахождения оценки $\hat{\theta}$ воспользуемся выражением

$$\hat{\theta} = q^{-1} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\}. \quad (2.28)$$

Выражение (2.28) можно разложить в ряд вблизи $M[g(\xi)]$:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= q^{-1} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} = q^{-1}\{M[g(\xi)]\} + \frac{\partial q^{-1}}{\partial g}\{M[g(\xi)]\} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) - M[g(\xi)] \right\} + O(1/n). \end{aligned}$$

При такой степени точности оценка $\hat{\theta}$ асимптотически распределена по нормальному закону $N(\theta_0, D(\hat{\theta}))$ с дисперсией в асимптотике

$$D[\hat{\theta}] = M[(\hat{\theta} - \theta_0)^2] = \frac{1}{n} \left[\frac{\partial q^{-1}}{\partial g} \right]^2 D[g],$$

где $D[g]$ — дисперсия $g(\xi)$.

В случае вектора параметров $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_S)$, функции g и q^{-1} становятся векторными функциями \mathbf{g} и \mathbf{q}^{-1} соответственно. В этом случае матрица вторых моментов асимптотического распределения $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ приобретает вид

$$D[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = M[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0)(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0)^T] = \frac{1}{n} \left[\frac{\partial \mathbf{q}^{-1}}{\partial \mathbf{g}} \right] D[\mathbf{g}] \left[\frac{\partial \mathbf{q}^{-1}}{\partial \mathbf{g}} \right]^T,$$

где $D[\mathbf{g}]$ — матрица вторых моментов \mathbf{g} , $\partial \mathbf{q}^{-1} / \partial \mathbf{g}$ — матрица с элементами $\partial \mathbf{q}_i^{-1} / \partial g_j$ и $q_i^{-1}(\mathbf{g}) = \theta_{0i}$.

2.2.6. Устойчивость

Устойчивыми, или *робастными*, называются оценки, не зависящие от вида распределения или нечувствительные к отклонениям от предполагаемого распределения. Как правило, при обработке экспериментальных геофизических данных делается предположение о нормальности распределения ошибок измерений. Большие выбросы приводят к отклонению от нормального распределения. Робастные процедуры позволяют исключить влияние больших ошибок (примеры робастных процедур см. в параграфе 6.14).

Кроме описанных выше желательных свойств оценок искомых параметров (состоительность, несмещенность, эффективность, нормальность, устойчивость), при практической реализации метода оценивания существенными факторами являются вычислительная сложность метода оценивания при построении алгоритмов обработки на ЭВМ массовой геофизической информации и временные затраты при проведении вычислений.

Г л а в а 3

МОДЕЛИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

При постановке геофизического эксперимента и интерпретации его данных понятие модели является основополагающим. Успех прогноза геологического строения исследуемого участка земной коры в значительной степени зависит от выбранной модели. В геофизической литературе встречаются различные аспекты использования понятия модели. Во-первых, моделью называют конкретные априорные предположения относительно строения того или иного геофизического объекта. Например, слоистая модель среды является основой многих методов обработки сейсмических данных: построение псевдоакустических разрезов с целью прогнозирования геологического разреза; миграция сейсмических временных разрезов в глубинные и др. В более сложных геологических условиях можно использовать модели анизотропных слоистых сред, в которых скорость распространения сейсмических волн зависит от направления распространения. В случаях магнитометрии и гравиметрии примером таких моделей может служить априорно выбираемая форма объекта, создающего аномальное магнитное или гравитационное поле. Во-вторых, понятие модели включает в себя априорные предположения о связи между наблюдаемым экспериментальным полем и интересующими исследователя параметрами и состояниями участка земной коры, при этом должен учитываться случайный характер экспериментальных данных. Исследуемый геологический объект является сложной многопараметрической системой, и для его изучения необходимо максимально использовать всю имеющуюся геолого-геофизическую информацию. При анализе реальных объектов совершенно неприемлем принцип “черного ящика”, предполагающий полное отсутствие априорной информации.

3.1. Аддитивные модели

Пусть наблюдение геофизического поля u проводится в декартовой системе координат (x, y, z) в дискретных точках пространства (x_k, y_l, z_m) в моменты времени t_i , где $k = 1, \dots, K$, $l = 1, \dots, L$, $m = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, n$. Если шаг при измерении равномерный, то $x_k = k\Delta x$, $y_l = l\Delta y$, $z_m = m\Delta z$, $t_i = i\Delta t$, где Δx , Δy , Δz , и Δt — шаги дискретности или интервалы квантования соответственно по пространственным координатам и времени. Важным частным случаем системы наблюдений являются измерения вдоль линейного профиля, когда, совмещая ось $0x$ с направлением профиля, получим для сейсмического поля $u(x_k, t_i)$ и для магнитного или гравитационного поля — $u(x_k)$.

На основании имеющейся априорной информации принимается определенная модель среды, которая позволяет с использованием физических законов установить функциональную связь между интересующими интерпретатора параметрами среды $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_S)$, где S — число искомых параметров, и модельным полем на плоскости наблюдений $f(\boldsymbol{\theta}, x_k, y_l, z_m, t_i)$. При этом, случайная компонента модели $\varepsilon(x_k, y_l, z_m, t_i)$ функционально связана с модельным и наблюдаемым полем:

$$u(x_k, y_l, z_m, t_i) = \Phi(f(x_k, y_l, z_m, t_i, \boldsymbol{\theta}), \varepsilon(x_k, y_l, z_m, t_i)). \quad (3.1)$$

Наибольшее распространение в практике обработки геофизических данных получила аддитивная модель. В этом случае функциональная зависимость Φ соответствует простому наложению модельного поля f и случайной компоненты модели ε :

$$u(x_k, y_l, z_m, t_i) = f(x_k, y_l, z_m, t_i, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon(x_k, y_l, z_m, t_i). \quad (3.2)$$

Такое представление указывает на независимость источников модельного поля и помехи. Описывая формулой (3.2) сейсмическую трассу, мы предполагаем, что f включает в себя волновое поле, рассчитанное согласно принятой модели среды, а ε отражает вклад микросейм, шумов регистрирующего канала, геологических неоднородностей, неучтенных в модельном поле. Для задач магнито- и гравиразведки возможным примером такой модели может служить наложение модельного поля f объекта известной типовой формы (например, пласта, уступа и др.) и случайного поля ε ,

которое обусловлено ошибками наблюдений, влиянием неинтерпретируемых источников поля, а также ошибкой, связанной с заменой реального магнитного объекта принятой физической моделью.

Модель (3.2) может быть получена из общей модели (3.1) путем линеаризации при достаточно малом расхождении ε . Параметры $\boldsymbol{\theta}$, входящие в модель, в зависимости от физической постановки задачи могут приниматься либо неизвестными величинами, либо случайными, при этом используются различные нахождения оценок параметров. При формализации модели, наряду с физическим основанием, необходимо учитывать вычислительную сложность и практическую реализуемость выбранного подхода. В дальнейшем будут использованы модели как с известными (но не случайными), так и со случайными параметрами. Отметим, что представление о случайности экспериментального материала лежит в основе статистической теории интерпретации и в дальнейшем определяет конкретный алгоритм и эффективность обработки. Следует подчеркнуть, что информационная сущность интерпретации становится до конца понятной только лишь в рамках статистической теории, в которой получаемая информация определяется разностью энтропий распределений вероятностей априорных (до интерпретации) и апостериорных (после интерпретации) суждений о состоянии объекта. Тем самым признается случайность суждений, которая является прямым следствием случайности измерений.

3.2. Модели количественной интерпретации

Модель типа (3.2) относится к классу моделей количественной интерпретации. Функция $f(x_k, y_l, z_m, t_i, \boldsymbol{\theta})$ предполагается известной и определяется физической постановкой задачи. Проблема состоит в нахождении оценок параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ по заданному экспериментальному материалу $u(x_k, y_l, z_m, t_i)$, что соответствует процедуре точечного оценивания параметров в терминах математической статистики.

В качестве примера такой модели рассмотрим модель трассы сейсмограммы:

$$u(t_i) = \sum_{\mu=1}^m A_\mu \varphi(t_i - \tau_\mu) + \varepsilon(t_i), \quad (3.3)$$

с вектором искомых параметров $\boldsymbol{\theta} = \|A_\mu, \tau_\mu\|_{\mu=1}^M$. При этом непрерывный по времени аналог модели (3.3) записывается в виде

$$u(t) = \sum_{\mu=1}^m A_\mu \varphi(t - \tau_\mu) + \varepsilon(t). \quad (3.4)$$

Пример сейсмической трассы дан на рис. 3.1.

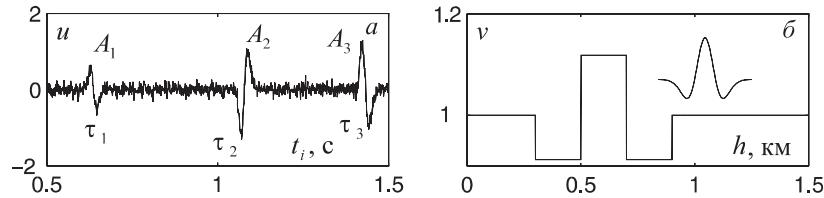


Рис. 3.1. Пример сейсмической трассы: *а* — сейсмическая трасса с гауссовским шумом ($N(0, 0.1)$); *б* — зависимость скорости от глубины и временная функция воздействия в источнике. Точки наблюдения и возбуждения расположены вблизи свободной поверхности.

В некоторых задачах обработки целесообразно проводить анализ в частотной области. Используя преобразование Фурье, модель (3.4) можно переписать в виде

$$u(\omega) = \sum_{\mu=1}^m A_\mu \Phi(\omega) \exp\{-i\omega\tau_\mu\} + E(\omega), \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp\{-i\omega t\} dt, \\ \Phi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \exp\{-i\omega t\} dt, \\ E(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) \exp\{-i\omega t\} dt. \end{aligned}$$

Для модели (3.3) воспользуемся дискретным преобразованием Фурье или Z -преобразованием ($Z = e^{-i\omega \Delta t}$):

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{\mu=1}^m A_\mu \Phi(z) z^{\tau_\mu / \Delta t} + E(z), \\ u(z) &= \sum_{i=0}^n u_i z^i, \quad \Phi(z) = \sum_{i=1}^n \varphi_i z^i, \quad E(z) = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i z^i. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Рассмотрим пример из магнитометрии. Пусть зарегистрированная вдоль линейного профиля в точках x_k вертикальная компонента магнитного поля $u(x_k)$ вызвана источником типа вертикального диполя, тогда линейная модель для экспериментального поля может быть записана в виде

$$u(x_k) = \frac{M(2h^2 - x_k^2)}{(x_k^2 + h^2)^{5/2}} + \varepsilon(x_k), \quad (3.7)$$

где M — магнитный момент диполя, h — глубина залегания (рис. 3.2).

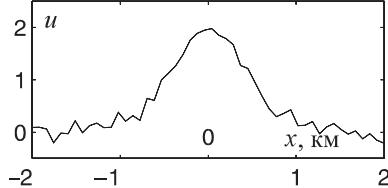


Рис. 3.2. Магнитное поле с нормальным ($N(0, \sigma^2)$) шумом (3.7), полученное на линейном профиле ($h = 1$ км, $M = 1$, $\sigma = 0.1$).

3.3. Регрессионная модель

При обработке геофизической информации интерпретатор часто сталкивается с проблемой сглаживания исходных или промежуточных данных функциями заданной степени гладкости. Так, например, при расчете спектров скоростей с целью определения скорости $V_{\text{ОГТ}}$ годограф волны аппроксимируется параболой второго

порядка, аналогичная аппроксимация годографа используется также при коррекции статических поправок. Для выделения локальных магнитных или гравитационных аномалий необходимо устранить влияние регионального фона, который может быть описан гладкой поверхностью. Аналогичная задача возникает при анализе структурных карт, полученных по данным сейсморазведки, где необходимо выделить малоамплитудные антиклинальные структуры на фоне регионального поднятия. Эти и многие другие задачи решаются методами регрессионного анализа.

Классическая модель линейной регрессии может быть получена как частный случай представления (3.1), когда вектор исходных параметров входит в модель линейно:

$$u(x_k, y_l, z_m, t_i) = \sum_{j=0}^S \theta_j \psi_j(x_k, y_l, z_m, t_i) + \varepsilon(x_k, y_l, z_m, t_i). \quad (3.8)$$

Формула (3.8) может быть положена в основу четырехмерной пространственной регрессии, которая применима при численной реализации лучевого метода. При обработке геофизических полей в настоящее время наибольшее распространение получили двумерные пространственные и пространственно-временные модели:

$$u(x_k, z_m) = \sum_{j=0}^S \theta_j \psi_j(x_k, z_m) + \varepsilon(x_k, z_m), \quad (3.9)$$

$$u(x_k, t_i) = \sum_{j=0}^S \theta_j \psi_j(x_k, t_i) + \varepsilon(x_k, t_i). \quad (3.10)$$

Представление (3.9) используется для описания пластовой скорости, значения магнитного и гравитационного полей при площадных наблюдениях на поверхности земли. Выражение (3.10) применяется в качестве модели сейсмической трассы, при этом функция $\psi(x_k, t_i)$ описывает форму сигнала с неизвестными моментами прихода θ_j .

В геофизической практике также нашли широкое применение одномерные модели

$$u(x_k) = \sum_{j=0}^S \theta_j \psi_j(x_k) + \varepsilon(x_k), \quad (3.11)$$

$$u(t_i) = \sum_{j=0}^S \theta_j \psi_j(t_i) + \varepsilon(t_i). \quad (3.12)$$

Формула (3.11) используется, например, для сглаживания значений скорости ОГТ или границы сейсмического горизонта вдоль профиля наблюдений. Представление (3.12) является исходной моделью сейсмической трассы для большого числа алгоритмов обработки, таких как обратная, предсказывающая и адаптивная фильтрации. В матрично-векторной форме формулы (3.11), (3.12) имеют вид

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.13)$$

Например, для модели (3.11) векторы \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varepsilon}$ имеют составляющие

$$\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_K], \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K],$$

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \dots & \psi_{1S} \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_{K1} & \dots & \psi_{KS} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\boldsymbol{\psi}$ называется *матрицей плана*.

3.4. Модели качественной интерпретации

Если в результате интерпретации геофизик может получить информацию только о качественном состоянии интересующего его объекта, то соответствующую модель экспериментального материала называют моделью качественной интерпретации:

$$u(x_k, y_l, z_m, t_i) = \begin{cases} \text{либо } f_1(x_k, y_l, z_m, t_i, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon(x_k, y_l, z_m, t_i), \\ \text{либо } f_2(x_k, y_l, z_m, t_i, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon(x_k, y_l, z_m, t_i), \\ \dots & \dots \\ \text{либо } f_N(x_k, y_l, z_m, t_i, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon(x_k, y_l, z_m, t_i), \end{cases} \quad (3.14)$$

где $f_\nu(x_k, y_l, z_m, t_i, \boldsymbol{\theta})$ — поле идеализированного объекта в состоянии с номером $\nu = 1, 2, \dots, N$. В качестве примера можно привести задачу обнаружения сейсмического сигнала на фоне шума по участку сейсмической трассы

$$u(t_i) = \begin{cases} \text{либо } A\varphi(t_i - \tau) + \varepsilon(t_i), \\ \text{либо } \varepsilon(t_i), \end{cases} \quad (3.15)$$

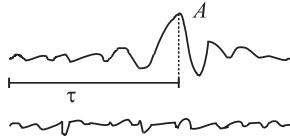


Рис. 3.3. Качественная интерпретация (сигнал и шум или шум).

где A , τ — известные параметры сигнала (рис. 3.3).

В случае выбора между двумя сигналами имеем (см. рис. 3.4)

$$u(t_i) = \begin{cases} \text{либо } A_1\varphi(t_i - \tau_1) + \varepsilon(t_i), \\ \text{либо } A_2\varphi(t_i - \tau_2) + \varepsilon(t_i). \end{cases} \quad (3.16)$$

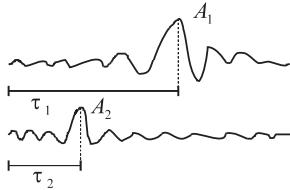


Рис. 3.4. Качественная интерпретация (сигнал (A_1) и шум или сигнал (A_2) и шум).

Важный класс задач разрешающей способности приема сейсмических сигналов базируется на следующей модели сейсмограммы (рис. 3.5)

$$u(t_i) = \begin{cases} \text{либо } A_0\varphi_0(t_i - \tau_0) + \varepsilon(t_i), \\ \text{либо } A_1\varphi_1(t_i - \tau_1) + A_2\varphi_2(t_i - \tau_2) + \varepsilon(t_i). \end{cases} \quad (3.17)$$

Результат применения проверки статистических гипотез позволит установить (с заданным уровнем значимости) не противоречит ли предположение о том, что на данном участке сейсмограммы имеется только одна волна или, это предположение отвергается.

Аппарат проверки статистических гипотез можно применять и к спектральному представлению сейсмограммы. В этом случае задача заключается в исследовании разрешающей способности при-

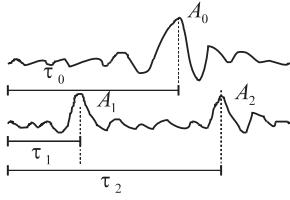


Рис. 3.5. Качественная интерпретация (сигнал (A_1) и шум или два сигнала $(A_1$ и A_2) и шум).

ма при разделении двух спектральных линий:

$$u(\omega) = \begin{cases} \text{либо } A_0\Phi_0(\omega - \omega_0) + E(\omega), \\ \text{либо } A_1\Phi_1(\omega - \omega_1) + A_2\Phi_2(\omega - \omega_2) + E(\omega), \end{cases} \quad (3.18)$$

где $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ — задержки по частоте, определяющие местоположение сигналов Φ_0, Φ_1, Φ_2 (рис. 3.6).

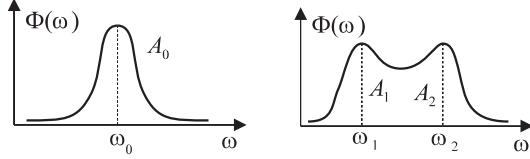


Рис. 3.6. Качественная интерпретация в частотной области (сигнал (A_0) и шум или два сигнала $(A_1$ и A_2) и шум).

3.5. Модели качественно-количественной интерпретации

При решении сложных интерпретационных задач современной геофизики исследователь имеет дело с моделями типа

$$u(x_k, y_l, z_m, t_i) = \begin{cases} \text{либо } f_1(x_k, y_l, z_m, t_i, \boldsymbol{\theta}_1) + \varepsilon(x_k, y_l, z_m, t_i), \\ \text{либо } f_2(x_k, y_l, z_m, t_i, \boldsymbol{\theta}_2) + \varepsilon(x_k, y_l, z_m, t_i), \\ \dots \quad \dots \\ \text{либо } f_N(x_k, y_l, z_m, t_i, \boldsymbol{\theta}_N) + \varepsilon(x_k, y_l, z_m, t_i), \end{cases} \quad (3.19)$$

где состояние интересующего объекта характеризуется N различными детерминированными компонентами f_ν ($\nu = 1, \dots, N$), каждая из которых зависит от своего вектора $\boldsymbol{\theta}_\nu$ неизвестных параметров с составляющими $\theta_{\nu s}$ ($s = 1, \dots, S$). Задача состоит в отыскании оптимальной процедуры выбора среди возможных состояний и в оценке неизвестных параметров по заданному экспериментальному материалу. Конкурирующие состояния объекта, для которых строятся модели экспериментального материала, должны образовывать полную систему взаимоисключающих (несовместных событий).

Отметим, что при формализации модели экспериментального материала необходимо на основании имеющихся априорных данных определить свойства распределения вероятностей случайной компоненты модели.

3.6. Случайная компонента модели и ее свойства

Задание свойств случайной компоненты ε в рассмотренных выше моделях в значительной степени определяют структуру алгоритмов нахождения оценки искомых параметров. Поэтому при обработке реального геофизического материала необходимо тщательно исследовать свойства случайной составляющей модели. Рассмотрим варианты представления случайной компоненты, имеющие наибольший практический интерес при решении задач аппроксимации геофизических данных.

Центральное место при определении свойств случайной компоненты занимает выбор ее закона распределения вероятностей. Геофизическое шумовое поле имеет сложный характер, на его формирование влияет большое число независимых факторов. Так, например, при описании сейсмического поля случайную компоненту модели можно условно разбить на следующие основные составляющие.

- Шум, связанный с прохождением сигнала через сейсмический канал.
- Микросейсмы — слабые колебания почвы, обусловленные состоянием окружающей среды. Уровень микросейсмов определяют метеорологические условия, движение транспорта, а также ряд геологических факторов; например, водонасыщен-

ные осадочные породы создают в 100 – 1000 раз больший шум, чем твердые коренные породы.

- Совокупность частично регулярных, мало протяженных волн, образованных вследствие неоднородности среды, включений, шероховатости сейсмических границ, а также большое число кратных, частично-кратных волн с малой энергией создают сложноинтерференционное нерегулярное поле сейсмограммы. Это поле допустимо рассматривать как реализацию некоторой случайной функции. Учитывая физическую природу шума, можно, опираясь на центральную предельную теорему, которая устанавливает асимптотическую нормальность суммы независимых случайных величин, сделать предположение о нормальности случайной компоненты.

Следует отметить, что при увеличении числа наблюдений большинство распределений вероятностей стремятся к нормальному распределению (распределения Стьюдента, биномиальное и др.). Если известны только первые два момента — среднее ε_0 и дисперсия σ^2 , то принцип максимума энтропии, который сводится к решению вариационной задачи с ограничениями, дает нормальное распределение.

Запишем явный вид плотности нормального распределения вектора $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$:

$$p(\varepsilon) = (2\pi)^{-n/2} |R|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0)^T R^{-1} (\varepsilon - \varepsilon_0) \right\}, \quad (3.20)$$

где T — знак транспонирования, ε_0 — вектор средних значений, R — матрица ковариаций значений случайной компоненты с элементами $R_{ii'}$, $|R|$ — детерминант матрицы ковариации, R^{-1} — обратная ковариационная матрица. На главной диагонали матрицы ковариаций стоят дисперсии случайных величин ε_i — σ_i^2 , вне-диагональные элементы $R_{ii'}$ описывают линейные связи случайных величин ε_i и $\varepsilon_{i'}$.

Наряду с матрицей ковариации R часто применяют корреляционную матрицу, элементы которой определяются следующим образом:

$$r_{ii'} = \frac{R_{ii'}}{\sqrt{R_{ii}} \sqrt{R_{i'i'}}}.$$

На главной диагонали этой матрицы стоят единицы, а внедиагональные элементы $r_{ii'}$ представляют собой коэффициенты корреляции случайных величин ε_i и $\varepsilon_{i'}$.

Рассмотрим частные, но с практической точки зрения очень важные виды ковариационной матрицы R .

1. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ обладает свойством стационарности в широком смысле слова, т. е. значения вектора средних и дисперсии постоянны, а элементы корреляционной матрицы зависят только от разности индексов i и i' , при этом на диагоналях, параллельных главной диагонали, стоят одинаковые значения

$$r = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n & r_{n-1} & r_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Некоррелированная случайная компонента. Матрица ковариаций имеет вид

$$R_{ii'} = \sigma_i^2 \delta_{ii'},$$

где $\delta_{ii'}$ — символ Кронекера:

$$\delta_{ii'} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = i', \\ 0 & \text{при } i \neq i'. \end{cases}$$

При равноточных измерениях

$$R = \sigma^2 I,$$

где I — единичная матрица. В этом случае легко рассчитывается обратная матрица

$$R^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} I.$$

Теперь плотности вероятностей можно записать в виде

$$p(\boldsymbol{\varepsilon}) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^2\right\}.$$

3. Марковский тип корреляционных связей. В этом случае корреляционные связи случайных величин ε_i и $\varepsilon_{i'}$ описываются функцией вида

$$R_{ii'} = \sigma^2 \exp\{-c|i - i'|\} \quad (3.21)$$

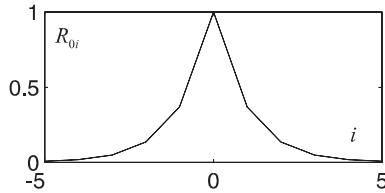


Рис. 3.7. Элементы ковариационной матрицы в случае марковского случайного процесса (3.21) ($\sigma = 1$, $c = 1$).

(рис. 3.7). Вводя обозначение $\gamma = \exp(-c)$, получим следующее представление для матрицы R :

$$R = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \gamma^2 & \dots & \gamma^n \\ \gamma & 1 & \gamma & \dots & \gamma^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma^n & \gamma^{n-1} & \gamma^{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Детерминант матрицы R

$$|R| = \sigma^{2n} (1 - \gamma^2)^{n-1}. \quad (3.23)$$

Существенным преимуществом матрицы R является то, что ее можно обратить независимо от величины n , при этом обратная матрица имеет вид

$$R^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(1 - \gamma^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 1 + \gamma^2 & -\gamma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Формула (3.20) для плотности распределения ε с учетом выражений (3.23) и (3.24) перепишется в виде

$$\begin{aligned} p(\varepsilon) &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} (1 - \gamma^2)^{(n-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1 - \gamma^2)} \times \right. \\ &\times \left. [(1 + \gamma^2) \sum_i \varepsilon_i^2 - 2\gamma \sum_i \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} - \gamma^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_n^2)]\right\}. \end{aligned}$$

Простота обращения матрицы (3.22) позволяет использовать марковский тип корреляции для приближенного описания более сложных корреляционных связей.

Практический интерес, например, для модели (3.10), представляет следующий вариант задания случайной компоненты ε_i : среднее значение равно нулю и конечный интервал корреляционных связей по времени

$$\langle \varepsilon_i \rangle, \quad \langle \varepsilon_i \varepsilon_{i-j} \rangle, \quad j \geq n_1,$$

где $\langle \cdot \rangle$ — операция (оператор) среднего. В этом случае для ε справедливо представление

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i + \sum_{j=1}^{n_1} D_j \varepsilon_{i-j},$$

где $\langle \varepsilon_i \rangle = 0$, $\langle \varepsilon_i \varepsilon_{i-j} \rangle = \sigma^2 \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Матрица D_j может быть как диагональной, так и недиагональной. Такое описание случайной компоненты может быть полезно при обработке сейсмограмм.

Наряду со стационарной либо квазистационарной компонентой случайной величины рассмотрим вариант нестационарной случайной компоненты на примере одномерной модели

$$u_i = f_i + \sigma_i(f_i) \varepsilon_i,$$

где $f_i = \sum_j \psi_{ij} \theta_j$, а ε_i — независимые и одинаково распределенные случайные величины со средним 0 и неизвестной симметричной плотностью распределения. В соответствии с априорными представлениями о характере стационарности выбирают вид функциональной зависимости $\sigma_i(f_i)$. Например,

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma(1 + |f_i|)^\lambda, & \sigma_i &= \sigma \exp(\lambda f_i), & \sigma_i &= \sigma |f_i|^\lambda, \\ \sigma_i &= \sigma(1 + \lambda f_i^2), & \sigma_i &= \sigma(1 + \lambda f_i^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

где λ, σ — неизвестные параметры, которые оцениваются совместно с $\boldsymbol{\theta}$.

Отметим, что сделанное выше предположение о нормальности оценок на практике не всегда соблюдается. Наличие резких выбросов в шумовой реализации может привести к существенному отклонению от нормального распределения, при этом статистические процедуры, базирующиеся на моментах первого и второго порядков, быстро теряют свои оптимальные свойства. В этих условиях целесообразно сделать предположение, что дисперсия шума известна лишь в среднем. Применяя принцип максимума энтропии,

найдем распределение, которое при принятом предположении обеспечивает наибольшую неопределенность системы, т. е. необходимо найти плотность $\hat{p}(\varepsilon)$, соответствующую максимуму энтропии,

$$H_\varepsilon = - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\varepsilon) \ln \hat{p}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \hat{p}(\varepsilon) = \arg \max H_\varepsilon.$$

Будем считать, что имеет место нормальное распределение случайной компоненты, но среднеквадратичная ошибка является случайной величиной с математическим ожиданием σ_0 . В этом случае искомую плотность $\hat{p}(\varepsilon)$ можно записать в виде

$$\hat{p}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{2\sigma^2} \right\} p(\sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} l(\varepsilon, \sigma) p(\sigma) d\sigma,$$

где ε_0 — математическое ожидание случайной величины ε , а плотность распределения σ удовлетворяет условиям

$$\int_0^{\infty} \sigma p(\sigma) d\sigma = \sigma_0, \quad (3.25)$$

$$\int_0^{\infty} p(\sigma) d\sigma = 1. \quad (3.26)$$

Для нахождения плотности $\hat{p}(\varepsilon)$ необходимо сначала определить $\hat{p}(\sigma)$. Метод максимума энтропии с учетом ограничений (3.25), (3.26) сводится к поиску условного экстремума. Для его нахождения воспользуемся методом Лагранжа. Функционал, подлежащий максимизации, имеет вид

$$\begin{aligned} L(p(\sigma)) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} l(\varepsilon, \sigma) p(\sigma) d\sigma \left[\ln \int_0^{\infty} l(\varepsilon, \sigma) p(\sigma) d\sigma \right] \right\} d\varepsilon + \\ &+ \lambda_1 \left[\int_0^{\infty} p(\sigma) d\sigma - 1 \right] + \lambda_2 \left[\int_0^{\infty} \sigma p(\sigma) d\sigma - \sigma_0 \right]. \end{aligned}$$

Необходимое условие сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial p} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(\varepsilon, \sigma) \left[\ln \int_0^{\infty} l(\varepsilon, \sigma) p(\sigma) d\sigma \right] d\varepsilon + 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \sigma = 0. \quad (3.27)$$

Легко проверить, что уравнению (3.27) с условиями (3.25), (3.26) удовлетворяет плотность

$$p(\sigma) = (2/\lambda^2)\sigma \exp\{-\sigma^2/\lambda^2\}, \quad (3.28)$$

где $\lambda = 2\sigma_0/\sqrt{\pi}$. Тогда

$$\hat{p}(\varepsilon) = \int_0^{\infty} l(\varepsilon, \sigma) p(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2\alpha} \exp\left\{-\frac{|\varepsilon - \varepsilon_0|}{\alpha}\right\},$$

при этом плотность вероятностей среднеквадратичного отклонения σ равна

$$p(\sigma) = \frac{2\sigma}{\lambda^2} \exp\{-\sigma^2/\lambda^2\}.$$

Полученная функция $\hat{p}(\varepsilon)$ является плотностью распределения Лапласа. “Хвосты” этого распределения спадают более медленно, чем “хвосты” нормального распределения, т. е. с более высокой вероятностью могут появиться значения ошибок ε , существенно отличающиеся от среднего значения ε_0 . Поэтому предположение о распределении ошибок наблюдений ε по закону Лапласа является более осторожным по сравнению с предположением о нормальном законе, если дисперсия шума точно неизвестна или нестабильна. На рис. 3.8 представлены плотности нормального распределения и распределения Лапласа.

3.7. Модель со случайными параметрами

Наряду с моделью (3.1), в которой вектор параметров считается неизвестным, но неслучайным, может быть предложена модель со случайными параметрами сигналов

$$u(x_k, t_i) = \sum_{\mu=1}^M A_\mu \varphi(t_i - \tau_{\mu k}) + \varepsilon(x_k, t_i), \quad (3.29)$$

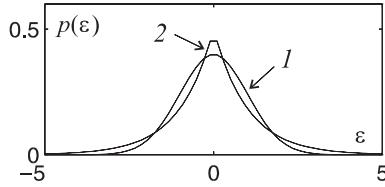


Рис. 3.8. Плотности распределения: 1 — нормальное ($\varepsilon_0 = 0$, $\sigma = 1$); 2 — Лапласа ($\varepsilon_0 = 0$, $\alpha = 1$).

где A_μ , $\tau_{\mu k}$ — соответственно случайные амплитуды и моменты прихода волны с номером μ . Будем считать распределение этих параметров нормальным с математическим ожиданием 0 и дисперсиями σ_A^2 , σ_τ^2 . Форма сигнала $\varphi(t_i)$ предполагается известной детерминированной функцией. Случайная компонента ε_{ki} имеет также нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и ковариационной матрицей R .

3.8. Учет априорной информации

Обычно при проведении геофизических работ интерпретатор обладает априорной информацией, источником которой служат проводимые ранее в этом или соседних районах геофизические исследования, а также данные промысловой геофизики по имеющимся глубоким скважинам. Привлечение этой информации при построении алгоритмов интерпретации и для создания автоматизированной системы обработки геофизических данных требует ее формализации в строгой математической форме.

В общем случае априорная информация может быть представлена системой алгебраических уравнений или неравенств вида

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{c}, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{c}_1 \leq \Phi(\boldsymbol{\theta}) \leq \mathbf{c}_2, \quad (3.31)$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — вектор неизвестных параметров, $\Phi(\boldsymbol{\theta})$ — заданная векторная функция.

Для многих практических приложений можно ограничиться частным случаем формулы (3.30) — системой линейных уравнений

вида

$$A\boldsymbol{\theta} = \mathbf{V}, \quad (3.32)$$

где A и \mathbf{V} — заданные матрица и вектор свободных членов. Частным случаем формулы (3.31) является линейная система неравенств

$$\mathbf{V}_1 \leq A\boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{V}_2, \quad (3.33)$$

где \mathbf{V}' и \mathbf{V}'' — заданные нижняя и верхняя границы неравенств. Так как задача оценивания сводится, как правило, к поиску экстремума в пространстве искомых параметров, то учет априорной информации заменяет эту задачу поиском условного экстремума, для нахождения которого обычно используется метод неопределенных множителей Лагранжа.

Если параметры в модели считаются случайными, то естественной формой представления априорной информации является задание априорного распределения вероятностей искомых параметров. В качестве таких распределений чаще всего используются нормальное либо равномерное распределения. Так, если для каждого из параметров, которые предполагаются независимыми, можно указать априорные интервалы их изменения, причем параметры с равной вероятностью принимают любые значения из этих интервалов, то априорное распределение параметров будет равномерным:

$$p(\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \prod_{s=1}^S 1/(\theta_s'' - \theta_s') & \theta_s' \leq \theta_s \leq \theta_s'', \\ 0 & \theta_s, \end{cases} \quad (3.34)$$

где θ_s'' и θ_s' — соответственно верхняя и нижняя границы априорного изменения параметра θ_s .

При наличии большого числа независимых случайных факторов, влияющих на параметры, в качестве априорного распределения обычно выбирают нормальное распределение, исходя из центральной предельной теоремы. Если предположим, что параметры независимы, то априорное распределение запишется в виде

$$p(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{s=1}^S (2\pi\sigma_{\theta_s}^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^S \frac{(\theta_s - \langle \theta_s \rangle)^2}{\sigma_{\theta_s}^2} \right\}. \quad (3.35)$$

Предположим, что амплитуда волны имеет нормальное распределение со средним значением $\langle A \rangle$ и дисперсией σ_A^2 . В то время как

момент прихода t_0 и обратная кажущаяся скорость γ имеют равномерное распределение с интервалами $[t'_0, t''_0]$ и $[\gamma', \gamma'']$ функция совместного распределения вероятностей запишется в виде

$$p(A, t_0, \gamma) = \begin{cases} [\sqrt{2\pi}\sigma_A(t''_0 - t'_0)(\gamma'' - \gamma')]^{-1} \times & \text{при } t'_0 \leq t_0 \leq t''_0 \\ \times \exp\{-(A - \langle A \rangle)^2/2\sigma_A^2\}, & \text{и } \gamma' \leq \gamma \leq \gamma'', \\ 0, & \text{при остальных } t_0, \gamma. \end{cases}$$

Возможны другие варианты задания априорной информации, однако описанные здесь способы наиболее часто используются на практике при построении алгоритмов интерпретации сейсмических данных.

Рассмотренные модели экспериментального материала не охватывают всего разнообразия практических ситуаций. Но они достаточно полно иллюстрируют условия и возможности, связанные со статистическим подходом. При решении конкретной геофизической задачи необходимо с максимальным вниманием и тщательностью подойти к выбору модели экспериментального материала. Разработка оптимальной модели должна проводиться совместно геофизиками и математиками, в ней должны найти отражение “искусство”, интуиция и богатая априорная информация интерпретатора, формализованные в строгой математической форме.

Г л а в а 4

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВЯЗИ ПОЛЕЙ ЗОНДИРУЮЩИХ СИГНАЛОВ И ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ

Основными элементами задач дистанционного зондирования являются математические модели распространения зондирующих сигналов разной физической природы в исследуемой среде. В этой главе формулируются законы распространения упругих, акустических, электромагнитных волновых полей, а также уравнение переноса лучистой энергии либо моноэнергетических нейтронов.

4.1. Сейсмология и сейсморазведка

В качестве зондирующего сигнала в сейсмологии и в сейсморазведке используются упругие волны, возбужденные либо землетрясениями (естественные источники упругих волн), либо взрывом, выброс сейсмической платформой и другими искусственными источниками [1, 2, 41]. Упругие волны, регистрируемые сейсмоприемниками, несут информацию о параметрах среды, определяющих распространение упругих волн. Так, на рис. 4.1 приведены примеры томографического зондирования упругими волнами (*a*—схема вертикального сейсмического профилирования, причем источники расположены на дневной поверхности E ; *b*—сечение вертикального сейсмического профилирования в плоскости $x0z$; *c*—данные наблюдений на дневной поверхности и в скважине при наличии отражающего горизонта).

Основная задача сейсмологии и сейсморазведки состоит в восстановлении внутреннего строения Земли по сигналам, зарегистри-

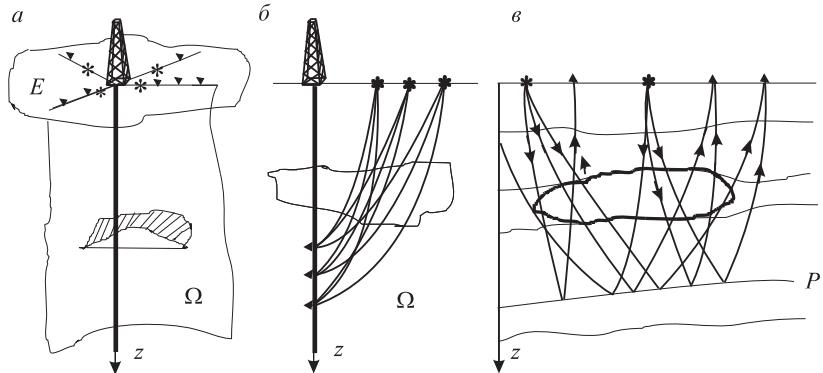


Рис. 4.1. Примеры томографического зондирования упругими волнами.

рованным трехкомпонентными приемниками в скважинах или на дневной поверхности Земли. Наиболее эффективный метод сейсморазведки — метод отраженных волн, применяемый наиболее широко при поисках и детальной разведке различных полезных ископаемых на суше и на море. Метод базируется на регистрации упругих волн, отраженных от поверхностей и соответствующих скачкам волновых сопротивлений геологических сред. Эти границы, как правило, соответствуют литологическим и тектоническим границам. При проведении сейсморазведки в новом неисследованном районе требуется в основном построить макромодель среды, т. е. проследить основные отражающие границы, и определить средние значения упругих параметров (желательно с их градиентами) в пределах каждого геологического пласта. При проектировании разработки месторождений макромодель известна, и цель сейсморазведки заключается в получении детальной и достоверной информации об упругих параметрах в пределах основных слоев.

Решения задач сейсмологии и сейсморазведки определяются связью свойств среды и соответствующей трансформацией зондирующего сигнала, т. е. *уравнением распространения упругих волн*.

Задача распространения сейсмических волн базируется на модели *идеально упругого тела*, в основе которого лежит линейная связь между *деформацией*, т. е. изменением формы либо объема элемента твердого тела, и возвращающей *упругой силой*. В этой модели в неявной форме закладывается предположение о “близко-

действии”, т. е. о том, что взаимодействие элементов твердого тела осуществляется только через поверхности разделяющих их границ. Вдали от очага землетрясения или от пункта взрыва можно считать деформации горных пород малыми, а потому можно пользоваться моделью идеально упругого тела.

Запишем основные соотношения *математической теории упругости*. Смещение элементов может быть вызвано объемной силой

$$d\mathbf{f} = \mathbf{s}dV,$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{s}(x) \triangleq d\mathbf{f}/dV$ — плотность объемной силы \mathbf{f} либо поверхностной силы $d\mathbf{f} = \mathbf{t}d\sigma$. При этом \mathbf{t} — плотность поверхностных сил, приложенных к элементу поверхности $d\sigma$ рассматриваемого элемента dV , называемая *напряжением*:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(x) \triangleq \frac{d\mathbf{f}}{d\sigma}.$$

Обозначим величину смещения относительно равновесного состояния элемента объемом dV с плотностью ρ через $\varphi = \varphi(x)$, запишем уравнение движения

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \mathbf{s} + \mathbf{s}', \quad (4.1)$$

где $\mathbf{s}' = K\varphi$ — плотность возвращающей упругой силы, вызванной смещением φ и являющейся результатом интегрирования вектора плотности поверхностной силы, приложенной к выделенному элементу объема:

$$\int \int \int \mathbf{s}' dV = \int \int \mathbf{t} d\sigma. \quad (4.2)$$

Учитывая, что $\mathbf{t} = \mathbf{t}(n)$, где \mathbf{n} — направление внешней по отношению к рассматриваемому элементу объема нормали, можно записать:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{n}).$$

Из условия

$$\frac{|\int \int \int \mathbf{t}(\mathbf{n}) d\sigma|}{\int \int d\sigma} \xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} 0$$

для распределения напряжений на элементарном тетраэдре (рис. 4.2) получаем:

$$\frac{\mathbf{t}(\mathbf{n})\Delta\sigma_n + \mathbf{t}(-\mathbf{e}_1)\Delta\sigma_1 + \mathbf{t}(-\mathbf{e}_2)\Delta\sigma_2 + \mathbf{t}(\mathbf{e}_3)\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_n + \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3} \xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} 0.$$

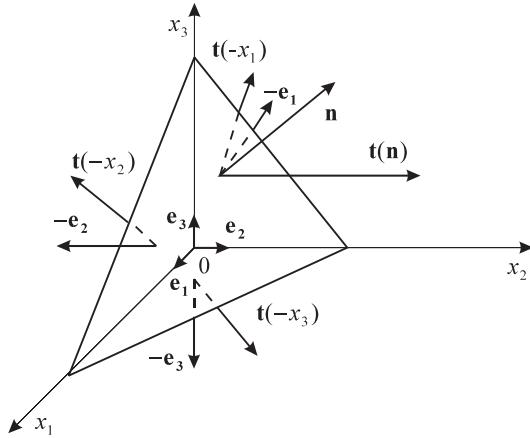


Рис. 4.2. Распределение напряжений на элементарном тетраэдре.

Отсюда

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \sum_j \mathbf{t}(\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}) = \sum_j t(\mathbf{e}_j)n_j, \quad (4.3)$$

т. е. соотношение (4.3) определяет связь плотности поверхностной силы (напряжения) \mathbf{t} , действующей в направлении \mathbf{n} , и плотностей поверхностной силы в направлении ортов \mathbf{e} . Представление (4.3) дает возможность ввести тензор напряжений:

$$\mathbf{t} = \hat{\tau}\mathbf{n}, \quad (4.4)$$

т. е. $t_i = \sum_j \tau_{ij}n_j$, где $\tau_{ij} = t_i(\mathbf{e}_j)$ — i -я компонента вектора напряжений, действующего на плоскость, нормальную орту \mathbf{e}_j , вызванного действием упругой возвращающей силы со стороны частей тела, внешних по отношению к выделенному объему. Заметим, что $\hat{\tau} = \hat{\tau}(x)$, т. е. деформированное тело описывается полем тензора напряжений. Симметричный тензор $\hat{\tau}$ можно привести к диагональному виду: $\tau_{ij} = \tau_i^0 \delta_{ij}$, здесь τ_i^0 — главные оси напряжений, $\delta_{ij} = 1$, $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Используя выражение (4.4) и применяя теорему Остроградского — Гаусса, получаем

$$\int \int \mathbf{t}(\mathbf{n}) d\sigma = \int \int \hat{\tau} \mathbf{n} d\sigma = \int \int \int (\nabla \cdot \hat{\tau}) dV,$$

откуда для плотности объемной возвращающей упругой силы (4.2) находим

$$\mathbf{s}' = (\nabla \cdot \hat{\tau}). \quad (4.5)$$

В линейной теории упругости связь между напряжениями и деформациями (смещениями φ) принимается линейной (закон Гука), т. е.

$$\hat{\tau} = \tilde{K}\hat{\varepsilon}, \quad (4.6)$$

где $\hat{\varepsilon}$ — тензор деформаций, определяемый выражением

$$d\varphi \stackrel{\Delta}{=} \hat{\xi}d\mathbf{x} \stackrel{\Delta}{=} \hat{\varepsilon}d\mathbf{x} - \hat{\eta}d\mathbf{x}. \quad (4.7)$$

В этом выражении общий тензор $\hat{\xi}$ представляется в виде разложения на симметричный

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^+, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right),$$

и антисимметричный

$$\hat{\eta} = -\hat{\eta}, \quad \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right).$$

Причем антисимметричный тензор $\hat{\eta} = (\nabla \times \varphi x)/2$ описывает вращение при условии, что $|\partial \varphi_i / \partial x_j| \ll 1$, а K — тензор 4-го ранга модулей упругости,

$$\tau_{ij} = \sum_{kl} K_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1 \div 3), \quad (4.8)$$

определяет упругие свойства среды и обладает свойствами симметрии вследствие симметрии тензоров напряжений и деформаций:

$$K_{ijkl} = K_{jikl} = K_{ijlk} = K_{jilk}, \quad (4.9)$$

т. е. тензор K имеет 21 независимую компоненту.

Для решения задач сейсмологии и сейсморазведки в подавляющем большинстве случаев используется модель изотропной неоднородной упругой среды, локально инвариантной относительно вращения. Рассмотрим модель среды, в которой главные оси тензора напряжений и тензора деформаций совпадают. Пусть, например,

растягивающие напряжения приложены вдоль однородного стержня, который удлиняется в продольном направлении и сжимается в поперечном. Если первый координатный орт направить вдоль стержня, то соотношение (4.6) можно записать в виде

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \tau_{11}, \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\sigma}{E} \tau_{11}. \quad (4.11)$$

Коэффициент E называется *модулем Юнга*, σ — *коэффициентом Пуассона*, при этом E и σ — константы материала стержня, описывающие его упругие свойства. Все компоненты тензора напряжений, кроме τ_{11} , и три компоненты тензора деформаций — ε_{23} , ε_{12} , ε_{13} — равны нулю. Если к тензору напряжения τ_{11} “добавить” тензоры τ_{22} и τ_{33} , то деформация ε_{11} из выражения (4.10) изменится в соответствии с принятой линейной моделью и условием (4.11) следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \tau_{11} - \frac{\sigma}{E} \tau_{22} - \frac{\sigma}{E} \tau_{33}, \quad (4.12)$$

при этом $\tau_{23} = 0$ и $\varepsilon_{23} = 0$. Выражение (4.12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{11} &= (1 + \sigma)\tau_{11} - \sigma(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}), \\ \text{или } E\hat{\varepsilon} &= (1 + \sigma)\hat{\tau} - \sigma \operatorname{sp}\hat{\tau}\hat{I} \end{aligned} \quad (4.13)$$

(I — единичный оператор). Как видим, связь тензоров напряжения и деформаций в случае изотропной упругой среды определяется двумя параметрами, например модулем Юнга и коэффициентом Пуассона. Сворачивая тензоры в левой и правой частях формулы (4.13), получаем

$$E \operatorname{sp}\hat{\varepsilon} = (1 + \sigma) \operatorname{sp}\hat{\tau} - 3\sigma \operatorname{sp}\hat{\tau} = (1 - 2\sigma) \operatorname{sp}\hat{\tau},$$

поэтому формулу (4.13) можно переписать как

$$(1 + \sigma)\hat{\tau} = E\hat{\varepsilon} + \frac{\sigma E}{1 - 2\sigma} \operatorname{sp}\hat{\varepsilon}\hat{I},$$

или

$$\hat{\tau} = \frac{E}{1 + \sigma} \hat{\varepsilon} + \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \operatorname{sp}\hat{\varepsilon}\hat{I} \stackrel{\Delta}{=} 2\mu\hat{\varepsilon} + \lambda \operatorname{sp}\hat{\varepsilon}\hat{I}. \quad (4.14)$$

Параметры $\mu = E/[2(1 + \sigma)]$ и $\lambda = \sigma E/[(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)]$ известны как *параметры Ламе*. Тензор упругих модулей K из соотношения (4.6) для изотропной среды принимает вид

$$K_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Выясним физический смысл $\text{sp}\hat{\varepsilon}$ из выражения (4.7):

$$\text{sp}\hat{\varepsilon} = (\nabla \cdot \varphi) \simeq \frac{\prod_i (1 + \partial\varphi_i / \partial x_i) dx_i - \prod_i dx_i}{\prod_i dx_i} = \frac{dV - dV_0}{dV_0},$$

т. е. $\text{sp}\hat{\varepsilon}$ численно равен относительному изменению объема, которое называется *дилатацией*, отсюда ясен смысл параметра Ламе λ (λ — коэффициент при дилатации).

Смысл второго параметра Ламе (μ) проявляется при деформации, не связанной с изменением объема, т. е. при деформации сдвига. Пусть бруск (рис. 4.3) закреплен на плоскости $x_3 = 0$ и к верхней грани прикладывается касательное сдвигающее напряжение τ_{13} . Тогда малое смещение $d\varphi_1$ можно выразить через величину угла ξ : $d\varphi_1 = \xi dx_3$, т. е. $d\varphi_1/dx_3 = \xi$ из формулы (4.7) находим как $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \xi/2$ и $\tau_{31} = \mu\xi$. Следовательно, физический смысл параметра Ламе μ_i — *модуль сдвига*. Упругая свободная

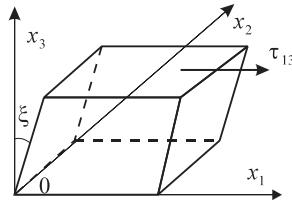


Рис. 4.3. Деформация сдвига.

энергия $F = K\hat{\varepsilon}/2$ с точностью до членов второго порядка выражается через параметры Ламе следующим образом:

$$F = \frac{\lambda}{2} (\text{sp}\hat{\varepsilon})^2 + \mu \sum_{\substack{ik \\ i \neq ik}} \varepsilon_{ik}^2.$$

Отмечая, что любую деформацию можно представить как сумму деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия ($\hat{\varepsilon} = \text{const} \hat{I}$),

записываем:

$$\hat{\varepsilon} = \left(\hat{\varepsilon} - \frac{1}{3} \hat{I} \text{sp} \hat{\varepsilon} \right) + \frac{1}{3} \hat{I} \text{sp} \hat{\varepsilon}.$$

След тензора, записанного в круглых скобках, очевидным образом равен нулю, поэтому F можно представить в форме

$$F = \mu \sum_{\substack{ik \\ i \neq ik}} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \text{sp} \hat{\varepsilon} \right)^2 + \frac{k}{2} (\text{sp} \hat{\varepsilon})^2,$$

где $k = \lambda + 2\mu/3$ — модуль *всестороннего сжатия*. Запишем уравнение движения (4.1), используя формулу для возвращающей упругой силы (4.5) и закон Гука (см. соотношение (4.6)):

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \mathbf{s} + \nabla \cdot \tilde{K} \hat{\varepsilon} = \mathbf{s} + \nabla \cdot \tilde{K} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (4.15)$$

так как из формулы (4.7) следует

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \hat{\varepsilon} - \hat{\eta} = \hat{\varepsilon} - \left[\frac{1}{2} (\nabla \times \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{x} \right],$$

$$\nabla \cdot [\tilde{K} (\nabla \times \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{x}] \equiv 0.$$

Уравнение (4.15) будем называть *уравнением Ламе*, а оператор

$$L \triangleq \rho \partial_t^2 - \nabla \cdot \tilde{K}_x \hat{\partial}_{\mathbf{x}} \quad (4.16)$$

оператором Ламе, при этом уравнение (4.15) записывается как

$$L \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{s}.$$

Обобщенным оператором Ламе будем называть оператор \mathcal{L} , учитывая граничные и начальные условия (линейные), накладываемые на $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\hat{L} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{s}, \quad \hat{\Gamma} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g}.$$

Тогда

$$\hat{\mathcal{L}} = \begin{vmatrix} \hat{L} \\ \hat{\Gamma} \end{vmatrix}.$$

Для изотропной среды уравнение Ламе приобретает вид

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mu \Delta \boldsymbol{\varphi} - \nabla \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} - \nabla \mu \times \nabla \times \boldsymbol{\varphi} - 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{s}. \quad (4.17)$$

Для однородной изотропной среды ($\lambda = \text{const}, \mu = \text{const}, \rho = \text{const}$) формула (4.17) переписывается как

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mu \Delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{s}. \quad (4.18)$$

Учитывая тождество

$$\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} = \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\varphi},$$

уравнение (4.17) перепишем в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mu \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{s}. \quad (4.19)$$

Используя теорему Гельмгольца, векторное поле $\boldsymbol{\varphi}$ можно представить как сумму потенциального ($\boldsymbol{\varphi}_p$) и соленоидального ($\boldsymbol{\varphi}_s$) векторных полей:

$$\boldsymbol{\varphi} \stackrel{\Delta}{=} \boldsymbol{\varphi}_p + \boldsymbol{\varphi}_s = -\nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (4.20)$$

где $\mathbf{A} : \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$; Φ — скалярный потенциал; \mathbf{A} — векторный потенциал. Подставив в уравнение (4.19) представления $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_p + \boldsymbol{\varphi}_s$ и $\mathbf{s} = \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_s$, а затем применив к правой и левой частям операторы $\nabla \times (\cdot)$ и $\nabla \cdot (\cdot)$, получим систему волновых уравнений для $\boldsymbol{\varphi}_p$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\varphi}_p &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{\varphi}_p - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_p \stackrel{\Delta}{=} \\ &\stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_p^2 \Delta \right) \boldsymbol{\varphi}_p = \mathbf{s}_p \end{aligned} \quad (4.21)$$

и для $\boldsymbol{\varphi}_s$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\varphi}_s &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{\varphi}_s - \frac{\mu}{\rho} \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_s \stackrel{\Delta}{=} \\ &\stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \Delta \right) \boldsymbol{\varphi}_s = \mathbf{s}_s. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Подставив частное решение уравнений (4.21), (4.22) в форме

$$\varphi_{ps} = \mathbf{e}_{ps} f_{ps}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - v_{ps} t), \quad (4.23)$$

где $|\mathbf{e}_{ps}| = 1$, и учитывая, что из условия $\nabla \times \varphi_p \equiv 0$ следует $[\mathbf{n} \times \mathbf{e}_p] f' = 0$, а из условия $\nabla \cdot \varphi_s \equiv 0$ следует $[\mathbf{n} \times \mathbf{e}_s] f' = 0$, можно интерпретировать компоненту φ_p как *продольную волну*, распространяющуюся со скоростью $v_p = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}$, причем направление вектора поляризации \mathbf{e}_p совпадает с направлением распространения плоской волны с нормалью к фронту \mathbf{n} ; соответственно интерпретируем φ_s как *поперечную волну*, скорость которой $v_s = (\mu/\rho)^{1/2}$, а направление вектора смещений \mathbf{e}_s — ортогонально направлению распространения этой волны. В силу условий $\nabla \cdot \varphi_s = \text{sp}\hat{\varepsilon}$ и $\nabla \cdot \varphi_s \equiv 0$ поперечная волна φ_s не связана с изменением объема, а является волной сдвига. В то же время в силу $\nabla \times \varphi_p \equiv 0$ продольная волна является волной дилатации (сжатия—растяжения). Следует отметить, что представление о продольных и поперечных волнах явилось следствием трансляционной (по времени и пространству) инвариантности характеристик среды.

Рассмотрим более подробно ситуацию для однородной анизотропной среды [63—65]. В силу соотношений симметрии (4.8), (4.9), тензор модулей упругости K можно представить в виде блочной симметричной матрицы:

$$\tilde{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbf{K}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{26} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ K_{61} & K_{62} & \dots & K_{66} \end{vmatrix}, \quad (4.24)$$

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha};$$

если между парами ij и kl из соотношений (4.8), (4.9) и α, β соответственно ввести связь, например, вида $i, i \leftrightarrow i$; $(2, 3) = (3, 2) \leftrightarrow 4$; $(3, 1) = (1, 3) \leftrightarrow 5$; $(1, 2) = (2, 1) \leftrightarrow 6$. Из представления (4.24) видно, что тензор \tilde{K} в общем случае имеет не более 21 независимого параметра. В силу трансляционной инвариантности три степени свободы определяются выбором ориентации системы координат, поэтому независимыми остаются 18 параметров.

В изотропной среде в представлении (4.24) тензор \tilde{K} имеет сле-

дующий вид:

$$\tilde{K}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{vmatrix}.$$

Запишем уравнение движения при отсутствии источника ($\mathbf{s} = 0$):

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = \sum_{k,l,j} K_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_k. \quad (4.25)$$

Подставив сюда частное решение в виде плоской волны: $\varphi = \mathbf{e} f(t - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}))$, где \mathbf{p} — вектор медленности (градиент эйконала), получим условие

$$\det \left| \rho \delta_{ik} - \sum_{j,l} K_{ijkl} p_j p_l \right| = 0. \quad (4.26)$$

Общее решение уравнения (4.26) для произвольной анизотропной среды отсутствует.

В изотропной среде уравнение (4.26) сводится к трем квадратным уравнениям для компонент медленности: продольной волны и поперечной двух типов.

4.2. Акустика океана

Акустические методы нашли широкое применение при изучении океанической толщи и океанического осадочного чехла. В ходе исследований выяснилось, что глубокий океан имеет различный рельеф дна. К его основным структурным элементам относятся абиссальные равнины, срединно-оceanические хребты, малые формы (срединно-оceanические острова и шельфы архипелагов), крупные зоны разломов. Особое значение детальное изучение этих структурных элементов приобрело в связи с бурным развитием геодинамики, а также при решении прикладных задач (например, при

поиске железисто-марганцевых конкреций, нефти и газа в шельфовой зоне). Наличие волновода в приповерхностной водной толще, обеспечивающего дальнее распространение звуковых волн, обуславливает уникальность акустических сигналов при зондировании громадных акваторий. Анализ подводного распространения звука базируется на законах теоретической акустики [23-25]. Распространение звуковых колебаний подчиняется волновому уравнению с соответствующими граничными условиями на поверхности и на дне океана. Задача акустической томографии сводится к восстановлению поля скорости распространения звука, т. е. к восстановлению волнового оператора по значениям поля акустического давления в нескольких пространственных точках (“точках приема”).

Запишем уравнение движения в форме 2-го закона Ньютона для элемента объема (dV) жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{S} + \mathbf{S}', \quad (4.27)$$

где $\mathbf{S} = \int_V \mathbf{s} \rho dV$ — внешняя массовая сила по аналогии с уравнением (4.1); $\mathbf{S}' = \int_V \mathbf{s}' dV$ — результирующая сила воздействия окружающей жидкости на элемент объема, т. е.

$$\mathbf{S}' = - \oint_{\partial V} p d\sigma = - \int_V \nabla p dV \quad (4.28)$$

(p — давление). Чтобы записать полную производную по времени в левой части уравнения (4.27), напомним связь субстанциальной (d/dt — производной по траектории) и локальной ($\partial/\partial t$) производных:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}, \\ \text{т. е. } \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Представим также выражение для субстанциальной производной от интеграла по малому объему V , движущемуся вместе с выделенным

элементом жидкости, т. е. составленному из одних и тех же частиц:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{F} dV &= \frac{d}{dt} \int_{\tilde{V}} \mathbf{F} J d\tilde{V} = \int_{\tilde{V}} \frac{d}{dt} (\mathbf{F} J) d\tilde{V} = \\
 &= \int_V \frac{1}{J} \frac{d}{dt} (\mathbf{F} J) DV = \int_V \left[\frac{d}{dt} \mathbf{F} + \mathbf{F} \left(\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} \right) \right] DV = \\
 &= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{F} \right] DV.
 \end{aligned}$$

Здесь J — якобиан; в последнем переходе использовано равенство

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

С использованием формул (4.29) и (4.28) левая часть уравнения (4.27) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \int_V \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) dV &= \int_V \left(\mathbf{v} \frac{d}{dt} \rho + \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} \right) dV = \\
 &= \int_V \left\{ \mathbf{v} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \rho \right] + \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} \right\} dV. \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

В уравнение (4.27) входят переменные функции p , ρ , \mathbf{v} . Для получения замкнутого уравнения необходимо дополнить уравнение (4.27) соотношениями, связывающими эти функции. Учитывая, что термодинамическое уравнение состояния в общем случае представляется как $p = p(\rho, H)$ (H — энтропия системы), запишем полную систему для уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{s}; \quad (4.31)$$

для уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.32)$$

(из условия

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot d\sigma = - \int_V (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) dV$$

$$\text{или } \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0;$$

для уравнения состояния:

$$p = p(\rho, H); \quad (4.33)$$

и для уравнения изоэнтропичности (адиабатичности):

$$\frac{\partial}{\partial t} H + \nabla \cdot (H \mathbf{v}) = 0 \quad (4.34)$$

(жидкость не обладает теплопроводностью).

В силу уравнения неразрывности (4.32) выражение в квадратных скобках в формуле (4.30) будет равно нулю, и уравнение движения (4.31) (уравнение Эйлера) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{s}.$$

Линейные уравнения движения можно получить, используя ряд упрощающих предположений: несжимаемости жидкости — $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$; ее баротропности — $p = p(\rho(t))$; малых возмущений стационарных течений — $p = p_0 + p_1$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$. Заменим исходную систему уравнений (4.31) — (4.34) с учетом сделанных предположений системой вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{s}_0 + \varepsilon \mathbf{s}_1 \quad (4.35)$$

(будем считать, что решение системы (4.31) — (4.34): $p_0 = 0$, $\rho_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = 0$ — соответствует гидростатическому состоянию и вызвано действием массовой силы \mathbf{s}_0 (например полем силы тяжести $\mathbf{g} \equiv \mathbf{s}_0$, а наличие возмущений p , ρ , \mathbf{v} — действием возмущающей силы $\varepsilon \mathbf{s}_1$, содержащей малый параметр). Система вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad (4.36)$$

соответствует уравнению (4.32) при учете несжимаемости ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$). Но возможна и система вида

$$p = p(\rho). \quad (4.37)$$

Тогда система уравнений для возмущенной среды записывается следующим образом, если опустить индекс 1 ($p_1 \Rightarrow p$, $\rho_1 \Rightarrow \rho$, $\mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}$, $\mathbf{s}'_1 \Rightarrow \mathbf{s}$):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} - \frac{\rho}{\rho_0^2} \nabla p_0 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \mathbf{s}; \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho_0 = 0; \quad (4.39)$$

$$p = \frac{dp}{d\rho} \rho \triangleq c^2 \rho. \quad (4.40)$$

Как правило, в задачах акустики океана непосредственно измеряемой величиной является давление. Для вывода замкнутого уравнения относительно p опустим в последней системе (4.38), (4.39) члены, содержащие ∇p_0 и $\nabla \rho_0$ (пренебрегаем действием объемных сил типа силы тяжести). Продифференцировав по времени левую часть уравнения (4.39):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho + \rho_0 (\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}) = 0$$

и подставив вместо $\partial/\partial t \mathbf{v}$ выражение из системы (4.38), а вместо ρ — выражение из равенства (4.40) ($\rho = c^{-2} p$), получим

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = \nabla \cdot \mathbf{s}. \quad (4.41)$$

Итак, *волновое уравнение* (4.41) описывает распространение волн, вызванных действием возмущающей силы (\mathbf{s}), при этом скорость распространения звуковых волн $c = (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$.

Заметим, что по известному решению (4.41) $p = p(x, t)$ можно путем интегрирования уравнения (4.38) при $\nabla p_0 = 0$ получить поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$:

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}(x, t_0) - \frac{1}{\rho_0} \nabla \int_{t_0}^t p(x, \tau) d\tau.$$

Закон распространения акустического зондирующего сигнала (4.41) можно представить теперь в операторной форме, аналогично закону распространения упругих волн (4.16): $L\varphi = \mathbf{s}$, здесь $L \Rightarrow \Rightarrow \Delta - [c^2(x)]^{-1} \partial_t^2$, $\varphi \Rightarrow p$, $s \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{s}$.

4.3. Волновые электромагнитные поля в задачах геоэлектрики и зондирования ионосферы

Электромагнитные методы разведки основываются на влиянии параметров среды на распространение электромагнитных полей. Первичные электромагнитные поля можно возбудить, пропуская переменный ток через небольшую рамку, состоящую из многих витков провода, или большую петлю. Откликом среды будет появление вторичных электромагнитных полей. Возникающие поля можно обнаружить с помощью переменных токов, индуцируемых ими в приемной рамке под влиянием электромагнитной индукции. Первичное электромагнитное поле распространяется от генераторной рамки к приемной как выше, так и ниже поверхности Земли. В условиях однородного разреза электромагнитные поля, распространяющиеся выше земной поверхности и через разрез, различаются лишь незначительным ослаблением при прохождении через разрез. Но в присутствии проводящего тела магнитная компонента электромагнитного поля, проникающего в среду, возбуждает в теле переменные индуцированные или вихревые токи. Вихревые токи порождают собственное вторичное электромагнитное поле, приходящее к измерительному прибору, который фиксирует сигналы прихода первичного и вторичного полей. Эти сигналы отличаются как по фазе, так и по амплитуде от сигнала, обусловленного одним первичным полем. Такие различия между переданным и принятым сигналами электромагнитных полей обусловлены присутствием проводника и несут информацию о его геометрических и электрических свойствах [39].

Аномальные поля с высокой электропроводностью вызывают сильные вторичные электромагнитные поля. С начала 1970-х годов для электромагнитного зондирования Земли активно применяются мощные импульсные магнитогидродинамические (МГД) генераторы. Один МГД-генератор позволяет произвести съемку на обширной территории и достичь глубин зондирования порядка первых десятков километров в разрезах с высоким сопротивлением.

Большое прикладное значение имеют также исследования ионосферы методами электромагнитного зондирования. При помощи этих методов найдены основные закономерности строения ионосферы.

Математическая модель распространения электромагнитных

сигналов может быть построена на основе системы уравнений Максвелла. Приведем основные физические законы, на которых базируется построение этой системы.

Закон Кулона $\mathbf{E} = (q/|\mathbf{r}|^3)\mathbf{r}$, откуда вследствие суперпозиции (\mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля; q — величина заряда)

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\sigma = 4\pi \int_V q dV. \quad (4.42)$$

Используя теорему Гаусса — Остроградского

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\sigma = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV,$$

запишем дифференциальную форму выражения (4.42):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi q. \quad (4.43)$$

Экспериментальное подтверждение отсутствия магнитных зарядов (поле H — вихревое):

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\sigma \equiv 0, \quad (4.44)$$

или в дифференциальной форме:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (4.45)$$

Обобщенный закон Фарадея (связь электродвижущей силы в контуре, стягивающем поверхность S , с изменением магнитного потока через эту поверхность); на рис. 4.4 показаны дифференциалы векторных величин в формуле Стокса:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} \cdot d\sigma. \quad (4.46)$$

По теореме Стокса $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\sigma$, поэтому формулу (4.46) можно переписать в виде

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\sigma = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} \cdot d\sigma, \quad (4.47)$$

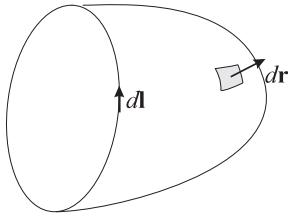


Рис. 4.4. Дифференциалы векторных величин из формулы Стокса.

или в дифференциальной форме:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}. \quad (4.48)$$

Гипотеза Максвелла состояла в предположении, что циркуляция магнитного поля связана с изменением потока (по аналогии с формулой (4.47)):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}. \quad (4.49)$$

Закон Эрстеда (связь движения зарядов с возникновением магнитного поля в контуре, охватывающем ток):

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\sigma = \frac{4\pi}{c} J, \quad (4.50)$$

или в дифференциальной форме:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.51)$$

Если принять гипотезу Максвелла, то анализ выражений (4.49) и (4.51) показывает, что циркуляция магнитного поля связана как с токами \mathbf{j} , так и с изменением \mathbf{E} (“токами смещения”)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.52)$$

Отметим, что гипотеза Максвелла (4.49) может быть обоснована с применением уравнения неразрывности (“электрические заряды не

возникают и не исчезают”), т. е. изменение заряда внутри выделенного объема V связано лишь с потоком заряда через поверхность, охватывающую объем V :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V q dV &= - \oint_{\partial V} (q \mathbf{v}) d\sigma \triangleq \\ &\triangleq - \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\sigma = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV, \end{aligned} \quad (4.53)$$

а в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} q + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (4.54)$$

Если использовать для связи циркуляции магнитного поля и тока лишь закон Эрстеда (4.50), то, применяя оператор дивергенции к правой и левой частям этого выражения, записываем:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j}.$$

Здесь левая часть уравнения тождественно равна, а правая не равна нулю: в соответствии с уравнением непрерывности (4.54) правая часть должна быть дополнена слагаемым $\partial/\partial t q$, т. е.

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} q = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E},$$

где при последнем переходе мы использовали закон Кулона (4.42). Как известно, наиболее простые уравнения для динамики электромагнитных полей получаются при введении *потенциалов поля*. В силу (4.45) и тождества $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0, \forall \mathbf{A}$, вектор \mathbf{H} всегда может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (4.55)$$

где \mathbf{A} — *векторный потенциал*. С использованием \mathbf{A} выражение (4.48) принимает вид

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \left(\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right), \quad (4.56)$$

т. е.

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0.$$

Последнее равенство с учетом тождества $\nabla \times \nabla \varphi = 0, \forall \varphi$, дает возможность записать представление вида

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\nabla \varphi, \quad (4.57)$$

где φ — скалярный потенциал.

Для определения \mathbf{A} и φ используем формулы (4.43) и (4.52). Подставив выражение для \mathbf{E} из представления (4.57) в выражение (4.43), получим

$$\Delta \varphi = -4\pi q - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (4.58)$$

Подставим представления (4.55) и (4.57) в формулу (4.52), аналогично получаем

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.59)$$

Используем тождество $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$, формулу (4.59) перепишем в виде

$$\Delta \mathbf{A} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (4.60)$$

Наконец, используя свободу в выборе \mathbf{A} и φ , примем следующее условие:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

— “калибровка Лоренца”. В этой калибровке выражение (4.60) принимает вид *векторного волнового уравнения*:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

а выражение (4.58) — вид *скалярного волнового уравнения*:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi q.$$

Запишем уравнения Максвелла (4.43) — (4.52) для изотропных сред:

$$\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = 4\pi q, \quad (4.61)$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0, \quad (4.62)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}, \quad (4.63)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \varepsilon \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}. \quad (4.64)$$

Здесь ε и μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Уравнения (4.61) — (4.64) обычно дополняются законом Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (4.65)$$

где σ — удельная электропроводность среды.

В однородной изотропной среде ($\sigma = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$) при отсутствии сторонних токов (\mathbf{j}) и свободных зарядов (q) поля \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют однородным *телеографическим уравнениям*

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (4.66)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} - \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (4.67)$$

Применительно к задачам геоэлектрики можно ввести *квазистационарные поля* ($\partial^2 / \partial t^2 \mathbf{H} \ll \partial / \partial t \mathbf{H}$, $\partial^2 / \partial t^2 \mathbf{E} \ll \partial / \partial t \mathbf{E}$), при этом телеграфные уравнения переходят в однородные *уравнения диффузии*

$$\Delta \mathbf{E} - \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0, \quad (4.68)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = 0. \quad (4.69)$$

Напомним, как из уравнений (4.49) и (4.52) можно получить связь энергии и вектора потока энергии (вектора Умова–Пойнтинга). Умножив уравнение (4.49) скалярно на \mathbf{H} , а уравнение (4.52) скалярно на \mathbf{E} и сложив полученные уравнения, запишем:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = c \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - c \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot 4\pi \mathbf{j}, \quad (4.70)$$

а отмечая, что $\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \equiv -c\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$, проинтегрируем обе части выражения (4.70) по объему:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{8\pi} dV = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right) dV - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (4.71)$$

Уравнение (4.71) становится уравнением неразрывности для сохраняющейся величины \mathcal{E} , имеющей физический смысл энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d\mathcal{E} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{R} dV - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV,$$

где

$$d\mathcal{E} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV; \quad \mathbf{R} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

— вектор потока энергии (в силу $\int_V \nabla \cdot \mathbf{R} dV = - \oint_{\partial V} (\mathbf{R} \cdot d\sigma)$). Наконец, последнее выражение имеет физический смысл потерь на джоулево тепло (при $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$ сила Кулона $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, а работа в единицу времени равна $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$).

Для изотропной среды аналогично из уравнений (4.63), (4.64) с учетом формулы (4.65) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} dV = - \oint_{\partial V} (\mathbf{R} \cdot d\sigma) - \int_V \sigma E^2 dV,$$

т. е. плотность энергии в среде описывается как

$$\frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi},$$

а вектор Умова–Пойнтинга имеет тот же вид, что и в вакууме: $\mathbf{R} = [c/(4\pi)] \mathbf{E} \times \mathbf{H}$; мощность потерь на джоулево тепло выражается следующим образом:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = (\sigma \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}^2.$$

Представленные в этом разделе соотношения служат основой математической модели распространения электромагнитных волновых полей в вакууме и изотропных средах.

4.4. Зондирование атмосферы

Дистанционное зондирование является важным средством изучения структуры и динамики атмосферы. Так, на рис. 4.5 показана схема зондирования атмосферы со спутника (геометрия наблюдения лимба). Получаемая информация используется для улучшения качества прогноза погоды и разработки методов искусственного воздействия на нее, для исследования загрязнения атмосферы. Дистанционное зондирование атмосферы основывается на яв-

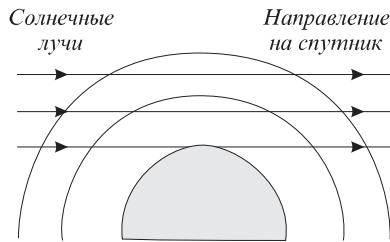


Рис. 4.5. Схема зондирования атмосферы со спутника.

лении *переноса* солнечного излучения либо генерированного атмосферой теплового излучения, являющихся по своей природе электромагнитными. Феноменологическую теорию переноса можно рассматривать как предельный случай строгой статистической теории, опирающейся на стохастические волновые уравнения [9]. Теория переноса оперирует так называемыми *фотометрическими* понятиями (как указывают авторы работы [9], фотометрические величины с равным успехом могут называться *акустометрическими*). Применимость феноменологической теории переноса обеспечивается следующими условиями: 1) волновое поле выступает как лучевое, т. е. выполнены условия применимости геометрической оптики; 2) полная некогерентность лучей (аддитивность переносимой величины), т. е. исключается интерференция; 3) наблюдаемая величина — осредненный по времени и пространству процесс (т. е. используются квадратичные величины волновых полей); 4) излучение предполагается стационарным и эргодичным.

Рассмотрим в пространственной точке X лучистый поток dP в направлении \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = 1$), проходящий в телесном угле $d\Omega$ через площадку $d\sigma$ (рис. 4.6):

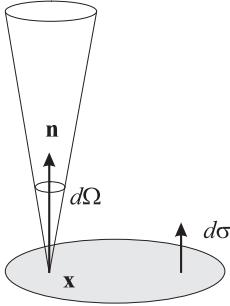


Рис. 4.6. Поток dP через площадку $d\sigma$.

$$dP = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\sigma}) d\Omega.$$

Величина $\varphi(x, \mathbf{n})$ называется *интенсивностью*, или *яркостью*, *излучения*, т. е.

$$\varphi(x, \mathbf{n}) = \frac{dP}{d\Omega d\sigma \cos(\widehat{\mathbf{n} d\boldsymbol{\sigma}})}.$$

Рассмотрим физические основания для вывода интегродифференциального *уравнения переноса*. Изменение интенсивности излучения ($\Delta\varphi$) на малой длине (Δl) в направлении \mathbf{n} связано, во-первых, с поглощением, которое пропорционально интенсивности (φ), во-вторых, с рассеянием излучения φ с направления \mathbf{n} по всем другим (на рис. 4.7 приведены примеры угловых распределений интенсивности излучения рассеяния мелкими (a), крупными (б) и сверхкрупными (в) частицами):

$$\begin{aligned} &\sim \frac{1}{4\pi} \int q(\mathbf{n}' \leftarrow \mathbf{n}) \varphi(x, \mathbf{n}) d\mathbf{n}' = \\ &= \varphi(x, \mathbf{n}) \frac{1}{4\pi} \int q(\mathbf{n}' \leftarrow \mathbf{n}) d\mathbf{n}', \end{aligned}$$

в-третьих, с вкладом в интенсивность потока с направлением \mathbf{n} излучения, рассеянного во всех других направлениях:

$$\sim \frac{1}{4\pi} \int q(\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n}') \varphi(x, \mathbf{n}') d\mathbf{n}',$$

в-четвертых, с источником излучения. Поэтому уравнение переноса

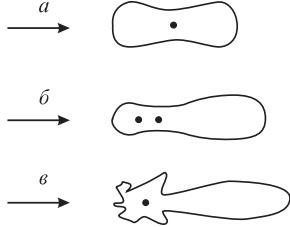


Рис. 4.7. Распределение интенсивности излучения рассеяния мелкими (а), крупными (б) и сверхкрупными (в) частицами.

имеет вид (с учетом $\nabla_n = (\mathbf{n}, \nabla)$ и $\alpha_s + \alpha_a \stackrel{\Delta}{=} \alpha$)

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \varphi(x, \mathbf{n}) + \alpha \varphi(x, \mathbf{n}) - \frac{1}{4\pi} \int q(x, \mathbf{n}, \mathbf{n}') \varphi(x, \mathbf{n}') d\mathbf{n}' = s(x, \mathbf{n}), \quad (4.72)$$

а в операторной форме

$$L\varphi = s, \quad L = (\mathbf{n} \cdot \nabla) + \alpha \hat{I} - \frac{1}{4\pi} \langle q(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \rangle, \quad (4.73)$$

где причем символ $\langle q(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \rangle$ означает $\int q(\cdot) d\mathbf{n}'$; $\varphi = \varphi(x, \mathbf{n})$ — поле зондирующего сигнала; $s = s(x, \mathbf{n})$ — источник сигнала. Подставив оператор L из уравнения (4.73) в виде $L = L_0 - S$ (S — оператор рассеяния),

$$S = \alpha \hat{I} + \frac{1}{4\pi} \langle q(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \rangle,$$

можно записать решение уравнения переноса в виде ряда по кратностям рассеяния:

$$\varphi = \varphi_0 + L_0^{-1} S L_0^{-1} s + L_0^{-1} S L_0^{-1} S L_0^{-1} s + \dots,$$

где

$$L_0^{-1} s = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_0 \exp \left\{ - \int \alpha(x) dl \right\}.$$

Отметим, что уравнение переноса (4.72) используется для решения чрезвычайно широкого круга задач, например при изучении переноса моноэнергетических нейтронов (в этом случае его принято называть уравнением Больцмана), в задачах рентгеновской и спектральной томографии, при активном лазерном зондировании и т. д.

Г л а в а 5

ЛУЧЕВАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Точные решения задач распространения зондирующих сигналов построены для очень ограниченного класса моделей сред: как правило, это либо однородные среды, либо слоисто-однородные, либо однородные с включениями, имеющими высокую степень пространственной симметрии. Для интерпретации реальных геофизических полей (сейсмических, акустических, электромагнитных) необходимо построить приближенные решения для волн, распространяющихся в неоднородных средах. Так, в Земле существуют не только границы слоев, на которых упругие свойства меняются скачком, но и обширные области, внутри которых происходит систематическое и плавное изменение модулей упругих свойств. С физической точки зрения лучевая теория интерпретируется следующим образом: волны распространяются с локальной скоростью вдоль лучевых траекторий, прибывая в точку наблюдения с амплитудой, определяемой геометрическим расхождением лучей от источника к приемнику. При изложении этой главы будем следовать описанию, представленному в работе [83].

5.1. Основы лучевой теории

Одним из самых распространенных методов решения уравнений для волновых полей является *метод геометрической оптики* [12, 13, 48, 123]. Этот метод является коротковолновой асимптотикой поля в плавно-неоднородных, медленно-нестационарных и слабо-консервативных средах: характерные размеры неоднород-

ности много больше длины волны и характерные временные интервалы нестационарности много больше периода колебаний. Коротковолновая асимптотика позволяет считать среду локально однородной и стационарной и основывается на представлении волнового поля (φ) в виде “быстрого” фазового и “медленного” амплитудного множителей.

Рассмотрим формальную схему пространственно-временного лучевого метода. Пусть поле φ удовлетворяет однородному линейному уравнению, которое мы, следуя публикации [9], запишем в виде интегрального:

$$L\varphi = \int L(x, x')\varphi(x')d^4x' = 0 \quad (5.1)$$

(в этом разделе мы принимаем $x = (x_1, x_2, x_3, t)$). Будем считать, что оператор L содержит часть L_0 , ответственную за описание динамики поля φ в консервативной среде, и часть L' , при которой введем формальный малый параметр α :

$$L = L_0 + \alpha L'. \quad (5.2)$$

Поле φ представим в виде асимптотического разложения (*дебаево разложение*):

$$\varphi = \mathcal{A}(y, \alpha) \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(y)\right\}, \quad (5.3)$$

где $y = \alpha x$ — “медленный” аргумент; τ — фаза (или эйконал); \mathcal{A} — амплитуда волны, при этом разложение \mathcal{A} по α имеет следующую форму:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0(y) + \alpha\mathcal{A}_1(y) + O(\alpha^2).$$

Пусть L — оператор, близкий к дифференциальному, т. е. $L(x, x') \neq 0$ при малых значениях $\Delta x = x' - x$. Тогда разложение фазовой функции $\exp\{(i/\alpha)\tau(\alpha x)\}$ в точке x' с точностью до $O(\alpha^2)$ может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(\alpha(x + \Delta x))\right\} &= \\ &= \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\left[\tau(\alpha x_0) + \alpha(\Delta x \cdot \partial_y)\tau + \frac{1}{2}\alpha^2(\Delta x \cdot \partial_y)^2\tau + O(\alpha^2)\right]\right\} = \\ &= \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(y)\right\} \times \exp\{i(p \cdot \Delta x)\}\left(1 + \frac{i}{2}\alpha(\Delta x \cdot \partial_y)^2\tau\right) + O(\alpha^2), \end{aligned}$$

где $p \stackrel{\Delta}{=} \nabla_y \tau$. Разложение амплитуды с точностью до $O(\alpha^2)$ записывается так:

$$\mathcal{A}(\alpha x') = \mathcal{A}(\alpha(x + \Delta x)) = (1 + \alpha(\Delta x \cdot \partial_z))\mathcal{A}(z),$$

здесь $z = \alpha x$. Окончательно волновое поле в точке x' выражается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x') &= \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(y)\right\} \exp\{i(p \cdot \Delta x)\} \times \\ &\times \left(1 + \alpha\left[(\Delta x \cdot \partial_z) + \frac{i}{2}(\Delta x \cdot \partial_y)^2\tau(y)\right]\right) \times \\ &\times \mathcal{A}(z)|_{z=y} + O(\alpha^2). \end{aligned} \quad (5.4)$$

С учетом этого разложения уравнение (5.1) можно, оставляя члены первого порядка по α , записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int L(x, x')\varphi(x')d^4x' &= \\ &= \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(\alpha x)\right\} \times \int d^4x' L(x, x') \exp\{ip(x' - x)\} \times \\ &\times \left(1 + \alpha\left[(\Delta x \cdot \partial_z) + \frac{i}{2}(\Delta x \cdot \partial_y)^2\tau(y)\right]\right) \mathcal{A}(z) = \\ &= \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(\alpha x)\right\} \left(1 - \alpha\left[i(\partial_p \partial_z) + \frac{i}{2}(\partial_p \partial_y)^2\tau(y)\right]\right) \times \\ &\times \int d^4x' L(x, x') \exp[ip(x' - x)]\mathcal{A}(z). \end{aligned}$$

Введем обозначение $\int d^4x' L(x, x') \exp[ip(x' - x)] \equiv \hat{L}(p)$ и перепишем уравнение (5.1) в виде

$$\left(1 - i\alpha\left[(\partial_p \partial_z) + \frac{1}{2}(\partial_p \partial_y)^2\tau(y)|_{y=\alpha x}\right]\right) \hat{L}(p)\mathcal{A}(z)|_{z=\alpha x} = 0.$$

Наконец, раскладывая амплитуду в выражении для $\mathcal{A}(z)$ в точке x по степеням α , представляя $L(p)$ в виде $L = L_0 + \alpha L'$ и приравнивая члены одного порядка по α , получаем систему рекуррентных уравнений для определения амплитуды (приравниваем теперь формальный параметр α к единице):

$$\hat{L}_0(p)\mathcal{A}_0(x) = 0, \quad (5.5)$$

$$\hat{L}_0(p)\mathcal{A}_1(x) = \left\{ i \left[(\partial_p \partial_x) + \frac{1}{2} (\partial_p \partial_y)^2 \tau(y) \Big|_{y=x} \right] \hat{L}_0(p) - \hat{L}'(p) \right\} A_0(x) \quad (5.6)$$

и т. д.

Если поле многокомпонентно, например поле смещений в уравнениях Ламе, электромагнитное поле, поле φ , то амплитуда \mathcal{A} является векторной функцией, а оператор $\hat{L}(p)$ — матричным. Условие разрешимости (5.5) сводится к требованию равенства нулю определителя:

$$\det L_0(p) = 0. \quad (5.7)$$

Если L_0 соответствует консервативной среде, то оператор \hat{L}_0 — эрмитов, и справедливо каноническое представление матрицы L_0 :

$$\hat{L}_0 = \sum_i \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T, \quad (5.8)$$

где $\{\lambda_i\}$ — собственные значения; $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированные собственные векторы матрицы L_0 , т. е. $L_0 \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i = \delta_{ij}$.

Условие разрешимости (5.7) с учетом канонической формы (5.8) дает *дисперсионные уравнения*:

$$\lambda_i = \lambda_i(x, p) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5.9)$$

которые определяют как связи пространственных волновых векторов $\partial\tau/\partial x_1, \partial\tau/\partial x_2, \partial\tau/\partial x_3$ и частоты $\partial\tau/\partial x_0 \stackrel{\Delta}{=} \partial\tau/\partial t$, так и поведение фазы (эйконала) τ в пространстве и во времени. Поскольку $p = \partial\tau/\partial x$, то дисперсионные уравнения являются дифференциальными уравнениями первого порядка, которые обычно решаются методом характеристик. Уравнение характеристик обычно записывают в гамильтоновой форме, вводя параметр l :

$$\begin{aligned} d_l x &= \partial_p \lambda_i, \\ d_l p &= -\partial_x \lambda_i. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Уравнения (5.10) при разных значениях i описывают лучи, соответствующие волнам разных типов.

5.2. Лучевая аппроксимация решения скалярного волнового уравнения

Скалярное волновое уравнение представляет собой математическую модель, лежащую в основе описания множества физических процессов распространения сигналов в среде. Поэтому изложение конкретных примеров использования пространственно-временного лучевого метода [13] начнем с волнового уравнения

$$\square\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = 0. \quad (5.11)$$

В соответствии с принятой нами формой операторного уравнения распространения зондирующего сигнала $L\varphi = s$ в данном случае

$$L = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \varphi = \varphi(x, t); \quad s = 0$$

(рассматриваем волновое поле в области, не содержащей источники).

Общий вид асимптотического разложения (5.3) запишем, в явном виде выделив время, следующим образом:

$$\varphi(x, t) = \mathcal{A}(\alpha, \alpha x, \alpha t) \exp[i/\alpha\tau(\alpha x, \alpha t)].$$

Заметим, что волновой оператор \square локален (дифференциальный), т. е. в представлении оператора L в виде интегрального ($L\varphi = \int L(x, t; x', t')\varphi(x', t')dx'dt'$) ядро оператора сингулярное, т. е. интегрирование снимается.

Аппроксимация фазовой части волнового поля φ вблизи точки x_0, t_0 разложение (5.4) с точностью до $O(\alpha)$ выглядит как

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &\sim \exp[i(\mathbf{p}\Delta\mathbf{x} - p_0\Delta t)], \\ \text{где } \mathbf{p} &= \frac{1}{\alpha}\nabla\tau|_{x_0, t_0}, \quad p_0 = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\tau|_{x_0, t_0}, \\ \Delta t &= t - t_0, \quad \Delta\mathbf{x} = x - x_0, \end{aligned}$$

т. е. аппроксимация вблизи точки x_0, t_0 представляет собой плоскую волну. Из уравнения разрешимости (5.5) следует, что

$$(\mathbf{p}, p) - \frac{1}{c^2(x, t)}p_0^2 = 0 \quad (5.12)$$

(здесь $L_0 = \Delta - [c^2(x, t)]^{-1} \partial^2 / \partial t^2$); соответственно

$$L_0(p) = \exp[-i(\mathbf{p}x - p_0 t)] \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \exp[i(\mathbf{p}x - p_0 t)].$$

Условие разрешимости (5.12), записанное нами в форме дисперсионного уравнения, дает связь частоты $p_0 \stackrel{\Delta}{=} \omega$ и волнового вектора $\mathbf{p} \stackrel{\Delta}{=} k$ (пространственной частоты):

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|, \quad (5.13)$$

где $c = c(x, t)$, а ω является решением дисперсионного уравнения $|L_0(\omega(\mathbf{k}))| = 0$.

Лучевую аппроксимацию решения уравнения (5.11) можно представить в следующем виде:

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{A}(\mathbf{k}) \delta(L_0(\omega(\mathbf{k}))) = \mathcal{A}_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega(\mathbf{k})), \quad (5.14)$$

где $\mathcal{A}_{\mathbf{k}} \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{A}|\partial\omega L(\mathbf{k}, \omega)|^{-1}$ (следствие формулы $\delta(f(x)) = |\partial_x f|^{-1} \times \delta(x - x')$, где x' — корень уравнения $f(x) = 0$). Наличие в представлении (5.14) дельта-функции $\delta(|L_0|)$ означает, что амплитуда поля φ может быть отличной от нуля лишь для волновых векторов \mathbf{k} , удовлетворяющих дисперсионному уравнению, т. е. связи частоты и модуля волнового вектора (5.13).

Отметим, что в записи (5.14) предполагается наличие одного типа волны, это соответствует одномодовому излучению в консервативной среде, а математически означает наличие единственного вещественного корня уравнения $|L_0(\omega(\mathbf{k}))| = 0$.

В общем случае многомодового излучения поле φ можно представить в виде суперпозиции нескольких типов волн (мод):

$$\varphi = \sum_{\mu} \mathcal{A}_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega^{\mu}(\mathbf{k})).$$

В пространственно-временном представлении решение φ записывается в виде набора бегущих плоских волн:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathcal{A}_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}x - \omega(\mathbf{k})t)] d\mathbf{k}.$$

Записав обратное преобразование Фурье от $\varphi(x, t)$, можно заметить, что

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}} e^{i\omega(\mathbf{k})t} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

т. е. пространственный оператор Фурье свободного волнового поля является осциллирующим.

Уравнение разрешимости (5.5), записанное для фазы τ , называется *обобщенным уравнением эйконала*:

$$(\nabla_x \tau, \nabla_x \tau) = \frac{1}{c^2(x, t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \tau \right]^2, \quad (5.15)$$

и является обобщением уравнения эйконала для известного случая стационарных сред ($c = c(x)$, $\tau = \tau - t$, обычно $c^{-2}(x) \triangleq n^2(x)$ — показатель преломления среды).

Уравнение (5.15) можно назвать характеристическим уравнением для волнового уравнения (5.11). Гиперповерхности $\tau(x, t) = \text{const}$ — характеристики волнового уравнения. Уравнение (5.15) можно представить в виде уравнения Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + H(\nabla_x \tau, x, t) = 0, \quad (5.16)$$

где $H = c(x, t)|\nabla \tau|$. Основным методом решения этого уравнения является метод характеристик. Напомним алгоритм этого метода для общего варианта уравнения (5.16):

$$H \left[x^\mu, \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} \right] = 0, \quad \mu = 0, \dots, M, \quad (5.17)$$

т. е. мы рассматриваем общее уравнение в частных производных второго порядка (индекс $\mu = 0$ связываем с параметром времени). Дополнив уравнение (5.17) начальными условиями, заданными на гиперповерхности Q , переходим к решению задачи Коши.

Считаем Q величиной, заданной параметрически, т. е.

$$Q = \{x^\mu : x_0^\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_m)\}, \quad \gamma \in \Gamma,$$

причем векторы $\{\partial \mathbf{x}/\partial \gamma\}$ линейно независимы, т. е. поверхность Q регулярна (в малом). Пусть невырожден на поверхности Q детер-

минант D :

$$D = \begin{vmatrix} \partial H / \partial \tau_0 & \dots & \partial H / \partial \tau_m \\ \partial x^0 / \partial \gamma_1 & \dots & \partial x^m / \partial \gamma_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial x^0 / \partial \gamma_m & \dots & \partial x^m / \partial \gamma_m \end{vmatrix} \neq 0, \quad (5.18)$$

где

$$\tau_\mu \triangleq \frac{\partial}{\partial \gamma_\mu} \tau.$$

Зададим начальные условия на Q в виде

$$\tau|_Q = \tau^0(\gamma), \quad \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu}|_Q = \tau_\mu^0(\gamma).$$

Характеристической системой уравнений для уравнения (5.17) будет система

$$\begin{aligned} dx^\mu / ds &= \partial H / \partial \tau_\mu, \\ d\tau_\mu / ds &= -\partial H / \partial x^\mu, \\ d\tau / ds &= -\sum_\mu \tau_\mu \partial H / \partial \tau_\mu, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где

$$s : \left| \frac{\partial(x^0, \dots, x^m)}{\partial(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)} \right|_{s=0} \neq 0$$

в силу предположения (5.18), т. е. локально (вблизи s) система координат $(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)$ невырождена.

Приведем здесь схему вывода системы характеристических уравнений. Уравнение (5.17) будем рассматривать как уравнение связи независимых переменных $\{x^\mu\}$ и $\{p^\mu \triangleq \partial \tau / \partial x^\mu\}$, т. е. будем искать решение в *фазовом пространстве* $X \times \mathcal{P}$, где $X = \{x = (x^0, x^1, \dots, x^m)\}$, $\mathcal{P} = \{p = (p^0, p^1, \dots, p^m)\}$, $H(x^\mu, p^\mu) = 0$. Дифференциал H в силу этой связи обязан быть равным нулю:

$$dH = \sum_\mu \left(\frac{\partial H}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial H}{\partial p^\mu} dp^\mu \right) = 0.$$

Отсюда видно, что формальные векторы $\partial H / \partial x$, $\partial H / \partial p$ и соот-

ветственно dx , dp ортогональны. Условие ортогональности заведомо будет выполнено, если первые компоненты dx , dp будут пропорциональны вторым компонентам $\partial H/\partial x$, $\partial H/\partial p$, а соотношение оставшихся компонент имеет противоположный знак коэффициента пропорциональности.

Вводим формальный параметр s , т. е. считаем $p = p(s)$, $x = x(s)$, тогда

$$\begin{aligned} dx^\mu/ds &= \partial H/\partial p_\mu, \\ dp^\mu/ds &= -\partial H/\partial x^\mu. \end{aligned}$$

А для исключения параметра s записываем третье уравнение, определяющее $d\tau/ds$, при условии $p = \partial\tau/\partial x$:

$$\frac{d\tau}{ds} = \sum_\mu \frac{\partial\tau}{\partial x_\mu} \frac{dx^\mu}{ds} = \sum_\mu p^\mu \frac{\partial H}{\partial p^\mu}.$$

Решив систему (5.19) при начальных условиях, получим $x^\mu = x^\mu(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)$, $\tau_\mu = \tau_\mu(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)$, $\tau = \tau(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)$. Используем исходные координаты (x^0, \dots, x^m) , приDEM к функциям $\tau = \tau(x)$ и $\tau_\mu = \tau_\mu(x)$, т. е. к решению задачи Коши, удовлетворяющему уравнению (5.17) и начальным условиям.

Вернувшись к уравнению (5.16), запишем характеристические уравнения ($x_0 \equiv t$):

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 1, \quad \frac{dx^1}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \tau_1} \dots \frac{dx^m}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \tau_m}, \\ \frac{d\tau_1}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial x^1} \dots \frac{d\tau_m}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^m}, \\ \frac{d\tau}{ds} &= \tau_0 + \sum_{\mu=1}^m \hat{\tau}_\mu \frac{\partial H}{\partial \tau_\mu}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Здесь в последнем уравнении выделено слагаемое $\tau_0 = \partial\tau/\partial t$ и учтено, что $\partial H/\partial \tau_0 = 1$.

Напомним аналогию лучей в оптике и траекторий в механике. Записав уравнение эйконала как

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{p}, p) - n^2(\mathbf{x}) \right] = 0,$$

получим уравнение лучей в гамильтоновой форме:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}/ds &= \mathbf{p}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{ds} &= \frac{1}{2} \nabla n^2(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Для эйконала τ на основании $\partial\tau/\partial s = (\mathbf{p}, p)$ получаем

$$\tau = \tau^0 + \int_{s_0}^s p^2 ds = \tau^0 + \int_{s_0}^s n^2(x(s)) ds.$$

Параметр s связан с длиной дуги (dl) луча в силу

$$(dl)^2 = (d\mathbf{x})^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 ds^2$$

(в последнем равенстве мы учли первые уравнения из характеристической системы). В данном случае

$$ds = dl |\partial H / \partial \mathbf{p}|^{-1} = dl |\mathbf{p}|^{-1} = dl / n(x),$$

и зависимость τ от длины дуги l выражается так:

$$\tau = \tau^0 + \int_A^B n(\mathbf{x}) dl.$$

Систему уравнений относительно \mathbf{x} и \mathbf{p} , записанных в гамильтоновой форме, можно представить, исключив \mathbf{p} , в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} = \frac{1}{2} \nabla n^2(\mathbf{x}).$$

Сравним его с уравнением динамики для движения частицы в потенциальном силовом поле ($\mathbf{F} = -\nabla\varphi$):

$$d^2 \mathbf{x} / dt^2 = -\nabla \varphi.$$

Эта аналогия позволяет результаты, полученные в оптике, использовать в механике, и наоборот. Существенным отличием постановки

механических и волновых задач является задание начальных данных: в силу специфики волновых задач начальные условия определяют не единственную траекторию, как это принято в механике, а семейство (конгруэнцию) “траекторий” — лучей.

Для волновых задач представляет интерес (экзотический с точки зрения механики) случай

$$H(k\tau_i, t, x) = kH(\tau_i, t, x),$$

где $i = 1 \div m$, $k > 0$, т. е. последнее уравнение системы (5.20) имеет вид

$$d\tau/ds = \tau_0 + H = \partial\tau/\partial t + H \equiv 0,$$

при этом $\tau = \text{const}$ вдоль кривой, являющейся решением системы (5.20), что говорит об отсутствии дисперсии.

Заметим, что решение характеристической системы (5.19) как системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями в силу теоремы единственности представляет собой в фазовом пространстве семейство кривых без пересечений.

Пространственно-временную проекцию характеристики уравнения эйконала принято называть в геометрической оптике *пространственно-временным лучом*, $x^\mu = x^\mu(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)$, который может быть получен либо как решение системы уравнений (5.19), либо как экстремаль функционала:

$$\tau = \int_A^B \sum_\mu \tau_\mu \frac{\partial H}{\partial \tau} ds$$

по всевозможным траекториям, соединяющим точки A и B . (На рис. 5.1 показаны проекции характеристики, заданной в фазовом пространстве, на физическое пространство $x_1 x_2$ с образованием каустик.) Для простейшей функции Гамильтона $H = [(\mathbf{p}, p) - n^2(\mathbf{x})]/2$ этот функционал принимает вид

$$\tau = \int_A^B n(\mathbf{x}) dl = \int_A^B \frac{dl}{c(\mathbf{x})}$$

и имеет физический смысл времени пробега возмущения от точки

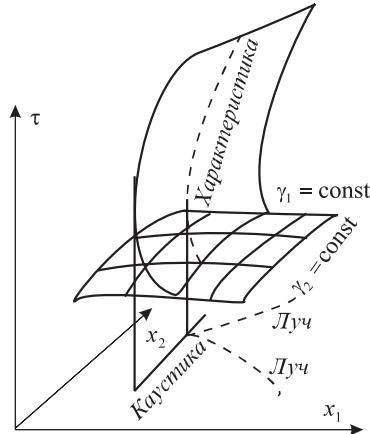


Рис. 5.1. Проекции характеристики, заданной в фазовом пространстве.

A до точки *B*. При этом луч отвечает стационарному времени пробега. Условие стационарности функционала τ : $\delta\tau = 0$ называется *принципом Ферма*. Решение соответствующей экстремальной задачи служит основой для построения алгоритмов численного расчета лучей в неоднородных средах.

Современная интерпретация принципа Ферма опирается на представление об *интерференции волновых возмущений* (*принцип Гюйгенса – Кирхгофа*), распространяющихся из точки *A* в точку *B* по всевозможным виртуальным траекториям. При этом “выживают” лишь те траектории, для которых вариация эйконала (фазы) имеет величину $\sim \lambda/2$. На рис. 5.2 оставлены лучи, имеющие одну общую точку с границей зоны Френеля, т. е. с учетом зоны Френеля вклад всех остальных траекторий будет пренебрежимо мал в силу взаимной компенсации интерферирующих волн с разными фазами (в вычислительной математике это соответствует принципу стационарной фазы). Соответственно современная интерпретация понятия луча заключается в его представлении пространственной лучевой трубкой (рис. 5.3) с поперечником порядка первой зоны Френеля. Отметим, что в частном случае недиспергирующей среды принцип Ферма можно интерпретировать как условие стационарности времени пробега волны от точки *A* до точки *B*.

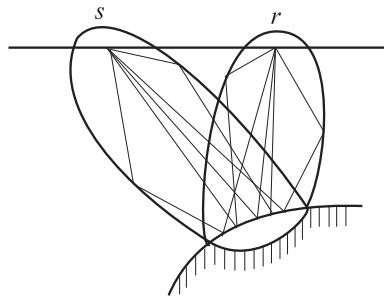


Рис. 5.2. Лучи, имеющие одну общую точку с границей зоны Френеля.

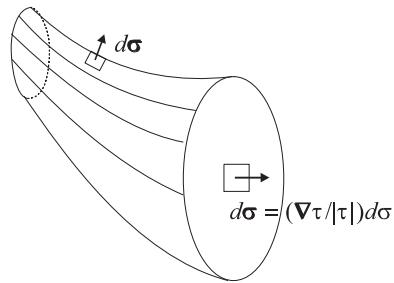


Рис. 5.3. Пространственная лучевая трубка.

5.3. Коротковолновая асимптотика решения одномерного уравнения Гельмгольца (Метод ВКБ)

Рассмотрим еще одну реализацию теории возмущений на примере решения уравнения Гельмгольца:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi + V(x)\varphi = 0. \quad (5.21)$$

В соответствии с теорией возмущений, используемой в геометрической оптике, запишем:

$$\varphi = \exp\{i\tau(x)\}. \quad (5.22)$$

Тогда уравнение (5.21) принимает вид

$$-(\tau')^2 + i\tau'' + V = 0. \quad (5.23)$$

Предполагая τ'' малой величиной, получаем $\tau' = \pm\sqrt{V}$, т. е.

$$\tau(x) = \pm \int \sqrt{V} dx. \quad (5.24)$$

Условием применимости этого приближения будет

$$|\tau''| \approx \frac{1}{2} \left| \frac{V'}{\sqrt{V}} \right| \ll |V|.$$

Из формул (5.22) и (5.23) видно, что $(\sqrt{V})^{-1}$ имеет физический смысл длины волны (“экспоненциальной длины”, т. е. характерного интервала изменения V в случае $\text{Im}\tau > 0$). Таким образом, приближение (5.24) справедливо, если изменение V на расстоянии порядка длины волны много меньше, чем само значение V , т. е. $V(x)$ мало меняется на длине волны.

Следующее приближение найдем, решая уравнение (5.23) при

$$\begin{aligned} \tau'' &\approx \pm \frac{1}{2} \frac{V'}{\sqrt{V}}, & (\tau')^2 &\approx V \pm \frac{i}{2} \frac{V'}{\sqrt{V}}, \\ \tau' &\approx \pm \sqrt{V} + \frac{i}{4} \frac{V'}{V}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Интегрируя полученное выражение, записываем

$$\tau(x) \approx \pm \int \sqrt{V} dx + \frac{i}{4} \ln V. \quad (5.26)$$

Используя приближение (5.26), можно построить суперпозицию двух решений, соответствующих двум знакам, т. е. приближение ВКБ справедливо, если $|\Delta V(x)| \leq |V(x)|$.

В точке спшивания $V(x) = 0$, а $\Delta V(x)$ сингулярно, соответственно точное решение уравнения (5.21) в этой точке обязано быть регулярным, в то время как решения ВКБ имеют в ней особенности. Поэтому ищем решение $\varphi(x)$ в виде комбинации $\tilde{\varphi}_+$ и $\tilde{\varphi}_-$:

$$\varphi(x) = a_+ \tilde{\varphi}_+(x) + a_- \tilde{\varphi}_-(x).$$

Эти коэффициенты определим, задавая связь для производной $\varphi'(x)$:

$$\varphi'(x) = a_+ \tilde{\varphi}'_+(x) + a_- \tilde{\varphi}'_-(x),$$

$a_+ = \text{const}$, $a_- = \text{const}$. Решением этой системы относительно a_+ и a_- будет выражение

$$a_+ = \frac{\varphi \tilde{\varphi}'_- - \varphi' \tilde{\varphi}_-}{\tilde{\varphi}_+ \tilde{\varphi}'_- - \tilde{\varphi}'_+ \tilde{\varphi}_-},$$

а для приближения (5.26) —

$$\tilde{\varphi}(x) \approx (V(x))^{-1/4} \left\{ c_+ \exp \left(i \int \sqrt{V} dx \right) + c_- \exp \left(-i \int \sqrt{V} dx \right) \right\}. \quad (5.27)$$

Решение (5.27) пригодно в любой области, где выполняется условие применимости, но оно заведомо нарушается в окрестности точки $x^0 : V(x^0) = 0$, и необходимо уметь сплавлять экспоненциальные (в области $V(x) < 0$) и осциллирующие (при $V(x) > 0$) решения, иными словами, необходимы *формулы связи*.

Заметим, что решения ВКБ (5.27), которые мы записали в виде $\tilde{\varphi}_+$ и $\tilde{\varphi}_-$ (соответствуют $c_+ = 1$ и $c_- = 1$), являются точными для уравнения вида (5.21), где $V(x)$ заменено следующим выражением:

$$V(x) \Rightarrow V(x) + \Delta V(x) \triangleq V(x) + \frac{1}{4} \frac{V''}{V} - \frac{5}{16} \left(\frac{V'}{V} \right)^2,$$

$$a_- = \frac{\varphi \tilde{\varphi}'_+ - \varphi' \tilde{\varphi}_+}{\tilde{\varphi}_+ \tilde{\varphi}'_- - \tilde{\varphi}'_+ \tilde{\varphi}_-}.$$

При детерминанте системы $\tilde{\varphi}_+ \tilde{\varphi}'_- - \tilde{\varphi}'_+ \tilde{\varphi}_- = -2i$ а $\varphi \tilde{\varphi}''_{\mp} - \varphi'' \tilde{\varphi}_{\mp} = \Delta V(x) \varphi \tilde{\varphi}_{\mp}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{da_{\pm}}{dx} &= \mp \frac{i}{2} \Delta V(x) \varphi \tilde{\varphi}_{\mp} = \\ &= \mp \frac{i}{2} \frac{\Delta V(x)}{\sqrt{V(x)}} \left\{ a_{\pm} + a_{\mp} \exp \mp \int_{x_0}^x \sqrt{V} dx \right\}. \end{aligned}$$

Это выражение является оценкой ошибки, которая может накопиться вдоль большого интервала Δx в приближении ВКБ.

5.4. Элементы лучевой теории упругих волн

Согласно лучевой теории в применении к распространению сейсмических сигналов объемные волны распространяются с локальной скоростью вдоль лучевых траекторий, имеющих точки излома на границах упругих сред (в соответствии с законом Снеллиуса), с амплитудой, определяемой геометрическим расхождением лучей [12, 33, 61]. Используя общую лучевую теорию (см. раздел 5.1) и считая среду стационарной, в асимптотическом разложении представим эйконал $\tau(x, t)$ в виде $t - \tau(x)$, где $\tau(x)$ по традиции называется *волновым фронтом*. Лучевое описание связано с предположением существенно более быстрого изменения характеристик волнового процесса в направлении нормали к волновому фронту ($\mathbf{n} = \nabla\tau/|\nabla\tau|$) по сравнению с изменениями характеристик среды, т. е. с *коротковолновой асимптотикой*, когда малым параметром является отношение длины волны к характерным размерам неоднородности среды.

При выбранной нами форме эйконала: волновой вектор $\mathbf{p} = (p_0; p_1, p_2, p_3) = (p_0, \mathbf{p}) = (1, \nabla\tau)$ и вектор \mathbf{p} , совпадающий по направлению с вектором фазовой скорости (нормально к волновому фронту), называют *вектором рефракции*.

Оператор Ламе в форме (4.16) имеет векторную структуру:

$$\hat{L} = \hat{I}\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \cdot \tilde{K} \partial_{\mathbf{x}},$$

здесь \hat{I} — единичный оператор в пространстве R^3 ; оператор $\hat{\partial}_{\mathbf{x}}$:

$$\hat{\partial}_{\mathbf{x}} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \partial a_1 / \partial x_1 & \partial a_2 / \partial x_1 & \partial a_3 / \partial x_1 \\ \partial a_1 / \partial x_2 & \partial a_2 / \partial x_2 & \partial a_3 / \partial x_2 \\ \partial a_1 / \partial x_3 & \partial a_2 / \partial x_3 & \partial a_3 / \partial x_3 \end{vmatrix}.$$

Запишем конкретную форму уравнения (5.5) для оператора Ламе:

$$(\rho \hat{I} - \tilde{K} \mathbf{p} \mathbf{p}^T) \mathcal{A}_0 = 0. \quad (5.28)$$

Здесь $(\tilde{K} \mathbf{p} \mathbf{p}^T)_{ik} = \sum_j \sum_l K_{ijkl} p_j p_l$, $\mathbf{p} = \nabla\tau$. Условием разрешимости уравнения (5.28) будет

$$\det(\rho \hat{I} - \tilde{K} \mathbf{p} \mathbf{p}^T) = 0. \quad (5.29)$$

Это уравнение описывает возможные волновые фронты в упругой среде. Запишем тензор упругих моделей \tilde{K} для изотропной упругой среды:

$$K_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Выбрав локальную систему ортогональных координат (лучевых)

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\tau \times \mathbf{e}_n,$$

запишем координатное представление для $L_0(\mathbf{p})\mathcal{A}_0 = 0$:

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T) - \rho & 0 & 0 \\ 0 & \mu(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T) - \rho & 0 \\ 0 & 0 & \mu(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T) - \rho \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathcal{A}_t \\ \mathcal{A}_n \\ \mathcal{A}_\beta \end{vmatrix} = 0. \quad (5.30)$$

Условие разрешимости системы (5.30) приводит к выводу, что в изотропной упругой среде нулевое приближение лучевой асимптотики дает три типа волн (аналогично случаю однородной среды):

- 1) квазипродольную волну с вектором поляризации, который совпадает с \mathbf{e}_τ , и скоростью $(\lambda(x) + 2\mu(x))/\rho(x) \stackrel{\Delta}{=} c_p^2(x)$, описываемой уравнением эйконала:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) = \frac{\rho(x)}{\lambda(x) + 2\mu(x)};$$

- 2) квазипоперечные волны двух типов с векторами поляризации \mathbf{e}_n и \mathbf{e}_β , распространяющиеся с одинаковой скоростью $\mu(x)/\rho(x) \stackrel{\Delta}{=} c_s^2(x)$, которая описывается уравнением $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) = \rho(x)/\mu(x)$.

5.5. Лучевое описание почти стратифицированной среды

Распространение акустических волн в океане достаточно хорошо аппроксимируется моделью почти стратифицированной среды, т. е. среды с плавным (по сравнению с глубиной) изменением скорости распространения сигнала в горизонтальной плоскости. Следуя логике изложения § 5.1, рассмотрим горизонтальные координаты

$\rho = (x, y)$ как “медленные” аргументы, а вертикальную координату z — как “быстрый” аргумент, т. е. скорость $c = c(\alpha x, \alpha y, z)$.

Волновое уравнение для временного фурье-компоненты в области, не содержащей источников (4.41), переходит в уравнение Гельмгольца:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(\alpha x, \alpha y, z) \right) \varphi = 0, \quad (5.31)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Пусть пространственной областью, в которой рассматривается решение этого уравнения, для границ водной толщи будет $Z^\pm = Z^\pm(\alpha x, \alpha y)$ и будут справедливы граничные условия

$$[a^\pm(\alpha x, \alpha y)I \pm b^\pm(\alpha x, \alpha y)(\mathbf{n} \cdot \nabla)]|_{Z^\pm} \varphi = 0, \quad (5.32)$$

где a^\pm, b^\pm вещественны, а внешняя нормаль

$$n^\pm = \left[1 + \left(\frac{\partial Z^\pm}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z^\pm}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(-\frac{\partial Z^\pm}{\partial x}, -\frac{\partial Z^\pm}{\partial y}, 1 \right).$$

Запишем уравнение (5.31) и граничное условие (5.32) в виде $\mathcal{L}\varphi = 0$, причем

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} \hat{L} \\ \hat{\Gamma} \end{vmatrix}$$

и оператор $\hat{\Gamma}$ в явном виде учитывает параметр асимптотического разложения.

Сжимая горизонтальные координаты, переходим к одинаковым масштабам изменения скорости по всем трем координатам $x_0 = \alpha x, y_0 = \alpha y, z_0 = z$. В новых координатах оператор \mathcal{L} выглядит следующим образом:

$$\hat{L} \Rightarrow \left[\alpha^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} + k^2(x_0, y_0, z_0) \right) \right] \triangleq \alpha^2 \Delta_0 + \tilde{L}_z, \quad (5.33)$$

$$\hat{\Gamma} \Rightarrow \left[a^\pm \hat{I} + b^\pm \left(\frac{\partial}{\partial z_0} - \alpha^2 (\mathbf{n}^\pm \cdot \nabla_0) \right) \right] |_{Z^\pm}. \quad (5.34)$$

С учетом асимптотического представления

$$\varphi \sim \mathcal{A}(x_0, y_0, z_0; \alpha) \exp \left\{ \frac{i}{\alpha} \tau(x_0, y_0) \right\}$$

условие разрешимости (5.5) при наличии заданных граничных условий (5.34) запишем в виде

$$[e^{-i(\nabla_0 \tau \cdot \rho)} \alpha^2 \Delta_0 e^{i(\nabla_0 \tau \cdot \rho)} + \tilde{L}_z] \mathcal{A}_0 = 0,$$

$$\hat{\Gamma}_z \triangleq \left(a^\pm \hat{I} + b^\pm \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{A}_0 = 0,$$

где $\rho = (x, y)$, т. е.

$$[(\nabla \tau \cdot \nabla \tau) - \tilde{L}_z] \mathcal{A}_0 = 0, \quad (5.35)$$

$$\Gamma_z |_{Z^\pm} \mathcal{A}_0 = 0. \quad (5.36)$$

Уравнение (5.35) представляет собой задачу на собственные функции и собственные значения оператора \tilde{L}_s с граничными условиями (5.36):

$$\tilde{L}_z \mathcal{A}_0 = \lambda^2 \mathcal{A}_0,$$

$$\hat{\Gamma} |_{Z^\pm} = 0, \quad (5.37)$$

где

$$\lambda^2 = (\nabla \tau \cdot \nabla \tau). \quad (5.38)$$

Рассмотрим подробнее уравнение (5.37) (опуская нулевой индекс):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{A}_0^n + \left(\frac{\omega^2}{c_{x,y}^2(z)} - \lambda_n^2 \right) \mathcal{A}_0^n = 0,$$

$$a^\pm \mathcal{A}_0^n |_{Z_{x,y}^\pm} + b^\pm \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{A}_0^n |_{Z_{x,y}^\pm} = 0.$$

Вводя обозначения $c_{x,y}(z), Z_{x,y}^\pm$, мы выделяем “медленные” аргументы, т. е. рассматриваем задачу на собственные функции и собственные значения (задача Штурма—Лиувилля) как параметрическую от точки (x, y) .

Уравнение (5.37) можно решить методом ВКБ (см. § 5.3, который позволяет найти коротковолновую асимптотику для амплитуды \mathcal{A}_0^n . Собственные значения λ_n^2 очевидным образом зависят от положения границ $Z_{x,y}^\pm$, частоты ω и от конкретной зависимости скорости от глубины:

$$\lambda_n^2 = \lambda_n^2(Z_{x,y}^\pm, \omega, c_{x,y}(z)).$$

Уравнение (5.38) (уравнение эйконала) можно решить методом характеристик (см. § 5.2):

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} &= \mathbf{p}, & \frac{d\mathbf{p}}{ds} &= \frac{1}{2}\nabla\lambda^2(\boldsymbol{\rho}), \\ \frac{d\tau}{ds} &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}), & \frac{d\tau}{ds} &= \lambda^2(\boldsymbol{\rho}).\end{aligned}$$

Представим амплитуду \mathcal{A}_0^n в виде

$$\mathcal{A}_0^n = A_0(x, y, z) = a_0(x, y)\psi_n(x, y, z),$$

где $\{\psi_n\}$ — ортонормированный базис оператора, $\int\limits_{Z^-}^{Z^+} \psi_n \psi_{n'} dz = \delta_{nn'}$. Тогда можно получить уравнение переноса для приведенной амплитуды a_0 , зависящей только от горизонтальных координат; в соответствии с формулой (5.6) запишем:

$$a_0 \nabla^2 \tau + 2(\nabla \tau \cdot \nabla a_0) = 0.$$

Уравнение переноса можно переписать таким образом:

$$\nabla \cdot (a_0^2 \nabla \tau) = 0, \quad (5.39)$$

и, интегрируя выражение (5.39) по объему лучевой трубы (см. рис. 5.3), а также используя теорему Гаусса, получаем:

$$\int (a_0^2 \cdot \nabla \tau) \cdot d\sigma = 0.$$

Отсюда с учетом того, что поперечное сечение лучевой трубы $d\sigma = \nabla \tau / |\nabla \tau| \sigma$, а вдоль стенок лучевой трубы $\nabla \tau \cdot d\sigma = 0$, записываем: $\lambda_n a_0^2 \cdot \Delta \sigma = \text{const}$. Здесь $\Delta \sigma$ — площадь сечения лучевой трубы, т. е. приведенная амплитуда меняется как $a_0 \sim r^{-1/2}$.

Для пространственно-временных лучей, используя асимптотическое представление вида

$$\varphi \sim \mathcal{A}(x_0, y_0, z, t_0; \alpha) \exp \left[\frac{i}{\alpha} \tau(x_0, y_0, t_0) \right],$$

имеем

$$\lambda_n^2 = \lambda_n^2(\omega, x, y, [c(z)], t)$$

и соответственно уравнение эйконала

$$(\nabla \tau \cdot \nabla \tau) = \lambda_n^2(\omega, x, y, [c(z)], t). \quad (5.40)$$

Тогда характеристические уравнения с учетом уравнения эйконала (5.40) записываются как

$$\begin{aligned} \frac{dx}{p_x} &= \frac{dy}{p_y} = \frac{dt}{\lambda_n \partial_\omega \lambda_n} = \frac{d\tau}{\lambda_n (\lambda_n - \omega \partial_\omega \lambda_n)} = \\ &= \frac{dp_x}{\lambda_n \partial_x \lambda_n} = \frac{dp_y}{\lambda_n \partial_y \lambda_n} = -\frac{d\omega}{\lambda_n \partial_t \lambda_n} \end{aligned} \quad (5.41)$$

($p_x = \partial/\partial x \tau$, $p_y = \partial/\partial y \tau$) и определяют пространственно-временные горизонтальные лучи.

Дифференцируя уравнение (5.40) по $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$, получаем с учетом того, что $\omega = \omega(\mathbf{p})$

$$\mathbf{p} = \lambda_n \partial_\omega \lambda_n \nabla_{\mathbf{p}} \omega. \quad (5.42)$$

Используя первые два равенства из формулы (5.41) и уравнение (5.42), можно записать

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{\lambda_n \partial_\omega \lambda_n} = \nabla_{\mathbf{p}} \omega.$$

Таким образом, горизонтальные пространственно-временные лучи определяют траектории точек, движущихся с групповой скоростью.

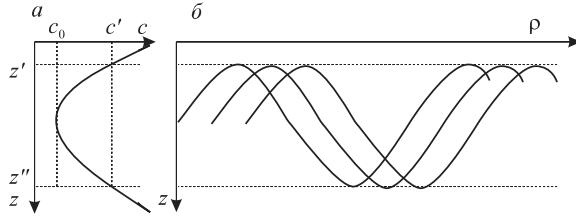
Приведем здесь представление точного решения задачи (5.31), (5.32) в виде нормальных мод для стратифицированного океана. Каждая нормальная мода представляет собой решение уравнения (5.31) с разделенными переменными:

$$\varphi(z, \boldsymbol{\rho}) = \varphi^z(z) \varphi^\rho(\boldsymbol{\rho}),$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k^2(z) - \lambda_n^2) \right] \varphi^z(z) = 0, \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \Gamma|_{Z^\pm} \varphi(z) &= 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \lambda_n^2 \right] \varphi^\rho(\rho) &= 0, \\ \Gamma|_\infty \varphi^\rho &= 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

На рис. 5.4 показана система лучей в звуковом канале с границами z' , z'' — точками поворота (в терминологии метода ВКБ).



Задача Штурма—Лиувилля (5.43) обладает бесконечным числом простых вещественных собственных значений $\lambda_0^2 > \lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \dots$, где число $\lambda_n : \lambda_n^2 > 0$ конечно и $\lambda^2 < 0$ бесконечно. Мы выберем $\lambda_n > 0$, если $\lambda_n^2 > 0$, и $\text{Im}\lambda_n > 0$, если $\lambda_n^2 < 0$. В этом случае решение уравнения (5.44) φ^ρ удовлетворяет при $\lambda = \lambda_n$ условию излучения:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \varphi^\rho - i\lambda \varphi^\rho \right) = 0$$

и пропорционально функции Ханкеля $H_0^{(1)}(\lambda_n \rho)$:

$$\varphi^\rho \sim H_0^{(1)}(\lambda_n \rho).$$

Таким образом, точное решение однородного уравнения (5.31) $\varphi(z, \rho)$ с использованием базиса уравнений (5.43) $\{\varphi_n(z)\}$ можно представить в виде бесконечного ряда:

$$\varphi(z, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n^- H_0^{(1)}(\lambda_n \rho). \quad (5.45)$$

Используем это выражение и запишем решение волнового уравнения с точечным источником, т. е.

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi = -\delta(z - z_0) \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}. \quad (5.46)$$

Для этого воспользуемся равенством

$$\left[\frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \lambda_n^2 \right] H_0^{(1)}(\lambda_n\rho) = \frac{4i\delta(\rho)}{2\pi\rho}.$$

Подставив решение (5.45) однородного уравнения (5.31) в представление (5.46), получим выражение, отражающее связь коэффициентов \mathcal{A}_n и собственных функций $\varphi_n^z(z)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \varphi_n^z = \frac{i}{4} \delta(z - z_0).$$

Отсюда, умножив последнее равенство скалярно на φ_n^z , получим

$$\mathcal{A}_n = \frac{i}{4} \varphi_n^z(z_0).$$

Таким образом, точное решение акустического уравнения, описывающего распространение сигнала, генерируемого точечным источником на глубине z_0 , в стратифицированном океане с постоянной глубиной имеет следующее представление:

$$\varphi(\rho, z) = \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^z(z_0) \varphi_n^z(z) H_0^{(1)}(\lambda_n\rho). \quad (5.47)$$

На рис. 5.5 представлен типичный профиль скорости звука в океане (a) и соответствующие ему первые три моды для частоты 30 Гц (б).

Асимптотику точного решения (5.47) в дальней зоне (ρ большое) можно записать, используя асимптотику для функций Ханкеля:

$$\varphi(\rho, z) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{i}{2^{3/2}\pi^{1/2}\rho^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{1/2} \varphi_n^z(z_0) \varphi_n^z(z) \exp \left[i \left(\lambda_n \rho - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (5.48)$$

(Представления (5.48) будут использованы для построения практических алгоритмов.)

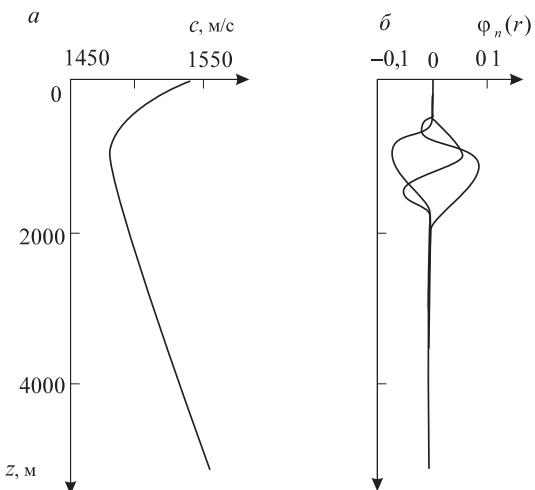


Рис. 5.5. Типичный профиль скорости звука в океане (а) и соответствующие ему первые три моды (б).

5.6. Поверхностные волны в вертикально-неоднородной среде

При исследовании строения земной коры и верхней мантии широко используется информация, содержащаяся в выделенных на сейсмограммах поверхностных волнах, что связано с достаточно высокой величиной отношения сигнал/помеха по сравнению с объемными волнами (амплитуды поверхностных волн определяются фактором $\rho^{-1/2}$, а объемных — фактором r^{-1}). Проходя через области с различным геологическим строением, поверхностные волны аккумулируют информацию об упругих свойствах и геометрии этих областей. Наиболее концентрировано эта информация представляется зависимостью скорости распространения от частоты. В свою очередь, выделение вклада поверхностных волн обеспечивается наличием поляризации.

Дальнее распространение поверхностных волн позволяет в лучевом описании воспользоваться асимптотическим разложением, аналогичным разложению акустического поля в стратифицирован-

ном океане (см. § 5.5):

$$\varphi(x, y, z, t; \alpha) = \mathcal{A}(\alpha x, \alpha y, z; \alpha) \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(\alpha x, \alpha y, \alpha t)\right\}.$$

В этом представлении фазовая скорость $c = |\nabla\tau|^{-1}$, кроме того, рассматриваются лучи, лежащие в горизонтальной плоскости.

Оператор Ламе для изотропной неоднородной среды записывается как

$$\begin{aligned} L &= \rho\partial_t^2 - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\cdot) - \mu\Delta - (\nabla\lambda)(\nabla\cdot) - \\ &- (\nabla\mu) \times (\nabla\times) - 2(\nabla\mu, \nabla). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Чтобы использовать представление (5.5) при построении нулевого приближения геометрической оптики для векторного поля зондирующего сигнала

$$L_0(p)\mathcal{A}_0 = 0, \quad (5.50)$$

необходимо получить p -представление оператора Ламе (5.49):

$$\exp\{-i[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) + p_0 t]\}L \exp\{i[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) + p_0 t]\} \stackrel{\Delta}{=} L(p).$$

Здесь $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ — градиент по горизонтальным координатам; $p_0 = \partial\tau/\partial t$. В декартовой системе координат (x, y, z) матричный оператор L имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} L_{ii} &= \rho\partial_t^2 - \left[(\lambda + \mu)\partial_i^2 + \mu \sum_{j=1}^3 \partial_j^2 + (\partial_i\lambda)\partial_i - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=i+1}^{i+2} (\partial_j\mu)\partial_j + 2 \sum_{j=1}^3 (\partial_j\mu)\partial_j \right], \end{aligned}$$

где $i = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{matrix}$ с циклической перестановкой, например,

$$\begin{matrix} 3 \\ z \end{matrix} + 2 = \begin{matrix} 2 \\ y \end{matrix} :$$

$$L_{ij} = -[(\lambda + \mu)\partial_i\partial_j + \partial_i\lambda\partial_j + (\partial_j\mu)\partial_i].$$

Соответствующие элементы оператора в p -представлении с учетом $\tau = \tau(x, y, t)$ запишем отдельно для L_{ij} , где $i, j \neq z$:

$$\begin{aligned} L_{ii}(\mathbf{p}) &= -\rho p_0^2 + (\lambda + \mu)p_i^2 + \mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) - \mu\partial_z^2 - \partial_z\mu\partial_z = \\ &= -\rho p_0^2 + (\lambda + \mu)p_i^2 + \mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) - \partial_z\mu\partial_z, \\ L_{ij} &= (\lambda + \mu)p_i p_j \end{aligned}$$

для $i, j \neq z$ и для компонент, содержащих

$$\begin{aligned} L_{jz} &= -i[(\lambda + \mu)\partial_z + (\partial_z\mu)p_j], \\ L_{zj} &= -i[(\lambda + \mu)p_j\partial_z + (\partial_z\lambda)p_j], \\ L_{zz} &= -\rho p_0^2 - (\lambda + 2\mu)\partial_z^2 + \mu(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) - (\partial_z(\lambda + 2\mu))\partial_z. \end{aligned}$$

Выберем локальную ортогональную систему координат (*систему лучевых координат*) с ортами

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{\nabla\tau}{|\nabla\tau|} \triangleq \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\beta = [\mathbf{e}_\tau \times \mathbf{e}_z].$$

Тогда $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_\tau, \mathcal{A}_\beta, \mathcal{A}_z)$; $\mathbf{p} = (p_\tau, p_\beta)$, причем $p_\beta \equiv 0$,

$$\begin{aligned} L_{\tau\tau}(p) &= -\rho p_0^2 + (\lambda + 2\mu)(\mathbf{p}, \mathbf{p}) - \partial_z(\mu\partial_z), \\ L_{\beta\beta}(p) &= -\rho p_0^2 + \mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) - \partial_z(\mu\partial_z), \\ L_{zz}(p) &= -\rho p_0^2 + \mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) - \partial_z((\lambda + 2\mu)\partial_z), \\ L_{\tau z}(p) &= -i\left[(\lambda + \mu)p_\tau \frac{\partial}{\partial z} + (\partial_z\mu)p_\tau\right], \\ L_{z\tau}(p) &= -i\left[(\lambda + \mu)p_\tau \frac{\partial}{\partial z} + (\partial_z\lambda)p_\tau\right], \\ L_{\beta\tau} &= L_{\tau\beta} = L_{\beta z} = L_{z\beta} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица $\mathbf{L}(p)$ имеет следующее заполнение:

$$\mathbf{L}(p) = \begin{vmatrix} L_{\tau\tau} & 0 & L_{\tau z} \\ 0 & L_{\beta\beta} & 0 \\ L_{z\tau} & 0 & L_{zz} \end{vmatrix},$$

а векторное уравнение (5.50) представляется в виде

$$\mathbf{L}_{\beta\beta}\mathcal{A}_\beta = 0, \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\tau\tau}\mathcal{A}_\tau + \mathbf{L}_{\tau z}\mathcal{A}_z &= 0, \\ \mathbf{L}_{z\tau}\mathcal{A}_\tau + \mathbf{L}_{zz}\mathcal{A}_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Уравнения (5.51) и (5.52) необходимо дополнить соответствующими граничными условиями. Если рассматривается распространение поверхностных волн в полупространстве со слабой горизонтальной неоднородностью, то граничные условия должны быть заданы на дневной поверхности $Z^0 = Z^0(\tau, \beta)$ и на $Z \rightarrow \infty$.

Запишем оператор Γ граничного условия на дневной поверхности $\mathbf{t} = \tau \mathbf{n} = 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma \mathcal{A} &= \Gamma_{ij} \mathcal{A}_j, \\ \Gamma_{ii} &= n_i(\lambda + 2\mu)\partial_i + \sum_{k \neq i} n_k \mu \partial_k, \\ \Gamma_{ij} &= n_i \lambda \partial_j + n_j \mu \partial_i. \end{aligned}$$

Вспоминая, что

$$\mathbf{n} = (1 + (\partial_\tau Z^0)^2 + (\partial_\beta Z^0)^2)^{-1/2} (\partial_\tau Z^0, \partial_\beta Z^0, -1),$$

запишем p -представление оператора Γ ($\Gamma(p) = e^{-i(\mathbf{p}, x)} \Gamma e^{i(\mathbf{p}, x)}$, $\mathbf{p} = (p_\tau, p_\beta)$):

$$\Gamma(p) = - \begin{vmatrix} \mu \partial_z & 0 & i \mu p_\tau \\ 0 & \mu \partial_z & 0 \\ i \lambda p_\tau & 0 & (\lambda + 2\mu) \partial_z \end{vmatrix}.$$

Полное условие разрешимости для уравнения $L\varphi = 0$, $\Gamma\varphi = 0$ или $\mathcal{L}\varphi = 0$ имеет вид $\mathcal{L}_0(p)\mathcal{A}_0 = 0$, т. е. в нашем случае уравнение для β -компоненты амплитуды \mathcal{A} ($L_{\beta\beta}\mathcal{A}_\beta = 0$, $\Gamma\mathcal{A}_\beta = 0$) превращается в задачу Штурма — Лиувилля:

$$\begin{aligned} \partial_z(\mu \partial_z)\mathcal{A}_\beta - (\lambda_n^2 - \rho p_0^2)\mathcal{A}_\beta &= 0, \\ \partial_z \mathcal{A}_\beta|_{Z^0} &= 0, \quad \mathcal{A}_\beta \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Здесь $\lambda_n^2 = \mu(\mathbf{p}, \mathbf{p})$, т. е. уравнение эйконала, а соответственно и геометрия лучей поверхностных волн определяются модой (λ_n) и осцилляциями компоненты \mathcal{A}_β вдоль оси z .

Заметим, что в задаче (5.53) появляется только модуль сдвига μ , вектор поляризации волны ортогонален направлению распространения и лежит в горизонтальной плоскости. Эта волна соответствует хорошо известной волне Лява [51].

На дневной поверхности оставшиеся граничные условия для линейной комбинации описываются вектором с поляризациями \mathbf{e}_z и \mathbf{e}_τ :

$$\mu \partial_z \mathcal{A}_\tau - i \mu p_\tau \mathcal{A}_z = 0,$$

$$i \lambda p_\tau \mathcal{A}_\tau + (\lambda + 2\mu) \partial_z \mathcal{A}_z = 0.$$

Дополненные условиями при $\mathcal{A}_\tau \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ и $\mathcal{A}_z \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ в сочетании с системой уравнений (5.52) они описывают волны, соответствующие волнам Рэлея [1, 51, 113].

5.7. Лучевое приближение электромагнитных полей

Описание процессов распространения в неоднородных средах основывается на лучевой теории электромагнитных полей. Важное методологическое значение этой теории состоит в том, что на ее базе можно получить уравнения переноса и установить связь между статистическими характеристиками среды и параметрами феноменологической теории переноса электромагнитного излучения.

Запишем уравнения для вектора напряженности электромагнитного поля, используя формулы (4.63), (4.64):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E},$$

считая, что среда описывается тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, а магнитная проницаемость $\mu \approx 1$ и сторонние токи отсутствуют ($\mathbf{j} = 0$):

$$\hat{L}\mathbf{E} = \left(\nabla \times \nabla x - c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\varepsilon} \right) \mathbf{E} = 0.$$

Как обычно, используем общую концепцию § 5.1 и в качестве асимптотического разложения вектора \mathbf{E} примем

$$\mathbf{E} = \mathcal{A}(y, \alpha) \exp \left\{ \frac{i}{\alpha} \tau(y) \right\},$$

где $y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \stackrel{\Delta}{=} (\alpha t, \alpha x, \alpha y, \alpha z)$. Оператор L имеет следующее p -представление ($\mathbf{p} \stackrel{\Delta}{=} (p_0, p_1, p_2, p_3) \stackrel{\Delta}{=} (p_0, \mathbf{p})$), в данном случае ($p_0 = \omega$):

$$L(p) = e^{-i(\mathbf{p}, x)} \hat{L} e^{i(\mathbf{p}, x)} = -\mathbf{p} \times \mathbf{p}x - \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon}.$$

Оператор $L(p)$ запишем в виде $L = L_0 + \alpha L'$, причем $\alpha L' \stackrel{\Delta}{=} (-\omega^2/c^2)(\hat{\varepsilon} - \hat{I}\text{Resp}\hat{\varepsilon}/3)$ описывает анизотропию и неконсервативность среды, а $L_0 = -\mathbf{p} \times \mathbf{p}x - (\omega^2/c^2)\varepsilon_0 \hat{I}$, ε_0 вещественна и равна $\text{Resp}\hat{\varepsilon}/3$. Уравнение для нулевого приближения лучевого метода в локальной системе координат

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial_S \mathbf{e}_1}{|\partial_S \mathbf{e}_1|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

имеет вид

$$\hat{L}_0 \mathcal{A} = \begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.54)$$

т. е. в каноническом представлении можно записать:

$$\hat{L}_0(p) = (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T) \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - (\mathbf{p}, \mathbf{p}) \right] + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0.$$

При совпадении собственных значений $\lambda_2 = \lambda_3 = (\omega^2/c^2)\varepsilon_0 - (\mathbf{p}, \mathbf{p})$, можно сделать заключение о поляризационном вырождении поперечных волн ($(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{p}) = 0$, $(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{p}) = 0$). Уравнение (5.9) в данном случае дает $|\mathbf{p}|^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon_0$, т. е. дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega - \omega(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \omega - |\mathbf{p}| c \varepsilon_0^{-1/2} = 0.$$

Групповая скорость $\mathbf{v}_{\text{гр}} = (\partial/\partial \mathbf{p})\omega(p, x)$ в данном случае равна $\mathbf{v}_{\text{гр}} = c\varepsilon_0^{-1/2}\mathbf{e}_1$. Вместо лучевого параметра s введем длину дуги l , эти параметры связаны между собой соотношением

$$(dl)^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 ds^2,$$

где

$$H = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{p}, \mathbf{p}) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 \right]. \quad (5.55)$$

Отсюда следует $dl = |\mathbf{p}|ds$.

Запишем лучевые уравнения, используя длину дуги пространственной проекции луча dl :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dl} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}_{rp}}{|\mathbf{v}_{rp}|} = \mathbf{e}_1, \quad (5.56)$$

$$\frac{dt}{dl} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{dt}{ds} = \frac{\omega}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}_{rp}|}, \quad (5.57)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dl} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = - \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \frac{|\mathbf{p}|}{|\mathbf{p}|} \frac{\varepsilon_0^{1/2}}{c} \partial_{\mathbf{x}} \omega = \mathbf{v}_{rp}^{-1} \partial_{\mathbf{x}} \omega, \quad (5.58)$$

$$\frac{d\omega}{dl} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{d\omega}{ds} = - \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{\omega}{c^2} \varepsilon_0 \partial_t \omega(\mathbf{p}, x) = \mathbf{v}_{rp}^{-1} \partial_t \omega. \quad (5.59)$$

С учетом уравнений (5.56), (5.59) можно записать уравнение кинематики движения точки на луче:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}_{rp}.$$

Следовательно, движение точки происходит с групповой скоростью, которая в силу изотропности среды совпадает с направлением вектора \mathbf{p} .

Из уравнений (5.58), (5.59) вытекает связь волнового вектора с пространственным градиентом ω :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \partial_{\mathbf{x}} \omega.$$

Наконец, из соотношений (5.56) – (5.59) следует, что полная производная от частоты ω по времени совпадает с локальной производной:

$$\frac{d\omega}{dt} = \partial_t \omega.$$

Идеи лучевой томографии реализуются на основе не только измерений фазы (как было показано), но и измерений вектора поляризации.

Приведем схему вывода *закона вращения вектора поляризации* [9]. Для этого запишем соотношение (5.6) для амплитуды нулевого приближения \mathbf{E}_0 :

$$\partial_p \partial_x L_0(p) \mathbf{E}_0(x) = L'(p) \mathbf{E}_0(x), \quad (5.60)$$

где

$$L'(p) = -\frac{\omega^2}{c^2} \left(\hat{\varepsilon} - \frac{1}{3} \hat{I} \text{Resp} \hat{\varepsilon} \right).$$

Используем вместо $L_0(p)$ удвоенную функцию Гамильтона H (5.55) и перепишем формулу (5.60) в виде

$$\partial_{p_0} H \partial_t \mathbf{E}_0 + \partial_{\mathbf{p}} H \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} L'(p) \mathbf{E}_0(x).$$

Заменив производные от функции Гамильтона:

$$\partial_{p_0} H = \frac{dt}{ds}, \quad \partial_{\mathbf{p}} H = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$$

и перейдя к параметру l (длине дуги пространственного луча), получим

$$\frac{\partial t}{\partial l} \partial_t \mathbf{E}_0 + \frac{d\mathbf{x}}{dl} \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} |\mathbf{p}| L' \mathbf{E}_0. \quad (5.61)$$

Заметим, что в левой части равенства (5.61) стоит полная производная от \mathbf{E}_0 по длине нестационарного геометрооптического луча, т. е.

$$\frac{d}{dl} \mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{2l} \sqrt{\varepsilon_0} L' \mathbf{E}_0.$$

Записав уравнение нулевого приближения для \mathbf{E}_0 на дисперсионной поверхности, иными словами — учтя, что в соответствии с уравнением (5.54)

$$\mathbf{E}_0 = \mathcal{A}_2 \mathbf{e}_2 + \mathcal{A}_3 \mathbf{e}_3,$$

спроектируем уравнение (5.61) на плоскость, ортогональную

$$P_1 d_l \mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{2c} \sqrt{\varepsilon} P_1 L' \mathbf{E}_0, \quad (5.62)$$

где

$$P_1 = I - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^T.$$

Если анизотропия поглощения отсутствует, то $L' = 0$, и соотношение (5.62) переписывается в виде $P_1 d_l \mathbf{E}_0 = 0$, т. е. мы получаем систему двух уравнений относительно \mathcal{A}_2 и \mathcal{A}_3 . Обозначим дифференцирование по l точкой:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{A}}_2 + \mathcal{A}_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) &= 0, \\ \dot{\mathcal{A}}_3 + \mathcal{A}_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) &= 0.\end{aligned}\quad (5.63)$$

Умножив первое из уравнений (5.63) на \mathcal{A}_3 , а второе — на \mathcal{A}_2 и сложив, запишем:

$$\mathcal{A}_3 \dot{\mathcal{A}}_2 - \mathcal{A}_2 \dot{\mathcal{A}}_3 = \mathcal{A}_2^2(\mathbf{e}_3, \dot{\mathbf{e}}_2) - \mathcal{A}_3^2(\mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_3). \quad (5.64)$$

Поскольку $d_l(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$, уравнение (5.64) можно переписать в виде

$$(\mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_3) = \frac{\mathcal{A}_3 \dot{\mathcal{A}}_2 - \mathcal{A}_2 \dot{\mathcal{A}}_3}{\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2}.$$

Заметим, что в последнем равенстве в правой части стоит производная от $\arctg \mathcal{A}_2 / \mathcal{A}_3 = \theta$, а скалярное произведение $(\mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_3)$ равно $|\dot{\mathbf{e}}_3|$. В свою очередь, $|\dot{\mathbf{e}}_3|$ по определению есть *кручение кривой* (луча). Обозначив величину кручения через T , запишем закон вращения вектора поляризации:

$$d_l \theta = T.$$

5.8. Постановка задачи кинематической лучевой томографии

Рассмотренная в предыдущих разделах данной главы лучевая аппроксимация полей зондирующих сигналов является естественной основой для постановки задач кинематической лучевой томографии. Во всех лучевых представлениях в явном виде содержитя фазовый множитель $e^{i\tau}$ или $e^{i\omega\tau}$, где значение τ в пространственной точке x определяется значением τ в некоторой точке x_0 (например, точке источника) и интегралом от лучевого показателя преломления, взятого вдоль луча, соединяющего точки x_0 и x . Поэтому если экспериментальные данные позволяют проследить за фазой сигналов, то выявляется связь свойств среды и времени прохождения зондирующего сигнала. Эта же концепция позволяет определять поле коэффициента ослабления среды.

В качестве примера лучевой интерпретации рассмотрим случай анизотропной опорной среды. Будем считать, что скалярное волновое поле $\varphi(x, t)$ удовлетворяет уравнению распространения

$$L\varphi = 0, \quad (5.65)$$

$$\text{где } L = \partial_t^2 - \sum_{ij} A_{ij}(x) \partial_i \partial_j, \quad i, j = 1 \div 3,$$

причем матрица A положительно определена независимо от точки x , т. е. оператор L во всей области гиперболический. Уравнение характеристик в этом случае имеет вид

$$(\mathbf{p}, \hat{A}\mathbf{p}) = 1 \quad (5.66)$$

и играет роль уравнения эйконала; вектор \mathbf{p} как обычно равен $\nabla\tau$. Приравняв градиент характеристической поверхности нулю, получим векторное дифференциальное уравнение первого порядка относительно производных \mathbf{p} :

$$2(\nabla \cdot \mathbf{p})^T \hat{A}\mathbf{p} + (\mathbf{p}, (\nabla \hat{A})\mathbf{p}) = 0. \quad (5.67)$$

Из этого уравнения получаем уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{ds} &= \hat{A}\mathbf{p}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{ds} &= -\frac{1}{2} \left(\mathbf{p}, (\nabla \cdot \hat{A})\mathbf{p} \right). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Последнее равенство есть уравнение характеристик (5.66).

Характеристические уравнения (5.68) определяют бихарактеристики исходного волнового уравнения (5.65), для построения которых необходимо задать данные Коши:

$$\mathbf{x}|_{s=0} = \mathbf{x}^{(0)}, \quad \mathbf{p}|_{s=0} = \mathbf{p}^{(0)},$$

причем $\mathbf{p}^{(0)} : (\mathbf{p}^{(0)}, A\mathbf{p}^{(0)}) = 1$.

Направление луча в точке $s = 0$ определяем из первого уравнения системы (5.68):

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}|_{s=0} = \hat{A}_{x^0}\mathbf{p}^{(0)}.$$

Заметив, что $\mathbf{p} = \hat{A}^{-1} d\mathbf{x}/ds$, уравнение (5.66) представим в виде

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \hat{A}^{-1} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = 1. \quad (5.69)$$

Параметр s с точностью до аддитивной постоянной совпадает со значением эйконала τ , поскольку

$$\frac{d\tau}{ds} = \left(\nabla_x \tau, \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = (\mathbf{p}, A\mathbf{p}) = 1.$$

Поэтому из уравнения (5.69) получим

$$ds^2 = d\tau^2 = (d\mathbf{x}, \hat{A}^{-1} d\mathbf{x}),$$

на основании чего можно провести интерпретацию характеристических уравнений (5.68): поскольку

$$\tau = \tau^0 + \int_{\mathcal{L}} (d\mathbf{x}, \hat{A}^{-1} d\mathbf{x})^{1/2}, \quad (5.70)$$

характеристические уравнения (5.68) определяют параметрическое задание геодезических кривых в пространстве с метрикой $d\tau = (d\mathbf{x}, A^{-1} d\mathbf{x})$. Используя равенство $|d\mathbf{x}|^2 = dl^2$ (dl — элемент длины луча), можно записать $d\mathbf{x} = \mathbf{n}(x)dl$ ($\mathbf{n}(x)$ — единичный вектор направления распространения сигнала в точке \mathbf{x}). Выражение для обратной скорости (*медленности*) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\tau}{dl} = v^{-1}(x, \mathbf{n}) = (\mathbf{n}, A^{-1} \mathbf{n}).$$

Поэтому интеграл из формулы (5.70) по геодезической \mathcal{L} имеет следующий смысл:

$$\int_{\mathcal{L}} (d\mathbf{x}, A^{-1} d\mathbf{x})^{1/2} = \int_{\mathcal{L}} \frac{dl}{v(x, \mathbf{n})},$$

т. е. смысл минимального времени пробега сигнала вдоль кривой, соединяющей две пространственные точки. Зависимость скорости $v(x, \mathbf{n})$ в явной форме от направления распространения сигнала (\mathbf{n}) отражает специфику принятой модели анизотропной среды.

Восстановление коэффициентов $A_{ij}(x)$ по известным длинам геодезических \mathcal{L} , соединяющих произвольные пары точек \mathbf{x} и \mathbf{x}_0 , составляет сущность обратной кинематической задачи. В стандартных постановках таких задач пары точек \mathbf{x} и \mathbf{x}_0 считаются лежащими на границе исследуемой области. Рассмотрим постановку линеаризованного варианта решения трехмерной обратной кинематической задачи. Будем считать, что опорная среда характеризуется матрицей $A_0(\mathbf{x})$, и задача состоит в том, чтобы восстановить $A(\mathbf{x})$:

$$\hat{A}(x) = \hat{A}_0(x) + \alpha \hat{A}_1(x). \quad (5.71)$$

Здесь α — малый параметр, \hat{A}_0 и \hat{A}_1 — положительно определенные матрицы. Представим эйконал в виде разложения

$$\tau(x_0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \tau_n(x_0, x). \quad (5.72)$$

Подставив выражения (5.71) и (5.72) в уравнение характеристик, получим

$$(\mathbf{p}_0 + \alpha \mathbf{p}_1, (A_0 + \alpha A_1)(\mathbf{p}_0 + \alpha \mathbf{p}_1)) = 1.$$

Здесь в разложении по $\mathbf{p} = \nabla \tau \approx \nabla \tau_0 + \alpha \nabla \tau_1 \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{p}_0 + \alpha \mathbf{p}_1$ сохранены только линейные по α члены. С учетом

$$(\mathbf{p}_0, \hat{A}_0 \mathbf{p}_0) = 1, \quad (5.73)$$

сохраняя члены порядка α , получаем уравнение

$$2(\mathbf{p}_1, \hat{A}_0) \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_0, \hat{A}_1 \mathbf{p}_0) = 0. \quad (5.74)$$

Уравнение (5.73) определяет геодезическую $\mathcal{L}_0(x_0, x)$. С учетом $ds = d\tau_0$ можно записать:

$$(\mathbf{p}_1, A_0 \mathbf{p}_0) = \left(\mathbf{p}_1, \frac{d\mathbf{x}_0}{d\tau_0} \right) = \frac{d\tau_1}{d\tau_0},$$

поэтому из уравнения (5.74) получим выражение для поправки τ_1 :

$$\tau_1(x, x_0) = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}_0(x_0, x)} (\mathbf{p}_0, \hat{A}_1(x) \mathbf{p}_0) d\tau_0. \quad (5.75)$$

Оно является основой для решения линеаризованной обратной кинематической задачи. Заметим, что на $\hat{A}_1(x)$ необходимо наложить условие: $(A_1(x) + A_0(x) > 0)$.

В задачах дистанционного зондирования кинематическая постановка, как правило, связывается с изотропной опорной средой, поэтому

$$\begin{aligned}\hat{A}_0(x) &= a_0(x) = v_0^2(x), \\ \hat{A}_1(x) &= a_1(x) = v_1^2(x), \\ (\mathbf{p}_0, A_1 \mathbf{p}_0) &= a_1(x)(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0) = \frac{a_1(x)}{a_0}, \quad d\tau_0 = \frac{dl_0}{v_0},\end{aligned}$$

и соответствующее уравнение связи поправки времени прихода сигнала из точки x_0 в точку x выглядит следующим образом:

$$\tau_1(x, x_0) = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}_0(x_0, x)} \frac{v_1^2(x) dl_0}{v_0^3(x)} \triangleq \int_{\mathcal{L}_0(x_0, x)} \theta(x) dl_0. \quad (5.76)$$

Здесь dl_0 — длина дуги луча $\mathcal{L}_0(x_0, x)$, соединяющего точки x_0 и x в опорной среде с полем скорости $v_0(x)$.

Представление (5.76) является базовым для постановки задач лучевой томографии. Как будет показано в § 11.7, уравнение характеристик определяется только старшими производными оператора распространения L . Поэтому лучевая концепция легко переносится на восстановление полей коэффициентов ослабления, связанных с первыми производными, входящими в оператор распространения L :

$$\ln \frac{|\Phi(\omega)|}{|\Phi_0(\omega)|} = - \int_{\mathcal{L}_0} \beta_\omega(x) dl_0,$$

где $(\Phi(\omega)$ — фурье-образ зарегистрированного в точке x сигнала φ ; $\Phi_0(\omega)$ — фурье-образ теоретического зондирующего сигнала, генерированного в точке x_0 и распространяющегося в опорной среде; луч $\mathcal{L}_0(x_0, x)$ соединяет точки источника и наблюдений; $\beta_\omega(x)$ — лучевой коэффициент ослабления по фиксированной частоте ω .

Г л а в а 6

МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

При выборе метода нахождения оценок искомого параметра, необходимо провести исследование свойств оценок. Важнейшие свойства, которым должна удовлетворять оценка, были рассмотрены в § 2.2: состоятельность, несмешенность, эффективность (минимальная дисперсия), устойчивость нормальность. Некоторые из этих свойств могут выполняться асимптотически, т. е. при большом числе измерений, так, например, асимптотическая несмешенность, асимптотическая эффективность, асимптотическая нормальность. Рассмотрим методы точечного оценивания, наиболее часто используемые при обработке реальных геофизических полей.

6.1. Метод моментов

Метод моментов предложен К. Пирсоном и сводится к следующему.

Пусть имеется повторная выборка x_1, x_2, \dots, x_n случайной величины ξ с функцией правдоподобия

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_s) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta_1, \dots, \theta_s). \quad (6.1)$$

Найдем S выборочных моментов

$$\tilde{\alpha}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^s, \quad s = 1, 2, \dots$$

Если существует $\alpha_s = M[x_i^{2s}]$ то при $n \rightarrow \infty$ будет действовать закон больших чисел, откуда следует

$$P[|\tilde{\alpha}_s - \alpha_s| > \varepsilon] \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

т. е. при большом объеме выборки $\tilde{\alpha}_s$ с вероятностью, близкой к 1, стремится к α_s . Поэтому естественно составить уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^s p(x; \theta_1, \dots, \theta_s) dx = \alpha_s, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (6.2)$$

из которых можно найти оценки искомых параметров $\theta_1, \dots, \theta_s$. При $n \rightarrow \infty$ эти оценки оказываются асимптотически несмещеными и асимптотически нормальными.

6.2. Метод максимального правдоподобия

Для любой данной выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) значение *функции правдоподобия* (6.1) есть функция неизвестного вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$. Оценка максимального правдоподобия вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ есть такое значение $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, которое соответствует максимуму функции правдоподобия $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\theta})$. При получении вектора оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ решают систему из S уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} = 0, \quad s = 1, \dots, S, \quad (6.3)$$

которое выражает необходимые условия максимума функции правдоподобия, если последняя дифференцируема.

Хотя метод максимального правдоподобия часто приводит к более сложным вычислениям, чем метод моментов, максимально правдоподобные оценки могут оказаться предпочтительнее, особенно в случае малых выборок, так как справедливы следующие теоремы, которые мы дадим без доказательства.

1. Если эффективная оценка существует, то она будет единственным решением $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ системы уравнений правдоподобия (6.3).
2. Если достаточная оценка существует, то каждое решение системы уравнений правдоподобия (6.3) будет функцией этой

оценки. При достаточно общих условиях регулярности функции $\ln L$, которые обычно выполняются на практике, оценки максимального правдоподобия обладают следующими свойствами.

- При достаточно большом числе наблюдений решение уравнения правдоподобия $\hat{\theta}$ или системы уравнений правдоподобия $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (в случае вектора параметров) сходится по вероятности к истинному значению θ или $\boldsymbol{\theta}$, т. е. оценки по методу максимального правдоподобия являются состоятельными.
- Оценки метода максимального правдоподобия являются асимптотически эффективными, т. е. при большом количестве наблюдений неравенство Рао–Крамера переходит в равенство, при этом дисперсия оценок параметров достигает своей нижней границы:

$$\sigma_{\theta_n}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [I^{(F)}(\theta_n)]^{-1}$$

в случае одного параметра θ ,

$$R(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [I^{(F)}(\boldsymbol{\theta}_n)]^{-1}$$

в случае вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$.

- Оценки метода максимального правдоподобия $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ оказываются асимптотически нормальными, т. е.

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) \sim N(0, [I^{(F)}(\boldsymbol{\theta}_n)]^{-1})$$

при $n \rightarrow \infty$.

- Оценки метода максимального правдоподобия являются асимптотически несмешенными, т. е.

$$M[\hat{\boldsymbol{\theta}}_n] = \boldsymbol{\theta}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Для конечного объема выборки n существует только один случай, когда оценки максимального правдоподобия являются оптимальными — это экспоненциальная форма задания функции рас-

пределения генеральной совокупности. Метод максимального правдоподобия широко используется для нахождения оценок параметров геофизических объектов в задачах количественной интерпретации. При этом, как правило, используют аддитивную модель экспериментального материала

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.4)$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ — модель изучаемого геофизического поля, зависящего от вектора неизвестных параметров, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — ошибка измерений, которая предполагается случайной. Предположение о нормальности случайной компоненты $\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{\varepsilon} \in N(0, R_\varepsilon)$) в случае аддитивной модели (6.4) позволяет записать логарифм функции правдоподобия, исключая члены, не содержащие $\boldsymbol{\theta}$, в виде

$$l_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}))^T R_\varepsilon^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})). \quad (6.5)$$

Следует отметить, что в случае нормального распределения оценки метода максимального правдоподобия эквиваленты оценкам взвешенного метода наименьших квадратов, где в качестве весов выступают элементы обратной матрицы ковариаций R_ε^{-1} .

Для некоррелированной случайной компоненты $\boldsymbol{\varepsilon}$ и равноточных наблюдений логарифм функции правдоподобия (6.5) перепишется в виде

$$l_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}_i - \mathbf{f}_i(\boldsymbol{\theta}))^2. \quad (6.6)$$

Критерий максимального правдоподобия в этом частном случае переходит в классический метод наименьших квадратов. Подставляя выражение (6.6) в систему уравнений (6.3), получим

$$(\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}))^T R_\varepsilon^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (6.7)$$

6.3. Метод Ньютона–Лекама

Рассмотрим приближенный метод решения системы (6.7), который является модификацией итерационного метода Ньютона решения системы алгебраических уравнений. Идея метода сводится к следующему. Из априорных представлений выбирается начальный

вектор параметров $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$. Далее, логарифм функции правдоподобия в окрестности точки $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ раскладывают в ряд Тейлора, ограничиваясь тремя первыми членами разложения

$$l_1(\boldsymbol{\theta}) \approx l_1(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) + \Delta\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{d} - \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\theta}^T C \Delta\boldsymbol{\theta}, \quad (6.8)$$

где $\Delta\boldsymbol{\theta}^T = (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T$ — вектор-строка разности двух векторов, \mathbf{d} — вектор-столбец производных по параметрам, C — матрица средних значений вторых производных

$$d_s = \left. \frac{\partial l_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(0)}}, \quad c_{ss'} = -\left. \frac{\partial^2 l_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s \partial \theta_{s'}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(0)}}.$$

Подставляя выражение (6.8) в систему уравнений (6.3), после несложных преобразований получим систему линейных уравнений правдоподобия в виде

$$C \Delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{d}. \quad (6.9)$$

Эта система легко решается, например, методом Гаусса, если C — неособенная матрица. В случае сингулярности этой матрицы необходимо использовать метод сингулярного анализа или метод регуляризации (см. § 6.12).

Решение системы (6.9) дает оценку вектора $\Delta\boldsymbol{\theta}$,

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)} = C^{-1} \mathbf{d},$$

и исправленное значение вектора параметров

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} + \Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}.$$

Верхний индекс означает номер итерации. Далее полученные значения вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}$ принимаются в качестве исходного вектора, рассчитывается вектор поправок $\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}$ и исправленное значение вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}$.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока относительное изменение вектора $\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)}$ не станет меньше априори заданного порогового значения β :

$$\left| \frac{\Delta\hat{\theta}_s^{(n)}}{\hat{\theta}_s^{(n)}} \right| \leq \beta, \quad s = 1, \dots, S,$$

обычно β выбирается порядка $10^{-2} \div 10^{-3}$. Скорость сходимости зависит от вида функции $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ и от начального вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$.

В рассмотренном итерационном алгоритме элементы матрицы C из выражения (6.8) содержат вторые производные от функции $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ по компонентам вектора $\boldsymbol{\theta}$. При практическом применении алгоритма часто оказывается более предпочтительным вместо матрицы C использовать матрицу

$$\tilde{C} = M[C],$$

полученную усреднением матрицы C по значениям случайного вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$, имеющего нулевое математическое ожидание — $M[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$. При этом элементы матрицы \tilde{C} не содержат вторых производных от функции $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$. Выпишем выражения для элементов матрицы \tilde{C} , отвечающих n -й итерации:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ss'}^{(n)} &= M \left[-(\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}))^T R_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \theta_s \partial \theta_{s'}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \theta_s} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)}} R_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_{s'}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)}} \right] = \\ &= -M[\boldsymbol{\varepsilon}^T] R_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \theta_s \partial \theta_{s'}} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \theta_s} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)}} R_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_{s'}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)}} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \theta_s} R_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_{s'}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)}}. \end{aligned}$$

При получении выражений для компонент матрицы \tilde{C} мы учитывали равенство нулю математического ожидания $M[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$ случайного вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Следует отметить, что элементы матрицы \tilde{C} не зависят от экспериментальных данных и полностью определяются моделью детерминированной и случайной компонент.

Используя представление о модели экспериментального материала и формулу (6.8), найдем явный вид вектора \mathbf{d} :

$$d_s = (\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}))^T R_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_s} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)}}.$$

Если функция $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ является линейной относительно искомых параметров и справедлива модель вида

$$\mathbf{u} = \psi\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.10)$$

где ψ — матрица плана или структурная матрица размерности $[n \times S]$:

$$\psi = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1S} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \dots & \psi_{nS} \end{vmatrix},$$

то система уравнений (6.7) будет линейной относительно $\boldsymbol{\theta}$ и ее можно записать в матричной форме

$$(\psi^T R_\varepsilon^{-1} \psi) \boldsymbol{\theta} = \psi^T R_\varepsilon^{-1} \mathbf{u}.$$

Оценка метода максимального правдоподобия легко находится, если матрица $\psi^T R_\varepsilon^{-1} \psi$ неособенная:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\psi^T R_\varepsilon^{-1} \psi)^{-1} \psi^T R_\varepsilon^{-1} \mathbf{u}. \quad (6.11)$$

При наличии сингулярности необходимо применять метод сингулярного анализа или регуляризацию (см. § 6.12).

Мы показали, что в частном случае нормального распределения при наличии корреляционных связей метод максимального правдоподобия эквивалентен методу взвешенных наименьших квадратов, а для независимых компонент случайного вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ — методу наименьших квадратов.

6.4. Метод наименьших квадратов

Как было отмечено в § 6.2, метод максимального правдоподобия (ММП) при нормальном распределении случайной компоненты модели, эквивалентен методу наименьших квадратов (МНК). Вычислительная схема МНК является одной из самых простых, поэтому метод используется для нахождения оценок и в тех случаях, когда распределение вектора экспериментальных данных отличается от нормального. Полученные при этом оценки обладают меньшей точностью, что зачастую окупается простотой их получения.

Начнем рассмотрение МНК с частного, но практически наиболее интересного случая линейной модели относительно вектора искомых параметров (6.10). Оценки МНК при этом находятся минимизацией квадратичной формы

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{\theta}) &= (\mathbf{u} - \psi\boldsymbol{\theta})^T W (\mathbf{u} - \psi\boldsymbol{\theta}), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \arg \min \lambda(\boldsymbol{\theta}),\end{aligned}$$

где W — весовая матрица. Необходимым условием минимума является обращение в нуль частных производных по переменным $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_S$:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (6.12)$$

Полученная система называется *системой нормальных уравнений*. При принятых предположениях (6.12) можно записать в явном виде

$$(\psi^T W \psi) \boldsymbol{\theta} = \psi^T W \mathbf{u}.$$

Из этого соотношения легко получается оценка МНК, если матрица $\psi^T W \psi$ не вырожденная:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\psi^T W \psi)^{-1} \psi^T W \mathbf{u}. \quad (6.13)$$

Сравнивая выражение (6.13) с оценкой метода максимального правдоподобия (6.11), замечаем, что они совпадают, если в качестве весовой матрицы W принять обратную ковариационную матрицу R_ε^{-1} . Для некоррелированных компонент вектора экспериментальных данных \mathbf{u} , на главной диагонали матрицы R_ε^{-1} стоят величины обратных дисперсий σ_i^2 измерений u_i . Аналогия с методом максимального правдоподобия проливает свет на физический смысл элементов весовой матрицы W , формально введенной в метод МНК. В случае равноточных наблюдений

$$W = \sigma_\varepsilon^{-2} I$$

и оценка (6.13) записывается в виде

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T \mathbf{u}. \quad (6.14)$$

Матрица ковариаций оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$R_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = M \left[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \right] = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T R_\varepsilon \psi (\psi^T \psi)^{-1}$$

легко рассчитывается из оценки (6.14) подстановкой $R_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 I$.
Окончательно получаем

$$R_\theta = \sigma_\varepsilon^2 (\psi^T \psi)^{-1}.$$

Оценка МНК для линейной модели обладает следующими оптимальными свойствами, которые не зависят от вида распределения ε .

1. Несмешенность оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Учитывая, что $M[\mathbf{u}] = \psi\boldsymbol{\theta}$, математическое ожидание оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$M[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T M[\mathbf{u}]$$

совпадает со значением искомого параметра $\boldsymbol{\theta}$

$$M[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T \psi \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}.$$

2. Эффективность оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Среди класса оценок $\boldsymbol{\theta}^*$ вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$, которые являются несмешенными и представляют собой линейные комбинации исходных данных \mathbf{u} , оценка МНК $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ обладает минимальной дисперсией

$$R_{ss}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \leq R_{ss}(\boldsymbol{\theta}^*)$$

для любого $s = 1, \dots, S$.

3. Оценка $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ по остаточной сумме квадратов дается следующей формулой:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = (\mathbf{u} - \psi \hat{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{u} - \psi \hat{\boldsymbol{\theta}}) / (n - S).$$

6.5. МНК — нелинейный случай

Оценка МНК для линейной модели обладает не только простотой и удобной вычислительной схемой, легко реализуемой на ЭВМ, но также является основным элементом для общего случая нелинейной модели вида

$$\mathbf{u} = \varphi(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon. \quad (6.15)$$

Раскладывая $\varphi(\boldsymbol{\theta})$ в ряд Тейлора в окрестности вектора начального приближения $\boldsymbol{\theta}_0$ и, ограничиваясь двумя первыми членами разложения, модель (6.15) можно переписать следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \psi \Delta \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.16)$$

где

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \varphi(\boldsymbol{\theta}_0), \quad \|\psi_{js}\| = \left. \frac{\partial \varphi_j}{\partial \theta_s} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}, \quad \Delta \boldsymbol{\theta}^{(0)} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0.$$

Модель (6.16) эквивалентна модели (6.10). Применение взвешенного МНК дает оценку

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\psi^T W \psi)^{-1} \psi^T W \tilde{\mathbf{u}}.$$

Далее процедура оценивания повторяется, но вместо $\boldsymbol{\theta}_0$ используется $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_0 + \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Сходимость итерационного процесса зависит от вида функции $\varphi(\boldsymbol{\theta})$ и от способа назначения весов. Итерационный процесс прекращается, когда относительное изменение параметров на очередном шаге k станет меньше заданного порогового значения β

$$\left| \frac{\Delta \theta_s^{(k)}}{\theta_s^{(k)}} \right| \leq \beta.$$

Обычно величину β выбирают порядка $10^{-2} - 10^{-3}$.

6.6. МНК — ортогональные полиномы (полиномы Чебышева)

Процедура обращения матрицы $\psi^T \psi$ при получении оценки (6.14) существенно упрощается, если в качестве детерминированной функции применить систему нормированных ортогональных полиномов. В этом случае i -ю строку матрицы ψ можно представить в виде

$$\psi_i = \|\varphi_0(x_i), \varphi_1(x_i), \dots, \varphi_{S-1}(x_i)\|,$$

где $\varphi_s(x_i)$ обладают свойством ортогональности на множестве значений x :

$$\sum_{i=1}^n \varphi_s(x_i) \varphi_{s'}(x_i) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \varphi_s^2(x_i), & \text{при } s = s', \\ 0, & \text{при } s \neq s'. \end{cases} \quad (6.17)$$

Из условия (6.17) следует, что матрица $\psi^T \psi$ будет диагональной и легко обращается

$$\psi^T \psi = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n \varphi_0^2(x_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n \varphi_1^2(x_i) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=1}^n \varphi_{S-1}^2(x_i) \end{vmatrix}.$$

В качестве системы ортогональных полиномов воспользуемся полиномами Чебышева. Схема их построения сводится к следующему. Положим, что $\varphi_0(x_i) = 1$. Функцию $\varphi_1(x_i)$ определим в виде

$$\varphi_1(x_i) = x_i + b_0 \varphi_0(x_i). \quad (6.18)$$

Коэффициент b_0 найдем из условия ортогональности

$$\sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) \varphi_0(x_i) = 0, \quad b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \varphi_0(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_0^2(x_i)}. \quad (6.19)$$

Подставляя выражение для b_0 (6.19) в правую часть равенства (6.18), получим

$$\varphi_1(x_i) = x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \varphi_0(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_0^2(x_i)} \varphi_0(x_i).$$

Далее определим $\varphi_2(x_i)$, используя представление

$$\varphi_2(x_i) = x_i^2 + b_1 \varphi_1(x_i) + b_0 \varphi_0(x_i).$$

Из условий ортогональности определим b_1 и b_0 :

$$\sum_{i=1}^n \varphi_2(x_i) \varphi_0(x_i) = 0, \quad b_0 = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \varphi_0(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_0^2(x_i)},$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_2(x_i) \varphi_1(x_i) = 0, \quad b_1 = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \varphi_1(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_1^2(x_i)}.$$

Окончательно для $\varphi_2(x_i)$ имеем

$$\varphi_2(x_i) = x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \varphi_1(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_1^2(x_i)} \varphi_1(x_i) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \varphi_0(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_0^2(x_i)} \varphi_0(x_i).$$

Действуя аналогичным образом, можно получить $\varphi_3(x_i)$ и т.д. Для произвольной s -й функции будем иметь

$$\varphi_s(x_i) = x_i^s - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^s \varphi_{s-1}(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_{s-1}^2(x_i)} \varphi_{s-1}(x_i) - \dots - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^s \varphi_0(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_0^2(x_i)} \varphi_0(x_i). \quad (6.20)$$

Легко показать справедливость такого представления. Запишем функцию $\varphi_s(x_i)$ в следующем виде:

$$\varphi_s(x_i) = x_i^s + b_{s-1} \varphi_{s-1}(x_i) + \dots + b_0 \varphi_0(x_i).$$

Умножая на $\varphi_{s'}(x_i)$, $s' < s$, суммируя по всем x_1, \dots, x_n и используя условие ортогональности (6.17), получим

$$\sum_{i=1}^n x_i^s \varphi_{s'}(x_i) + b_{s'} \sum_{i=1}^n \varphi_{s'}^2(x_i) = 0, \quad b_{s'} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i^s \varphi_{s'}(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_{s'}^2(x_i)},$$

что и доказывает справедливость равенства (6.20). Для случая, когда абсциссы x_1, \dots, x_n заданы с равномерным шагом, П.Л. Чебышевым была получена рекуррентная формула для расчета функции $\varphi_{s+1}(x_i)$ по известным $\varphi_s(x_i)$ и $\varphi_{s-1}(x_i)$:

$$\varphi_{s+1}(x_i) = \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \varphi_s(x_i) - \frac{n^2(n^2 - i^2)}{4(4i^2 - 1)} \varphi_{s-1}(x_i).$$

Мы рассмотрели варианты представления матрицы ψ ортогональными полиномами для однородного процесса.

Оценка коэффициентов ортогонального полинома по методу наименьших квадратов с учетом выражения для оценки (6.13) и условия ортогональности (6.17) при $W = 1$, $\sum_{j=1}^n \varphi_{sj}^2 = 1$ имеет вид

$$\hat{\theta}_s = \sum_{j=1}^n \varphi_{sj} u_j, \quad s = 0, 1, 2, \dots, S - 1,$$

или $\hat{\theta} = \psi^T \mathbf{u}$.

В этом случае матрица ковариаций оценок параметров является диагональной

$$R_\theta = \sigma_\varepsilon^2 I,$$

а оценка среднеквадратичного отклонения дается формулой

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{(\mathbf{u} - \psi \hat{\theta})^T (\mathbf{u} - \psi \hat{\theta})}{n - S}.$$

6.7. МНК при наличии линейных связей

При решении прикладных задач часто возникает необходимость определения оценок параметров при наличии линейных связей. Это один из вариантов учета априорной информации.

Пусть вектор искомых параметров θ удовлетворяет системе Q уравнений

$$A\theta = V, \tag{6.21}$$

причем $Q < S$. Матрица A имеет размерность $[Q \times S]$, а вектор V — длину Q . Задачу определения параметров в этом случае можно сформулировать как задачу на условный экстремум — минимизация $\lambda(\theta)$ при условии (6.21). Для решения таких задач обычно используют метод неопределенных множителей Лагранжа. Построим функционал

$$\Phi(\theta) = (\mathbf{u} - \psi \theta)^T (\mathbf{u} - \psi \theta) - 2\lambda^T (A\theta - V),$$

где компонента вектора λ является неопределенным множителем Лагранжа. Размерность λ равна размерности V , т. е. — числу линей-

ных условий. В качестве оценок параметров выбираем такие значения, которые соответствуют минимуму функционала $\Phi(\boldsymbol{\theta})$. Необходимым условием минимума является равенство нулю первой производной по компонентам вектора $\boldsymbol{\theta}$:

$$\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} = 0, \quad s = 1, \dots, S. \quad (6.22)$$

Решая систему линейных уравнений (6.22) относительно параметров θ_s , получим следующую оценку $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, выраженную через множители Лагранжа:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T + \boldsymbol{\lambda}^T A(\psi^T \psi)^{-1}, \quad (6.23)$$

где $\hat{\boldsymbol{\theta}}^T$ — оценка, найденная по методу наименьших квадратов без учета линейных связей.

Для нахождения $\boldsymbol{\lambda}$ умножим обе части равенства (6.23) на A^T справа и воспользуемся условием (6.21). В результате получим

$$\boldsymbol{\lambda}^T = (\mathbf{V}^T - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T A^T)(A(\psi^T \psi)^{-1} A^T)^{-1}. \quad (6.24)$$

Подставляя равенство (6.24) в выражение (6.23), мы приходим к окончательной оценке для искомых параметров

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T + (\mathbf{V}^T - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T A^T)(A(\psi^T \psi)^{-1} A^T)^{-1} A(\psi^T \psi)^{-1}. \quad (6.25)$$

Как видно из формулы (6.25), оценка с учетом линейных связей состоит из двух слагаемых: первое соответствует оценке, полученной по методу наименьших квадратов без учета линейных связей, а вторая характеризует вклад линейных связей в общую оценку. Ковариационная матрица оценок параметров выражается следующей формулой:

$$R_{\bar{\theta}} = R_{\hat{\theta}} - \sigma_{\varepsilon}^2 (\psi^T \psi)^{-1} A^T (A(\psi^T \psi)^{-1} A^T)^{-1} A(\psi^T \psi)^{-1}, \quad (6.26)$$

$$R_{\hat{\theta}} = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 (\psi^T \psi)^{-1}. \quad (6.27)$$

На главной диагонали находятся дисперсии оценок параметров, а внедиагональные элементы характеризуют взаимные корреляционные связи между оценками параметров. Интересно отметить, что элементы матрицы состоят из двух членов: первый член соответствует элементам ковариационной матрицы без учета линейных связей, а второй член характеризует влияние линейных связей.

Оценку для дисперсии аппроксимации найдем по формуле

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{(\mathbf{u} - \psi\tilde{\boldsymbol{\theta}})^T(\mathbf{u} - \psi\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{n - S - K}.$$

Рассмотрим далее случай, когда априори известна обратная ковариационная матрица экспериментальных данных W . В этом случае оценки (6.14), (6.25) перепишутся в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T + (\mathbf{V}^T - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T A^T)(A(\psi^T W \psi)^{-1} A^T)^{-1} A(\psi^T W \psi)^{-1}, \quad (6.28)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\psi^T W \psi)^{-1} \psi^T W \mathbf{u}. \quad (6.29)$$

Ковариационные матрицы оценок $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ будут иметь вид

$$R_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = R_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - (\psi^T W \psi)^{-1} A^T (A(\psi^T W \psi)^{-1} A^T)^{-1} A(\psi^T W \psi)^{-1}, \quad (6.30)$$

$$R_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = (\psi^T W \psi)^{-1}. \quad (6.31)$$

Полученные оценки (6.28), (6.29) и соответствующие ковариационные матрицы (6.30), (6.31) можно использовать при наличии априорной информации о весовой содержательности отдельных экспериментальных данных. Такие случаи часто встречаются, когда подлежащие аппроксимации данные уже являются результатом обработки и представляют собой оценки искомых параметров. Тогда соответствующие дисперсии и коэффициенты ковариаций оценок параметров можно использовать при формировании весовой матрицы W .

6.8. Метод линейного оценивания в случае нестационарной модели

Рассмотрим методы нахождения оценок параметров, линейно входящих в модель

$$\mathbf{u} = \psi\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

при условии, что случайная компонента является нестационарной. Для простоты будем считать, что

$$\sigma_i^2 = \Sigma(f_i, \boldsymbol{\rho}) = \rho_0 + \rho_1 f_i^2,$$

где $f_i = \psi_i^T \boldsymbol{\theta}$. В частном случае $\rho_1 = 0$ приходим к стационарной модели. Процедура нахождения оценок параметров $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\rho}$ сводится к следующему.

1. Расчет нулевого приближения вектора параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$ по методу наименьших квадратов с единичными весовыми коэффициентами

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T \mathbf{u}.$$

2. Определение оценки модельной функции

$$\hat{f}_i = \boldsymbol{\psi}_i^T \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}.$$

3. Вычисление квадрата расхождения

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = (u_i - \hat{f}_i)^2.$$

4. Нахождение оценки $\hat{\boldsymbol{\rho}}$:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\rho}} &= \arg \min (\hat{\mathbf{C}} - \hat{B}\boldsymbol{\rho})^T (\hat{\mathbf{C}} - \hat{B}\boldsymbol{\rho}), \\ \hat{\boldsymbol{\rho}} &= (\hat{B}^T \hat{B})^{-1} \hat{B}^T \hat{\mathbf{C}}, \\ \rho_0 &\geq 0, \quad \rho_1 \geq 0,\end{aligned}$$

где

$$\hat{B} = \begin{Bmatrix} 1 & \hat{f}_1^2 \\ 1 & \hat{f}_2^2 \\ \dots & \dots \\ 1 & \hat{f}_n^2 \end{Bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_1^2 \\ \hat{\varepsilon}_2^2 \\ \dots \\ \hat{\varepsilon}_n^2 \end{Bmatrix}.$$

5. Расчет дисперсии случайной компоненты

$$\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_1 \hat{f}_i^2.$$

6. Определение взвешенным методом наименьших квадратов оценки

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\psi^T W \psi)^{-1} \psi^T W \mathbf{u},$$

где $W = \text{diag}(\hat{\sigma}_1^{-2}, \hat{\sigma}_2^{-2}, \dots, \hat{\sigma}_n^{-2})$.

7. Расчет расхождения $\tilde{\varepsilon}_i^2$ с учетом оценок $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$

$$\tilde{\varepsilon}_i^2 = (u_i - \tilde{f}_i)^2,$$

где $\tilde{f}_i = \boldsymbol{\psi}_i^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}$.

8. Сравнение $\tilde{\varepsilon}_i^2$ с пороговым значением β_0 . Если $\tilde{\varepsilon}_i^2 \leq \beta_0$, то итерационная процедура заканчивается. Если $\tilde{\varepsilon}_i^2 > \beta_0$, то $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{c}_i = \tilde{\varepsilon}_i^2$, $\hat{f}_i = \tilde{f}_i$ и переходим к п. 4.

При достаточно общих предположениях о регулярности функции Σ , которые обычно выполняются на практике, параметрические модели σ_i^2 приводят к оценкам, имеющим асимптотически нормальное распределение, которое при достаточно большом объеме выборки совпадает с распределением оценок $\boldsymbol{\theta}$, полученных взвешенным методом наименьших квадратов при условии, что весовые коэффициенты известны точно.

6.9. Критерий Байеса и метод статистической регуляризации

При решении практических задач обработки геофизических данных большое значение имеет учет имеющейся априорной информации о параметрах исследуемого объекта. Критерий Байеса открывает широкие возможности использования априорной информации в статистической форме. Предположим, что в модели (6.15) вектор $\boldsymbol{\theta}$ является случайным. Совместная плотность распределения вероятностей вектора экспериментальных данных \mathbf{u} и вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ запишется в виде

$$p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{u})p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{u}), \quad (6.32)$$

где $p(\boldsymbol{\theta})$ — априорная плотность распределения вектора искомых параметров, $p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\theta})$ — условная плотность распределения вектора экспериментальных данных \mathbf{u} при фиксированном векторе параметров $\boldsymbol{\theta}$, $p(\mathbf{u})$ — априорная плотность распределения вектора экспериментальных данных, $p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{u})$ — апостериорная плотность распределения вероятностей вектора искомых параметров $\boldsymbol{\theta}$ при фиксированной реализации экспериментальных данных \mathbf{u} . Из выражения (6.32) можно найти апостериорную плотность распределения искомого вектора параметров

$$p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{u}) = \frac{p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{u})}. \quad (6.33)$$

Согласно критерию Байеса, в качестве оценки вектора искомых параметров принимается среднее по апостериорному распределению

значение

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_B = \int \boldsymbol{\theta} p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{u}) d\boldsymbol{\theta}. \quad (6.34)$$

Анализ формулы (6.33) показывает, что апостериорная плотность распределения вероятностей является произведением априорной плотности $p(\boldsymbol{\theta})$ и условной плотности $p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\theta})$ (знаменатель не зависит от вектора искомых параметров и введен для нормировки). Следовательно, априорная информация о векторе параметров складывается из априорной, которая получена до проведения эксперимента, и извлеченной из экспериментальных данных. Если один из сомножителей превалирует над другим, то он в основном и определяет апостериорную информацию. Так, например, если условная плотность распределения имеет резкий максимум в области параметрического пространства ω_0 и быстро стремится к нулю в остальной области ω_1 , а априорная плотность $p(\boldsymbol{\theta})$ представляет собой медленно меняющуюся функцию в области ω_0 , то апостериорная плотность практически не зависит от конкретного вида $p(\boldsymbol{\theta})$, которую можно положить равной константе во всей области ω_0 .

6.10. Критерий максимума апостериорной вероятности

Наряду с оценкой (6.34) как условного среднего широкое практическое применение нашел метод *максимума апостериорной вероятности*. В этом методе в качестве оценки принимается значение $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, соответствующее положению максимума плотности апостериорной вероятности $p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{u})$ в параметрическом пространстве. Так как логарифм — монотонная функция, то положение максимума можно определить и по функции $\ln p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{u})$, что оказывается более удобным при решении широкого круга задач. Если максимум лежит внутри допустимой области изменения $\boldsymbol{\theta}$ и функция имеет непрерывную первую производную, то необходимое условие отыскания максимума получим, беря первую производную от $\ln p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{u})$ и приравнивая ее нулю

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{u})}{\partial \theta_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (6.35)$$

Уравнение (6.35) называют уравнением максимальной апостериорной вероятности. Заменим $p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{u})$ его представлением (6.33) и

прологарифмируем

$$\ln p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{u}) = \ln p(\boldsymbol{\theta}) + \ln p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\theta}) - \ln p(\mathbf{u}). \quad (6.36)$$

Для нахождения оценки по методу максимума апостериорной вероятности подставим выражение (6.36) в систему уравнений (6.35) и получим уравнение максимальной апостериорной вероятности в виде

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} + \frac{\partial \ln p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (6.37)$$

Первое слагаемое в левой части уравнения (6.37) характеризует априорные сведения, а второе соответствует данным эксперимента.

Анализ уравнения (6.37) показывает, что если функция $\ln p(\boldsymbol{\theta})$ слабо меняется в области допустимых значений $\boldsymbol{\theta}$, то первым членом в уравнении (6.37) можно пренебречь, и метод максимума апостериорной вероятности переходит в метод максимального правдоподобия. Это означает, что метод максимального правдоподобия является частным случаем метода максимума апостериорной вероятности при условии, когда отсутствует априорная информация, что эквивалентно принятию гипотезы $p(\boldsymbol{\theta}) = \text{const}$ в области возможных значений вектора параметров.

При нетривиальном задании априорной плотности $p(\boldsymbol{\theta}) \neq \text{const}$ метод максимальной апостериорной вероятности улучшает оценку максимального правдоподобия и делает решение устойчивым. Привлечение априорной информации лежит в основе метода статистической регуляризации.

Рассмотрим более подробно процедуру нахождения оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ для частного случая нормального распределения случайной компоненты $\boldsymbol{\varepsilon} \in N(0, R_\varepsilon)$ и нормального априорного распределения $\boldsymbol{\theta} \in N(\langle \boldsymbol{\theta} \rangle, R_\theta)$ для линейной модели (6.15). Логарифм апостериорной плотности распределения вероятностей имеет вид

$$\begin{aligned} \ln p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{u}) &= -\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \psi\boldsymbol{\theta})^T R_\varepsilon^{-1}(\mathbf{u} - \psi\boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \langle \boldsymbol{\theta} \rangle)^T R_\theta^{-1} \times \\ &\quad \times (\boldsymbol{\theta} - \langle \boldsymbol{\theta} \rangle) - \frac{n+S}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2}(\ln |R_\theta| + \ln |R_\varepsilon|) - \ln p(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Необходимое условие максимума апостериорной вероятности при-

водит к системе уравнений

$$(\psi^T R_\varepsilon^{-1} \psi + R_\theta^{-1}) \boldsymbol{\theta} = \psi^T R_\varepsilon^{-1} \mathbf{u} + R_\theta^{-1} \langle \boldsymbol{\theta} \rangle,$$

откуда находится оценка $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\psi^T R_\varepsilon^{-1} \psi + R_\theta^{-1})^{-1} (\psi^T R_\varepsilon^{-1} \mathbf{u} + R_\theta^{-1} \langle \boldsymbol{\theta} \rangle). \quad (6.38)$$

Используя тождества

$$\begin{aligned} (\psi^T R_\varepsilon^{-1} \psi + R_\theta^{-1})^{-1} &= R_\theta - R_\theta \psi^T (\psi R_\theta \psi^T + R_\varepsilon)^{-1}, \\ \psi R_\theta, (\psi^T R_\varepsilon^{-1} \psi + R_\theta^{-1})^{-1} \psi^T R_\varepsilon^{-1} &= R_\theta \psi^T (\psi R_\theta \psi^T + R_\varepsilon)^{-1}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

можно представить оценку (6.38) в следующей форме:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \langle \boldsymbol{\theta} \rangle + R_\theta \psi^T (\psi R_\theta \psi^T + R_\varepsilon)^{-1} (\mathbf{u} - \psi \langle \boldsymbol{\theta} \rangle). \quad (6.40)$$

Формула (6.40) допускает простую интерпретацию: оценка максимальной апостериорной вероятности $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ представляется в виде суммы априорного вектора $\langle \boldsymbol{\theta} \rangle$ и поправки, которая является взвешенным расхождением между экспериментальными данными и априорной моделью.

В частном случае некоррелированной случайной компоненты $R_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 I_n$ и некоррелированных компонент вектора $\boldsymbol{\theta}$ в априорном распределении $R_\theta = \sigma_\theta^2 I_n$ (I_n и I_S — единичные матрицы размерности $[n \times n]$ и $[S \times S]$ соответственно, σ_ε^2 — дисперсия случайной компоненты, σ_θ^2 — априорная дисперсия параметров) формулы (6.38), (6.40) перепишутся в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\psi^T \psi + \alpha I_S)^{-1} (\psi^T \mathbf{u} + \alpha \langle \boldsymbol{\theta} \rangle), \quad (6.41)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \langle \boldsymbol{\theta} \rangle + \psi^T (\psi \psi^T + \alpha I_n)^{-1} (\mathbf{u} - \psi \langle \boldsymbol{\theta} \rangle), \quad (6.42)$$

где $\alpha = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\theta^2$ является фиксированным параметром регуляризации нулевого порядка по Тихонову. Следует отметить, что параметр регуляризации в статистической постановке имеет ясный физический смысл — это есть энергетическое отношение шум/сигнал.

При стремлении α к нулю оценка $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ (6.41) метода максимума апостериорной вероятности переходит в оценку максимального правдоподобия $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (6.11).

Матрицы ковариаций оценки вектора параметров, определенных формулами (6.38), (6.40), (6.41), (6.42), запишутся соответственно в виде

$$R_{\bar{\theta}} = (\psi^T R_{\varepsilon}^{-1} \psi + R_{\theta}^{-1})^{-1}, \quad (6.43)$$

$$R_{\bar{\theta}} = R_{\theta} - R_{\theta} \psi^T (\psi R_{\theta} \psi^T + R_{\varepsilon}^{-1})^{-1} \psi R_{\theta}, \quad (6.44)$$

$$R_{\bar{\theta}} = \sigma_{\varepsilon}^2 (\psi^T \psi + \alpha I_S)^{-1}, \quad (6.45)$$

$$R_{\bar{\theta}} = \sigma_{\theta}^2 (I_S - \psi^T (\psi \psi^T + \alpha I_n)^{-1} \psi). \quad (6.46)$$

Исследование качества интерпретации следует проводить на основании анализа матрицы $R_{\bar{\theta}}$, на главной диагонали которой лежат дисперсии оценок параметров, а внедиагональные элементы описывают корреляционные связи оценок. Рассчитанные матрицы (6.43)–(6.46) можно также использовать при планировании эксперимента. Следует отметить, что выбор формул для нахождения оценки $\boldsymbol{\theta}$ ((6.38) или (6.40)) диктуется главным образом вычислительными возможностями, которыми располагает интерпретатор. Если вычисление обратных матриц ковариаций большой размерности $R_{\bar{\theta}}$ и R_{ε} представляет вычислительные трудности, то форма (6.40) представляется более предпочтительной.

6.11. Рекуррентный алгоритм (МНК)

При решении задач аппроксимации большого объема экспериментальных данных, ограниченность памяти ЭВМ приводит к необходимости построения интерпретационных алгоритмов нахождения оценки вектора параметров методом максимума апостериорной вероятности. Рассмотрим устойчивый итерационный алгоритм, который базируется на представлении оценки в форме (6.40).

В качестве начального приближения оценки вектора параметров принимаем априорный вектор $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = \langle \boldsymbol{\theta} \rangle$, а начальная матрица ковариаций равна априорной матрице $R_{\theta}^{(0)} = R_{\theta}$. Первое приближение рассчитывается по формуле

$$\boldsymbol{\theta}^{(1)} = \boldsymbol{\theta}^{(0)} + \gamma^{(1)} \Delta \boldsymbol{\theta}^{(1)},$$

где $\Delta \boldsymbol{\theta}^{(1)} = R_{\theta}^{(0)} \boldsymbol{\psi}^{(1)}$, $\boldsymbol{\psi}(1)$ — вектор-столбец, компоненты которого являются элементами первой строки матрицы ψ :

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)} &= N_1 / \delta_1^2, & N_1 &= u_1 - \boldsymbol{\psi}^{(1)T} \boldsymbol{\theta}^{(0)}, \\ \delta_1^2 &= \sigma_{\varepsilon 1}^2 + \boldsymbol{\psi}^{(1)T} \Delta \boldsymbol{\theta}^{(1)}. \end{aligned}$$

Матрица ковариаций оценки $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$ имеет вид

$$R_{\theta}^{(1)} = R_{\theta}^{(0)} - \Delta\boldsymbol{\theta}^{(1)} \Delta\boldsymbol{\theta}^{(1)T} / \delta_1^2.$$

Пусть найдено $(i-1)$ -е приближение $\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}$ и $R_{\theta}^{(i-1)}$. Тогда, i -е приближение строится следующим образом:

$$\boldsymbol{\theta}^{(i)} = \boldsymbol{\theta}^{(i-1)} + \gamma^{(i)} \Delta\boldsymbol{\theta}^{(i)},$$

где

$$\begin{aligned}\gamma^{(i)} &= N_i / \delta_i^2, \quad N_i = u_i - \boldsymbol{\psi}^{(i)T} \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}, \\ \delta_i^2 &= \sigma_{\varepsilon i}^2 + \boldsymbol{\psi}^{(i)T} \Delta\boldsymbol{\theta}^{(i)}, \\ \Delta\boldsymbol{\theta}^{(i)} &= R_{\theta}^{(i-1)} \boldsymbol{\psi}^{(i)T}, \\ R_{\theta}^{(i)} &= R_{\theta}^{(i-1)} - \Delta\boldsymbol{\theta}^{(i)} \Delta\boldsymbol{\theta}^{(i)T} / \delta_i^2.\end{aligned}$$

6.12. Сингулярный анализ и метод наименьших квадратов

При решении практических задач на ЭВМ методом наименьших квадратов применительно к модели (6.15) мы не можем получить удовлетворительных результатов в случае плохой обусловленности матрицы $\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi}$, которая подлежит обращению. В качестве меры обусловленности матрицы обычно используют число обусловленности

$$\beta = \frac{G}{g},$$

где

$$G = \max_{\boldsymbol{\theta}} \frac{\|\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\theta}\|_1}{\|\boldsymbol{\theta}\|_1}, \quad g = \min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{\|\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\theta}\|_1}{\|\boldsymbol{\theta}\|_1}, \quad \|\boldsymbol{\theta}\|_1 = \sum_{s=1}^S |\theta_s|. \quad (6.47)$$

Максимум и минимум в условиях (6.47) берутся по всем ненулевым векторам параметров. Отметим, что если матрица вырождена, то $g = 0$.

Число обусловленности β является мерой близости к вырожденности. Его можно рассматривать как величину, обратную относительному расстоянию от данной матрицы до множества вырожденных матриц. Из определения числа обусловленности β следуют свойства.

1. Значения β всегда больше 1 ($\beta \geq 1$), так как

$$G \geq g.$$

2. Если матрица $\psi^T \psi$ диагональная, как в случае ортогональных полиномов, то

$$\beta = \frac{\max |(\psi^T \psi)_{ii}|}{\min |(\psi^T \psi)_{ii}|}.$$

3. Если обратная матрица существует, то

$$\beta = \|\psi^T \psi\| \|(\psi^T \psi)^{-1}\|.$$

4. Если матрица $\psi^T \psi$ вырождена, то $\beta = \infty$.

При “почти” вырожденных матрицах $\psi^T \psi$ число обусловленности β имеет очень большие значения, поэтому каким бы методом ни решалась система нормальных уравнений, ошибки во входной информации и ошибки округления, появляющиеся в процессе вычислений, приведут к сильной “раскачке” вектора искомых параметров. В крайнем случае, когда столбцы матрицы $\psi^T \psi$ линейно зависимы, матрица $\psi^T \psi$ будет вырождена с числом обусловленности $\beta = \infty$. Следовательно, высокие значения числа обусловленности свидетельствуют о наличии “почти” линейно зависимых строк матрицы.

Наиболее надежный метод определения вектора параметров и линейной модели в случае плохой обусловленности матрицы основывается на сингулярном разложении или матричной факторизации матрицы плана ψ . Этот способ более эффективен в смысле учета входной информации, ошибок округления и линейной зависимости, чем классический МНК.

Перейдем к рассмотрению этого метода. В качестве модели экспериментального материала примем линейную модель (6.15).

Можно показать, что для любой вещественной матрицы ψ справедливо представление вида

$$\psi = Q \Sigma P^T, \quad (6.48)$$

где $Q_{n \times n}$ и $P_{S \times S}$ — ортогональные матрицы, т. е. $QQ^T = I_{n \times n}$ и $PP^T = I_{S \times S}$ соответственно, а $\Sigma_{n \times S}$ — диагональная матрица с

элементами

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i, & i = j, \quad i = 1, \dots, n, \\ 0, & i \neq j, \quad j = 1, \dots, S, \end{cases}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sigma_S \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Матрица Q сформирована из n ортонормированных собственных векторов матрицы $\psi\psi^T$, а матрица P — из ортонормированных собственных векторов матрицы $\psi^T\psi$. Диагональные элементы σ_i матрицы Σ — неотрицательные значения квадратных корней из собственных значений матрицы $\psi^T\psi$, они называются *сингулярными числами*. Допустим, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_S \geq 0$. Если ранг матрицы ψ равен r , то значения $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_S = 0$.

Для простоты анализа предположим, что случайная компонента модели ε является некоррелированной. Тогда с учетом представления (6.48) критерий метода наименьших квадратов запишется в виде

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min \lambda(\boldsymbol{\theta}),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{\theta}) &= (\mathbf{u} - \psi\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{u} - \psi\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{u} - Q\Sigma P^T\boldsymbol{\theta})^T Q Q^T \times \\ &\times (\mathbf{u} - Q\Sigma P^T\boldsymbol{\theta})(\mathbf{y} - \Sigma\mathbf{b})^2. \end{aligned}$$

Используя свойство $Q Q^T = I$, после простых преобразований получим следующее представление для квадратичной формы λ :

$$\lambda(\mathbf{b}) = (\mathbf{y} - \Sigma\mathbf{b})^2, \quad (6.50)$$

где

$$\mathbf{y} = Q^T\mathbf{u}, \quad \mathbf{b} = P^T\boldsymbol{\theta}. \quad (6.51)$$

Минимизируем его по \mathbf{b} , получим выражение для оценки $\hat{\mathbf{b}}$

$$\hat{\mathbf{b}} = \Sigma^+ \mathbf{y} \quad (6.52)$$

или, переходя к исходным переменным, будем иметь

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = P\Sigma^+Q^T\mathbf{u}. \quad (6.53)$$

Матрица

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sigma_S^{-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

называется псевдообратной по отношению к матрице Σ , она имеет размерность $[S \times n]$ и удовлетворяет следующим свойствам Мура-Пенроуза:

- 1) $\Sigma\Sigma^+\Sigma = \Sigma$;
- 2) $\Sigma^+\Sigma\Sigma^+ = \Sigma^+$;
- 3) $\Sigma\Sigma^+$ — симметричная матрица;
- 4) $\Sigma^+\Sigma$ — симметричная матрица.

Можно показать, что такая матрица всегда существует и единственна. Если диагональные элементы σ_{ii} матрицы Σ не равны нулю, то оценка b_i ($i = 1, 2, \dots, S$) записывается как

$$\hat{b}_i = y_i / \sigma_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, S.$$

Однако если некоторые σ_{ii} малы, то такая процедура нежелательна. В этом случае значения σ_{ii} необходимо проанализировать перед нахождением оценки $\hat{\boldsymbol{b}}$. Можно показать, что сингулярные числа будут отличны от нуля в том и только в том случае, если столбцы матрицы ψ являются линейно независимыми. Анализ сингулярных чисел надо производить, опираясь на предполагаемую точность исходных данных и точность вычислений на ЭВМ. Исходя из априорной точности, выбирают пороговое значение α , с которым сравнивают каждое σ_{ii} . Если $\sigma_{ii} \geq \alpha$, то $\hat{b}_i = y_i / \sigma_{ii}$ для $i = 1, 2, \dots, i_0$. Если $\sigma_{ii} < \alpha$, то $\hat{b}_i = 0$ для $i = i_0 + 1, \dots, S$.

Вообще говоря, при $\sigma_{ii} < \alpha$ компоненте вектора b_i можно придать любые произвольные значения. Такой произвол является причиной неединственности решения, полученного по МНК. Чтобы исключить влияние неустойчивых компонент вектора $\hat{\boldsymbol{b}}_i$ при $\sigma_{ii} < \alpha$, в методе сингулярного анализа полагают значения этих компонент равными нулю. Наглядная интерпретация порогового значения α может быть получена для модели со случайным вектором параметров $\boldsymbol{\theta}$. Пусть среднее значение вектора параметров $\langle \boldsymbol{\theta} \rangle = 0$ и

априорная матрица ковариаций $\langle \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^T \rangle = R_{\boldsymbol{\theta}}$. Для простоты анализа предположим, что компоненты вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ некоррелированы и случайная компонента модели \boldsymbol{u} некоррелирована, т. е.

$$R_{\boldsymbol{\theta}} = \sigma_{\theta}^2 I, \quad R_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sigma_{\varepsilon}^2 I.$$

Кроме того, будем считать случайные векторы $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ некоррелированными между собой.

Используя сингулярное разложение (6.48) матрицы плана ψ и обозначения (6.51), перепишем модель (6.10) в виде

$$\boldsymbol{y} = \sum \boldsymbol{b} + \boldsymbol{e},$$

где $\boldsymbol{e} = Q^T \boldsymbol{\varepsilon}$. Решение будем искать в виде линейной формы

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \Gamma \boldsymbol{y}, \tag{6.54}$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_S & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

— диагональная прямоугольная матрица размерности $[S \times n]$. Для нахождения оценки вектора параметров \boldsymbol{b} достаточно определить элементы матрицы Γ . Воспользуемся для этого среднеквадратичным критерием. Ошибка оценки и соответствующая матрица ковариаций имеют вид

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b} = (\Gamma \Sigma - I) \boldsymbol{b} + \Gamma \boldsymbol{e},$$

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^T \rangle &= (\Gamma \Sigma - I) \langle \boldsymbol{b} \boldsymbol{b}^T \rangle (\Gamma \Sigma - I)^T + \\ &+ \Gamma \langle \boldsymbol{e} \boldsymbol{e}^T \rangle \Gamma^T = (\Gamma \Sigma - I) R_b (\Gamma \Sigma - I)^T + \Gamma R_e \Gamma^T. \end{aligned}$$

Среднеквадратичное значение ожидаемой ошибки равно

$$\sigma_{\xi}^2 = \text{Sp}(\langle \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^T \rangle) = \sum_{j=1}^S [(\gamma_j \sigma_j - 1)^2 \sigma_{b_j}^2 + \gamma_j \sigma_{e_j}^2],$$

где $\text{Sp}(A)$ означает след матрицы A .

В частном случае $R_{\boldsymbol{\theta}} = \sigma_{\theta}^2 I$, $R_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sigma_{\varepsilon}^2 I$, получим $\sigma_b^2 = \sigma_{\theta}^2$ и $\sigma_{e_j}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2$ и, вводя, обозначение $\lambda(\gamma_j) = \text{Sp}(\langle \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^T \rangle)$, запишем

$$\lambda(\gamma_j) = \sum_{j=1}^S [(\gamma_j \sigma_j - 1)^2 \sigma_{\theta}^2 + \gamma_j^2 \sigma_{\varepsilon}^2].$$

Определим элементы γ_j из условия минимума среднеквадратичной ошибки, т. е. путем решения системы уравнений

$$\frac{\partial \lambda(\gamma_j)}{\partial \gamma_j} = 0, \quad j = 1, \dots, S.$$

Искомая оценка имеет вид

$$\hat{\gamma}_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \sigma_{\varepsilon}^2 / \sigma_{\theta}^2}.$$

Если для неизвестных случайных параметров $\sigma_{\theta}^2 \rightarrow \infty$, то значение $\hat{\gamma}_j = 1/\sigma_j$, а $\Gamma = \Sigma^+$, т. е. приходим к оценке (6.52) стандартного МНК с сингулярным разложением матрицы плана.

В случае метода сингулярного анализа среднеквадратичное значение ожидаемой ошибки записывается в виде

$$\lambda(i_0) = \langle \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \rangle = \sigma_{\theta}^2 (S - i_0) + \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{j=1}^{i_0} 1/\sigma_j^2.$$

Минимизация $\lambda(i_0)$ по i_0 приводит к выбору такого номера i_0 , при котором соответствующее сингулярное число удовлетворяет соотношениям

$$\sigma_{i_0} \geq \frac{\sigma_{\varepsilon}}{\sigma_{\theta}} \quad \text{и} \quad \sigma_{i_0+1} < \frac{\sigma_{\varepsilon}}{\sigma_{\theta}}.$$

Следовательно, для нахождения граничного значения i_0 необходимо наличие априорной информации о дисперсии шума σ_{ε}^2 и об априорной дисперсии искомых параметров σ_{θ}^2 .

Итак, мы определили вид матрицы Γ для трех процедур оценивания: обычный метод наименьших квадратов, когда вектор параметров $\boldsymbol{\theta}$ предполагается неизвестным, но не случайным:

$$\Gamma_{ii} = \gamma_i = \frac{1}{\sigma_i}, \quad i = 1, \dots, S;$$

метод статистической регуляризации для модели со случайным вектором параметров:

$$\Gamma_{ii} = \gamma_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \sigma_\varepsilon^2/\sigma_\theta^2}, \quad i = 1, \dots, S;$$

метод сингулярного анализа:

$$\gamma_j = \begin{cases} 1/\sigma_j & j = 1, 2, \dots, i_0 \quad \sigma_{i_0} \geq \alpha, \\ 0 & j = i_0 + 1, \dots, S \quad \sigma_{i_0+1} < \alpha. \end{cases}$$

При малых значениях сингулярных чисел σ_i по сравнению с отношением $\sigma_\varepsilon/\sigma_\theta$ ($\sigma_i \ll \sigma_\varepsilon/\sigma_\theta$), для обычного МНК (первая процедура), соответствующее значение γ_i быстро растет, что приводит к неустойчивости решения, в то время как в случае метода статистической регуляризации (вторая процедура) $\gamma_i \approx 0$, а в методе сингулярного анализа (третья процедура) $\gamma_i = 0$. При больших σ_i ($\sigma_i \gg \sigma_\varepsilon/\sigma_\theta$) все три метода приводят к одинаковому результату.

Следует подчеркнуть, что метод сингулярного анализа является одним из способов регуляризации решения, причем основное отличие от оценок статистической регуляризации в области значений больших σ_i , но немногим больших $\sigma_\varepsilon/\sigma_\theta$, таково: $\gamma_i = 0$ для метода сингулярного анализа и плавно убывают как

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \sigma_\varepsilon^2/\sigma_\theta^2}, \quad i = 1, \dots, S,$$

для метода статистической регуляризации (рис. 6.1). Важным ре-

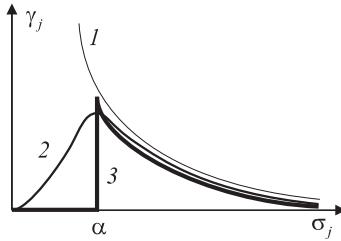


Рис. 6.1. Зависимость элементов матрицы Γ (6.54) от собственных чисел σ_j (6.49) для случаев оценивания по методам наименьших квадратов (1), статистической регуляризации (2) и сингулярного анализа (3).

зультатом этого параграфа является установление связи между пороговым значением α , выбираемым в методе сингулярного анализа из априорных соображений, и отношением помеха/сигнал $(\sigma_\varepsilon/\sigma_\theta)$, которое привычно для интерпретатора и имеет явный физический смысл.

Введенная ранее мера обусловленности β может быть выражена через минимальное и максимальное сингулярные числа

$$\beta = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}.$$

Как уже отмечалось выше, величину β можно использовать в качестве численной меры линейной зависимости столбцов матрицы $\psi^T \psi$. Если значение β близко к 1, то столбцы “практически независимы”. Если β велико, то столбцы “практически зависимы”. Введение порога α уменьшает число обусловленности β до σ_{\max}/α , что свидетельствует о более надежном определении искомых параметров.

6.12.1. Матрица разрешения

Рассмотрим линейную аддитивную модель

$$\mathbf{u} = \psi \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (6.55)$$

Введем в рассмотрение матрицу L , “обратную” по отношению к матрице ψ , определяющую “правило” получения оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ вектора $\boldsymbol{\theta}$ по вектору измерений \mathbf{u} ,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = L\mathbf{u}.$$

Определим матрицу разрешения R как произведение матриц L и ψ

$$R = L\psi.$$

Для выяснения смысла матрицы разрешения умножим левую и правую части уравнения (6.55) на матрицу L . При стремлении величин аддитивного шумового слагаемого $\boldsymbol{\varepsilon}$ к нулю

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0} R\boldsymbol{\theta}.$$

В случае решения системы линейных уравнений (6.55) по методу наименьших квадратов матрица разрешения является единичной:

$$L = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T, \quad R = L\psi = I.$$

В случае сингулярного разложения (6.48) матрицы ψ :

$$R = P\Sigma^+Q^T Q\Sigma P^T = PP^T = I.$$

6.13. Метод наименьших модулей

Наряду с методом наименьших квадратов в настоящее время для обработки геофизических данных широкое распространение получил метод наименьших модулей. Этот метод приводит к оптимальным оценкам параметров при наличии в случайной компоненте (шуме) резких выбросов. Применительно к линейной модели (6.15) метод наименьших модулей сводится к минимизации функции вида

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n v_i |u_i - \sum_{s=1}^S \psi_{is} \theta_s|, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^n v_i |u_i - \sum_{s=1}^S \psi_{is} \theta_s|. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Отметим, что метод наименьших модулей получается, как частный случай метода максимального правдоподобия при условии, что вектор случайной компоненты модели $\boldsymbol{\varepsilon}$ имеет распределение Лапласа. Это такое симметричное распределение, у которого “хвосты” спадают менее резко, чем у нормального распределения. В методе наименьших модулей весовые множители v_i имеют четкий физический смысл, а именно, они обратно пропорциональны среднеквадратическим ошибкам измерений.

Для нахождения минимума функции $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ можно использовать два различных подхода: первый подход базируется на методах линейного программирования, а второй представляет собой итерационную процедуру, основным элементом которой является взвешенный метод наименьших квадратов.

Остановимся подробно на втором способе, так как он позволяет использовать уже рассмотренную нами процедуру метода наименьших квадратов.

Введем функцию двух векторных аргументов $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\rho}$

$$\lambda_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2 |u_i - \sum_{s=1}^S \psi_{is} \theta_s|^2}{v_i |u_i - \sum_{s=1}^S \psi_{is} \rho_s|}. \quad (6.57)$$

Если $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\rho}$, то функция (6.57) переходит в функцию (6.56):

$$\lambda_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = \lambda(\boldsymbol{\theta}).$$

Представление (6.56) позволяет построить итерационную процедуру для нахождения оценки по методу наименьших модулей. Пусть задано начальное приближение вектора искомых параметров $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$. Подставим фиксированное значение $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ в выражение (6.57) вместо вектора $\boldsymbol{\rho}$, тогда

$$\lambda_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(0)}) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{|u_i - \sum_{s=1}^S \psi_{is} \theta_s|^2}{|u_i - \sum_{s=1}^S \psi_{is} \theta_s^{(0)}|}, \quad (6.58)$$

или, вводя обозначение

$$w_i^0 = \frac{v_i}{|u_i - \sum_{s=1}^S \psi_{is} \theta_s^{(0)}|}, \quad (6.59)$$

получим

$$\lambda_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(0)}) = \sum_{i=1}^n w_i^{(0)} |u_i - \sum_{s=1}^S \psi_{is} \theta_s|. \quad (6.60)$$

Квадратичная форма (6.58), (6.60) в точности соответствует квадратичной форме МНК. Оценка векторов искомых параметров легко определяется выражением

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\psi^T W^{(0)} \psi)^{-1} \psi^T W^{(0)} \mathbf{u}, \quad (6.61)$$

где $W^{(0)} = \text{diag}(w_1^0, w_2^0, \dots, w_n^0)$.

Примем оценку (6.61) в качестве первого приближения оценки метода наименьших модулей

$$\boldsymbol{\theta}^{(1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

и используем ее для расчета новых весовых множителей, подставив в представление (6.57) вместо $\boldsymbol{\rho}$:

$$\lambda_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(1)}) = \sum_{i=1}^n w_i^{(1)} (u_i - \sum_{s=1}^S \psi_{is} \theta_s)^2, \quad (6.62)$$

где

$$w_i^{(1)} = \frac{v_i}{|u_i - \sum_{s=1}^S \psi_{is} \theta_s^{(1)}|}.$$

Оценку МНК далее находят путем минимизации квадратичной формы (6.62)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\psi^T W^{(1)} \psi)^{-1} \psi^T W^{(1)} \mathbf{u}.$$

Эту оценку принимаем в качестве второго приближения оценки наименьших модулей

$$\boldsymbol{\theta}^{(2)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Далее подставляем $\boldsymbol{\theta}^{(2)}$ в выражение (6.57) вместо вектора $\boldsymbol{\theta}$ и находим $\boldsymbol{\theta}^{(3)}$. Итерационная процедура продолжается до тех пор, пока на k -м шаге не будет удовлетворено пороговое условие

$$\frac{|\theta_s^{(k)} - \theta_s^{(k-1)}|}{|\theta_s^{(k)}|} < \delta \sim 10^{-2} \div 10^{-3}.$$

Обычно δ выбирается порядка $10^{-2}\text{--}10^{-3}$.

Основным элементом рассмотренной процедуры является метод наименьших квадратов, причем на каждом шаге происходит корректировка весов W_i в соответствии с оценкой МНК, найденной на предыдущем шаге.

Следует отметить, что описанный алгоритм позволяет находить оценки, т. е. метод наименьших модулей является его частным случаем.

6.14. Робастные методы оценивания

Большинство рассмотренных выше алгоритмов оценивания базировалось на предположении нормальности случайного вектора $\boldsymbol{\epsilon}$. Если это предположение нарушается, то оценки, полученные методом наименьших квадратов, теряют свою оптимальность. Кроме

того, оценки МНК чувствительны к грубым ошибкам наблюдений. Поэтому актуальной является проблема создания алгоритмов обработки, устойчивых к отклонениям от первоначальных предположений, использованных при построении модели. В настоящее время в математической статистике разработаны методы оценивания, устойчивые к отклонениям от предполагаемого распределения случайной компоненты модели от истинного. Эти методы получили название робастных. Ниже будут рассмотрены три робастных алгоритма.

6.14.1. Алгоритм репараметризации

Рассмотрим робастный алгоритм определения вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ в модели (6.15), базирующейся на репараметризации исходной модели [56]. В результате такой репараметризации новые параметры оказываются устойчивыми в широком классе шумов при отклонении их распределения вероятностей от нормального. Процедура оценивания сводится к следующему.

1. Задаем начальное приближение вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ и среднеквадратического отклонения σ_0^2 . В качестве $\boldsymbol{\theta}_0$ можно использовать оценку МНК, а среднеквадратическое отклонение оценить по формуле

$$\sigma_0^2 = \frac{(\mathbf{u} - \psi\boldsymbol{\theta}_0)^T(\mathbf{u} - \psi\boldsymbol{\theta}_0)}{n - S}.$$

2. На k -м шаге итерации рассчитываем расхождение

$$e_i = u_i - \boldsymbol{\psi}_i^T \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)},$$

где $\boldsymbol{\psi}_i^T$ — i -я строка матрицы. Определяем значение весовой функции

$$w(\varepsilon_i) = \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_i^2 \eta}{2\hat{\sigma}_k^2} \right\},$$

при этом необходимо задать значение константы η , которая определяет ширину весовой колокольной функции, эту величину можно подобрать экспериментально. Применительно к обработке геофизического материала целесообразно положить $\eta = 0.2$.

3. Определим оценку $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ из условия минимизации квадратичной формы:

$$\lambda(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^n (u_j - \boldsymbol{\psi}_j^T \boldsymbol{\theta})^2 w(e_j),$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\psi^T W \psi)^{-1} \psi^T W \mathbf{u},$$

где $W = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$.

4. Рассчитываем взвешенное нормированное расхождение

$$Y = \frac{\lambda(\boldsymbol{\theta})}{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i)}.$$

5. Находим оценку $\hat{\theta}_{k+1}$ и дисперсию $\hat{\sigma}_{k+1}^2$ из уравнений

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k Y^{-1} \hat{\sigma}_k^2 (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k), \quad (\hat{\sigma}_{k+1}^2)^{-1} = Y - \frac{\eta}{\hat{\sigma}_k^2}.$$

6. Если оценки, полученные на k -й и $(k+1)$ -й итерациях, различаются несущественно, т. е.

$$\max_{\mu} \left| \frac{\hat{\theta}_{\mu_{k+1}} - \hat{\theta}_{\mu_k}}{\hat{\theta}_{\mu_k}} \right| \leq \delta_1, \quad \left| \frac{\hat{\sigma}_{\mu_{k+1}} - \hat{\sigma}_{\mu_k}}{\hat{\sigma}_{\mu_k}} \right| \leq \delta_2,$$

где δ_1 и δ_2 — константы порядка 10^{-2} – 10^{-3} , то $\boldsymbol{\theta}_k$, σ_k^2 являются искомыми оценками, в противном случае итерационная процедура повторяется, начиная с п. 2. Как показывают модельные расчеты, требуется порядка 7–10 итераций.

7. Ковариационная матрица оценок параметров определяется по формуле

$$R_{\hat{\theta}_k} = (\psi^T W \psi)^{-1} \hat{\sigma}_k^2.$$

Описанная алгоритмическая схема легко реализуется на ЭВМ, так как ее основным элементом является стандартная процедура взвешенного МНК.

Рассмотрим два робастных алгоритма оценивания, которые относятся к классу нелинейных процедур.

6.14.2. Алгоритм Хьюбера

Пусть значения помехи ε_i в модели (6.15) являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами с симметричной функцией распределения, причем вероятность грубых выбросов равняется α , тогда

$$p(n) = (1 - \alpha)X(e) + \alpha Z(e),$$

где предполагаемое распределение $X(n)$ и “засоряющее” $Z(e)$ является симметричным:

$$X(e) = 1 - X(-e), \quad Z(e) = 1 - Z(-e).$$

Полагая распределение случайной компоненты нормальным, мы имеем модель грубых ошибок, которая может найти применение в такой важной практической задаче, как определение статических поправок при обработке сейсмического материала. В таком случае вместо минимизации квадратичной формы для определения вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ предлагается решать следующую задачу [110]:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^n H(u_i - \boldsymbol{\psi}_i^T \boldsymbol{\theta}), \quad (6.63)$$

где H — соответствующим образом подобранный функция.

В общем случае решение поставленной задачи (6.63) сводится к решению нелинейной системы уравнений

$$\sum_{i=1}^n h(u_i - \boldsymbol{\psi}_i^T \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\psi}_{is} = 0,$$

где $s = 1, 2, \dots, S$, $h(\varepsilon) = H'(\varepsilon)$. В качестве функции H можно выбрать функцию вида (рис. 6.2)

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^2/2, & |\varepsilon| < c, \\ c|\varepsilon| - c^2/2, & |\varepsilon| \geq c. \end{cases}$$

6.14.3. Алгоритм Эндрюса

Рассмотрим еще один алгоритм робастного оценивания [116], в котором основным элементом вычислительной процедуры является

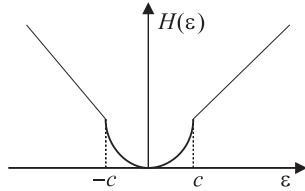


Рис. 6.2. Функция расхождения Хьюбера между измеренными данными и модельными величинами.

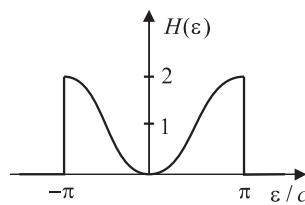


Рис. 6.3. Функция расхождения между измеренными данными и модельными величинами.

взвешенный МНК. Эндрюс предложил искать оценку параметров модели путем минимизации следующей нелинейной функции:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min \sum_{i=1}^n H(u_i - \boldsymbol{\psi}_i^T \boldsymbol{\theta}), \quad (6.64)$$

где

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - \cos(\varepsilon/c), & |\varepsilon| < c\pi, \\ 0, & |\varepsilon| \geq c\pi, \end{cases}$$

(см. рис. 6.3). В качестве оценки $\hat{\sigma}$ примем медиану абсолютных значений:

$$\hat{\sigma} = \text{med} |u_i - \boldsymbol{\psi}_i^T \boldsymbol{\theta}|.$$

Задача (6.64) приводит к решению системы уравнений

$$\sum_{i=1}^n h(\varepsilon_i) \psi_{is} = 0, \quad s = 1, \dots, S, \quad (6.65)$$

$$h(\varepsilon_i) = H'(\varepsilon_i) = \begin{cases} \sin(\varepsilon_i/c)/c, & |\varepsilon_i| < c\pi, \\ 0, & |\varepsilon_i| \geq c\pi. \end{cases}$$

Итерационная процедура решения системы сводится к следующему.

1. Задаем начальный вектор $\boldsymbol{\theta}_0$ либо используем для него стандартный МНК.

Рассмотрим алгоритм получения оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}$, если известна оценка $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$, $k = 0, 1, \dots$

2. Вычисляем отклонение $\hat{\varepsilon}_{ik} = u_i - \boldsymbol{\psi}_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_k$.
3. Находим оценку $\hat{\sigma}_k = \text{med } \hat{\varepsilon}_{ik}$.
4. Рассчитываем весовую функцию

$$w_{ik} = \begin{cases} [\sin(\hat{\varepsilon}_{ik}/c)/c][\hat{\varepsilon}_{ik}]^{-1}, & |\varepsilon_{ik}|/c < \pi, \\ |\varepsilon_{ik}|/c \geq \pi. \end{cases}$$

5. Решаем систему уравнений (6.65), которая запишется в виде

$$\sum_{i=1}^n w_{ik} \psi_{is} \varepsilon_{ik} = 0,$$

$$(u_i - \boldsymbol{\psi}_i^T \boldsymbol{\theta}^{(k+1)}) = 0.$$

По взвешенному МНК получаем оценку

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = (\psi^T W_k \psi)^{-1} \psi^T W_k \mathbf{u},$$

где $W = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$.

6. Проверяем точность вычисления найденных оценок

$$\max_S \frac{|\hat{\theta}_{sk+1} - \hat{\theta}_{sk}|}{|\hat{\theta}_{sk}|} \leq \delta_1, \quad \frac{|\hat{\sigma}_{k+1} - \hat{\sigma}_k|}{|\hat{\sigma}_k|} \leq \delta_2,$$

где δ_1 и δ_2 — величины порядка 10^{-2} – 10^{-3} . Если эти неравенства удовлетворяются, то $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ и $\hat{\sigma}_k$ являются искомыми оценками. В противном случае процедура повторяется с п. 2. Для практических расчетов рекомендуется выбрать с порядка 1,5.

Существенным отличием этого метода от алгоритма репараметризации модели является то, что для больших отклонений значения весовой функции полагаются равными нулю.

6.15. Интервальное оценивание

Рассмотренные выше оценки относились к точечным. На практике широкое распространение получили также и интервальные оценки, которые тесно связаны с точечными. При интервальном оценивании находят не только численное значение параметра, но также определяют точность и надежность оценивания. Так, например, при обработке экспериментальных данных большой интерес представляет задача определения пределов, в которых лежит истинное значение параметра с заданной вероятностью. Задачи такого типа решаются методом интервального оценивания.

Пусть для параметра θ получена несмешенная оценка $\hat{\theta}$. Задавая достаточно большую вероятность β ($\beta = 0.9, \dots, 0.95$), найдем допустимую величину δ различия $\hat{\theta}$ и θ :

$$P(|\hat{\theta} - \theta| < \delta) = \beta, \quad (6.66)$$

причем ошибки, превосходящие по абсолютной величине ε , появляются с малой вероятностью $1 - \beta$. Представление (6.66) можно переписать в виде

$$P(\hat{\theta} - \delta < \theta < \hat{\theta} + \delta) = \beta. \quad (6.67)$$

Полученное равенство означает, что с вероятностью β случайный интервал $I_\beta = [\hat{\theta} - \delta, \hat{\theta} + \delta]$ накрывает истинное значение параметра (рис. 6.4). Вероятность β обычно называют *довери-*

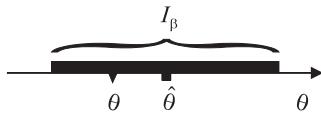


Рис. 6.4. Доверительный интервал I_β и оцениваемый параметр $\hat{\theta}$.

тельной вероятностью, или *надежностью*, а случайный интервал $[\hat{\theta} - \delta, \hat{\theta} + \delta]$ — *доверительным интервалом*. Как следует из представления (6.67), для определения доверительного интервала необходимо знать функцию распределения оценки. Как уже отмечалось, при нормальном распределении вектора ошибок оценки метода наименьших квадратов в случае линейной модели (6.15) имеют

нормальное распределение, т. е.

$$\langle \hat{\theta}_s \rangle = \theta_s, \quad R_{\hat{\theta}_s} = \sigma_\varepsilon^2 [(\psi^T W \psi)^{-1}]_{ss} \quad s = 1, 2, \dots, S.$$

Каждая компонента оцениваемого вектора параметров $\hat{\theta}_s$ имеет нормальное распределение со средним θ_s и дисперсией $\sigma_\varepsilon^2 [(\psi^T \psi)^{-1}]_{ss}$:

$$\frac{\hat{\theta}_s - \theta_s}{\sigma_\varepsilon [(\psi^T W \psi)^{-1}]_{ss}^{1/2}} \in N(0, 1). \quad (6.68)$$

Введем понятия вектора расхождения $\hat{\epsilon} = \mathbf{u} - \psi \hat{\theta}$ и квадратичной формы расхождения $\hat{\epsilon}^T W \hat{\epsilon}$.

Случайный вектор $\hat{\theta}$ является S -мерным нормальным вектором, а случайный вектор $\hat{\epsilon}$ является $(n - S)$ -мерным нормальным вектором. Эти случайные векторы независимы. Случайная величина

$$\frac{1}{\sigma^2} \hat{\epsilon}^T W \hat{\epsilon} \quad (6.69)$$

имеет распределения χ^2_{n-S} и независима от $\hat{\theta}$.

Используя соотношения (6.68) и (6.69), построим величину

$$\begin{aligned} t_{n-S} &= \frac{\hat{\theta}_s - \theta_s}{[(\psi^T W \psi)^{-1}]^{1/2} \left[\hat{\epsilon}^T W \hat{\epsilon} / (n - S) \right]^{1/2}} = \\ &= \frac{\hat{\theta}_s - \theta_s}{\left[(\psi^T W \psi)^{-1} \hat{\epsilon}^T W \hat{\epsilon} / (n - S) \right]^{1/2}}, \end{aligned}$$

которая является отношением нормально распределенной величины ($N(0, 1)$) к сумме квадратов нормально распределенных величин с числом степеней свободы $n - S$. Такая величина имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $n - S$, что позволяет построить доверительный интервал для θ_s .

Назначим доверительную вероятность или надежность β . Для заданных размерностей вектора экспериментальных данных и вектора искомых параметров S определяем число степеней свободы $k = n - S$. Величины k и β являются входными для “таблицы” функции распределения Стьюдента, на основании которой определяется γ такое, что

$$P[|t_{n-S}| \leq \gamma] = \beta.$$

Доверительный интервал с надежностью β имеет вид

$$I_\beta = \left[\hat{\theta}_s \pm \gamma [(\psi^T W \psi)^{-1}]_{ss}^{1/2} \left[\frac{\hat{\epsilon}^T W \hat{\epsilon}}{n - S} \right]^{1/2} \right],$$

или, учитывая, что

$$\hat{\sigma}_\varepsilon = \frac{\hat{\epsilon}^T W \hat{\epsilon}}{n - S}, \quad \hat{\sigma}_{\theta_s} = \hat{\sigma}_\varepsilon [(\psi^T W \psi)^{-1}]_{ss},$$

получим

$$I_\beta = [\hat{\theta}_s \pm \gamma \hat{\sigma}_{\theta_s}]. \quad (6.70)$$

Анализ формулы (6.70) показывает, что доверительный интервал определяется как надежностью γ , так и точностью оценки. Практический интерес, наряду с интервальной оценкой параметров, имеет получение доверительных границ для аппроксимирующей кривой. Пусть детерминированная компонента модели с истинным вектором параметров имеет вид

$$\mathbf{f} = \psi \boldsymbol{\theta}, \quad (6.71)$$

при этом оценка функции f , полученная подстановкой в правую часть равенства (6.71) МНК-оценки вектора $\boldsymbol{\theta}$, записывается аналогично:

$$\hat{\mathbf{f}} = \psi \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Отметим, что $\hat{\mathbf{f}}$ не зависит от $\hat{\epsilon}^T W \hat{\epsilon}$. Построим функцию t_{n-S} как отношение нормально распределенной величины

$$\frac{\hat{f}_i - u_i}{\sigma_\varepsilon [\psi(\psi^T W \psi)^{-1} \psi^T]_{ii}^{1/2}}$$

и величины

$$\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\hat{\epsilon}^T W \hat{\epsilon}}{n - S}} = \frac{1}{\sigma} \hat{\sigma}_\varepsilon,$$

квадрат которой имеет распределение χ^2_{n-S} с $n - S$ степенями свободы:

$$t_{n-S} = \frac{\hat{f}_i - u_i}{[\psi(\psi^T W \psi)^{-1} \psi^T]_{ii}^{1/2} [\hat{\epsilon}^T W \hat{\epsilon} / (n - S)]^{1/2}} \in \text{St}(t_k).$$

Величина t_k имеет распределение Стьюдента с $k = n - S$ степенями свободы. Выбирая надежность β , при заданном числе степеней свободы k по “таблице” распределения Стьюдента находим γ такое, что

$$P(|t_{n-S}| \leq \gamma) = \beta.$$

Доверительный интервал имеет вид

$$I_\beta = \left[\hat{f}_i \pm \gamma \hat{\sigma}_\varepsilon [\psi(\psi^T \psi)^{-1} \psi^T]_{ii}^{1/2} \right].$$

Рассчитывая значения I_β для $i = 1, 2, \dots, n$, получаем доверительную область, которая накрывает функцию $f(\theta)$ с вероятностью β (рис. 6.5).

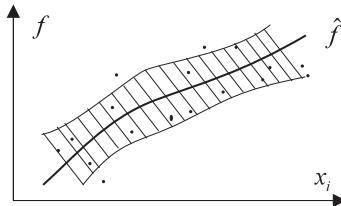


Рис. 6.5. Графическое представление доверительной области I_β .

Отметим, что асимптотически эффективные и эффективные оценки при достаточно общих условиях имеют наименьшие доверительные интервалы.

6.16. Метод Бейкуса–Гильберта для решения обратных линейных задач

При решении обратных геофизических задач модель экспериментального геофизического поля u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) может быть представлена в виде

$$u_i = \int_0^T \varphi_i(t) \theta(t) dt + \varepsilon_i, \quad (6.72)$$

где $\varepsilon_i \in N(0, R_\varepsilon)$, $\theta(t)$ — неизвестная искомая функция параметров, $\varphi_i(t)$ — заданная функция. В сейсмическом случае u_i — отсчетные

значения сейсмограммы, $\varphi_i(t)$ — форма сигнала, $\theta(t)$ — функция, характеризующая отражательную способность среды, $[0, T]$ — интервал регистрации сейсмограммы. Значение искомой функции $\theta(t)$ в точке t_0 будем описывать средним значением

$$\langle \theta(t_0) \rangle = \int_0^T C(t_0, t) \theta(t) dt, \quad (6.73)$$

где $C(t_0, t)$ — усредняющая функция. Если в качестве усредняющей функции выступает дельта-функция, то $C(t_0, t) = \delta(t - t_0)$ и среднее $\langle \theta(t_0) \rangle$ равно истинному значению функции $\theta(t_0)$. Следовательно, при практических расчетах необходимо подбирать усредняющую функцию как можно ближе к дельта-функции и ввести для нее следующее условие нормировки:

$$\int_0^T C(t_0, t) dt = 1.$$

В методе Бейкуса–Гильберта [118] усредняющую функцию представляют в виде линейной комбинации заданных форм сигналов $\varphi_i(t)$ с неизвестными коэффициентами ρ_i :

$$C(t_0, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \rho_i(t_0). \quad (6.74)$$

Подставляя выражение (6.74) в правую часть равенства (6.73), получаем

$$\langle \theta(t_0) \rangle = \sum_{i=1}^n \rho_i(t_0) f_i, \quad (6.75)$$

где

$$f_i = \int_0^T \varphi_i(t) \theta(t) dt.$$

Как следует из формулы (6.75), решение представляется линейными комбинациями функционалов f_i . Однако на практике мы имеем дело с экспериментальным полем u_i , которое отличается от

модельной функции f_i на величину случайной компоненты ε_i . Поэтому в качестве оценки принимается линейная комбинация отсчетных значений u_i экспериментального поля

$$\langle \hat{\theta}(t_0) \rangle = \sum_{i=1}^n \rho_i(t_0) u_i. \quad (6.76)$$

Проблема состоит в нахождении $\rho_i(t_0)$ в соответствии с принятым критерием. Для построения решающего правила введем функцию расхождения $s(t_0)$, которая характеризует отличие усредняющей функции $C(t_0, t)$ от δ -функции:

$$s(t_0) = 12 \int_{t_0 - L/2}^{t_0 + L/2} (t - t_0)^2 C^2(t_0, t) dt, \quad (6.77)$$

где коэффициент 12 выбран из следующего условия: если $C(t_0, t)$ является прямоугольной функцией (рис. 6.6)

$$C(t_0, t) = \begin{cases} 1/L & \text{при } t \in [t_0 - L/2 \leq t \leq t_0 + L/2], \\ 0 & \text{при } t \notin [t_0 - L/2 \leq t \leq t_0 + L/2], \end{cases}$$

то $s(t_0) = L$. Подставив представления (6.74) в правую часть ра-

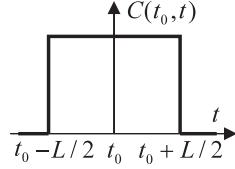


Рис. 6.6. Графическое представление функции $C(t_0, t)$.

венства (6.77), получим функцию расхождения

$$s(t_0) = \boldsymbol{\rho}^T(t_0) S(t_0) \boldsymbol{\rho}(t_0),$$

где

$$\boldsymbol{\rho}(t_0) = [\rho_1(t_0), \rho_2(t_0), \dots, \rho_n(t_0)],$$

$$S(t_0) = \|S_{\mu\nu}(t_0)\|_{\mu,\nu}^n,$$

$$S_{\mu\nu}(t_0) = 12 \int_{t_0 - L/2}^{t_0 + L/2} \varphi_\mu(t) \varphi_\nu(t) (t - t_0)^2 dt.$$

Второй составляющей решающей функции является среднеквадратичная ошибка оценки

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^2(t_0) &= \langle (\langle \theta(t_0) \rangle - \langle \hat{\theta}(t_0) \rangle)^2 \rangle = \langle \left(\sum_{i=1}^n \rho_i(t_0)(u_i - f_i) \right)^2 \rangle = \\ &= \boldsymbol{\rho}^T(t_0) R_{\varepsilon} \boldsymbol{\rho}(t_0).\end{aligned}\quad (6.78)$$

При получении формулы (6.78) использованы представления (6.75) и (6.76). В качестве решающей функции обычно принимают функцию вида

$$g(\boldsymbol{\rho}(t_0)) = \boldsymbol{\rho}^T(t_0) G \boldsymbol{\rho}(t_0), \quad G = S \cos \theta + \beta R_{\varepsilon} \sin \theta,$$

где θ — параметр, принимающий значения в интервале $0 \leq \theta \leq \pi/2$, β — множитель, согласующий порядок величин расхождения и дисперсии. Выбирая $\theta = 0$, приходим к решающей функции, которая полностью определяется расхождением $s(t_0)$ и дисперсией $\sigma_{\rho}(t_0)$, определяющими соответственно разрешающую способность и точность полученного решения. Искомый вектор находим из условия

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\rho}} &= \arg \min g(\boldsymbol{\rho}(t_0)), \\ \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\rho}(t_0) &= 1, \\ \boldsymbol{B} &= \|B_{\nu}\|_{\nu=1}^n, \quad B_{\nu} = \int_0^T \varphi_{\nu}(t) dt.\end{aligned}\quad (6.79)$$

Используя теорему о минимуме квадратичной формы при линейном условии, будем иметь

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} t_0 = \frac{G^{-1} \boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{B}^T G^{-1} \boldsymbol{B})}. \quad (6.80)$$

Линейная комбинация найденной оценки $\hat{\boldsymbol{\rho}}(t_0)$ со значениями сейсмической трассы дает возможность получить значение функции отражательной способности в выбранной точке (t_0) .

6.17. Генетический алгоритм

Генетические алгоритмы (ГА), впервые предложенные Джоном Голландом (1975), основаны на аналогии с процессом биологической

эволюции. Генетические алгоритмы демонстрируют высокую эффективность при решении нелинейных задач. Основные элементы алгоритма ГА следующие: *кодирование, отбор, скрещивание, мутация*.

6.17.1. Кодирование

Общей чертой всех ГА является двоичная кодировка параметров модели.

Рассмотрим, например, кодирование скорости волны сжатия. Пусть нижний предел скорости полагается равным 1500 м/с, а верхний предел — 1810 м/с. Предположим, что требуемое разрешение — 10 м/с. Таким образом для подобного кодирования достаточно пяти бит (рис. 6.7). На этом этапе алгоритм определяет пригодность модели. Это означает, что двоичная информация декодируется с учетом физической модели, т. е. решается прямая задача. Полученные синтетические данные сравниваются с действительны-

<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	0	$v_{min} = 1500 \text{ м/с}$
0	0	0	0	0		
<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	0	0	0	1	$v = 1510 \text{ м/с}$
0	0	0	0	1		
<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	1	0	$v = 1520 \text{ м/с}$
0	0	0	1	0		
<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	0	0	0	1	1	$v = 1530 \text{ м/с}$
0	0	0	1	1		
.....					
<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1	1	$v_{max} = 1810 \text{ м/с}$
1	1	1	1	1		

Рис. 6.7. Двоичное кодирование величин скорости.

ми наблюдаемыми данными, при этом используется специальный критерий согласия. В зависимости от решаемой задачи можно использовать различные критерии согласия. Например, рассмотрим нормированную корреляционную функцию

$$F(\boldsymbol{\theta}) = \frac{u_0 \otimes u_s(\boldsymbol{\theta})}{(u_0 \otimes u_0)^{1/2} (u_s \otimes u_s(\boldsymbol{\theta}))^{1/2}}$$

и среднеквадратичную функцию ошибок

$$F(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n (u_{i0} - u_{is}(\boldsymbol{\theta}))^2,$$

где \otimes — обозначает операцию вычисления корреляционной функции, u_0 и $u_s(\theta)$ соответствуют наблюдаемым данным и модельным данным для параметра θ .

6.17.2. Отбор

Отбор пар моделей для воспроизведения основан на величинах согласия между ними. Модели с высокими величинами согласия с большей вероятностью подвержены отбору, чем модели с низкими величинами согласия. Рассмотрим отбор, пропорциональный согласию моделей.

Наиболее часто используются методы отбора, основанные на отношении функций согласия индивидуальных моделей к сумме согласий для всех моделей из рассматриваемого набора (популяции). Таким образом оценивается вероятность их отбора:

$$p_s(\theta_i) = \frac{F(\theta_i)}{\sum_{j=1}^n F(\theta_j)},$$

где n — число рассматриваемых моделей. Отбор, базирующийся на подобных вероятностях, продолжается до тех пор, пока множество моделей не будет разбито на пары.

В типичных ГА, при первоначальном наборе, содержащем 100 моделей, 50 пар отбирают на основе их величин согласия. Рассмотрим модель, которая удовлетворяет равенству

$$p_s(\theta_i) \geq \delta,$$

где δ — заданная пороговая величина. Пусть имеется L моделей, которые формируют $L/2$ пар. Каждая пара моделей теперь порождает две вторичные пары при использовании генетических операций скрещивания и мутации. Как результат образуется новая популяция.

6.17.3. Скрещивание

Скрещивание представляет собой механизм, позволяющий разделить генетическую информацию между парными моделями. Если использовать терминологию геофизических обратных задач,

то скрещивание позволяет производить обмен информацией между парными моделями и как следствие порождать новые модели. Предполагается, что скрещивание может быть одноточечным и многоточечным. В случае одноточечного скрещивания простая (однобитовая) позиция двоичного набора выбирается случайно в соответствии с равномерным распределением. На рис. 6.8, *a* все дво-

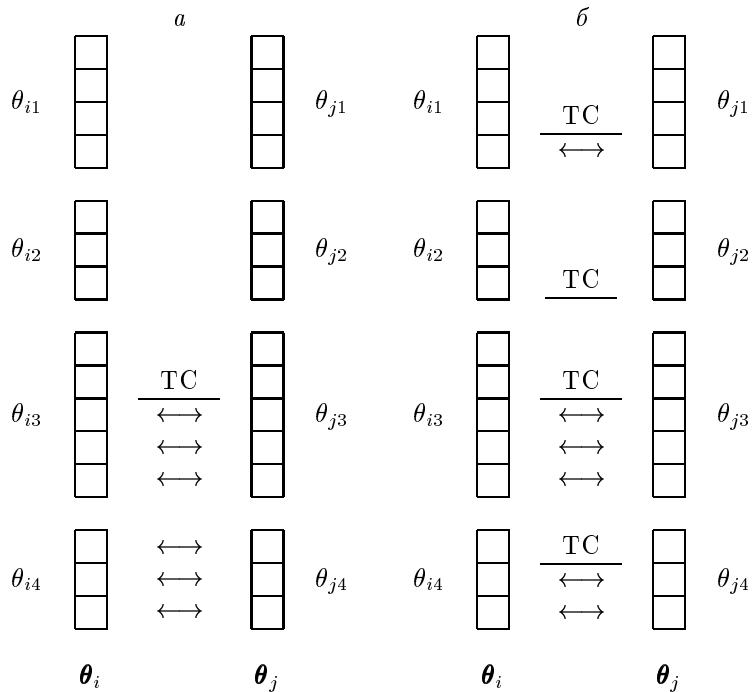


Рис. 6.8. Пример одноточечного (*a*) и многоточечного (*б*) скрещивания (ТС — точка скрещивания).

ичные состояния, находящиеся справа от заданного состояния, осуществляют обмен между двумя моделями, генерируя две новые модели. В случае многоточечного скрещивания эта операция выполняется независимо для каждого параметра модели (рис. 6.8,*б*).

П р и м е р. Пара скоростных моделей параметров v_1 и v_2 максимальна для схемы кодирования от 1500 до 1810 м/с (рис. 6.9 и табл. 6.1).

<table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	0	0	0	0	0	5	4	3	2	1	1	1	1	1	1	$v_1 = 1500 \text{ м/с}$
0	0	0	0	0												
5	4	3	2	1												
1	1	1	1	1												
	$v_2 = 1810 \text{ м/с}$															

Рис. 6.9. Пара экстремальных положений для схемы кодирования.

Таблица 6.1. Пример точек скрещивания

Точка скрещивания	$v_1, \text{ м/с}$	$v_2, \text{ м/с}$
0	1500	1810
1	1510	1800
2	1530	1780
3	1570	1740
4	1650	1660
5	1810	1500

6.17.4. Мутация

Мутация — последняя генетическая операция. Мутация заключается в случайном изменении двоичного состояния. Такая операция может быть выполнена на этапе скрещивания.

Пример. Процесс мутации для начальной величины скорости 1760 м/с (рис. 6.10).

<table border="1"> <tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	5	4	3	2	1	1	1	0	1	0	$v_1 = 1760 \text{ м/с}$
5	4	3	2	1							
1	1	0	1	0							
<table border="1"> <tr><td>0</td></tr> </table>	0	$v_2 = 1740 \text{ м/с}$									
0											

Рис. 6.10. Процедура мутации.

Если величина ε , полученная при помощи случайного генератора, меньше чем пороговое значение P_m , то процедура мутации выполняется, если $\varepsilon > P_m$, то процедура мутации не выполняется.

6.17.5. Выбор

Выбор осуществляется для каждой из $L/2$ пар модели, которые имеют наибольшие функции согласия (рис. 6.11). Таким образом,

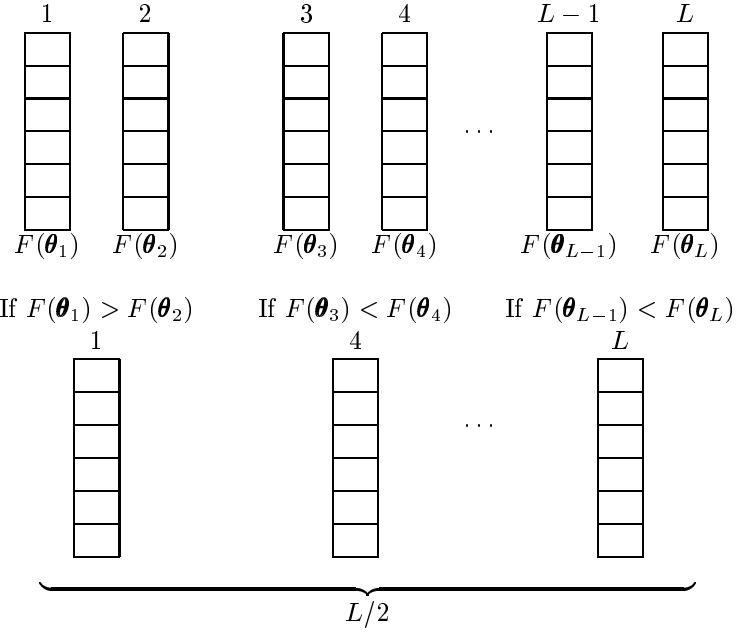


Рис. 6.11. Изменение модели в процессе выполнения (ГА).

получены $L/2$ пар, которые случайным образом формируют $L/4$ пары. После этого повторяются процедуры: скрещивание, мутация, выбор. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет получена оптимальная модель. Основным преимуществом ГА является возможность нахождения глобального максимума с существенно меньшими затратами времени, чем, например, в случае метода Монте-Карло. Отметим, что метод локальной линеаризации позволяет находить только локальный экстремум.

П р и м е р 1. Тест ГА на синтетической сейсмограмме.

В случае сейсмического сигнала функция согласия может иметь вид

$$F(A_1, \dots, A_M, \tau_1, \dots, \tau_M) = \sum_{i=1}^n \left(u_i - \sum_{\mu=1}^M A_\mu \varphi(t_i - \tau_\mu) \right)^2,$$

для формы сейсмического сигнала

$$\varphi = \exp\{-\beta|t|\} \cos \omega t,$$

где A_μ — амплитуда, τ_μ — время прихода сейсмической волны с номером μ . Возможные границы изменения неизвестных параметров (A_μ, τ_μ) и дискретного интервала задаются из априорных соображений. Параметр затухания β и частота ω фиксированы. Оценки параметров находятся из условия минимизации функции согласия $F(A_1, \dots, A_M, \tau_1, \dots, \tau_M)$.

Применяя ГА, мы выбирали тип кодирования битовой последовательности, размер рабочей популяции L и величины вероятностей скрещивания и мутации.

П р и м е р 2. Пусть размер популяции, вероятности скрещивания и мутации равны соответственно

$$L = 50, \quad P_c = 0.6, \quad P_m = 0.001.$$

Алгоритм тестируется при различных размерах популяции, отношениях мутации и скрещивания.

В случае двух интерферирующих сейсмических волн пороговое условие правильного разделения волн — $1/4$ периода волны, при этом отношение сигнал/помеха должно быть больше или равно двум. Рассмотрим три интерферирующие сейсмические волны при условии $|\tau_1 - \tau_2| = |\tau_2 - \tau_3| \geq 0.016$ с. Три волны разделены значимыми величинами оцениваемых параметров, которые соответствуют величине временной задержки между волнами в пределах $1/4 - 1/3$ периода волны. Отношение сигнал/шум должно быть также больше или равно двум.

Г л а в а 7

СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ВЫБОРА МОДЕЛИ

В задачах обработки геофизических данных интерпретатор сталкивается с проблемой выбора подходящей модели экспериментального материала. Примерами таких задач являются: обнаружение сейсмического сигнала на фоне шума, определение разрешающей способности приема сейсмических сигналов, определение числа интерферирующих волн, выбор степени аппроксимирующего полинома и др. В математической статистике разработан ряд методов для решения такого рода задач. Широкое распространение получил метод проверки параметрических гипотез, требующий задания уровня значимости, выбор которого носит субъективный характер. Свободным от этого недостатка является информационный критерий, который базируется на свойствах оценок максимального правдоподобия и информации Фишера. Начнем рассмотрение с метода проверки параметрических гипотез.

7.1. Проверка параметрических гипотез

Постановка задачи проверки параметрических гипотез обычно сводится к следующему: под нулевой гипотезой H_0 понимается утверждение, что вектор искомых параметров $\boldsymbol{\theta}$ равен $\boldsymbol{\theta}_0$; первая гипотеза (альтернатива) H_1 заключается в утверждении, что $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$ оценка вектора параметров находится по методу максимального правдоподобия и проверяется, не противоречит ли она гипотезе H_0 с заданной вероятностью ошибки. Пусть на основании принятой модели среды с вектором параметров $\boldsymbol{\theta}_0$ рассчитано модельное поле \mathbf{u}_0 . В результате измерений мы получим экспериментальное

поле \mathbf{u} , которое описывается моделью вида (3.2). Найдем оценку $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ методом максимального правдоподобия. Практический интерес имеет задача о согласовании модельного вектора параметров $\boldsymbol{\theta}_0$ с найденной оценкой $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Такая задача является типичной задачей проверки параметрических гипотез. При этом под нулевой гипотезой H_0 понимается утверждение $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$.

В качестве критерия принятия решения будем пользоваться методом отношения правдоподобия, который при достаточно большом количестве наблюдений обладает такими же оптимальными свойствами, как и метод максимального правдоподобия, кроме того, для больших выборок экспериментальных данных \mathbf{u} критерий отношения правдоподобия обладает важным асимптотическим свойством: если $\boldsymbol{\theta}$ есть S -мерный вектор и функция правдоподобия регулярна в смысле первых и вторых производных по $\boldsymbol{\theta}$, то при нулевой гипотезе для достаточно больших выборок распределение отношения функций правдоподобия

$$\lambda = -2 \ln \frac{L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0)}{L(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})}$$

сводится к χ^2_S -распределению с S степенями свободы.

Применение критерия отношения правдоподобия в этом случае соответствует процедуре вида:

$$\begin{cases} \text{если } \lambda < \chi^2_{\alpha, S}, & \text{то } H_0 \text{ не противоречит } \mathbf{u}, \\ \text{если } \lambda > \chi^2_{\alpha, S}, & \text{то } H_0 \text{ отвергается,} \end{cases}$$

где $\chi^2_{\alpha, S}$ — значения функции распределения χ^2 с уровнем значимости α и числом степеней свободы S .

Применимально к модели

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \text{либо } \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}_0 & : H_0 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 \in N(0, \sigma_0^2 I), \\ \text{либо } \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}_1 & : H_1 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 \in N(0, \sigma_1^2 I), \end{cases} \quad (7.1)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_1$ — случайные векторы, компоненты которых нормально распределены, некоррелированы, с неизвестными дисперсиями σ_0^2 и σ_1^2 , критерий отношения правдоподобия запишется в виде

$$\lambda = -2 \ln \left[\frac{L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0, \sigma_0^2)}{L(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \sigma_1^2)} \right]. \quad (7.2)$$

Оценки $\hat{\sigma}_0^2$ и $\hat{\sigma}_1^2$ находим путем минимизации соответствующих функций правдоподобия $L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0, \sigma_0^2)$ и $L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_1, \sigma_1^2)$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}(\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0))^2, \quad \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}(\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^2.$$

Подставим найденные оценки σ_0^2 , σ_1^2 в выражение (7.2), после простых преобразований получим

$$\lambda = n \ln \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2} = n \ln \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_0^2 - \hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_1^2} \right). \quad (7.3)$$

Критерий χ^2 для функции λ сводится к следующему: если $\lambda < \chi_{\alpha, S}^2$, то полученная оценка $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ не противоречит с α -уровнем значимости гипотезе $H_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$, если $\lambda > \chi_{\alpha, S}^2$, то модель $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ не согласуется с найденными оценками и нулевая гипотеза отвергается. Величины $\chi_{\alpha, S}^2$ определяются по “таблицам” распределения χ^2 с числом степеней свободы S и уровнем значимости α .

7.2. Критерий отношения апостериорных вероятностей

Наряду с представленным выше вариантом решения задачи проверки статистических гипотез, в котором используются статистические свойства критерия отношения правдоподобия, при решении задач качественной интерпретации применяют критерий отношения апостериорных вероятностей для модели (7.1), причем векторы параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ предполагаются заданными.

Рассмотрим гипотезы H_0 и H_1 с заданными априорными вероятностями $p(0)$ и $p(1)$ соответственно. Используя теорему Байеса для расчета апостериорных вероятностей гипотез, находим функцию критерия

$$\lambda = \ln \frac{P(1/\mathbf{u})}{P(0/\mathbf{u})} = \ln \frac{P(1)p(\mathbf{u}/1)}{P(0)p(\mathbf{u}/0)}.$$

Применение критерия сводится к проверке выполнения неравенств

$$\begin{cases} \text{если } \lambda \geq 0, & \text{то } H_0 \text{ не противоречит } \mathbf{u}, \\ \text{если } \lambda < 0, & \text{то } H_0 \text{ отвергается.} \end{cases}$$

Функция критерия λ является случайной, так как она зависит от случайного экспериментального материала. Следовательно, наиболее полное описание λ сводится к заданию ее функции распределения. Для простоты анализа $\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in N(0, R)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \in N(0, R)$, где R — матрица ковариаций случайной компоненты, тогда λ имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0))^T R^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0)) - \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T R^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1)). \quad (7.4)$$

Найдем условные средние значения λ_0 , λ_1 и условные средние дисперсии $\sigma_{\lambda_0}^2$, $\sigma_{\lambda_1}^2$, приняв в качестве моделей соответственно

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1) + \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda_0 \rangle &= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^T R^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \frac{1}{2} (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T R^{-1} (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1)) - \\ &- \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^T R^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \langle (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T R^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T R^{-1} (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1)) = -\langle \lambda_1 \rangle, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda_0}^2 &= \langle (\lambda_0 - \langle \lambda_0 \rangle)^2 \rangle = \langle \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T R^{-1} \times \right. \\ &\times (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1)) - (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T R^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \\ &+ \left. \frac{1}{2} (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T R^{-1} (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1)) \right) \rangle = \\ &= (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T R^{-1} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \rangle R^{-1} (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1)) = \\ &= (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T R^{-1} (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1)) = \sigma_{\lambda_1}^2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Анализ формулы (7.4) показывает, что λ является линейной функцией экспериментального материала \mathbf{u} . Значит, при принятых предположениях λ имеет нормальное распределение вероятностей соответственно для гипотезы H_0 :

$$p(\lambda/0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\lambda_0}} \exp\left\{-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2\sigma_{\lambda_0}^2}\right\},$$

и гипотезы H_1 :

$$p(\lambda/1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\lambda_1}} \exp\left\{-\frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2\sigma_{\lambda_1}^2}\right\}.$$

Согласно принятому критерию при попадании λ в интервал $[-\infty, 0]$ не отвергается гипотеза H_0 , при попадании λ в интервал $[0, \infty]$ не отвергается альтернатива H_1 . При этом могут встречаться следующие четыре ситуации (рис. 7.1):

- 1) гипотеза H_0 верна и не отвергается;
- 2) гипотеза H_0 верна, но отвергается (ошибка первого рода);
- 3) гипотеза H_0 неверна и отвергается;
- 4) гипотеза H_0 неверна, но не отвергается (ошибка второго рода).

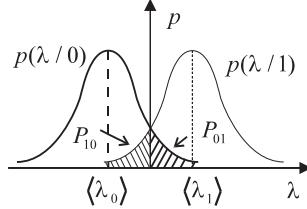


Рис. 7.1. Плотности вероятностей $p(\lambda/0)$ и $p(\lambda/1)$ и ошибки решений.

Обозначим вероятности ошибок первого рода P_{01} , а вероятности ошибок второго рода P_{10} . Эти вероятности легко вычисляются:

$$\begin{aligned}
 P_{01} &= \int_0^\infty p(\lambda/0)d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\lambda_0}} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(\lambda - \langle\lambda_0\rangle)^2}{2\sigma_{\lambda_0}^2}\right\} d\lambda = \\
 &= \left[1 - \Phi\left(-\frac{\langle\lambda_0\rangle}{\sigma_{\lambda_0}}\right)\right], \\
 P_{10} &= \int_{-\infty}^0 p(\lambda/1)d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\lambda_1}} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{(\lambda - \langle\lambda_1\rangle)^2}{2\sigma_{\lambda_1}^2}\right\} d\lambda = \\
 &= \Phi\left(-\frac{\langle\lambda_1\rangle}{\sigma_{\lambda_1}}\right), \\
 \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\{-t^2/2\} dt, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x),
 \end{aligned}$$

где $\Phi(x)$ — нормальная функция распределения. Для оценки качества решения поставленной задачи проверки гипотез вводят полную вероятность ошибки

$$P_e = P(0)P_{01} + P(1)P_{10}.$$

Для частного случая равных априорных вероятностей $P(0) = P(1) = 1/2$ при $\langle \lambda_0 \rangle = -\langle \lambda_1 \rangle$, $\sigma_{\lambda_0} = \sigma_{\lambda_1}$ получим

$$P_e = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(-\frac{\langle \lambda_0 \rangle}{\sigma_{\lambda_0}} \right) \right] + \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{\langle \lambda_0 \rangle}{\sigma_{\lambda_0}} \right) = \Phi \left(\frac{\langle \lambda_0 \rangle}{\sigma_{\lambda_0}} \right).$$

Подставим значения (7.5) и (7.6) для λ_0 и σ_{λ_0} в полученное выражение, тогда

$$P_e = \Phi(-\alpha/2) = 1 - \Phi(\alpha/2) \quad (7.7)$$

$$\alpha = [(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T \times R^{-1}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))]^{1/2}. \quad (7.8)$$

При конкретных расчетах следует пользоваться таблицами для нормальной функции распределения $\Phi(x)$. Выбирая допустимое значение вероятности ошибки P_e , которую будем называть надежностью решения задачи проверки гипотез, находим соответствующее значение α_0 (рис. 7.2). Коль скоро это значение известно, мож-

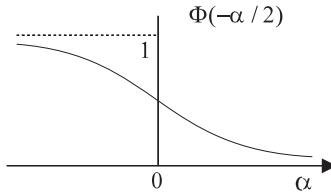


Рис. 7.2. Графическое представление функции $\Phi(-\alpha/2)$.

но утверждать, что во всех случаях, когда выполняется условие

$$[(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T \times R^{-1}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))]^{1/2} \geq \alpha_0,$$

ненадежность P_e не может превысить выбранной величины. Таким образом α_0 определяет пороговые условия, обеспечивающие заданную эффективность приема.

В частности, при $P_e = 0.05$, $\alpha_0 = 3.3$ пороговое условие будет иметь вид

$$\alpha = [(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))^T R^{-1} (\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_1))]^{1/2} \geq \alpha_0 = 3.3.$$

Полученные неравенства позволяют установить аналитические пороговые зависимости между различными параметрами задачи, при которых ненадежность интерпретации не превышает 0.05.

Пример. Рассмотрим ненадежность выделения одиночной регулярной волны на фоне шума (рис. 7.3):

$$u_{ki} = \begin{cases} \text{либо } A\varphi(t_i - \tau - k\Delta x\gamma) + \varepsilon_{ki}, \\ \text{либо } \varepsilon_{ki}, \end{cases}$$

где $k = 1, 2, \dots, K$ (K — число сейсмоприемников); Δx — расстояние между сейсмоприемниками; A , τ , γ — соответственно амплитуда, момент прихода, кажущаяся скорость сейсмической волны. Ненадежность выделения P_e определяется выра-

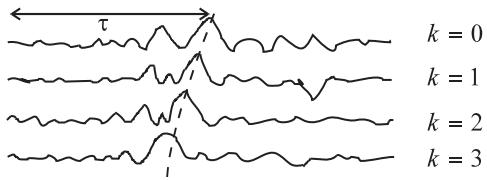


Рис. 7.3. Иллюстрация к выделению сейсмического сигнала на фоне шума.

жением (7.7), при этом α имеет следующий вид:

$$\alpha^2 = \frac{A^2}{\sigma^2} \sum_k \sum_i \sum_{i'} r_{ii'}^{-1} \varphi(t_i - \tau - k\Delta x\gamma) \varphi(t_{i'} - \tau - k\Delta x\gamma),$$

где $r_{ii'}^{-1}$ — элементы обратной корреляционной матрицы шума, σ^2 — дисперсия шума. В частном случае некоррелированной случайной компоненты будем иметь

$$\alpha^2 = \frac{A^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \varphi^2(t_i - \tau - k\Delta x\gamma).$$

7.3. Разрешающая способность приема сигналов

Задача разрешающей способности приема сейсмических волн описывается моделью

$$u_{ki} = \begin{cases} \text{либо } A_0\varphi(t_i - \tau_0 - k\Delta x\gamma_0) + \varepsilon_{ki}, \\ \text{либо } A_1\varphi(t_i - \tau_1 - k\Delta x\gamma_1) + A_2\varphi(t_i - \tau_2 - k\Delta x\gamma_2) + \varepsilon_{ki}. \end{cases}$$

Ненадежность разделения волн P_e или вероятность ошибочного решения описывается формулой (7.7), где

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_k \sum_i \sum_{i'} r_{ii'}^{-1} (A_0\varphi(t_i - \tau_0 - k\Delta x\gamma_0) - \\ &- A_1\varphi(t_i - \tau_1 - k\Delta x\gamma_1) - \\ &- A_2\varphi(t_i - \tau_2 - k\Delta x\gamma_2))(A_0\varphi(t_{i'} - \tau_0 - k\Delta x\gamma_0) - \\ &- A_1\varphi(t_{i'} - \tau_1 - k\Delta x\gamma_1) - A_2\varphi(t_{i'} - \tau_2 - k\Delta x\gamma_2)). \end{aligned}$$

Для некоррелированной случайной компоненты и при симметричном расположении волн f_1 и f_2 по отношению к f_0 , т. е.

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_0 - \Delta\tau, \quad \gamma_1 = \gamma_0 - \Delta\gamma, \\ \tau_2 &= \tau_0 + \Delta\tau, \quad \gamma_2 = \gamma_0 + \Delta\gamma, \end{aligned}$$

и при условии $A_0 = A_1/2 = A_2/2$ будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{A_0^2}{\sigma^2} \sum_k \sum_i (\varphi(t_i - \tau_0 - k\Delta x\gamma_0) - \frac{1}{2}\varphi(t_i - (\tau_0 - \Delta\tau) - \\ &- k\Delta x(\gamma_0 - \Delta\gamma)) - \frac{1}{2}\varphi(t_i - (\tau_0 + \Delta\tau) - k\Delta x(\gamma_0 + \Delta\gamma)))^2. \end{aligned}$$

Анализ выражений α^2 показывает, что вероятность принятия ошибочного решения, или ненадежность, зависит от системы наблюдений (выбор Δx и K), отношения сигнал/помеха (A/σ), от формы сигнала $\varphi(t)$ и от кинематических параметров волн ($\tau_0, \gamma_0, \tau_1, \gamma_1, \tau_2, \gamma_2$). Исследуя зависимость α^2 от этих параметров, можно решить следующие задачи.

1. Выбрать базу приема, которая обеспечивала бы требуемое разрешение волн по кинематическим параметрам с заданной вероятностью ошибки P_e при фиксированном отношении сигнал/помеха.

2. Оценить минимально допустимые отношения сигнал/помеха, при которых обеспечивается требуемая степень разрешения волн по кинематическим параметрам с заданной ненадежностью для выбранной системы наблюдений.

П р и м е р 1. Рассмотрим зависимость $\alpha^2(\Delta\tau)$ для сигналов типа $\varphi(t) = \exp\{-i\beta t \cos(\Omega t)\}$ при условии $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0$, т. е. разрешение исследуется только от разностей моментов приходов $\tau_1 = \tau_0 - \Delta\tau$, $\tau_2 = \tau_0 + \Delta\tau$. Пример такой зависимости представлен на рис. 7.4. В начальной части графика первый максимум достигается, когда $\tau \sim T/2$, а затем после ряда осцилляций выходит на асимптоту, соответствующую приему неинтерферирующих волн.

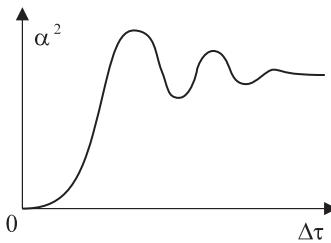


Рис. 7.4. Графическое представление функции α^2 .

П р и м е р 2. В качестве примера разрешения аномальных намагниченных объектов найдем пороговые условия, при которых еще можно отличить поле одиночного тонкого пласта с бесконечно погруженной нижней кромкой, помещенного под началом отсчета перпендикулярно оси x , от суммарного поля двух таких же пластов, расположенных симметрично по обе стороны от начала отсчета на расстоянии $\pm\xi$ от него. Намагничение I одиночного объекта примем равным удвоенному намагничению пары пластов, так что при совмещении пластов и суммарное поле совпадает с полем одиночного объекта. Случайную компоненту примем некоррелированной в точках наблюдений, тогда

$$f_{0k} = \frac{2I}{h} \left[\frac{1}{1 + (k\Delta x/h)^2} \right], \quad f_{1k} = \frac{I}{h} \left[\frac{1}{1 + (k\Delta x/h - \xi/h)^2} \right],$$

$$f_{2k} = \frac{I}{h} \left[\frac{1}{1 + (k\Delta x/h + \xi/h)^2} \right]. \quad (7.9)$$

Пример зависимости магнитных полей от рассматриваемых объектов дан на рис. 7.5. Пороговое условие, при котором еще

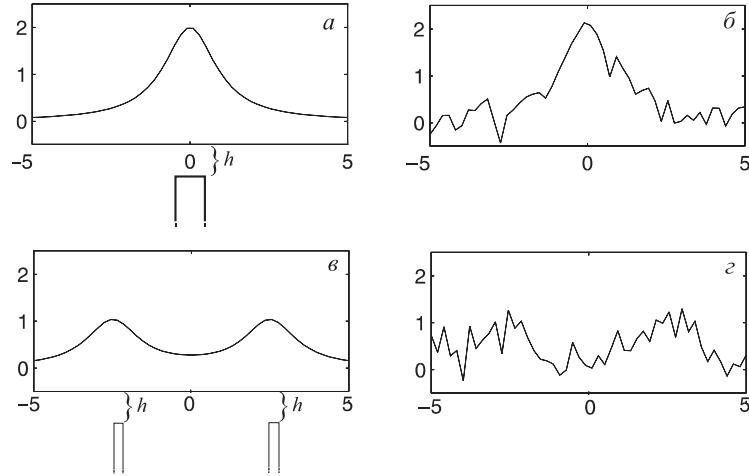


Рис. 7.5. Разрешение аномальных намагниченных объектов
($I = 1$, $\xi = 2.5$, $h = 1.0$): a , c — без шума; b , d — с некоррелированным гауссовым шумом $N(0, 0.25)$; a , b — один пласт; c , d — два пласта.

возможен выбор между рассматриваемыми альтернативами, имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-K}^K \left[\left(2 \left(1 + \left(\frac{k\Delta x}{h} - \frac{\xi}{h} \right)^2 \right) \right)^{-1} + \right. \\ & \quad \left. + \left(2 \left(1 + \left(\frac{k\Delta x}{h} + \frac{\xi}{h} \right)^2 \right) \right)^{-1} - \right. \\ & \quad \left. - \left(1 + \left(\frac{k\Delta x}{h} \right)^2 \right)^{-1} \right]^2 \geq \left(\frac{\sigma h}{2I} \right)^2 \alpha_0^2. \end{aligned}$$

Полученное неравенство определяет минимальные значения ξ , при которых еще можно отличить интерференционное поле пары пластов от поля одиночного пласта.

7.4. Информационный критерий выбора модели

Перейдем к рассмотрению информационного критерия [114]. Применение метода максимального правдоподобия в задаче выбора модели из числа конкурирующих моделей, в которой искомый вектор параметров имеет различную размерность, неизбежно приводит к выбору модели с наибольшей размерностью. Поэтому этот метод нельзя использовать для формализации интуитивного представления о выборе “правильной” модели. Однако анализ свойств оценок максимального правдоподобия приводит к выводу, что вследствие асимптотической эффективности этих оценок, функцию правдоподобия допустимо рассматривать как величину, которая наиболее чувствительна к малым вариациям параметров вблизи их истинных значений. Этот факт используется при формировании критерия соответствия модели с вероятностной структурой, определенной функцией плотности вероятностей $p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ по отношению к структуре, определенной функцией плотности $p_0(\mathbf{u})$. В классическом методе максимального правдоподобия оценивание производится в рамках одного семейства распределения вероятностей. В то же время информационный критерий допускает принадлежность $p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ и $p_2(\mathbf{u})$ к разным семействам, либо принадлежность к одному семейству, но при этом вектор может иметь разные размерности. При этом проблема выбора модели формулируется как проблема оценивания, и необходимость в субъективном суждении, требующемся в процедуре проверки статистических гипотез, полностью отпадает.

Перейдем к выводу информационного критерия. Пусть значения измеренного геофизического поля u_1, u_2, \dots, u_n являются независимыми случайными величинами с истинной функцией плотности распределения вероятностей $p_0(\mathbf{u})$, которая нам заранее неизвестна. Предполагаемое параметрическое семейство $p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ имеет неизвестный вектор параметров, причем неизвестны как компоненты вектора $\boldsymbol{\theta}$, так и его размерность. Оценка среднего значения логарифма правдоподобия имеет вид

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln p_1(u_i, \boldsymbol{\theta}). \quad (7.10)$$

Переходя к пределу в формуле (7.10) при $n \rightarrow \infty$, получаем среднее

значение логарифма правдоподобия

$$\begin{aligned} B[p_0(\mathbf{u}), p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})] &= \lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln p_1(u_i, \boldsymbol{\theta}) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{u}) \ln p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) du_1 \dots du_n. \end{aligned}$$

Из асимптотической эффективности оценок максимального правдоподобия следует, что среднее значение логарифма правдоподобия $B[p_0(\mathbf{u}), p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})]$ является самой чувствительной мерой по отношению к малым отклонениям $p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ от $p_0(\mathbf{u})$. Разность

$$I_k(p_0(\mathbf{u}), p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})) = B[p_0(\mathbf{u}), p_0(\mathbf{u})] - B[p_0(\mathbf{u}), p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})]$$

известна как средняя информация Кульбака [49], которая служит мерой отличия истинной плотности $p_0(\mathbf{u})$ от предлагаемой $p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$. Если $p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ всюду равна $p_0(\mathbf{u})$, то информация I_k будет равна нулю.

Рассмотрим частный случай, когда $p_0(\mathbf{u}) = p_0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0)$, где $\boldsymbol{\theta}_0$ — истинный вектор параметров. Среднее значение логарифма правдоподобия и средняя информация Кульбака зависят только от вектора параметров $\boldsymbol{\theta}_0$ и $\boldsymbol{\theta}$:

$$I_k(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}) = B(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0) - B(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}),$$

где

$$B(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0) \ln p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0) du_1 \dots du_n.$$

Если вектор $\boldsymbol{\theta}_0$ достаточно близок к вектору $\boldsymbol{\theta}$ ($\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}$), то возможна аппроксимация вида

$$I_k(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\theta}^T I_F \Delta\boldsymbol{\theta}, \quad (7.11)$$

где

$$\|I_F\|_{ss'} = \left\langle \frac{\partial \ln p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} \frac{\partial \ln p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} \right\rangle$$

— элементы информационной матрицы Фишера. Из формулы (7.11) следует, что когда оценка $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ параметра лежит в малой окрестности $\boldsymbol{\theta}_0$, отклонение распределения $p_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ от истинного распределения $p_0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0)$ измеряется взвешенным квадратичным отклонением

$$\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0)^T I_F(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0).$$

Если $\boldsymbol{\theta}$ близко к $\boldsymbol{\theta}_0$ и точке максимума $B(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta})$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max B(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}),$$

то можно показать, что при определенных условиях регулярности оценка максимального правдоподобия $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ имеет асимптотически нормальное распределение, т. е.

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \in N(0, I_F^{-1}), \quad (7.12)$$

$$n(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T I_F(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \in \chi_{S_m}^2, \quad (7.13)$$

где $\chi_{S_m}^2$ — распределение χ^2 с числом степеней свободы, равным размерности векторов $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ и $\boldsymbol{\theta}$, принадлежащих одному и тому же параметрическому пространству S_m , в то время как $\boldsymbol{\theta}_0$ имеет размерность S_{m_0} , вообще говоря, не совпадающую с размерностью векторов $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ и $\boldsymbol{\theta}$.

Представляется целесообразным оценить среднюю информацию Кульбака для оценки максимального правдоподобия $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. В этом случае формула (7.11) перепишется в виде

$$I_k(\boldsymbol{\theta}_0, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T I_F(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}). \quad (7.14)$$

Чтобы воспользоваться условием (7.13), умножим левую и правую части формулы (7.14) на $2n$. После простых преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} 2nI_k(\boldsymbol{\theta}_0, \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= n(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T I_F(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) + n(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T I_F(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) + \\ &+ 2n(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T I_F(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Согласно свойству (7.13), первый член в правой части равенства (7.15) имеет асимптотическое распределение $\chi_{S_m}^2$, а третий член

распределен асимптотически нормально. Вычислив среднее от левой и правой части равенства (7.15) по всевозможным реализациям экспериментальных данных, получим

$$\langle 2nI_k(\boldsymbol{\theta}_0, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \rangle = n(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T I_F(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) + S_m.$$

Для нахождения $n(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T I_F(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)$ воспользуемся оценками $(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0)$ и $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0)$ в форме выборочных средних логарифмов правдоподобия, заменив $\boldsymbol{\theta}$ его оценкой $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ и корректируя возникающее при этом смещение способом, аналогичным описанному выше:

$$n(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T I_F(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) = 2 \sum_{i=1}^n \ln p(u_i, \boldsymbol{\theta}_0) - \sum_{i=1}^n \ln p(u_i, \boldsymbol{\theta}) + S_m. \quad (7.16)$$

Подставляя выражение (7.16) в правую часть равенства (7.15) и учитывая, что

$$\begin{aligned} I_k(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) &= B(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0) - B(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}), \\ B(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln p(u_i, \boldsymbol{\theta}_0), \end{aligned}$$

получаем окончательное выражение для функции информационного критерия

$$IC(S_m, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = -2 \langle nB(\boldsymbol{\theta}_0, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \rangle = -2 \ln p(n, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2S_m. \quad (7.17)$$

Первый член в правой части этого выражения равен максимальному значению логарифма функции правдоподобия, взятому со знаком минус, а второй член равен удвоенной размерности вектора $\boldsymbol{\theta}$. Функция $IC(S_m, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ может рассматриваться как мера несогласия идентифицируемой модели.

Применение критерия сводится к следующему. Для выбора конкурирующих моделей $m = 1, 2, \dots, M$, которые имеют различные размерности вектора параметров S_1, S_2, \dots, S_M , рассчитываются оценки метода максимального правдоподобия $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$ и по формуле (7.17) находятся значения $IC(S_m, \hat{\boldsymbol{\theta}}_m)$. Согласно критерию принимается модель, которая соответствует максимальному значению IC , т. е.

$$S_m = \arg \max_m [IC(S_m, \hat{\boldsymbol{\theta}}_m)]. \quad (7.18)$$

Важным преимуществом описанного критерия является включение выбора размерности модели в процедуру оценивания, причем качество выбора оценивается абсолютным значением функции IC в точке максимума по m , которая с точностью до постоянного множителя равна отрицательной энтропии. Описанный информационный критерий можно рассматривать как модификацию метода максимальной энтропии, который нашел широкое применение при обработке геофизической информации.

7.5. Метод разделения интерферирующих сигналов

Одним из важнейших этапов обработки геофизической информации является проблема разделения геофизического поля на отдельные сигналы. Так, например, при анализе сейсмического поля возникает задача выделения отраженных волн, которые несут информацию о параметрах слоистой среды. В магнитометрии актуальной является проблема выделения полей, вызванных отдельными аномальными объектами по наблюденному магнитному полю.

Рассмотрим принципы построения итерационного алгоритма разделения интерферирующих сигналов, причем в этой процедуре, наряду с нахождением оценок параметров сигналов, определяется их число. При этом модель геофизического поля может быть представлена в виде

$$\mathbf{u}_k = \sum_{\mu=1}^M \mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}_{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon}_k,$$

где $\boldsymbol{\theta}_{\mu}$ — неизвестный вектор параметров μ -го сигнала, $\boldsymbol{\varepsilon}_k \in N(0, R)$. Например, для случая сейсмических сигналов

$$\mathbf{f}_{\mu k} = \|A_{\mu} \varphi(t_i - \tau_{\mu} - k \Delta x \gamma_{\mu})\|_{i=1}^n.$$

Для нахождения неизвестных параметров воспользуемся методом максимального правдоподобия (см. § 6.2). По аналогии с формулой (6.5) запишем логарифм функции правдоподобия, исключив члены, не содержащие $\boldsymbol{\theta}$,

$$l(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_k (\mathbf{u}_k - \sum_{\mu=1}^M \mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}_{\mu}))^T R^{-1} (\mathbf{u}_k - \sum_{\mu=1}^M \mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}_{\mu})),$$

где $\boldsymbol{\theta} = \|\theta_\mu\|_{\mu=1}^M$ — полная совокупность векторов $\boldsymbol{\theta}_\mu$. Так как \mathbf{u}_k не зависит от искомых параметров $\boldsymbol{\theta}_\mu$, то достаточно максимизировать функцию вида

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}) &= \sum_{\mu=1}^M \sum_k \left[\mathbf{u}_k^T R^{-1} \mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}_\mu) - \frac{1}{2} \sum_{\mu' \neq \mu} \mathbf{f}_{\mu' k}^T(\boldsymbol{\theta}) R^{-1} \mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mathbf{f}_{\mu k}^T(\boldsymbol{\theta}_\mu) R^{-1} \mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}_\mu) \right], \end{aligned} \quad (7.19)$$

которая является достаточной статистикой, в дальнейшем, как это принято в теории сигналов, будем называть ее функцией достаточного приема. Анализ формулы показывает, что первый член в квадратных скобках отвечает за корреляцию (взаимодействие) сигнала с номером μ $\mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}_\mu)$ с экспериментальным материалом, второй член определяет взаимодействие или взаимную корреляцию различных сигналов и, наконец, третий член дает энергию μ -го сигнала. Если сигналы не взаимодействуют между собой (ортогональны их формы или они расходятся в пространственно-временной области), то второй член в квадратных скобках будет равен нулю и формула (7.19) перепишется в виде

$$g(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{\mu=1}^M \sum_k \left[\mathbf{u}_k^T R^{-1} \mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}_\mu) - \frac{1}{2} \mathbf{f}_{\mu k}^T(\boldsymbol{\theta}_\mu) R^{-1} \mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}_\mu) \right]. \quad (7.20)$$

Поскольку каждый член суммы по μ в формуле (7.20) зависит лишь от своего искомого параметра $\boldsymbol{\theta}_\mu$, то максимум $g(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta})$ совпадает с максимумами отдельных членов суммы по μ . Это позволяет искать параметры $\boldsymbol{\theta}_\mu$ раздельно для разных μ , т. е. поочередно интерпретировать сигналы. При наличии заметной корреляции разноименных сигналов раздельный поиск недопустим. Параметры интерферирующих сигналов должны варьироваться совместно, при этом вычисления неизбежно усложняются. В этом случае можно предложить различные итеративные способы многократной поочередной вариации параметров, которые на каждом шаге своего осуществления требуют вариации параметров лишь одного из интерферирующих сигналов.

Для построения итерационного алгоритма разделения сигналов перепишем функцию достаточного приема (7.19), выделив чле-

ны суммы, соответствующие сигналу с номером m :

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}) = & \left[\sum_k \mathbf{u}_k^T R^{-1} \mathbf{f}_{mk}(\boldsymbol{\theta}_m) - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^M \sum_k \mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}_\mu) R^{-1} \mathbf{f}_{mk}(\boldsymbol{\theta}_m) - \right. \\
& - \frac{1}{2} \sum_k \mathbf{f}_{mk}^T(\boldsymbol{\theta}_m) R^{-1} \mathbf{f}_{mk}(\boldsymbol{\theta}_m) \Big] + \left[\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^M \sum_k \mathbf{u}_k^T R^{-1} \mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}_\mu) - \right. \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^M \sum_{\substack{\mu'=1 \\ \mu' \neq m}}^M \sum_k \mathbf{f}_{\mu' k}^T(\boldsymbol{\theta}_{\mu'}) R^{-1} \mathbf{f}_{\mu k}^T(\boldsymbol{\theta}_\mu) - \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^M \sum_k \mathbf{f}_{\mu k}^T(\boldsymbol{\theta}_\mu) R^{-1} \mathbf{f}_{\mu k}(\boldsymbol{\theta}_\mu) \right] \right]. \quad (7.21)
\end{aligned}$$

В формуле (7.21) вторая квадратная скобка не зависит от $\boldsymbol{\theta}_m$. Из полученной формулы следует, что если бы все сигналы $\mathbf{f}_{\mu k}$, за исключением одного лишь вектора $\boldsymbol{\theta}_m$, были бы заранее известны, то для определения $\boldsymbol{\theta}_m$ достаточно было бы максимизировать только выражение в первой квадратной скобке формулы (7.21). Это выражение обозначим через $g_m(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_m)$ и перепишем в виде

$$g_m(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_m) = \sum_k \mathbf{Y}_{km}^T R^{-1} \mathbf{f}_{mk}(\boldsymbol{\theta}_m) - \frac{1}{2} \sum_k \mathbf{f}_{mk}^T(\boldsymbol{\theta}_m) R^{-1} \mathbf{f}_{mk}(\boldsymbol{\theta}_m), \quad (7.22)$$

где

$$\mathbf{Y}_{km}^T = \mathbf{u}_k^T - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^M \mathbf{f}_{k\mu}^T(\boldsymbol{\theta}_\mu). \quad (7.23)$$

Легко видеть, что $g_m(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_m)$ имеет смысл функции достаточного приема одиночного сигнала с номером m с той лишь разницей, что вместо исходного экспериментального материала \mathbf{u}_k используется модельный материал \mathbf{Y}_{mk} , который получается путем вычитания из исходного материала всех сигналов $\mathbf{f}_{\mu k}$ с индексами $\mu \neq m$.

Идея итеративного процесса заключается в многократном поочередном поиске векторов $\boldsymbol{\theta}$ ($m = 1, 2, \dots, M$) при помощи функций достаточного приема (7.22) с использованием в качестве значений остальных параметров, найденных в результате предшествую-

щих итераций θ_μ ($\mu \neq m$). Когда число сигналов M заранее неизвестно, схема вычислений состоит в следующем.

Вначале делается предположение, что сигнал один, и его параметры определяются путем максимизации функции достаточного приема (7.22) при $m = 1$:

$$g_1(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_1) = \sum_k \left[\mathbf{u}_k^T R^{-1} \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\theta}_1) - \frac{1}{2} \mathbf{f}_k^T(\boldsymbol{\theta}_1) R^{-1} \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\theta}_1) \right]. \quad (7.24)$$

Максимум функции $g_m(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_1)$ находится либо в заданных априорных интервалах, либо одним из градиентных способов:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(1)} = \max_{\boldsymbol{\theta}_1} g_1(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_1).$$

Далее мы делаем предположение, что сигналов два, и ищем второй вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(1)}$, максимизируя

$$g_2(\mathbf{u}_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \boldsymbol{\theta}_2) = \sum_k \mathbf{Y}_{k2}^T R^{-1} \mathbf{f}_{k2}(\boldsymbol{\theta}_2) - \frac{1}{2} \sum_k \mathbf{f}_{k2}^T(\boldsymbol{\theta}_2) R^{-1} \mathbf{f}_{k2}(\boldsymbol{\theta}_2),$$

где

$$\mathbf{Y}_{k2}^T = \mathbf{u}_k^T - \mathbf{f}_{k1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1).$$

Затем, по-прежнему считая, что сигналов два, ищем снова вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(1)}$, максимизируя

$$g_2(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(1)}) = \sum_k \mathbf{Y}_{k1}^T R^{-1} \mathbf{f}_{k1}(\boldsymbol{\theta}_1) - \frac{1}{2} \sum_k \mathbf{f}_{k1}^T(\boldsymbol{\theta}_1) R^{-1} \mathbf{f}_{k1}(\boldsymbol{\theta}_1),$$

$$\mathbf{Y}_{k1}^T = \mathbf{u}_k^T - \mathbf{f}_{k2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2)$$

и используя только что найденные оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(1)}$ при определении \mathbf{Y}_{k1} . Затем опять ищем $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(2)}$, предполагая $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(1)}$ равным только что уточненным значениям, и т.д. Значения максимумов функции достаточного приема, получаемых в процессе поочередного уточнения параметров, образуют возрастающую последовательность чисел. Процесс уточнения прекращается, как только будет достигнута заданная стабилизация максимумов.

Если

$$\frac{g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(n)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(n)}) - g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(n-1)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(n-1)})}{g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(n-1)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(n-1)})} < \delta,$$

то процесс уточнения можно прекратить при $\delta \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$. Далее предполагаем, что сигналов три, и ищем вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{(1)}$, максимизируя

$$g_3(\mathbf{u}_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2, \boldsymbol{\theta}_3) = \sum_k Y_{k3}^T R^{-1} \mathbf{f}_{k3}(\boldsymbol{\theta}_3) - \frac{1}{2} \sum_k \mathbf{f}_{k3}^T(\boldsymbol{\theta}_3) R^{-1} \mathbf{f}_{k3}(\boldsymbol{\theta}_3),$$

$$\mathbf{Y}_{k3}^T = \mathbf{u}_k^T - \mathbf{f}_{k3}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - \mathbf{f}_{k3}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2),$$

где $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2$ — найденные после уточнения оценки. Затем снова ищем $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$, фиксируя $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}_3$ последними найденными значениями. Затем снова ищем $\boldsymbol{\theta}_2^{(1)}$, фиксируя $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(1)}$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{(1)}$, и т.д., все время считая, что сигналов три, и совершая циклические перестановки индексов μ . Процесс уточнения прекращаем после того, как приращения максимумов станут достаточно малыми:

$$\frac{g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(n)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(n)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{(n)}) - g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(n-1)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(n-1)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{(n-1)})}{g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(n-1)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(n-1)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{(n-1)})} < \delta.$$

Далее предполагаем, что сигналов четыре, и вновь поочередно многократно уточняем параметры $\boldsymbol{\theta}_m$ сигналов, циклически переставляя индексы $\mu = 1, 2, 3, 4$, каждый раз максимизируя функцию достаточного приема (7.22) и используя соответствующий модифицированный материал (7.23). Каждый раз при определении параметров сигнала для нового значения $M = m$ проверяется пороговое условие

$$\alpha_m \geq \alpha_0,$$

где α_m соответствует выделению одиночной регулярной волны с заданной вероятностью ошибки (7.7):

$$P_e = \Phi(-\alpha_m/2), \quad \alpha_m = \left[\sum_k \mathbf{f}_{mk}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m) R^{-1} \mathbf{f}_{mk}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m) \right]^{1/2}.$$

В частном случае некоррелированной случайной компоненты $R = \sigma^2 I$ при вероятности ошибки 0.05 соответствующее пороговое

условие для сейсмического сигнала

$$f_k(\theta_m) = \|A_m \varphi(t_i - \tau_m - k\Delta x \gamma_m)\|_{i=1}^n$$

имеет вид

$$\frac{A_m}{\sigma} \left[\sum_k \varphi^2(t_i - \tau_m - k\Delta x \gamma_m) \right]^{1/2} \geq \alpha_m = 3.3,$$

при этом α_m соответствует отношению сигнал/помеха. Функция достаточного приема (7.23) для сейсмического сигнала при принятых предположениях запишется в виде

$$g(A_m, \tau_m, \gamma_m) = \frac{A_m}{\sigma^2} \sum_i \varphi(t_i) \sum_k y(t_i + \tau_{mk}) - \frac{A_m^2}{\sigma^2} K \sum_i \varphi^2(t_i), \quad (7.25)$$

$$y(t_i + \tau_{mk}) = u(t_i + \tau_{mk}) - \sum_{\mu' \neq m} A_{\mu'} \varphi(t_i - \tau_{\mu'k} - \tau_{\mu k}). \quad (7.26)$$

Максимизируя функцию (7.25) по амплитуде A_m , получаем оценку в явном виде

$$\hat{A}_m = \frac{\sum_i \varphi(t_i) \sum_k y(t_i + \tau_{mk})}{\sum_i \varphi^2(t_i)}. \quad (7.27)$$

Подставим формулу (7.27) в выражение (7.25) и получим функцию достаточного приема, зависящую только от кинематических параметров:

$$g_m(\tau_m, \gamma_m) = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\left[\sum_i \varphi(t_i) \sum_k y(t_i + \tau_{mk}) \right]^2}{K \sum_i \varphi^2(t_i)}. \quad (7.28)$$

Анализ формулы (7.28) показывает, что функция достаточного приема в пространстве параметров (момент прихода и обратная кажущаяся скорость) соответствует суммограмме регулируемого направленного приема (РНП) $\sum_k Y(t_i + \tau_{mk})$ с последующей оптимальной фильтрацией. Отметим, что суммограмма РНП является дискретным аналогом преобразования Радона на поле сейсмограммы.

Г л а в а 8

АЛГОРИТМЫ АППРОКСИМАЦИИ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

В районах со сложным геологическим строением при построении модели геофизического поля и при решении обратных задач геофизики широкое применение для аппроксимации и интерполяции геофизической информации нашел метод сплайн-функций, или кусочно-полиномиальной аппроксимации [7, 40, 10, 85]. Такой подход дает возможность описывать поля, в которых содержатся области различной степени гладкости, что является характерной чертой геофизических данных [31, 96]. Описываются алгоритмы одномерных кубических сплайнов, параметрических сплайнов, сплайнов четвертой степени для аппроксимации гистограмм. Приводятся результаты практического опробования программ при обработке геофизической информации.

В связи с переходом к площадным системам наблюдений в сейсморазведке актуальной становится задача построения пространственного сейсмического разреза с учетом скважинных наблюдений. Рассматривается построение сейсмического горизонта с использованием площадных сейсмических наблюдений и скважинных данных.

8.1. Алгоритм одномерной аппроксимации кубическими сплайнами

Будем считать, что на оси абсцисс в точках

$$x_1 < x_2 < \dots < x_K \quad (8.1)$$

заданы значения функций наблюдений

$$u_1, u_2, \dots, u_K. \quad (8.2)$$

Существенной особенностью задания значений (8.1) и (8.2) является требование монотонного возрастания аргумента, которое легко удовлетворяется на практике.

Сначала рассмотрим применение сплайн-функций с целью интерполяции [40]. Под кубической сплайн-функцией будем понимать такую функцию $\varphi(x)$, которая в узловых точках x_k совпадает со значениями

$$\varphi(x_k) = u_k, \quad (8.3)$$

а внутри интервалов (x_k, x_{k+1}) определяется значениями кубических полиномов $f_k(x)$, которые в точках x_k ($k = 2, 3, \dots, K - 1$) предполагаются дважды дифференцируемыми:

$$f_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k. \quad (8.4)$$

Искомыми параметрами являются $4(k - 1)$ коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k .

Рассмотрим произвольный интервал x_k, x_{k+1} . Сплайн-функция на границах этого интервала в точках x_k и x_{k+1} должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(x_k) &= f_k(x_k) = d_k, \\ \varphi(x_{k+1}) &= f_k(x_{k+1}) = a_k \Delta x_k^3 + b_k \Delta x_k^2 + c_k \Delta x_k + d_k, \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x_k) &= f'_k(x_k) = c_k, \\ \varphi'(x_{k+1}) &= f'_k(x_{k+1}) = 3a_k \Delta x_k^2 + 2b_k \Delta x_k + c_k, \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(x_k) &= f''_k(x_k) = 2b_k, \\ \varphi''(x_{k+1}) &= f''_k(x_{k+1}) = 6a_k \Delta x_k + 2b_k. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Значения искомых коэффициентов можно найти, используя условия (8.5), (8.7) для функции и второй производной, а также соотношение (8.3). После несложных преобразований будем иметь

$$a_k = \frac{1}{6\Delta x_k} (\varphi''(x_{k+1}) - \varphi''(x_k)),$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{2} \varphi''(x_k), \\
c_k &= \frac{\Delta u_k}{\Delta x_k} - \frac{1}{6} \Delta x_k (\varphi''(x_{k+1}) + \varphi''(x_k)), \\
d_k &= u_k,
\end{aligned} \tag{8.8}$$

где $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$. Используя условия (8.6) и выражения для коэффициентов (8.8), получаем формулы для определения первых производных сплайн-функций

$$\begin{aligned}
\varphi'(x_k) &= \frac{\Delta u_k}{\Delta x_k} - \frac{1}{6} \Delta x_k (\varphi''(x_{k+1}) + 2\varphi''(x_k)), \\
\varphi'(x_k) &= \frac{\Delta u_{k-1}}{\Delta x_{k-1}} - \frac{1}{6} \Delta x_{k-1} (\varphi''(x_k) + 2\varphi''(x_{k-1})),
\end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, K - 1$. Для определения вторых производных $\varphi''(x_k)$ сплайн-функций потребуем непрерывности первой производной на границе двух соседних интервалов

$$f'(x_k) = f'_k(x_k), \quad k = 2, 3, \dots, K - 1. \tag{8.9}$$

Подставляя условие (8.6) в выражение (8.9), получаем

$$3a_{k-1}\Delta x_{k-1}^2 + 2b_{k-1}\Delta x_k - 1c_{k-1} = c_k.$$

Используя представления для коэффициентов (8.8), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
\Delta_{k-1}\varphi''(x_{k-1}) + 2(\Delta x_{k-1} + \Delta x_k)\varphi''(x_k) + \Delta x_k\varphi''(x_{k-1}) &= \\
&= 6 \left(\frac{\Delta u_k}{\Delta x_k} - \frac{\Delta u_{k-1}}{\Delta x_{k-1}} \right).
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Полученная система $K - 2$ уравнений (8.10) служит для определения неизвестных $\varphi''(x_k)$, по которым совместно с заданными значениями u_k находятся, с учетом представления для коэффициентов (8.8), коэффициенты a_k, b_k, c_k, d_k . Перед расчетом необходимо задать значения $\varphi''(x_1)$ и $\varphi''(x_K)$, которые для кубических сплайнов обычно принимаются равными нулю:

$$\varphi''(x_1) = \varphi''(x_K) = 0. \tag{8.11}$$

Формула (8.10) может быть записана в матричной форме

$$A\varphi'' = \mathbf{y}, \tag{8.12}$$

где

$$A = \begin{vmatrix} 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \dots & \dots & 0 \\ \Delta x_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \Delta x_{K-2} & 2(\Delta x_{K-2} + \Delta x_{K-1}) \end{vmatrix}.$$

Матрица A системы (8.12) является трехдиагональной симметричной и имеет положительные диагональные элементы, следовательно, она положительно-определенная. Тем самым обеспечивается существование и единственность решения системы (8.12). Решение может быть найдено методом исключения Гаусса [30].

Иногда рациональнее представить краевые условия для вторых производных в виде

$$\varphi''(x_1) = \alpha\varphi''(x_2), \quad \varphi''(x_{k-1}) = \alpha\varphi''(x_k), \quad (8.13)$$

где α, β — произвольные числа. На практике часто выбирают $\alpha = \beta = 1$, так что вторые производные в точках x_1 и x_k равны вторым производным в точках соответственно x_2 и x_{k-1} . Нередко используется условие $\alpha = \beta = 1/2$.

Подставим условия (8.13) в систему уравнений (8.10), в результате для $k = 2$ и $k = K - 1$ получим

$$\begin{aligned} ((2 + \alpha)\Delta x_1 + 2\Delta x_2)\varphi''(x_2) + \Delta x_2\varphi''(x_3) &= 6 \left(\frac{\Delta u_2}{\Delta x_2} - \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} \right), \\ \Delta x_{K-2}\varphi''(x_{K-2}) + (2\Delta x_{K-2} + (2 + \beta)\Delta x_{K-1})\varphi''(x_{K-1}) &= \\ &= 6 \left(\frac{\Delta u_{K-1}}{\Delta x_{K-1}} - \frac{\Delta u_{K-2}}{\Delta x_{K-2}} \right). \end{aligned}$$

Остальные уравнения остаются без изменения. Это означает, что в матрице системы (8.12) меняются только по два элемента в первой и последней строках, а также первая и последняя компоненты вектора свободных членов \mathbf{y} . Существование и однозначность кубических сплайнов обеспечивается в этом случае при соблюдении следующих условий:

$$-\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} + 2 \right) \leq \alpha < \infty, \quad -\left(\frac{\Delta x_{K-2}}{\Delta x_{K-1}} + 2 \right) \leq \beta < \infty.$$

До сих пор рассматривалась следующая схема расчета кубических сплайнов: по заданных x_k , u_k и граничным условиям (8.11)

либо (8.13) определяется вектор вторых производных φ'' путем решения системы линейных уравнений (8.12), далее по x_k , y_k , $\varphi''(x_k)$ и формуле (8.8) рассчитываются коэффициенты a_k , b_k , c_k , d_k и с использованием выражения (8.4) вычисляются кубические сплайны. Аналогичным способом кубические сплайны можно рассчитать, используя следующие три последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{\varphi'(x_k)\}$. Условия (8.5) и (8.6) дают выражения для коэффициентов

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\Delta x_k^2} \left(-2 \frac{\Delta u_k}{\Delta x_k} + \varphi'(x_k) + \varphi'(x_{k+1}) \right), \\ b_k &= \frac{1}{\Delta x_k} \left(3 \frac{\Delta u_k}{\Delta x_k} \varphi'(x_k) - \varphi'(x_{k+1}) \right), \\ c_k &= \varphi'(x_k), \quad d_k = u_k, \quad k = 1, 2, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Вторые производные, выраженные через первые, определяются формулами вида

$$\begin{aligned} \varphi''(x_k) &= \frac{2}{\Delta x_k} \left(\frac{\Delta u_k}{\Delta x_k} 2\varphi'(x_k) - \varphi'(x_{k+1}) \right), \\ \varphi''(x_K) &= \frac{2}{\Delta x_{K-1}} \left(-3 \frac{\Delta u_{K-1}}{\Delta x_{K-1}} + \varphi'(x_{K-1}) + 2\varphi'(x_K) \right). \end{aligned}$$

Условие непрерывности сплайн-функций в узловых точках для $k = 2, 3, \dots, K-1$ записываются в виде

$$f''_{k-1}(x_k) = f''_k(x_k). \quad (8.15)$$

Подставим условия (8.7) в формулу (8.15), получим

$$6a_{k-1}\Delta x_{k-1} + 2b_{k-1} = 2b_k. \quad (8.16)$$

Используя выражение (8.14) в формуле (8.16), получаем систему $K-2$ линейных уравнений с неизвестными $\varphi'(x_2), \dots, \varphi'(x_{K-1})$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_k} \varphi'(x_{k-1}) + 2 \left(\frac{1}{\Delta x_{k-1}} + \frac{1}{\Delta x_k} \right) \varphi'(x_k) + \frac{1}{\Delta x_k} \varphi'(x_{k+1}) &= \\ = \frac{3}{\Delta x_k} \frac{\Delta u_{k-1}}{\Delta x_{k-1}} + \frac{3}{\Delta x_k} \frac{\Delta u_k}{\Delta x_k}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где $\varphi'(x_1)$ и $\varphi'(x_K)$ задаются заранее. Следует отметить, что матрица коэффициентов системы (8.17) имеет свойства, аналогичные

свойствам матрицы системы (8.12). Поэтому существование и единственность решения системы (8.17) гарантируется. Как и раньше, для получения решения системы можно использовать метод Гаусса [30].

До сих пор рассматривалось применение кубических сплайнов для интерполяции. Перейдем теперь к рассмотрению использования сплайнов для сглаживания экспериментальных данных u_k .

Пусть наблюдения и их координаты удовлетворяют соотношениям (8.1) и (8.2). Краевые условия будем задавать в точках x_1 и x_K значениями первой либо второй производной искомой функции $\varphi(x)$, т. е. $\varphi'(x_1)$ и $\varphi'(x_K)$ либо $\varphi''(x_1)$ и $\varphi''(x_K)$. Для расчета аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ поставим условие пропорциональности разности $(u_k - \varphi(x_k))$ скачку третьей производной в точках $(k = 2, 3, \dots, K-1)$ [7]:

$$g_k(u_k - \varphi(x_k)) = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (8.18)$$

где

$$\begin{aligned} g_k &> 0, \quad \alpha_1 = f_1'''(x_1), \\ \alpha_k &= f_k'''(x_k) - f_{k-1}'''(x_k), \quad \alpha_n = f_1'''(x_n), \end{aligned}$$

f_k — полиномы, описываемые формулой (8.4), g_k — коэффициенты пропорциональности, которые должны быть положительными. Используя условия (8.18) и уравнения (8.8) для коэффициентов, получаем систему K уравнений с $K-2$ неизвестными $\varphi''(x_2)$ (для $k = 2, \dots, K-1$) и K неизвестными $\varphi(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_1}(\varphi''(x_1) - \varphi''(x_2)) &= g_1(u_1 - \varphi(x_1)), \\ \frac{1}{\Delta x_{k-1}}(\varphi''(x_{k-1}) - \varphi''(x_k)) - \frac{1}{\Delta x_k}(\varphi''(x_k) - \varphi''(x_{k+1})) &= \\ &= g_k(u_k - \varphi(x_k)), \\ \frac{1}{\Delta x_{K-1}}(\varphi''(x_{K-1}) - \varphi''(x_K)) &= g_K(u_K - \varphi(x_K)). \end{aligned}$$

Кроме того, мы имеем еще $K-2$ уравнений относительно тех же неизвестных, которые получаются путем замены u_k на $\varphi(x_k)$. Приняв краевые условия для второй производной в виде (8.11), запишем названные системы в матричной форме

$$-B^T \varphi'' + G\varphi = G\mathbf{u}, \quad A_1 \varphi'' + B\varphi = 0, \quad (8.19)$$

где

$$g = \begin{vmatrix} g_1 \\ & g_2 \\ & & \ddots \\ & & & g_K \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\Delta x_1} & \left(\frac{1}{\Delta x_1} + \frac{1}{\Delta x_2}\right) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta x_1} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\Delta x_2} & -\frac{1}{\Delta x_{K-1}} \end{vmatrix},$$

$$\varphi'' = [\varphi''(x_2), \dots, \varphi''(x_2)], \quad \varphi = [\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k)],$$

$$\mathbf{u} = [u-1, \dots, u_k].$$

Матрица A_1 получается из матрицы A системы (8.12) умножением всех ее элементов на $1/6$. Так как матрица A является положительно-определенной, а для положительных g_k и диагональная матрица G — положительно-определенная, то система (8.12) имеет решение для всех g_k , удовлетворяющих неравенству $0 < g_k < \infty$.

Рассмотрим влияние выбора значения g_k на результат сглаживания. Умножим первую систему уравнений (8.12) на матрицу G^{-1} :

$$-G^{-1}B^T\varphi'' + I\varphi'' = I\varphi,$$

где E — единичная матрица. При стремлении g_k к бесконечности первый член матричного уравнения будет стремиться к нулю и $\varphi(x_k)$ будет стремиться к u_k . При этом вторая система (8.19) переходит в систему (8.12), и мы приходим к задаче интерполяции кубическими сплайн-функциями. При $g_k \rightarrow 0$ значения $\varphi(x_k)$ удаляются от наблюденных значений u_k . В этом случае аппроксимация сплайн-функциями соответствует аппроксимации прямой линией методом наименьших квадратов. Выбирая значения весовых множителей g_k между описанными пределами, можно добиваться требуемой степени сглаживания экспериментальных данных.

Перейдем теперь к решению системы уравнений (8.19). Из второй системы легко определить вектор φ , так как G является диагональной матрицей и легко обращается:

$$\varphi = G^{-1}(B^T\varphi'' + Gu).$$

Подставим это выражение в первую систему и получим оценку для вектора второй производной

$$\varphi'' = -(A_1 + BG^{-1}B^T)^{-1}B\mathbf{u}.$$

Матрица $A_1 + BG^{-1}B^T$ является пятидиагональной и положительно-определенной, поэтому решение системы может быть найдено методом Гаусса.

Рассмотрим результаты сглаживания эффективной скорости вдоль профиля. На рис. 8.1 представлены сглаженные и исходные данные при разных значениях весовых множителей g_k , которые принимаются для всех точек одинаковыми: $g_k = DP$. Анализ кривых показывает, что с уменьшением весового множителя от 1 до 0,0001 происходит переход от сглаживания высоких частот к сглаживанию низкочастотной составляющей колебания.

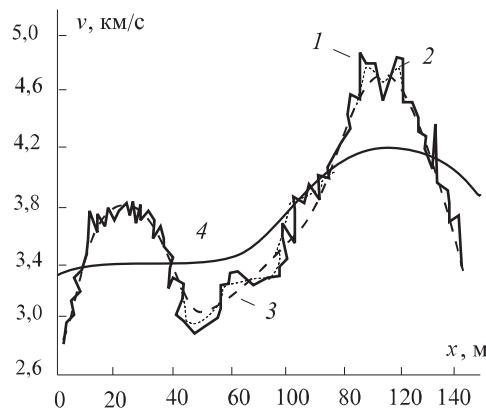


Рис. 8.1. Сглаживание эффективной скорости вдоль профиля при помощи кубических сплайн-функций:
1 — исходные данные, 2 — $DP = 10^{-1}$, 3 — $DP = 10^{-2}$, 4 — $DP = 10^{-5}$.

На рис. 8.2 представлен пример сглаживания кубическими сплайнами силы тяжести $\Delta g(x)$ вдоль профиля. Полученные кривые удобно использовать на последующих этапах интерпретации.

Широкое применение аппроксимации при помощи сплайн-функций возможно для решения прямой задачи сейсморазведки. Ско-

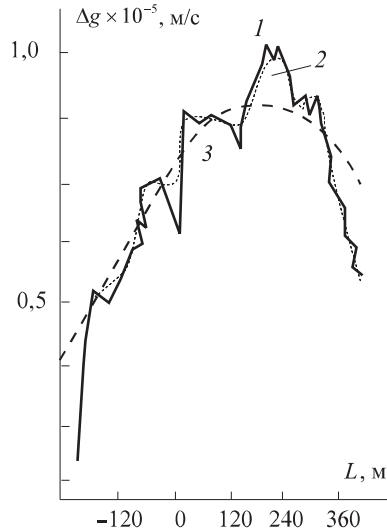


Рис. 8.2. Сглаживание силы тяжести вдоль профиля:
1 — исходные данные, 2 — $DP = 1$, 3 — $DP = 10^{-4}$.

ростные границы геологической модели задаются в общем случае точками в x -, z -координатах. В таких узловых точках первая производная часто терпит разрыв, что приводит к безуспешным итерациям при применении лучевого метода и требует больших затрат машинного времени. Применяя для аппроксимации границ кубические сплайн-функции, мы не только добиваемся хорошей степени гладкости, но и сохраняем при этом непрерывность первой производной.

8.2. Периодические и параметрические сплайн-функции

Для интерполяции или аппроксимации замкнутых или периодических кривых могут быть использованы кубические сплайны с периодическими краевыми условиями [141]:

$$f_1(x_1) = f_{K-1}(x_K), \quad f'_1(x_1) = f'_{K-1}(x_K), \quad f''_1(x_1) = f''_{K-1}(x_K). \quad (8.20)$$

Соотношения (8.20) предполагают выполнение условий, накладываемых на функцию $\varphi(x_k)$:

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_K), \quad \varphi'(x_1) = \varphi'(x_K), \quad \varphi''(x_1) = \varphi''(x_K). \quad (8.21)$$

Рассмотрим сначала задачу интерполяции. Используя второе (стыковка по первой производной) из условий (8.20), записываем уравнение для $k = 2$ системы (8.10) в виде

$$\begin{aligned} 2(\Delta x_{K-1} + \Delta x_1)\varphi''(x_1) + \Delta x_1\varphi''(x_2) + \Delta x_{K-1}\varphi''(x_{K-1}) = \\ = 6 \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} - \frac{\Delta u_{K-1}}{\Delta x_{K-1}} \right). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Для $k = K - 1$ получим из системы уравнений (8.10) с использованием условия (8.21)

$$\begin{aligned} \Delta x_{K-1}\varphi''(x_1) + \Delta x_{K-2}\varphi''(x_{K-2}) + 2(\Delta x_{K-2} + \Delta x_{K-1}) \times \\ \times \varphi''(x_{K-1}) = 6 \left(\frac{\Delta u_{K-1}}{\Delta x_{K-1}} - \frac{\Delta u_{K-2}}{\Delta x_{K-2}} \right). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Учитывая уравнения (8.22) и (8.23), переписываем для нашего случая систему уравнений (8.12) в виде

$$A_2 \varphi'' = \mathbf{y}_2,$$

где $\varphi'' = [\varphi''(x_1), \varphi''(x_2), \dots, \varphi''(x_{K-1})]^T$ — вектор-столбец;

$$\mathbf{y}_2 = \left[\begin{array}{c} 6 \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} - \frac{\Delta u_{K-1}}{\Delta x_{K-1}} \right), 6 \left(\frac{\Delta u_2}{\Delta x_2} - \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} \right), \dots \\ \dots, 6 \left(\frac{\Delta u_{K-1}}{\Delta x_{K-1}} - \frac{\Delta u_{K-2}}{\Delta x_{K-2}} \right) \end{array} \right]$$

— вектор-столбец;

$$A_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 2(\Delta x_{K-1} + \Delta x_1)0 & \dots & \Delta x_1 & \\ \Delta x_1 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \Delta x_{K-1} & \dots & 2(\Delta x_{K-2} + \Delta x_{K-1}) & \end{array} \right\|.$$

Матрица A_2 циклически трехдиагональна, и можно показать, что она положительна-определенна. Для решения системы можно использовать метод исключения Гаусса.

При решении задачи интерполяции замкнутых кривых мы вынуждены отказаться от условия строгой монотонности данных по аргументу x_k (см. условия (8.1)). Будем представлять кривую набором произвольных точек (x_k, u_k) , $k = 1, 2, \dots, K$, параметрически при помощи двух функций $x = x(v)$ и $u = u(v)$, причем для параметра v будем предполагать строгую монотонность $v_1 < v_2 < \dots < v_N$.

Будем описывать кривую в виде набора кубических сплайнов двух типов: (v_k, x_k) и (v_k, u_k) , $k = 1, 2, \dots, K$. При этом предположим, что значения первых либо вторых производных x'_1, φ'_1 или x''_1, φ''_1 по τ в точках v_1 и v_K заданы заранее. На практике обычно параметр v выбирают следующим образом:

$$v_1 = 0, \quad v_k = v_{k-1} + \Gamma_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (8.24)$$

где

$$\Gamma_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta u_k^2}.$$

Этот метод может быть легко обобщен на трехмерный случай (x_k, u_k, v_k) . Для параметра v используется представление вида

$$v_1 = 0, \quad v_k = v_{k-1} + \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta u_k^2 + \Delta v_k^2}, \quad k = 2, \dots, K,$$

и для каждой компоненты рассчитывается своя сплайн-функция. Для интерполяции замкнутой кривой на плоскости либо в пространстве необходимо задать граничные условия: $x_1 = x_K, \varphi_1 = \varphi_K$ и затем воспользоваться параметрическими сплайнами.

Далее рассмотрим задачу аппроксимации немонотонных и замкнутых кривых. При сглаживании немонотонных функций с помощью параметрических сплайнов для заданных координат (u_k, v_k) , которые в общем случае содержат случайную компоненту, рассчитываются аппроксимирующие кубические сплайны вида $(v_k, \psi_k), (v_k, \varphi_k)$. Значение v_k является аргументом и рассчитывается по формуле (8.24). Коэффициенты пропорциональности между скачком третьей производной и расхождением наблюденных данных и аппроксимированных выбираются в общем случае для каждой координаты отдельно:

$$\psi'''(t_k) = g_k(v_k - \psi(t_k)), \quad \varphi'''(t_k) = h_k(u_k - \varphi(t_k)).$$

Для аппроксимации замкнутых кривых можно использовать периодические сплайн-функции соответственно по переменным u и v . В качестве параметра будем рассматривать t_k , определяемое по формуле (8.24) (вместо Δx_k используется Δv_k). Предположим выполнение следующих граничных условий:

$$u_1 = u_k, \quad p_1 = p_k, \quad v_1 = v_k, \quad g_1 = g_k, \quad (8.25)$$

а также

$$\varphi_1 = \varphi_K, \quad \varphi''_1 = \varphi''_K, \quad \psi_1 = \psi_K, \quad \psi''_1 = \psi''_K. \quad (8.26)$$

Используя условия (8.25) и (8.26), получаем систему уравнений типа (8.19) соответственно для переменных $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi''_1, \dots, \varphi''_{k-1}, \psi_1, \dots, \psi_{k-1}, \psi''_1, \dots, \psi''_{k-1}$. Решение системы находим методами, описанными ранее.

Рассмотрим результаты аппроксимации изолиний полного вектора магнитного поля (рис. 8.3). Анализ рисунка показывает, что

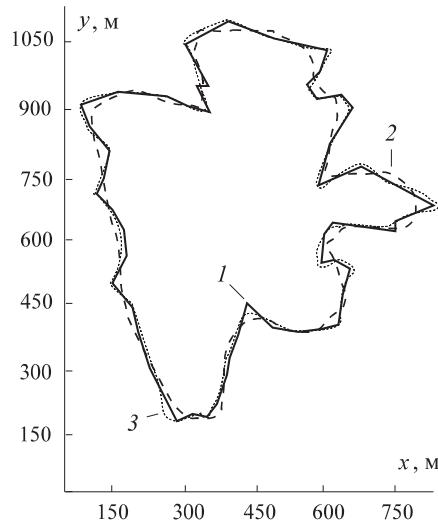


Рис. 8.3. Сглаживание изолиний полного вектора магнитного поля параметрическими сплайн-функциями при разных весовых коэффициентах: 1 — исходные данные; 2 — $DP = 10^{-3}$; 3 — $DP = 10^{-5}$.

степень сглаживания увеличивается с уменьшением величины весовых множителей. Подобный алгоритм может быть использован для сглаживания и построения изолиний магнитного поля, а также карт изолиний t_0 и карт другой геофизической природы.

8.3. Применение сплайн-функций для сглаживания гистограмм

При проведении массовой статистической обработки результатов геофизических наблюдений часто возникает задача аппроксимации гистограмм с целью получения дифференцируемой кривой плотности распределения.

Будем считать, что гистограмма описывается набором абсцисс $x_1 < x_2 < \dots < x_K$ и соответствующей ступенчатой функцией, имеющей в интервале $[x_k, x_{k+1}]$ высоту H_k , $k = 1, 2, \dots, K - 1$. Задача заключается в проведении гладкой (дифференцируемой) кривой, интеграл от которой в пределах $[x_k, x_{k+1}]$ равен площади соответствующего прямоугольника гистограммы [141]. Предположим также, что для каждой абсциссы x_k задается ордината $\varphi(x_k)$, через которую должна проходить кривая. В интервале $[x_k, x_{k+1}]$ определим коэффициенты полинома четвертой степени:

$$f_k(x) = a_k(x - x_k)^4 + b_k(x - x_k)^3 + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k) + l_k \quad (8.27)$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} f_k(x_k) &= \varphi(x_k), & f_k(x_{k+1}) &= \varphi(x_{k+1}), \\ f'_k(x_k) &= \varphi'(x_k), & f'_k(x_{k+1}) &= \varphi'(x_{k+1}), \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x) dx &= H_k \Delta x_k. \end{aligned}$$

Исходя из этих соотношений, находим коэффициенты полинома:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{5}{\Delta x_k^4} \left[\frac{1}{2} \Delta x_k (\varphi'(x_{k+1}) - \varphi'(x_k)) - \right. \\ &\quad \left. - 3(\varphi(x_{k+1}) + \varphi'(x_k)) + 2H_k \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= -\frac{4}{\Delta x_k^3} \left[\frac{1}{2} \Delta x_k (\varphi'(x_{k+1}) - 3\varphi'(x_k)) - \right. \\
&\quad \left. - 7\varphi(x_{k+1}) - 8\varphi(x_k) + 15H_k \right], \\
c_k &= \frac{3}{2\Delta x_k^2} [\Delta x_k (\varphi'(x_{k+1}) - 3\varphi'(x_k) - 8\varphi(x_{k+1}) - \\
&\quad - 12\varphi(x_k)) + 20H_k], \quad d_k = \varphi'(x_k), \quad e_k = \varphi(x_k).
\end{aligned}$$

Условие непрерывности второй производной записывается в виде $f'_{k-1}(x_k) = f''_k(x_k)$. Используя его и представление (8.27), получаем систему уравнений для нахождения производных $\varphi'(x_k)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta x_{k-1}} \varphi'(x_{k-1}) + 3 \left(\frac{1}{\Delta x_{k-1}} + \frac{1}{\Delta x_k} \right) \varphi'(x_k) - \\
&- \frac{1}{\Delta x_{k+1}} = 20 \left[\frac{H_k}{\Delta x_k^2} - \frac{H_{k-1}}{\Delta x_{k+1}^2} \right] + 8 \frac{\varphi(x_{k-1})}{\Delta x_{k-1}^2} + \\
&+ 12 \left[\frac{1}{\Delta x_{k-1}^2} + \frac{1}{\Delta x_k^2} \right] - 8 \frac{\varphi(x_{k+1})}{\Delta x_k^2}. \tag{8.28}
\end{aligned}$$

Необходимо задать теперь краевые условия для первых производных в точках x_1, x_K : $\varphi'(x_1), \varphi'(x_K)$. Система (8.28) имеет трехдиагональную матрицу коэффициентов, которая является положительно-определенной, а значит решение системы существует и единственno.

Для расчета $\varphi(x_k)$ можно предложить следующий способ:

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1) &= g_1 H_1, \quad \varphi(x_k) = g_k H_{(k-1)} + (1-g_k) H_k, \\
\varphi(x_K) &= g_K H_{K-1},
\end{aligned}$$

где g_k ($k = 1, 2, \dots, K$) — произвольные коэффициенты, лежащие в интервале $[0, 1]$. Иногда g_k выбирают одинаковыми для всех интервалов и равными $1/2$.

В качестве примера рассмотрим результаты сглаживания гистограмм скоростей, определенных по сейсмическим данным для двух пластов (рис. 8.4). Полученные кривые удобно использовать для вычисления моментов распределения скорости. Сглаживание гистограмм может найти применение и на других этапах обработки.

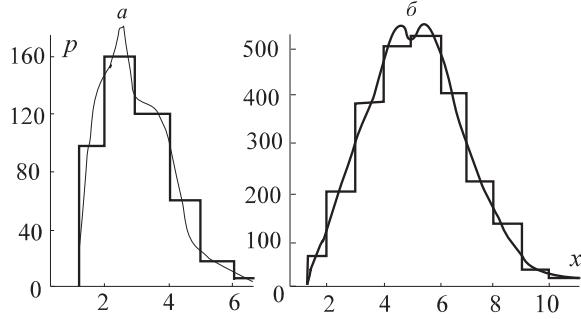


Рис. 8.4. Сглаживание гистограмм скорости сплайн-функциями. *a* — пласт №1, $g_k = 0, 3, 0, 3, 0, 5, 0, 6, 0, 3, 0, 3, 0, 2$; *б* — пласт №2, $g_k = 0, 0, 6, 0, 5, 0, 4, 0, 1, 0, 7, 0, 4, 0, 6, 0, 3, 0, 2, 0, 5, 0, 3, 0, 3$.

8.4. Алгоритмы аппроксимации сейсмического горизонта с учетом скважинных наблюдений

Пусть для исследуемой площади имеются сейсмические наблюдения по ряду профилей, зарегистрированные способом многократных перекрытий, причем схема расположения профилей произвольна [100]. Кроме того, имеются данные бурения для нескольких глубоких скважин. В результате обработки по каждому из профилей получены глубинные разрезы. Будем считать, что разрезы удовлетворяют условиям увязки, т. е. в точках пересечения профилей расхождение глубин не превышает пороговых значений. В качестве исходных экспериментальных данных $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_m(x_k, y_k)]$ примем значения глубин горизонтов, полученные с глубинных разрезов в точках, с координатами x_k, y_k ; k — номер точки на исследуемой площади, $k = 1, 2, \dots, K$; m — номер горизонта, $m = 1, 2, \dots, M$. Модель экспериментального материала имеет вид

$$\mathbf{U} = \psi \boldsymbol{\rho} + \mathbf{n}, \quad (8.29)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_M \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\rho}_1 \\ \boldsymbol{\rho}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{\rho}_M \end{vmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \dots \\ \mathbf{n}_M \end{vmatrix},$$

$$\psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M],$$

ρ_m — вектор параметров, ψ_m — структурная матрица m -го горизонта. Например, для полинома второй степени

$$\psi_m = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2^2 & x_2 y_1 & y_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_K & y_1 & x_K^2 & x_K y_K & y_K^2 \end{vmatrix}.$$

Случайная компонента $\mathbf{n}_m = [n_m(x_k, y_k)]$ в точках с координатами x_k, y_k принимается центрированной, корреляционные связи между горизонтами задаются ковариационной матрицей

$$r_n = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1M} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{M1} & R_{M2} & \dots & R_{MM} \end{vmatrix}. \quad (8.30)$$

Значения глубин горизонтов \mathbf{V} в скважинах принимаются в виде линейных условий, которые накладываются на параметры аппроксимирующих плоскостей:

$$a\rho = \mathbf{V},$$

где

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_M], \quad \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \dots \\ \mathbf{V}_M \end{vmatrix},$$

\mathbf{V}_m — набор глубин m -го горизонта по скважинным данным; A_m — матрица плана для m -го горизонта, которая, например, для полинома второй степени имеет вид

$$A_m = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2^2 & x_2 y_1 & y_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_K & y_1 & x_K^2 & x_K y_K & y_K^2 \end{vmatrix}.$$

Оценка $\tilde{\rho}$ определяется формулой (см. выражения (6.23), (6.25))

$$\tilde{\rho}^T = \hat{\rho}^T + (\mathbf{V}^T - \tilde{\rho} A^T)(AB^{-1}A^T)^{-1}AB^{-1}, \quad (8.31)$$

где

$$\hat{\rho} = B^{-1} \psi^T R_n^{-1} \mathbf{U}, \quad B = \psi^T R_n^{-1} \psi, \quad (8.32)$$

и является оценкой параметров ρ по методу наименьших квадратов без учета линейных связей.

Ковариационная матрица оценок параметров $\hat{\rho}$ записывается в виде (см. формулы (6.26), (6.27))

$$R_{\hat{\rho}} = R_{\hat{\rho}} - B^{-1} A^T (AB^{-1} A^T)^{-1} AB^{-1}, \quad R_{\hat{\rho}} = B^{-1},$$

здесь $R_{\hat{\rho}}$ — ковариационная матрица оценок параметров $\vec{\rho}$, рассчитанных по методу наименьших квадратов без учета линейных связей.

Рассмотрим некоторые варианты задания корреляционных связей случайной компоненты модели (8.29), представляющие практический интерес.

8.4.1. Марковский тип корреляционной связи по горизонту и отсутствие корреляции между горизонтами

Матрица R_n (8.30) в этом случае оказывается диагональной и обратная матрица R_n^{-1} легко вычисляется:

$$R_n^{-1} = \begin{vmatrix} R_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрицы R_{mm}^{-1} являются обратными к марковской матрице вида (3.22):

$$R_{mm} = \sigma^2 \begin{vmatrix} 1 & \beta_m & \beta_m^2 & \dots & \beta_m^K \\ \beta_m & 1 & \beta_m & \dots & \beta_m^{K-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_m^K & \beta_m^{K-1} & \beta_m^{K-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Здесь β_m имеет смысл коэффициента корреляции между точками, находящимися на расстоянии $\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ для горизонта

с номером m . Матрица, обратная R_{mm} , легко вычисляется:

$$R_{mm}^{-1} = \frac{1}{\sigma_m^2(1 - \beta_m^2)} \begin{vmatrix} 1 & -\beta_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_m & 1 + \beta_m^2 & -\beta_m^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_m & 1 + \beta_m^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_m & 1 \end{vmatrix}. \quad (8.33)$$

Используя представление (8.33), находим выражение для матрицы B :

$$\begin{aligned} B_{ss'} &= \sum_m \frac{1}{\sigma_m^2(1 - \beta_m^2)} \left[(1 + \beta_m^2) \sum_k \psi_{mks} \psi_{mks'} - \right. \\ &\quad - \beta_m \sum_k (\psi_{mks} \psi_{m(k+1)s'} + \psi_{m(k+1)s} \psi_{mks'}) - \\ &\quad \left. - \beta_m^2 (\psi_{mKs} \psi_{mKs'} + \psi_{m1s} \psi_{m1s'}) \right]. \end{aligned} \quad (8.34)$$

8.4.2. Марковский тип корреляционной связи между горизонтами и отсутствие корреляции по горизонту

Повторяя рассуждения предыдущего варианта, переходим к следующему выражению для матрицы B , аналогичному (8.34):

$$\begin{aligned} B_{ss'} &= \sum_k \left[\sum_m \frac{1}{\sigma_m^2(1 - \beta_m^2)} [(1 + \beta_m^2) \psi_{mks} \psi_{mks'} - \right. \\ &\quad - \beta_m (\psi_{mks} \psi_{(m+1)ks} + \psi_{(m+1)ks} \psi_{mks'}) - \\ &\quad \left. - \beta_m^2 (\psi_{1ks} \psi_{1ks'} + \psi_{Mks} \psi_{Mks'})] \right]. \end{aligned}$$

8.4.3. Проверка соответствия сейсмических наблюдений скважинным данным о глубине горизонта

Большой практический интерес представляет следующая постановка задачи. Пусть методом максимального правдоподобия найдены оценки параметров аппроксимирующей поверхности с учетом $\hat{\rho}$ и без учета $\hat{\rho}$ скважинных наблюдений. Необходимо решить вопрос о соответствии сейсмических наблюдений скважинным данным о

глубине горизонта. Такая задача может быть решена методом проверки параметрических гипотез (см. § 7.1). Рассмотрим линейную модель (8.29) (для простоты анализа положим $M = 1$ и $R_n = \sigma^2 I$) и проверим гипотезу $H_0: a\rho = V$. В качестве критерия проверки гипотезы воспользуемся методом отношения правдоподобия (МП):

$$q = \frac{L(\tilde{\rho}, \tilde{\sigma}^2)}{L(\hat{\rho}, \hat{\sigma}^2)}. \quad (8.35)$$

Как было показано в § 6.2, оценки $\hat{\rho}$ методом наименьших квадратов и $\hat{\rho}_{\text{МП}}$ методом максимального правдоподобия совпадают для нормального распределения случайной компоненты \mathbf{n} .

Найдем теперь оценки ρ при условии, что справедлива гипотеза $H_0: A\rho = V$. Метод максимального правдоподобия в этом случае сводится к задаче на условный экстремум, решение которой может быть найдено методом множителей Лагранжа. Составим функционал вида

$$F(\rho) = \ln L2\lambda^T(A\rho - V), \quad (8.36)$$

где λ — вектор-столбец неопределенных множителей Лагранжа. Оценку $\hat{\rho}_{\text{МП}}$ найдем путем максимизации (8.36) при условии, что справедливо равенство $A\rho = V$:

$$\partial F / \partial \rho. \quad (8.37)$$

После простых преобразований получим

$$\tilde{\rho}_{\text{МП}} = \hat{\rho}_{\text{МП}} + 2\sigma^2\lambda^T(\psi^T\psi)^{-1}. \quad (8.38)$$

Помножим правую и левую части равенства (8.38) справа на A^T и, используя равенство $\tilde{\rho}^T A^T = V^T$, будем иметь

$$\lambda^T = \frac{1}{2\sigma^2}(V^T - \rho_{\text{МП}}^T A^T)(A(\psi^T\psi)^{-1}A^T)^{-1}. \quad (8.39)$$

Подставляя λ^T из формулы (8.39) в выражение (8.38), получим

$$\tilde{\rho}_{\text{МП}}^T = \hat{\rho}_{\text{МП}}^T + (V^T - \rho_{\text{МП}}^T A^T)(A(\psi^T\psi)^{-1}A^T)^{-1}A(\psi^T\psi)^{-1}.$$

Найденная оценка $\tilde{\rho}_{\text{МП}}$ совпадает с оценкой $\tilde{\rho}$, рассчитанной по формуле (6.25). Оценку для среднеквадратичного отклонения можно записать в виде

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{K}(\mathbf{u} - \psi\tilde{\rho})^T(\mathbf{u} - \psi\tilde{\rho}).$$

Подставляя найденные оценки в функцию правдоподобия, получаем ее максимальные значения для гипотезы H_0 и ее альтернативы:

$$L_{\max}(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\rho}) = (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-K/2}q^{-K/2}, \quad (8.40)$$

$$L_{\max}(\hat{\sigma}^2, \hat{\rho}) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-K/2}q^{-K/2}. \quad (8.41)$$

Используя выражения (8.40), (8.41), перепишем формулу (8.35) в виде

$$q = \frac{L_{\max}(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\rho})}{L_{\max}(\hat{\sigma}^2, \hat{\rho})} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}^2} \right)^{K/2}. \quad (8.42)$$

Применение критерия сводится к следующему: если $q < q_n$, то гипотеза H_0 отвергается, если $q \geq q_n$, то гипотеза H_0 справедлива, и в нашем случае значения глубин по скважинным данным не противоречат значениям глубин, рассчитанным по сейсмическим наблюдениям. Для определения порогового значения q_n необходимо найти распределение q , но более простой путь состоит в установлении связи рассмотренного критерия с критерием Фишера. Если гипотеза H_0 верна, то соотношение вида

$$F = \frac{[(\mathbf{u} - \psi\tilde{\rho})^2 - (\mathbf{u} - \psi\hat{\rho})^2]/Q}{(\mathbf{u} - \psi\hat{\rho})^2/(K - S)} \quad (8.43)$$

имеет распределение Фишера (см. п. 1.8.6) с Q и $K - S$ степенями свободы ($F \in \Phi_{Q, K-S}$). Как показывает анализ формул (8.42) и (8.43), функция F легко выражается через q :

$$F = \frac{K - S}{Q} [q^{-2/K} - 1].$$

Применение критерия отношения правдоподобия сводится к критерию Фишера: если $F > \Phi_{Q, K-S, \alpha}$ (величина $\Phi_{Q, K-S, \alpha}$ вычисляется с учетом заданного уровня значимости α), то гипотеза H_0 отвергается и делается заключение о несоответствии с заданной вероятностью ошибки значений глубин по скважинным данным значениям глубин горизонта, рассчитанным по сейсмическим данным. Значение $\Phi_{Q, K-S, \alpha}$ находится по таблице распределения Фишера при заданных $Q, K - S$ и принятой вероятности ошибки (принято-му уровню значимости).

8.4.4. Учет случайного характера измерений глубины по скважинным данным

Рассмотренная постановка задачи предполагает задание глубины горизонта по скважинным наблюдениям точными значениями. Такое предположение оправдано, если точность сейсмических наблюдений существенно ниже точности скважинных данных. Однако практический интерес представляет учет случайного характера измерений глубины по скважинным данным.

Модель экспериментального материала в этом случае имеет следующий вид: $\mathbf{V} = \mathbf{A}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Здесь \mathbf{A} , A , $\boldsymbol{\rho}$ имеют тот же смысл, что и ранее, а $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon(x_k, y_k)]$ — случайная компонента модели в точках с координатами (x_k, y_k) с ковариационной матрицей P_ε .

Оценки параметра $\boldsymbol{\rho}$ найдем из условия минимизации квадратичной формы вида

$$l(\boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{u} - \psi\boldsymbol{\rho})^T R_n^{-1} (\mathbf{u} - \psi\boldsymbol{\rho}) + (\mathbf{V} - A\boldsymbol{\rho})^T P_\varepsilon^{-1} (\mathbf{V} - A\boldsymbol{\rho}). \quad (8.44)$$

Формула (8.44) представляет собой функцию отклика в пространстве параметров $\boldsymbol{\rho}$ совместно для сейсмических и скважинных наблюдений. Оценку вектора параметров $\boldsymbol{\rho}$ находим путем минимизации (8.44) по $\boldsymbol{\rho}$:

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}^T = (\mathbf{u}^T R_n^{-1} \psi + \mathbf{V}^T P_\varepsilon^{-1} A)(\psi^T R_n^{-1} \psi + A^T P_\varepsilon^{-1} A)^{-1}. \quad (8.45)$$

Формула (8.45) легко преобразуется к виду

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}^T = (\hat{\boldsymbol{\rho}}^T B_1 + \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\text{скв}}^T)(E + B_1)^{-1}, \quad (8.46)$$

где $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ определяется формулой (6.11):

$$\begin{aligned} B_1 &= \Psi^T R_n^{-1} \Psi (A^T P_\varepsilon^{-1} A)^{-1}, \\ \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\text{скв}}^T &= \mathbf{V}^T P_\varepsilon^{-1} A (A^T P_\varepsilon^{-1} A)^{-1}. \end{aligned}$$

Формула (8.46) может быть упрощена, если выполняется условие

$$\lambda_{\max}(B_1) < 1, \quad (8.47)$$

где λ_{\max} — максимальное собственное число матрицы B_1 .

Анализ структуры матрицы B_1 показывает, что в большинстве практических интересных случаев, когда точность скважинных данных о глубине горизонта выше точности значений глубин, рассчитанных по сейсмическим данным, неравенство (8.47) выполняется и

формула (8.46) может быть переписана в следующей приближенной форме:

$$\bar{\rho}^T \approx (\hat{\rho}^T B_1 + \hat{\rho}_{\text{сKB}}^T)(E - B_1). \quad (8.48)$$

При решении практических задач часто предполагают случайные компоненты \mathbf{n} и $\boldsymbol{\varepsilon}$ некоррелированными, при этом формулы (8.46), (8.48) для оценки $\boldsymbol{\rho}$ упрощаются:

$$\bar{\rho}^T = \left(\frac{\mathbf{u}^T \Psi}{\sigma_n^2} + \frac{\mathbf{V}^T A}{\sigma_\varepsilon^2} \right) \left(\frac{\Psi^T \Psi}{\sigma_n^2} + \frac{A^T A}{\sigma_\varepsilon^2} \right)^{-1}, \quad (8.49)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &\sim \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_n^2} \hat{\rho}^T (\Psi^T \Psi)(A^T A)^{-1} + \hat{\rho}_{\text{сKB}}^T \right) \times \\ &\times \left(E - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_n^2} \hat{\rho}^T (\Psi^T \Psi)(A^T A)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Для простоты анализа, дисперсии случайных компонент σ_n^2 и σ_ε^2 предполагаются одинаковыми для всех горизонтов.

Рассмотрим некоторые предельные переходы для формулы (8.49):

- 1) $\lim_{\sigma_\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\rho} = \hat{\rho}_{\text{сKB}}$; 2) $\lim_{\sigma_n \rightarrow 0} \bar{\rho} = \hat{\rho}$;
- 3) $\lim_{\sigma_n \rightarrow 0} \bar{\rho} = \hat{\rho}_{\text{сKB}}$; 4) $\lim_{\sigma_\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\rho} = \hat{\rho}$.

Первый и третий, второй и четвертый переходы оказываются эквивалентными. Это естественный результат, так как при определении оценок параметров по экспериментальным материалам двух типов преимуществом обладает материал с минимальной дисперсией.

Рассмотренный подход, при котором глубины горизонта, полученные по скважинным данным, являются случайными величинами, имеет более общий характер и включает как частный случай способ, при котором глубины, рассчитанные по скважинным данным, принимаются за точные значения и учитываются в виде линейных условий. Покажем это.

Так как глубины, полученные по сейсмическим данным \mathbf{u} и по скважинным наблюдениям \mathbf{V} , независимы, то функция правдоподобия записывается в виде

$$p(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \mathbf{V}) = p(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u})p(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{V}), \quad (8.50)$$

где $p(\rho, \mathbf{u})$, $p(\rho, V)$ имеют нормальные распределения со средними и ковариационными матрицами соответственно Ψ_ρ , R_n ; $A\rho$, P_ε . Для простоты анализа предположим, что случайная компонента некоррелированна, матрица P_ε диагональная и дисперсия для всех скважин одинакова и равна σ_ε . Переход от случайных значений глубин V к фиксированным осуществляется при стремлении σ_ε к нулю:

$$p_\varepsilon(\rho, V) = \lim_{\sigma_\varepsilon \rightarrow 0} p(\rho, V).$$

Такой предельный переход легко осуществить с помощью характеристических функций. Как известно [47], характеристическая функция нормального распределения применительно к нашей модели имеет вид

$$Z(\varepsilon) = \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 \sigma_\varepsilon^2}{2} \right\}, \quad Z_0(\varepsilon) = \lim_{\sigma_\varepsilon \rightarrow 0} Z(\varepsilon) = 1.$$

Осуществляя обратное преобразование Фурье от $Z_0(\varepsilon)$, получаем

$$p_0(\rho, V) = \delta(V - A\rho),$$

и формула (8.50) переписывается в виде

$$p(\rho, \mathbf{u}, V) = p(\rho, \mathbf{u}) \delta(V - A\rho). \quad (8.51)$$

Определение вектора искомых параметров ρ методом максимального правдоподобия на основании выражения (8.51) как раз эквивалентно максимизации функции $p(\rho, \mathbf{u})$ при условии, что $V = A\rho$.

Итак, мы пришли к использованию скважинных данных в форме заданных линейных ограничений.

8.4.5. Применение метода апостериорной вероятности к аппроксимации сейсмического горизонта

Представляет интерес еще один вариант поставленной задачи, который опирается на модели, аналогичные (8.29), (6.21), при условии, что вектор параметров ρ предполагается случайным. Априорная информация о параметре ρ задается в вероятностной форме. Для большинства практически важных ситуаций в качестве априорного распределения можно принять нормальное с вектором средних значений $\langle \rho \rangle$ и матрицей ковариаций D . В качестве решающей

функции для нахождения оценок параметров будем использовать апостериорное распределение ρ при заданных векторах экспериментальных данных \mathbf{u} , \mathbf{V} . Согласно теореме Байеса (см. § 6.9) будем иметь

$$p(\rho/\mathbf{u}, \mathbf{V}) = \frac{1}{p(\mathbf{u}, \mathbf{V})} p(\rho)p(\mathbf{u}, \mathbf{V}/\rho). \quad (8.52)$$

Для нахождения вектора оценок $\hat{\rho}$ воспользуемся методом максимума апостериорной вероятности:

$$\tilde{\rho}_{\text{MAB}} = \max_{\rho} \ln p(\rho/\mathbf{u}, \mathbf{V}).$$

Используя предположение о независимости глубин, рассчитанных по сейсмическим данным \mathbf{u} и по скважинным наблюдениям \mathbf{V} , функцию распределения $p(\mathbf{u}, \mathbf{V}/\rho)$ перепишем в виде

$$p(\mathbf{u}, \mathbf{V}/\rho) = p(\mathbf{u}/\rho)p(\mathbf{V}/\rho). \quad (8.53)$$

Подставляя формулу (8.53) в выражение (8.52) и отбрасывая члены, не зависящие от параметров, получим функцию, которую достаточно максимизировать для нахождения оценок параметров:

$$\begin{aligned} F(\rho) &= -\{(\rho - \langle \rho \rangle)^T D^{-1}(\rho - \langle \rho \rangle) + (\mathbf{u} - \Psi\rho)^T R_n^{-1}(\mathbf{u} - \Psi\rho) + \\ &+ (\mathbf{V} - A\rho)^T P_\varepsilon^{-1}(\mathbf{V} - A\rho)\}. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Максимизируя функцию (8.54) по ρ , получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\text{MAB}} &= [\langle \rho^T \rangle D^{-1} + \mathbf{u}^T R_n^{-1} \Psi + \mathbf{V}^T P_\varepsilon^{-1} A] \times \\ &\times [D^{-1} + \Psi^T R_n^{-1} \Psi + A^T P_\varepsilon^{-1} A]^{-1}. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Элементы информационной матрицы Фишера для принятых моделей записываются в виде

$$\begin{aligned} I_{ss'} &= - \left\langle \frac{\partial \ln p(\mathbf{u}/\rho)}{\partial \rho_s \partial \rho_{s'}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \ln p(\mathbf{V}/\rho)}{\partial \rho_s \partial \rho_{s'}} \right\rangle - \\ &- \left\langle \frac{\partial \ln p(\rho)}{\partial \rho_s \partial \rho_{s'}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Подставляя в выражение (8.56) выражения для $p(\mathbf{u}/\rho)$, $p(\mathbf{V}/\rho)$, $p(\rho)$, получаем после простых преобразований:

$$I = \Psi^T R_n^{-1} \Psi + A^T P_\varepsilon^{-1} A + D^{-1}. \quad (8.57)$$

Для принятых линейных моделей ковариационная матрица оценок параметров вычисляется как обратная к информационной I :

$$R_{\tilde{\rho}_{\text{MAB}}} = [D^{-1} + \Psi^T R_n^{-1} \Psi + A^T P_\varepsilon^{-1} A]^{-1}. \quad (8.58)$$

8.4.6. Случай некоррелированных компонент случайных векторов

Рассмотрим частный, но практически интересный случай некоррелированных случайных компонент n, ε и вектора параметров ρ , т. е. справедливо $D = \sigma_\rho^2 E$, $R_n = \sigma_n^2 E$, $P_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 E$. При принятых предположениях формулы (8.55) и (8.58) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\text{MAB}}^T &= \left[\frac{\langle \rho \rangle}{\sigma_\rho^2} + \frac{\mathbf{u}^T \Psi}{\sigma_n^2} + \frac{\mathbf{V}^T A}{\sigma_\varepsilon^2} \right] \times \\ &\times \left[\frac{1}{\sigma_\rho^2} E + \frac{\Psi^T \Psi}{\sigma_n^2} \frac{A^T A}{\sigma_\varepsilon^2} \right], \end{aligned} \quad (8.59)$$

$$R_{\tilde{\rho}_{\text{MAB}}} = \left[\frac{1}{\sigma_\rho^2} E + \frac{\Psi^T \Psi}{\sigma_n^2} \frac{A^T A}{\sigma_\varepsilon^2} \right]. \quad (8.60)$$

Для дальнейшего анализа выражения (8.59) и (8.60) полезно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\text{MAB}}^T &= [\sigma_n^2 \sigma_\varepsilon^2 \langle \rho \rangle^T + \sigma_\varepsilon^2 \sigma_\rho^2 \mathbf{u}^T \Psi + \sigma_\rho^2 \sigma_n^2 \mathbf{V}^T A] \times \\ &\times R_{\tilde{\rho}_{\text{MAB}}} / (\sigma_\rho^2 \sigma_\varepsilon^2 \sigma_n^2), \end{aligned} \quad (8.61)$$

$$R_{\tilde{\rho}_{\text{MAB}}} = \sigma_\rho^2 \sigma_\varepsilon^2 \sigma_n^2 [\sigma_n^2 \sigma_\varepsilon^2 E + \sigma_\rho^2 \sigma_\varepsilon^2 \Psi^T \Psi + \sigma_n^2 \sigma_\rho^2 A^T A]^{-1}. \quad (8.62)$$

Рассмотрим ряд предельных переходов, опираясь на формулы (8.59)–(8.62):

$$\lim_{\sigma_n \rightarrow 0} \tilde{\rho}_{\text{MAB}}^T = \mathbf{u}^T \Psi (\Psi^T \Psi)^{-1} = \tilde{\rho}^T,$$

$$\lim_{\sigma_\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\rho}_{\text{MAB}}^T = \mathbf{V}^T A (A^T A)^{-1} = \hat{\rho}_{\text{CKB}}^T,$$

$$\lim_{\sigma_\rho \rightarrow 0} \tilde{\rho}_{\text{MAB}}^T = \langle \rho \rangle^T,$$

$$\lim_{\sigma_n \rightarrow 0} R_{\tilde{\rho}_{\text{MAB}}} = \lim_{\sigma_\varepsilon \rightarrow 0} R_{\tilde{\rho}_{\text{MAB}}} = \lim_{\sigma_\rho \rightarrow 0} R_{\tilde{\rho}_{\text{MAB}}} = 0.$$

Итак, при стремлении к нулю дисперсии случайной компоненты глубин, полученных по сейсмическим данным, оценка параметров полностью определяется именно сейсмическими данными. Если скважинные наблюдения обладают нулевой дисперсией, то оценка $\tilde{\rho}_{\text{MAB}}$ определяется только скважинными данными, и, наконец, если априорные представления являются достоверными ($\sigma_\rho \rightarrow 0$), то решение равно заданному вектору средних $\langle \rho \rangle$. Дисперсия $\tilde{\rho}_{\text{MAB}}$ во всех рассмотренных случаях стремится к нулю:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_n \rightarrow 0} \tilde{\rho}_{\text{MAB}}^T &= \left[\frac{\langle \rho \rangle^T}{\sigma_\rho^2} + \frac{\mathbf{V}^T A}{\sigma_\varepsilon^2} \right] \left[\frac{1}{\sigma_\rho^2} E + \frac{A^T A}{\sigma_\varepsilon^2} \right]^{-1}, \\ \lim_{\sigma_\varepsilon \rightarrow 0} R_{\tilde{\rho}_{\text{MAB}}} &= \left[\frac{1}{\sigma_\rho^2} E + \frac{A^T A}{\sigma_\varepsilon^2} \right]^{-1}, \\ \lim_{\sigma_\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\rho}_{\text{MAB}}^T &= \left[\frac{\langle \rho \rangle^T}{\sigma_\rho^2} + \frac{\mathbf{u}^T \Psi}{\sigma_n^2} \right] \left[\frac{1}{\sigma_\rho^2} E + \frac{\Psi^T \Psi}{\sigma_n^2} \right]^{-1}, \\ \lim_{\sigma_\varepsilon \rightarrow 0} R_{\tilde{\rho}_{\text{MAB}}} &= \left[\frac{1}{\sigma_\rho^2} E + \frac{\Psi^T \Psi}{\sigma_n^2} \right]^{-1}, \\ \lim_{\sigma_n \rightarrow 0} \tilde{\rho}_{\text{MAB}}^T &= \left[\frac{\mathbf{u}^T \Psi}{\sigma_n^2} + \frac{\mathbf{V}^T A}{\sigma_\varepsilon^2} \right] \left[\frac{\Psi^T \Psi}{\sigma_n^2} + \frac{A^T A}{\sigma_\varepsilon^2} \right]^{-1}, \\ \lim_{\sigma_n \rightarrow 0} R_{\tilde{\rho}_{\text{MAB}}} &= \left[\frac{\Psi^T \Psi}{\sigma_n^2} + \frac{A^T A}{\sigma_\varepsilon^2} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Стремление дисперсии случайной компоненты σ_n^2 к бесконечности означает, что качество сейсмического материала существенно хуже данных скважин и априорных представлений, поэтому оценка исключает обработку сейсмического материала \mathbf{u} . Аналогичные результаты получены при условии $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\rho^2 \rightarrow \infty$, в этих случаях оценка $\tilde{\rho}$ не содержит обработки соответственно скважинных наблюдений и априорных данных.

Рассмотрим частный случай модели (8.29), когда матрица Ψ является единичной и размерность вектора ρ совпадает с количеством исходных априорных данных. Учет скважинных наблюдений при таком подходе производится путем включения в вектор средних значений априорного распределения с соответствующими дисперсиями. Оценка $\tilde{\rho}_{\text{MAB}}^T$ при $D = \sigma_\rho^2 E$, $R_n = \sigma_n^2 E$ записывается в

виде

$$\tilde{\rho}_{\text{MAB}}^T = \left[\frac{\langle \rho \rangle^T}{\sigma_\rho^2} + \frac{\mathbf{u}^T}{\sigma_n^2} \right] \left[\frac{1}{\sigma_\rho^2} E + \frac{1}{\sigma_n^2} E \right]^{-1},$$

а матрица ковариаций

$$R_{\tilde{\rho}_{\text{MAB}}} = \frac{\sigma_n^2}{[1 + \sigma_n^2/\sigma_\rho^2]} E.$$

Преимущество такого подхода состоит в том, что не требуется задания структурной матрицы Ψ . Однако увеличение размерности вектора параметров ρ приводит к потере точности. Рассмотренные модели и полученные решения могут быть использованы при получении практических алгоритмов построения пространственных сейсмических разрезов с учетом скважинных наблюдений.

Наряду с определением аппроксимирующей поверхности горизонта, большое практическое значение имеет нахождение доверительных областей, которые характеризуют степень близости полученной аппроксимирующей поверхности и ее параметров к соответствующим теоретическим значениям (см. § 6.15). Сначала найдем дисперсию отклонения аппроксимирующей поверхности от теоретической с учетом и без учета скважинных наблюдений:

$$\hat{\sigma}^2 = \varphi^T R_{\bar{\rho}} \varphi, \quad (8.63)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \varphi^T R_{\hat{\rho}} \varphi. \quad (8.64)$$

Здесь φ — вектор, компоненты которого соответствуют строке матрицы Ψ , например, для полинома второй степени $\varphi = [1, x, y, x^2, xy, y^2]$. Значения $\hat{\sigma}^2(x, y)$ и $\hat{\sigma}^2(x, y)$ могут быть рассчитаны в любой точке (x, y) на рассматриваемой площади по формулам (8.63), (8.64). Доверительные интервалы оцениваются по следующим формулам (см. § 6.15):

$$P[\tilde{f}(x, y) - \gamma_{K-S+Q}\tilde{\sigma}(x, y) < f(x, y) < \tilde{f}(x, y) + \gamma_{K-S+Q}\tilde{\sigma}(x, y)] = \beta, \quad (8.65)$$

$$P[\hat{f}(x, y) - \gamma_{K-S+Q}\hat{\sigma}(x, y) < f(x, y) < \hat{f}(x, y) + \gamma_{K-S+Q}\hat{\sigma}(x, y)] = \beta, \quad (8.66)$$

$$P[\tilde{\rho}_s - \gamma_{K-S+Q}\tilde{\sigma}_{\rho_s} < \rho_s < \tilde{\rho}_s + \gamma_{K-S+Q}\tilde{\sigma}_{\rho_s}] = \beta, \quad (8.67)$$

$$P[\hat{\rho}_s - \gamma_{K-S+Q}\hat{\sigma}_{\rho_s} < \rho_s < \hat{\rho}_s + \gamma_{K-S+Q}\hat{\sigma}_{\rho_s}] = \beta, \quad (8.68)$$

где β — доверительная вероятность; γ_N — величина, которую находят по таблице распределения Стьюдента для данной доверительной вероятности β с числом степеней свободы N без учета скважинных наблюдений равным $K-S$ и $K-S+Q$ — с учетом скважинных наблюдений. Формулы (8.65), (8.67) дают значения доверительных интервалов с учетом скважинных наблюдений, а формулы (8.66), (8.68) — без их учета.

8.4.7. Аппроксимация параметров аппроксимирующей плоскости ортогональными полиномами

Наряду с рассмотренной полиномиальной аппроксимацией, коэффициенты которой имеют наглядную физическую интерпретацию, в вычислительном отношении удобной является аппроксимация системой ортогональных функций (см. § 6.6). При этом существенно упрощаются формулы (8.32) и (8.31) для оценок параметров $\hat{\rho}$ и $\tilde{\rho}$. Модель экспериментального материала в этом случае записывается в виде

$$\mathbf{u} = \Phi \rho + \mathbf{n},$$

где Φ — структурная матрица, каждая строка которой представляет собой набор ортогональных функций для фиксированных значений (x, y) : $[\varphi_0(x, y), \varphi_1(x, y), \dots, \varphi_{S-1}(x, y)]$; ρ — вектор искомых коэффициентов для заданной системы ортогональных функций, \mathbf{n} — случайное отклонение от принятой модели.

Воспользуемся системой ортогональных функций, представленных в § 6.6, когда формула для оценок параметров $\hat{\rho}$, $\tilde{\rho}$ и соответствующие ковариационные матрицы $R_{\hat{\rho}}$, $R_{\tilde{\rho}}$ можно записать в виде

$$\hat{\rho} = T^{-1} \Phi^T \mathbf{u}, \quad (8.69)$$

$$\tilde{\rho}^T = \hat{\rho}^T + (\mathbf{V} - \hat{\rho}^T A^T)(A T^{-1} A^T) A T^{-1}, \quad (8.70)$$

$$R_{\hat{\rho}} = T^{-1} \hat{\sigma}^2, \quad (8.71)$$

$$R_{\tilde{\rho}} = R_{\hat{\rho}} - \hat{\sigma}^2 T^{-1} A^T (A T^{-1} A^T)^{-1} A T^{-1}, \quad (8.72)$$

где T — диагональная матрица ($\Phi^T \Phi = T$).

Нахождение оценки $\hat{\rho}$ без учета скважинных данных и ее ковариационной матрицы не требует обращения матриц, а оценка $\tilde{\rho}$

предполагает обращение матрицы размерностью $[Q \times Q]$, которая определяется числом скважин. Полученные формулы (8.69) – (8.72) удобно использовать для практических расчетов. В частном случае, когда на площади есть только одна скважина ($Q = 1$), матрица A становится вектор-строкой и формулы (8.70), (8.72) записываются как

$$\tilde{\rho}^T = \hat{\rho}^T + \frac{1}{A_0} (\mathbf{V} - \hat{\rho}^T A^T) A T^{-1},$$

$$R_{\tilde{\rho}} = R_{\hat{\rho}} - \frac{\hat{\sigma}^2}{A_0} T^{-1} A^T A^T,$$

где $A_0 = AT^{-1}A^T$.

При получении рассмотренных оценок мы предполагали, что матрица $\Psi^T R_n^{-1} \Psi$ неособенная, в противном случае необходимо воспользоваться оценками, полученными методом сингулярного анализа, которые представлены в § 6.12.

8.4.8. Численные иллюстрации применения алгоритмов аппроксимации

Рассмотрим модельный пример аппроксимации горизонта. В качестве модели взята мульда, глубина и мощность которой уменьшается в направлении координаты y (рис. 8.5). Данные по скважинам соответствуют равномерному погружению горизонта в направлении оси x от профиля II к профилю IV на 100 м (рис. 8.6). Аппроксимация проводилась полиномом третьей степени. На профилях I и III максимальное отклонение глубин с учетом и без учета скважин наблюдается в районе скважин 5 и 3 . Аппроксимирующая кривая без учета скважин дает удовлетворительные результаты.

Интересно отметить, что отклонения аппроксимирующего горизонта, рассчитанные с учетом скважинных данных, от аппроксимирующего горизонта, полученного без их учета, идут монотонно в соответствии со скважинными данными. В районе профиля II отклонения незначительны. На профиле IV они достигают максимальных значений в районе скважины 4 , приближаясь на концах профиля к значениям аппроксимирующего горизонта, рассчитанного без учета скважинных данных. В точках, соответствующих координатам скважин, аппроксимация с учетом данных по скважинам полностью совпадает с данными для скважин.

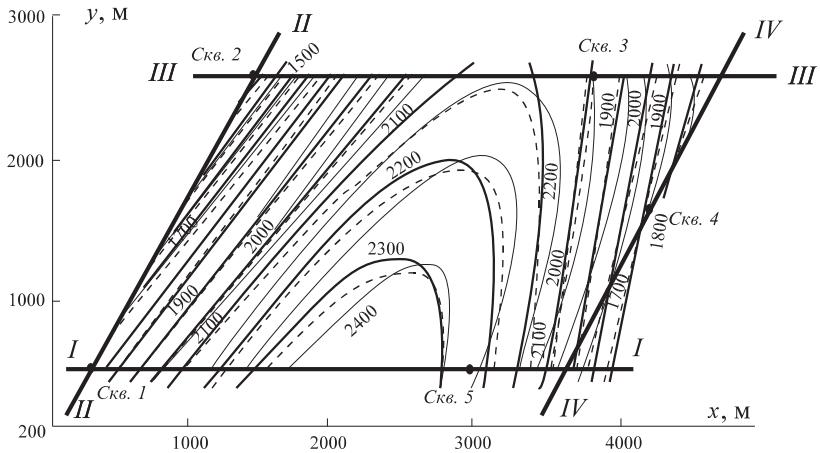


Рис. 8.5. Модельный пример аппроксимации горизонта. Схема расположения профилей (4 профиля (I-IV), 5 скважин) и карта изолиний горизонта: сплошные линии — результат расчета без учета скважинных данных, штриховые — с их учетом.

В рассмотренных примерах степень полинома задавалась на основании априорных представлений об ожидаемой степени гладкости горизонта. Проанализируем применимость информационного критерия (7.17), (7.18) для выбора степени полинома [114]. При принятых ранее предположениях о нормальности и некоррелированности случайной компоненты оценка методом наименьших квадратов $\hat{\rho}$ совпадает с оценкой методом максимального правдоподобия, используемой в функции $IC(S_m, \hat{\rho})$. Для простоты рассмотрим одномерную аппроксимацию горизонта вдоль профиля, обобщение на двумерный случай не представляет труда. Найдем явный вид функции информационного критерия для полинома степени m , подставляя в формулу (7.17) функцию нормального распределения и используя оценку, полученную методом максимального правдоподобия для дисперсии случайной компоненты:

$$IC(m, \hat{\rho}_m) = J \log 2\pi + J + J \log \hat{\sigma}^2 + Km,$$

где в отличие от критерия (7.17) вместо множителя 2 перед числом параметров введен множитель K , который можно подбирать эмпирически по серии модельных экспериментов, чтобы лучше отразить

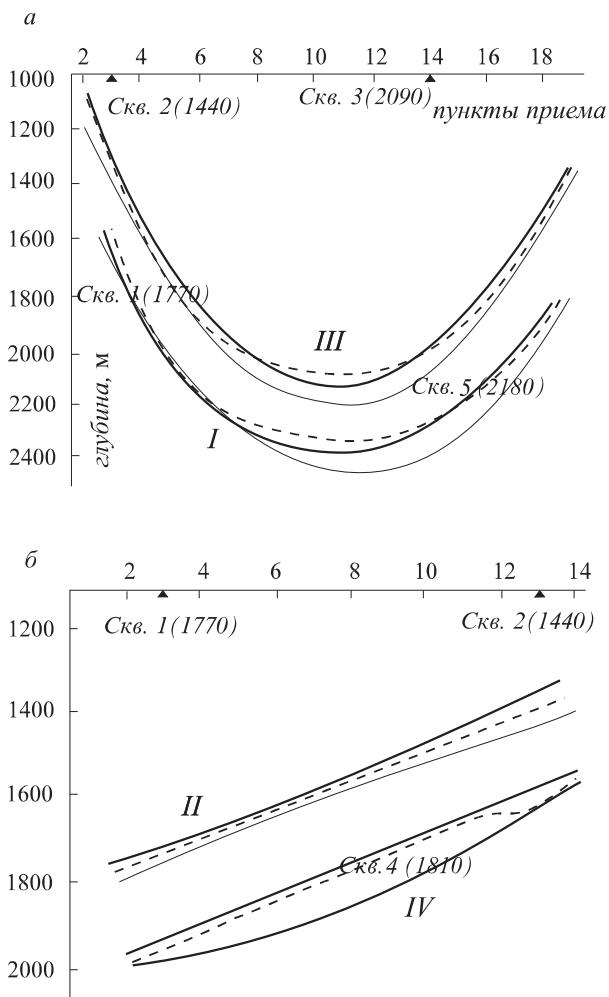


Рис. 8.6. Модельный пример аппроксимации горизонта (см. рис. 8.5). Глубинные разрезы вдоль профилей: *a* — профили *I* и *III*; *b* — профили *II* и *IV*; штриховые кривые — исходные данные, сплошные полужирные — без учета скважинных данных, сплошные тонкие — с учетом скважинных данных.

специфику решаемой задачи. Как будет показано далее, при изменении K в широких пределах алгоритм сохраняет устойчивость. Так как первые два члена в выражении $IC(m, \hat{\rho}_m)$ не изменяются при изменении степени полинома, то для практического использования функцию $IC(m, \hat{\rho}_m)$ запишем в виде

$$IC(m, \hat{\rho}_m) = J \log \hat{\sigma}^2 + Km.$$

Применение критерия сводится к следующему. Из априорных представлений назначают максимально допустимую степень полинома M и рассчитывают значения оценок $\hat{\rho}_m$, $\hat{\sigma}^2$ и соответствующие величины $IC(m, \hat{\rho}_m)$, $m = 1, 2, \dots, M$. В качестве оценки степени полинома выбирают

$$\hat{m} = \arg \min [IC(m, \hat{\rho}_m)].$$

На основании серии модельных экспериментов с различными реализациями случайной компоненты были построены графики зависимости средних значений $IC(m)$ (рис. 8.7, a). Функция критерия

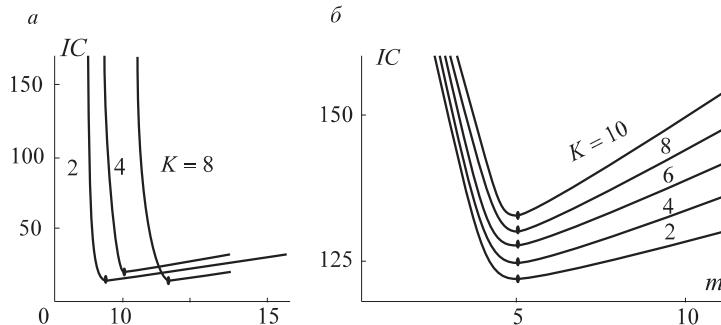


Рис. 8.7. Зависимость функции критерия IC от степени полинома m , полученная на модельном материале с разными исходными степенями (a) и для нестационарной помехи (б).

$IC(m)$ слева от истинного значения резко возрастает, а справа наблюдается рост с существенно меньшей скоростью, что при наличии интенсивного шума может привести к смещению значений оценки степени полинома. Исследование влияния разброса на качество работы критерия иллюстрирует рис. 8.8. Следует отметить, что, на-

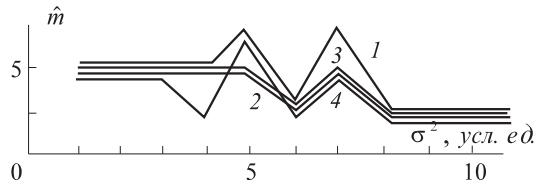


Рис. 8.8. Зависимость оценок степени полинома от дисперсии шума при разных значениях K .

чиная с дисперсией $\sigma_{\text{гр}}$, оценка степени полинома \hat{m} имеет систематическое смещение, т. е. оказывается на единицу меньше истинной. Была проведена серия модельных экспериментов по изучению влияния нестационарности помехи. При разных значениях K критерий дает оценку степени полинома, совпадающую с истинным значением (см. рис. 8.7, б), что иллюстрирует устойчивость критерия при наличии нестационарной помехи.

8.5. Алгоритм аппроксимации пластовой скорости по данным площадных сейсмических наблюдений с учетом скважинных измерений

Для повышения достоверности результатов, получаемых сейсмическим методом в сложных геологических условиях, необходимо увеличить точность определения пластовой скорости. В современных обрабатывающих системах пластовая скорость по данным МОГТ обычно рассчитывается вдоль линейного профиля. При решении интерпретационных задач необходимо знать распределение пластовой скорости по всей площади при условии, что заданы значения скорости на отдельных профилях и имеется информация о скорости по данным скважинных наблюдений. В работе [102] предложен алгоритм аппроксимации значений пластовой скорости, рассчитанных по отдельным профилям с учетом скважинных данных. Решение строится на основе метода сингулярного разложения (см. § 6.12).

Положим, что на отдельных профилях исследуемой площади рассчитаны значения пластовой скорости u для интересующего нас

горизонта. Модель экспериментального материала представим в виде

$$\mathbf{u} = \Psi \boldsymbol{\rho} + \mathbf{n}, \quad (8.73)$$

где Ψ — структурная матрица; $\boldsymbol{\rho}$ — вектор искомых параметров; \mathbf{n} — случайная компонента с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей R_n . В качестве аппроксимирующей функции примем полином второй степени по переменным $x, y, h, \Delta h$, причем (x, y) — координаты точки на профиле; h — кровля слоя; Δh — мощность слоя. Страна матрицы Ψ имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_i = & [1, x_i, y_i, h_i, x_i^2, x_i y_i, x_i h_i, x_i \Delta h_i, y_i^2, \\ & y_i h_i, y_i \Delta h_i, h_i^2, h_i \Delta h_i, \Delta h_i^2]. \end{aligned} \quad (8.74)$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, K$ — число исходных точек. Данные скважин задаются в форме линейных условий вида

$$A\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}, \quad (8.75)$$

где \mathbf{V} — значения измерений пластовой скорости в скважинах, Q — размерность вектора \mathbf{V} , которая определяется числом скважин; $\boldsymbol{\rho}$ — вектор неизвестных параметров; A — матрица, строки которой аналогичны матрице Ψ , но заданы в точках, определяемых координатами скважин.

Представляет интерес задание скорости в скважинах в форме

$$\mathbf{V} = A\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (8.76)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ — случайная компонента с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей. Решение такой задачи при наличии условий (8.75) приводит к следующей оценке [97, 147]:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T &= \hat{\boldsymbol{\rho}}^T + (\mathbf{V}^T - \hat{\boldsymbol{\rho}}^T A^T)(A(\Psi^T \Psi)^{-1} A^T)^{-1} A(\Psi^T \Psi)^{-1}, \\ \hat{\boldsymbol{\rho}} &= (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Качество оценки определяется ковариационной матрицей:

$$R_{\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \hat{\sigma}^2 [(\Psi^T \Psi)^{-1} - (\Psi^T \Psi)^{-1} A^T (A(\Psi^T \Psi)^{-1} A^T)^{-1} A(\Psi^T \Psi)^{-1}].$$

Если дополнительные данные о скорости задаются в форме (8.76), то решение, полученное методом максимального правдоподобия, записывается как

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}^T = (\mathbf{u}^T R_n^{-1} \Psi + \mathbf{V}^T P_\varepsilon A)(\mathbf{u}^T R_n^{-1} \Psi + A^T P_\varepsilon^{-1} A)^{-1}. \quad (8.78)$$

Оценки (8.77), (8.78) были использованы при разработке программы для модельных исследований. Модельные исследования показали, что бывают случаи, когда мы не приходим к удовлетворительному решению вследствие неполноты ранга матрицы $\Psi^T \Psi$. Если профили на исследуемой площасти располагаются так, что строки матрицы Ψ становятся линейно зависимыми или “почти” линейно зависимыми, то это приводит к вырождению матрицы, и решение по указанным формулам не может быть получено. Это обстоятельство привело к использованию метода сингулярного разложения матрицы плана, который позволяет получить удовлетворительное решение при наличии ошибок округления и линейной зависимости базисных функций. В § 6.12 было показано, что любая вещественная матрица Ψ может быть представлена в виде

$$\Psi = T \Sigma Y^T, \quad (8.79)$$

где $T[K \times K]$, $Y[S \times S]$ — ортогональные матрицы; $\Sigma[K \times S]$ — диагональная матрица с элементами

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_t & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Оценка, полученная по методу наименьших квадратов с использованием разложения (8.79), записывается в виде

$$\hat{\mathbf{b}} = \Sigma^+ \mathbf{Z}, \quad \text{где } \mathbf{b} = Y^+ \rho, \quad \mathbf{Z} = T^T \mathbf{u}.$$

Если диагональные элементы σ_i матрицы Σ не равны нулю, то оценка $\hat{\mathbf{b}}$ легко рассчитывается: $\hat{b}_i = Z_i / \sigma_i$. Но если некоторые σ_i малы, то такая процедура нежелательна. Полученные значения σ_i необходимо проанализировать перед нахождением оценки $\hat{\mathbf{b}}$. Доказано, что сингулярные числа будут отличаться от нуля в том и только в том случае, когда столбцы матрицы Ψ линейно независимы. Анализ сингулярных чисел надо вести, опираясь на предполагаемую точность исходных данных и точность вычислений на используемой ЭВМ. С учетом априорной точности выбирают пороговое значение σ_n , с которым сравнивают каждое σ_i (см. § 6.12): если $\sigma_i \geq \alpha$, то $\hat{b}_i = Z_i / \sigma_i$; если $\sigma_i < \alpha$, то $\hat{b}_i = 0$. Вообще говоря, при $\sigma_i < \alpha$ компоненте вектора b_i можно придать любое произвольное значение. Такая произвольность является причиной неединственности реше-

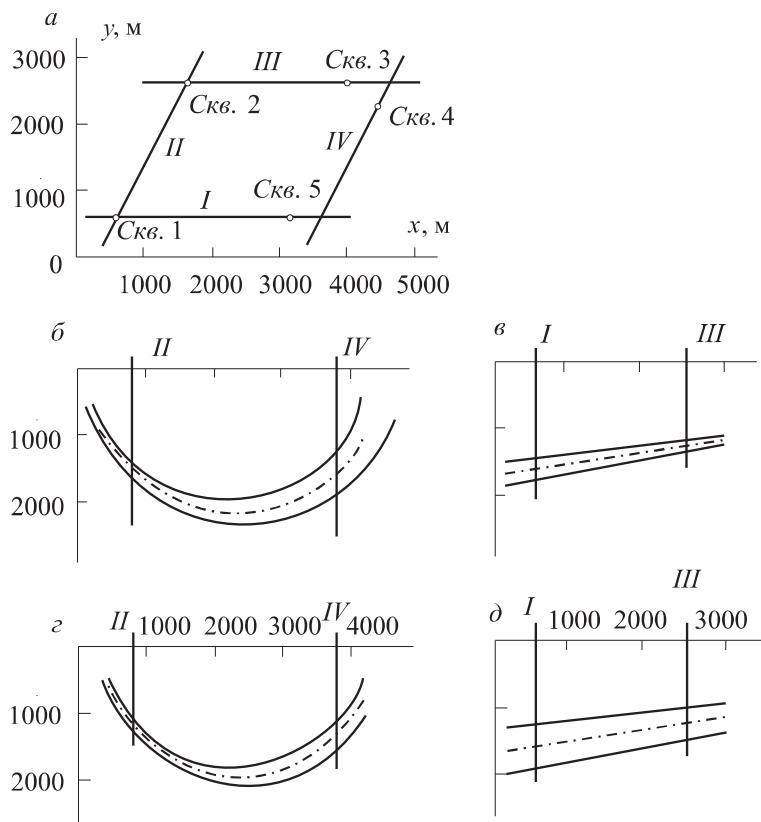


Рис. 8.9. Синтетическая площадь сейсмических наблюдений (а) с расположением профилей (I – IV), скважин и глубинных разрезов по профилям: б – профиль I, в – профиль II, г – профиль III, д – профиль IV. Штрихпунктирные кривые – среднее положение горизонта, сплошные кривые – границы области изменения горизонта.

ния, полученного по МНК. Чтобы исключить влияние неустойчивых компонент вектора b_i , при $\sigma_i < a$ обычно полагают значения этих компонент равными нулю.

При наличии линейных связей (8.75) дополнительно к разло-

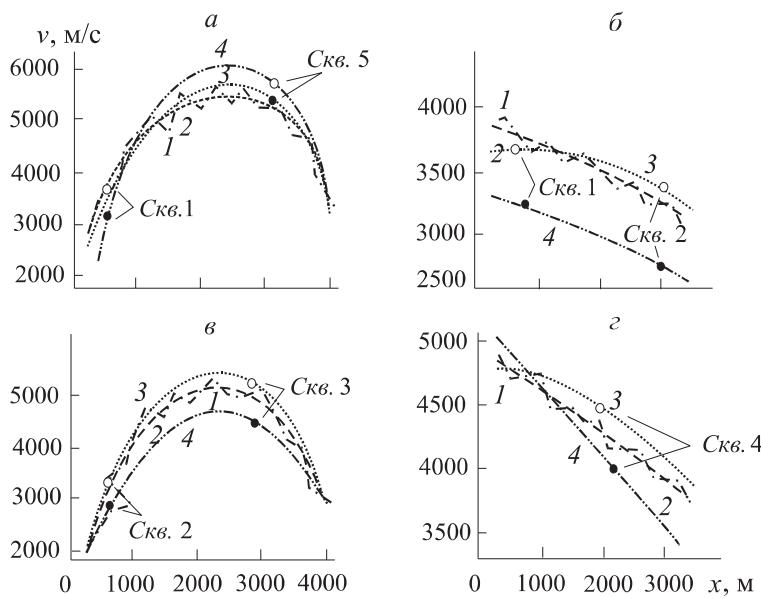


Рис. 8.10. Результат обработки модельного примера рис. 8.9.
 Кривые 1 — исходные данные скоростей вдоль профилей; 2 — восстановление скорости по сейсмическим данным без учета скважинных наблюдений; 3, 4 — восстановление скорости с учетом скважинных наблюдений для двух вариантов задания скорости в скважинах:

a — профиль I; для скв. 1 светл. кружок: $v = 3650 \text{ м/с}$, $\Delta v = -15 \text{ м/с}$; темн. кружок: $v = 3250 \text{ м/с}$, $\Delta v = -550 \text{ м/с}$; для скв. 5 светл. кружок: $v = 5750 \text{ м/с}$, $\Delta v = 470 \text{ м/с}$; темн. кружок: $v = 5500 \text{ м/с}$, $\Delta v = 220 \text{ м/с}$;
b — профиль II; для скв. 1 светл. кружок: $v = 3650 \text{ м/с}$, $\Delta v = -150 \text{ м/с}$; темн. кружок: $v = 3250 \text{ м/с}$, $\Delta v = -550 \text{ м/с}$; для скв. 2 светл. кружок: $v = 3375 \text{ м/с}$, $\Delta v = 125 \text{ м/с}$; темн. кружок: $v = 2750 \text{ м/с}$, $\Delta v = -500 \text{ м/с}$;
c — профиль III; для скв. 2 светл. кружок: $v = 3375 \text{ м/с}$, $\Delta v = 120 \text{ м/с}$; темн. кружок: $v = 2750 \text{ м/с}$, $\Delta v = -50 \text{ м/с}$; для скв. 3 светл. кружок: $v = 5250 \text{ м/с}$, $\Delta v = 230 \text{ м/с}$; темн. кружок: $v = 4500 \text{ м/с}$, $\Delta v = -520 \text{ м/с}$;
z — профиль IV; для скв. 4 светл. кружок: $v = 4350 \text{ м/с}$, $\Delta v = 190 \text{ м/с}$; темн. кружок: $v = 3900 \text{ м/с}$, $\Delta v = -260 \text{ м/с}$.

Δv — расхождение между данными, полученными при сейсмических наблюдениях и в скважинах.

жению (8.79) используется разложение вида

$$a = GWF^T,$$

где

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ w_{ii} > 0, & i = j, \quad i \leq Q', \\ w_{ii} = 0, & i = j, \quad i > Q', \quad Q' \leq Q; \end{cases}$$

G и F — ортогональные матрицы; Q' — число линейно-независимых условий.

Рассмотрим модельный пример определения скоростей с учетом скважинных наблюдений. На рис. 8.9 представлена синтетическая площадь наблюдений. Значения скоростей по отдельным профилям были рассчитаны в зависимости от глубины и мощности горизонта, кроме того, был задан градиент скорости в направлении координаты x и наложен нормально распределенный шум. На рис. 8.10 показаны результаты обработки данных по четырем профилям. Анализ графиков показывает, что аппроксимирующая поверхность скоростного закона, построенная с учетом скважинных наблюдений (два варианта задания скорости по скважинам), сохраняет преимущество аппроксимации по методу наименьших квадратов и совпадает точно со значениями скоростей, заданных в скважинах.

Г л а в а 9

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Численное решение задач оценивания параметров, равно как и вообще методы вычислительной математики, базируется на прикладном функциональном анализе. Операторный язык изложения удобен тем, что в компактной форме позволяет представлять алгоритмы решения обратных задач, получать оценки точности с учетом самых общих свойств входящих в алгоритм операторов, легко прослеживать модификации отдельных блоков алгоритмов в зависимости от конкретных функциональных связей, составляющих математическую структуру обратной задачи. Решение операторных уравнений первого рода, включающих компактный оператор, представляет собой самостоятельную математическую проблему — проблему регуляризации некорректно поставленных математических задач. Решение любой интерпретационной задачи, связанной с обработкой экспериментальных данных, должно учитывать случайную компоненту (“шум”) в данных обратной задачи, наличие которой приводит к тому, что классические методы функционального анализа становятся неприменимыми, поскольку в общем случае “зашумленные” данные не принадлежат образу оператора. Уже этот факт делает необходимым привлечение методов математической статистики для построения алгоритмов и интерпретации решения обратных задач. Существующая литература по этим направлениям: прикладной функциональный анализ, решение некорректно поставленных задач и методы математической статистики — очень обширна и не всегда соответствует стилю изложения, принятому в

физической литературе, где традиционно установился уровень “физической строгости”, когда доказательства, если и приводятся, то только с изложением их общей алгоритмической структуры. Безусловно, при таком изложении теряется математическое изящество и строгость, зато это позволяет заменить математическую эрудицию физической интуицией, облегчающей физическую интерпретацию решения.

9.1. Элементы прикладного функционального анализа

Аналитические методы решения применимы только к узкому классу задач. Поэтому в практике естественным образом возникает необходимость использования конструкций и понятий, лежащих в основе функционального анализа. Напомним читателю основные его элементы.

Как только мы ставим задачу построения приближенного решения, например нахождения функции φ , с достаточной степенью точности удовлетворяющей уравнению $L\varphi = s$, возникает необходимость определения количественной меры точности, т. е. следует найти критерий “близости” функций (малость разности). Такой мерой может быть только число — отображение элементов функционального пространства $\varphi \in \Phi$ на ось действительных чисел R^1 , иными словами, следует определить функционал $N : \Phi \rightarrow R^1$. Укажем требования, которым должен удовлетворять этот функционал, определяющий меру близости функций, например φ_1 и φ_2 :

- a) естественно считать отклонение функций друг от друга неотрицательным числом, равным нулю, если функции совпадают:

$$N(\varphi_1 - \varphi_2) \geq 0, N(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2;$$
- б) умножение обеих функций на число λ приводит к “изменению” отклонения в λ раз, при этом с учетом свойства а) это изменение в общем случае должно определяться множителем $|\lambda|$:

$$N(\lambda(\varphi_1 - \varphi_2)) = |\lambda|N(\varphi_1 - \varphi_2);$$
- в) по аналогии с евклидовой геометрией сумма уклонений φ_0 от φ_1 и φ_2 от φ_0 превышает либо равна уклонению φ_1 от φ_2 :

$$N(\varphi_1 - \varphi_0) + N(\varphi_2 - \varphi_0) \geq N((\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_0 - \varphi_2)).$$

Нетрудно видеть, что это и есть определение одного из основных функционалов — *нормы функции*. Перепишем условия а)–в), определяющие норму N , заменив $(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \varphi$ в условиях а) и б); $\varphi_1 - \varphi_0 \Rightarrow \psi$ и $\varphi_2 - \varphi_0 \Rightarrow \varphi$ в условиях в) и $N(\varphi) \Rightarrow \|\varphi\|$, в следующем виде:

- 1) $\|\varphi\| \geq 0$, $\|\varphi\| \Leftrightarrow \varphi = 0$ — неотрицательность нормы;
- 2) $\|\lambda\varphi\| = |\lambda| \|\varphi\|$ — однородность нормы;
- 3) $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ — неравенство треугольника.

Отметим, что своим происхождением термин “норма” обязан свойству однородности, которое позволяет при любой заданной функции φ умножением ее на множитель λ сделать величину $\|\lambda\varphi\|$ равной единице (“нормировать” функцию).

Требования, которые мы ввели в норму, удовлетворяются, во-первых, если $\|\varphi\| = \int_a^b |\varphi(x)| dx$, эта норма определяет пространство интегрируемых по модулю функций L_1 на $[a, b]$; во-вторых, если $\|\varphi\| = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|$, норма вводится в пространстве непрерывных функций C на $[a, b]$; в-третьих, если $\|\varphi\| = \left[\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2}$, норма определяет пространство интегрируемых с квадратом функций L_2 на $[a, b]$; в-четвертых, если $\|\varphi\| = \left[\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx + \int_a^b |\varphi'(x)|^2 dx \right]^{1/2}$, норма определяет функцию W_2^1 в пространстве Соболева на $[a, b]$; в-пятых, если $\|\varphi\| = \left[\sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right]^{1/2}$, норма определяет функцию в пространстве R^n .

Заметим, что понятие нормы является частным случаем понятия расстояния — *метрики* ρ , если в формулировке нормы определить свойство однородности (б) как $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|$.

Метрическое пространство (т. е. пространство с нормой) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность элементов этого пространства сходится к элементу этого пространства. Напомним, что *фундаментальной последовательностью* называется такая, в которой для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n(\varepsilon)$, что для любых элементов последовательности $n', n'' > 0$

выполняется неравенство $\rho(\varphi_{n'}, \varphi_{n''}) < \varepsilon$. Полное нормированное пространство называется *банаховым*.

В функциональном анализе широко используется конструкция, аналогичная векторному анализу. Преимущество понятия вектора (тензора) для физика очевидно: суть физических законов, связей выражается в векторной форме, а аналитические методы развиваются в конкретной системе координат. При этом координаты вектора определяются скалярным произведением ортов системы координат и исходного вектора. Введение операции *скалярного произведения* для элементов функциональных пространств по аналогии с векторным анализом позволяет найти

$$S(\varphi, \varphi) \geq 0, \quad S(\varphi, \varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

— неотрицательность длины вектора;

$$S(\varphi, \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha S(\varphi, \psi_1) + \beta S(\varphi, \psi_2)$$

— свойство линейности по второму элементу;

$$S(\varphi, \psi) = S^*(\psi, \varphi)$$

для комплекснозначных элементов φ, ψ . Отсюда следует, что

$$S(\lambda\varphi, \psi) = \lambda^* S(\varphi, \psi),$$

т. е. скалярное произведение определяется как форма, линейная по второму элементу (второе свойство) и антилинейная по первому элементу, причем скалярное произведение элемента самого на себя неотрицательно. Заметим, что мы определили здесь скалярное произведение как линейное именно по второму элементу в соответствии с принятым у физиков — по аналогии со скалярным произведением вектора $S(\varphi, \psi) = \varphi^T \psi$.

Мы будем употреблять разные обозначения для скалярного произведения:

$$S(\varphi, \psi) \stackrel{\Delta}{=} (\varphi, \psi),$$

$$S(\varphi, \psi) \stackrel{\Delta}{=} \langle \varphi | \psi \rangle$$

(обозначение Дирака: $\langle \varphi |$ — бра-вектор, $|\psi \rangle$ — кет-вектор (от англ. “braket” — скобка: $\langle |\rangle$). Нетрудно проверить, что примером скалярного произведения может быть

$$S(\varphi, \psi) = \int \varphi^*(x) \psi(x) dx.$$

Банахово пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым пространством* H . Покажем, что конструкция скалярного произведения позволяет естественным образом ввести согласованную с ним норму. Действительно, $S(\varphi, \varphi) \geq 0$, и в этом смысле первое свойство скалярного произведения аналогично свойству, введенному для нормы:

$$S(\lambda\varphi, \lambda\varphi) = \lambda^* \lambda S(\varphi, \varphi) = |\lambda|^2 S(\varphi, \varphi),$$

т. е. в отличие от функционала N , являющегося однородной функцией первого порядка $N(\lambda\varphi) = |\lambda| N(\varphi)$, скалярное произведение является однородной функцией второго порядка: т. е. корень квадратный из скалярного произведения элемента φ на себя является однородной функцией первого порядка.

Покажем, что норма может быть введена следующим образом:

$$N(\varphi) = (S(\varphi, \varphi))^{1/2},$$

т. е. покажем, что такой функционал удовлетворяет неравенству треугольника, а следовательно, всем трем свойствам, введенным при определении нормы. Запишем для этого *неравенство Шварца*:

$$|(\psi, \varphi)| \leq (\varphi, \varphi)^{1/2} (\psi, \psi)^{1/2},$$

$$0 \leq (\varphi + \alpha\psi, \varphi + \alpha\psi) = (\varphi, \varphi) + \alpha(\varphi, \psi) + \alpha^*[(\psi, \varphi) + \alpha(\psi, \psi)].$$

Поскольку скалярное произведение больше либо равно нулю при любом значении α , то выберем α таким, чтобы член в квадратных скобках был равен нулю, т. е. $\alpha = -(\psi, \varphi) / (\psi, \psi)$. Отсюда получаем неравенство Шварца. Неравенство треугольника $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$, записанное через скалярное произведение, должно выглядеть следующим образом:

$$(\varphi + \psi, \varphi + \psi)^{1/2} \leq (\varphi, \varphi)^{1/2} + (\psi, \psi)^{1/2}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi, \varphi + \psi) &= (\varphi, \varphi + \psi) + (\psi, \varphi + \psi) \leq \\ &\leq (\varphi, \varphi)^{1/2} (\varphi + \psi, \varphi + \psi)^{1/2} + (\psi, \psi)^{1/2} (\varphi + \psi, \varphi + \psi)^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь последнее неравенство — следствие неравенства Шварца.

Итак, мы показали, что в пространстве со скалярным произведением согласованная с ним норма, т. е. норма в гильбертовом пространстве, определяется следующим образом:

$$\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}.$$

Так, например, если скалярное произведение определено как $\int \varphi^*(x)\psi(x) dx$, то норма такого пространства

$$\|\varphi\| = \left[\int \varphi^*(x)\varphi(x) dx \right]^{1/2}.$$

Соответствующее неравенство Шварца

$$\left| \int \psi^*(x)\varphi(x) dx \right| \leq \left[\int \varphi^*(x)\varphi(x) dx \right]^{1/2} \left[\int \psi^*(x)\psi(x) dx \right]^{1/2}$$

носит название *неравенства Коши–Буняковского*. Одновременно мы показали, что функционал вида $\left[\int |\varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2}$ удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\begin{aligned} & \left[\int (\psi(x) + \varphi(x))^* (\psi(x) + \varphi(x)) dx \right]^{1/2} \leq \\ & \leq \left[\int |\psi(x)|^2 dx \right]^{1/2} + \left[\int |\varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Чтобы в нормированном пространстве можно было ввести скалярное произведение, необходимо и достаточно выполнение равенства параллелограмма¹:

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2)$$

(сравните: $|\varphi + \psi|^2 + |\varphi - \psi|^2 = 2(|\varphi|^2 + |\psi|^2)$). В этом случае скалярное произведение можно определить как

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2).$$

¹Сумма квадратов длин двух диагоналей параллелограмма, построенного на векторах φ и ψ , равна сумме квадратов длин его сторон.

Доказательство:

$$\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 = (\varphi + \psi, \varphi + \psi) - (\varphi - \psi, \varphi - \psi) = 4(\varphi, \psi).$$

Скалярное произведение в пространстве R^n :

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \psi_i = \varphi^T \psi,$$

в пространстве W_2^1 :

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi^*(x)\psi(x)dx + \int \varphi'^*(x)\psi'(x)dx.$$

Как и в случае скалярных произведений векторов, условие ортогональности $(\varphi, \psi) = 0$.

Напомним определение линейной независимости элементов $\{\varphi_i\}$, $i = 1 \dots n$. Элементы $\{\varphi_i\}$ линейно независимы, если из равенства $\sum_i \alpha_i \varphi_i = 0$ следует $\alpha_i = 0$ для всех значений $i = 1 \dots n$.

Базисом гильбертова пространства H называется множество $\Phi \subseteq H$ такое, что для любого элемента пространства H найдется сходящаяся к нему последовательность, состоящая из линейной комбинации элементов $\varphi \subseteq \Phi$, иными словами, множество Φ — базис H , если оно линейно независимо и замыкание линейной оболочки Φ совпадает с H . Базис ортонормирован, если все его элементы взаимно ортогональны и их норма равна единице, при этом размерность базиса называется *размерностью гильбертова пространства*.

Покажем, что в любом базисе представление $\varphi = \sum_i \alpha_i \varphi_i$ единственное. Предположим, что φ имеет представление $\varphi = \sum_i \beta_i \varphi_i$, тогда $0 = \varphi - \varphi = \sum_i (\alpha_i - \beta_i) \varphi_i$. Из условия линейной независимости базиса следует, что $\alpha_i = \beta_i$ при любом значении i .

Аналогом представления вектора в системе координат, который задан ортонормированным базисом e_i : $\varphi = \sum_i (\varphi, e_i) e_i$, в гильбертовом пространстве является обобщенный ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_i \alpha_i \varphi_i(x),$$

где $\varphi_i(x)$ — базисные функции; α_i — коэффициенты разложения, равные (φ, φ_i) . Хорошо известен пример счетного базиса в бесконечном гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ — базис тригонометрических функций: $(2\pi)^{-1/2}$, $(\pi)^{-1/2} \sin x$, $(\pi)^{-1/2} \cos x$, $(\pi)^{-1/2} \sin(2x)$, $(\pi)^{-1/2} \cos(2x)$, \dots , $(\pi)^{-1/2} \sin(nx)$, $(\pi)^{-1/2} \cos(nx)$, \dots . Тогда разложение функции φ в ряд Фурье по тригонометрическим функциям

$$\begin{aligned}\varphi(x) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\cos(kx) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos(kx) dx + \right. \\ & \left. + \sin(kx) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(kx) dx \right].\end{aligned}$$

Возможность представить функцию в виде набора коэффициентов в заданном базисе (в “системе координат”) и определяет эффективность введенной конструкции скалярного произведения в функциональном пространстве.

Напомним необходимые сведения из теории операторов. Функция L , действующая из пространства H_1 в H_2 , называется *оператором*:

$$H_1 \xrightarrow{L} H_2.$$

Если $H_2 = R^1$, то оператор называется *функционалом*. Оператор *линейный*, если

$$L(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha L\varphi + \beta L\psi.$$

Пример интегрального оператора в L_2 :

$$L\varphi \triangleq \int \mathcal{L}(x, x') \varphi(x') dx'.$$

Если интегральное ядро L таково, что $\iint \mathcal{L}^2(x, x') dx dx' < \infty$, то L — оператор Гильберта — Шмидта. *Нормой линейного оператора* называется функционал

$$\|L\| = \sup \frac{\|L\varphi\|}{\|\varphi\|}.$$

Сравните с конечномерным векторным пространством, когда матрица \hat{L} переводит вектор φ в вектор ψ , т. е. $L\varphi \triangleq \hat{L}\varphi = \psi$, в этом

случае норма оператора L — это максимально возможная длина $|\psi|$ вектора ψ , полученного при действии матрицы L на векторы φ , лежащие на поверхности шара единичного радиуса ($|\varphi| = 1$). Если норма L меньше бесконечности, то оператор называется *ограниченным*. Приведем пример *неограниченного оператора* $L = d^2/dx^2$, действующего в пространстве интегрируемых с квадратом функций на интервале $[-\pi, \pi]$:

$$\left\| \frac{d^2}{dx^2} \right\| = \sup \frac{\|(d^2/dx^2)\varphi\|}{\|\varphi\|}.$$

Выбирая в качестве φ ортонормированный тригонометрический базис, видим, что

$$\frac{\|(d^2/dx^2)\varphi_k(x)\|}{\|\varphi_k(x)\|} = k^2 \frac{\|\varphi_k(x)\|}{\|\varphi_k(x)\|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

Из определения нормы оператора L следует неравенство

$$\|L\varphi\| \leq \|L\| \cdot \|\varphi\|.$$

Оператор L называется *компактным* или *вполне непрерывным*, если он каждую слабо расходящуюся последовательность $\{\varphi_n\}$ из области его определения переводит в сильно сходящуюся, т. е.

$$L : (f, \varphi_n - \varphi_0) \xrightarrow{\forall f} 0 \Rightarrow \|L(\varphi_n - \varphi_0)\| \rightarrow 0.$$

Примером компактного оператора в пространстве L_2 является интегральный оператор Гильберта–Шмидта

$$L\varphi \triangleq \int \mathcal{L}(x, x') \varphi(x') dx'.$$

Специфика бесконечномерного гильбертова пространства по сравнению с конечномерным проявляется в том, что из слабой сходимости не следует сильная. Сравните с векторным пространством: если

$$\forall \mathbf{f} (\mathbf{f}, \varphi_n - \varphi_0) \Rightarrow 0,$$

то очевидно, что $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$. Это утверждение эквивалентно тому, что в бесконечномерном пространстве 1 — единичный оператор — некомпактен. Действительно, последовательность элементов бесконечномерного базиса $\{\varphi_n, n = 1 \div N\}$ слабо сходится к нулю:

$$f_n = (f, \varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

поскольку из равенства Парсеваля $\sum f_n^2 = \|f\|^2 = C < \infty$. В то же время последовательность $\{I\varphi_n = \varphi_n\}$ не имеет предела:

$$\begin{aligned} \|I(\varphi_{n'} - \varphi_{n''})\| &= (\varphi_{n'} - \varphi_{n''}, \varphi_{n'} - \varphi_{n''})^{1/2} = \\ &= [(\varphi_{n'}, \varphi_{n'}) + (\varphi_{n''}, \varphi_{n''})]^{1/2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Напомним некоторые определения из теории операторов. Оператор L^* называется *сопряженным по Лагранжу*, если справедливо, что $(\psi, L\varphi) = (L^*\psi, \varphi)$. Оператор H самосопряжен, если $H^* = H$. *Самосопряженный оператор* H , связывающий пространство комплекснозначных функций, называется *эрмитовым*: $H = H^+$ (сравните с действием матрицы \hat{H} на векторы φ, ψ : матрица \hat{H} самосопряжена, если $(\hat{H}\psi, \varphi) = (\psi, \hat{H}\varphi)$ т. е. матрица H симметрична ($H_{ij} = H_{ji}$)).

Оператор U называется *ортогональным*, если $(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi)$ для вещественных φ и ψ . Эквивалентное определение — операторное равенство

$$U^*U = I.$$

Если φ и ψ комплекснозначны, то оператор U такой, что $U^*U = I$, и называется *унитарным*. (Сравните: $(\hat{U}\varphi, \hat{U}\psi) = (\varphi, \psi)$, \hat{U} — матрица поворота, сохраняющая углы между векторами: $\cos(\widehat{\varphi, \psi}) = (\varphi, \psi)(|\varphi| \cdot |\psi|)^{-1}$ и длины векторов $|\varphi|, |\psi|$.)

Функции φ_α называются *собственными функциями* оператора H , если

$$H\varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha,$$

при этом λ_α называют *собственными значениями*. Аналог для векторов

$$\hat{H}\varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha$$

означает, что собственный вектор сохраняет направление после действия матрицы \hat{H} и изменяет длину в λ_α раз. Собственные функции оператора H линейно независимы и образуют базис гильбертова пространства. Этот базис нетрудно сделать ортонормированным.

Приведем здесь процедуру ортогонализации Грамма–Шмидта. Пусть имеется множество собственных векторов $\{\varphi_\alpha\}$, тогда в качестве первого орта выберем $e_1 = \varphi_1 / |\varphi_1|^{-1}$. Второй орт определим условием $e_2 = \Delta\varphi_2 / |\Delta\varphi_2|^{-1}$, где $\Delta\varphi_2 = \varphi_2 - (\varphi_2, e_1)e_1$, т. е. из вектора φ_2 выделена составляющая вектора вдоль орта e_1 , при этом $(\Delta\varphi_2, e_1) = 0$. Аналогично $e_3 = \Delta\varphi_3 / |\Delta\varphi_3|^{-1}$, где

$\Delta\varphi_3 = \varphi_3 - (\varphi_3, e_2) - (\varphi_3, e_1)e_1$ и $(\Delta\varphi_3, e_2) = 0$, $(\Delta\varphi_3, e_1) = 0$. Для произвольного n получаем: $e_n = \Delta\varphi_n ||\Delta\varphi_n||^{-1}$, где $\Delta\varphi_n = \varphi_n - \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\varphi_n, e_\alpha)e_\alpha$, $(\Delta\varphi_n, e_\alpha) = 0$ для $\alpha = 1 \div n-1$.

Элементы дифференциального исчисления в гильбертовом пространстве связаны с понятием дифференциалов. Линейный ограниченный функционал $p' \stackrel{\Delta}{=} (\delta/\delta\varphi)p$ называется *производной Фреше* или *градиентом функционала* $p(\varphi)$, если справедливо

$$p(\varphi_0 + \delta\varphi) - p(\varphi_0) = p'|_{\varphi_0}(\delta\varphi) + r(\varphi_0, \delta\varphi),$$

$$\text{где } r(\varphi_0, \delta\varphi) : \lim_{||\delta\varphi|| \rightarrow 0} \frac{r(\varphi_0, \delta\varphi)}{||\delta\varphi||} = 0.$$

По теореме Рисса линейный ограниченный функционал $l(\varphi)$ в гильбертовом пространстве H может быть представлен единственным образом в виде $\hat{l}(\varphi) = (l, \varphi)$. При этом $||\hat{l}|| = ||l||_H$. Иными словами, сопряженное пространство с элементами $\{\hat{l}\}$ можно отождествить с гильбертовым пространством. Выражение, представленное в определении производной Фреше, можно записать в виде

$$p(\varphi_0 + \delta\varphi) = p(\varphi_0) + \left(\frac{\delta}{\delta\varphi}|_{\varphi_0} p, \delta\varphi \right) + r(\varphi_0, \delta\varphi).$$

Аналог производной Фреше в конечномерном пространстве для функции f , зависящей от многих аргументов $(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\Delta}{=} x$, имеет форму

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + (\nabla|_{x_0} f, \Delta x) + r(x_0, \Delta x).$$

Отметим, что определение производной функционала позволяет любую интерпретационную задачу в линейном приближении считать операторным уравнением первого рода с компактным оператором, если априори не предполагается малопараметрическое представление φ . Действительно, любое измерение представляет собой набор чисел, т. е. набор значений функционалов $\{l_n\}$, таких, что экспериментальные значения u_n , определяющие реакцию прибора на вариации состояний φ изучаемой системы, в общем случае могут быть представлены как $u_n = l_n(\varphi) + \varepsilon_n$ ($n = 1 \div N$, ε_n — стохастический шум). Тогда, считая известной реакцию прибора

на состояние системы, можно, используя определение производной Фреше, записать:

$$U_n = l_n(\varphi_0) + l'_n(\delta\varphi) + r_n(\varphi_0, \delta\varphi) + \varepsilon_n \stackrel{\Delta}{=} u_n^0 + L_n \delta\varphi + \tilde{\varepsilon}_n,$$

здесь $\tilde{\varepsilon}_n = r_n(\varphi_0, \delta\varphi) + \varepsilon_n$, L_n — n -я компонента линейного оператора L , представляющего собой N линейных функционалов l'_n , действующих на $\delta\varphi \in \Phi$, т. е. $L : \Phi \rightarrow R^N$. Поэтому в дальнейшем уделим основное внимание операторным уравнениям первого рода. Для этого потребуется вспомнить определение положительных и положительно-определеных операторов.

Рассмотрим самосопряженный оператор H , действующий в пространстве вещественных функций, и введем так называемый функционал Рэлея

$$\lambda(\varphi) = \frac{(\varphi, H\varphi)}{(\varphi, \varphi)}.$$

Экстремальные точки этого функционала определяются условием равенства нулю вариации функционала ($\delta\lambda(\varphi) = 0$) либо равенством нулю градиента функционала ($\lambda' = 0$). Последнее равенство называется *уравнением Эйлера*. Запишем условие равенства нулю вариации функционала $\lambda(\varphi)$, учитывая, что для $\lambda(\varphi) = F(\varphi)/\Phi(\varphi)$

$$\delta \frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{\delta F}{\Phi} - \frac{F \delta \Phi}{\Phi^2} = \frac{\delta F}{\Phi} - \lambda(\varphi) \frac{\delta \Phi}{\Phi},$$

т. е. $\delta\lambda(\varphi) = 0$ можно представить в виде $\delta F - \lambda(\varphi)\delta\Phi = 0$. Для конкретного вида функционала Рэлея будем иметь

$$(\delta\varphi, H\varphi) - \lambda(\varphi)(\delta\varphi, \varphi) = 0, \quad (9.1)$$

так как

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi, H\varphi) &= (\varphi + \Delta\varphi, H(\varphi + \Delta\varphi)) - (\varphi, H\varphi) = \\ &= (\delta\varphi, H\varphi) + (\varphi, H\Delta\varphi) + (\Delta\varphi, H\Delta\varphi) = \\ &= 2(\Delta\varphi, H\varphi) + O(||\Delta\varphi||^2). \end{aligned}$$

Здесь в последнем переходе мы использовали самосопряженность оператора $H((\Delta\varphi, H\varphi) = (H\Delta\varphi, \varphi))$ и вещественность φ ($(H\Delta\varphi, \varphi) = (\varphi, H\Delta\varphi)$); аналогично будем иметь для

$$\Delta(\varphi, I\varphi) = 2(\Delta\varphi, \varphi) + O(||\Delta\varphi||^2).$$

Уравнение (9.1) можно, используя линейность скалярного произведения, переписать в форме

$$(\delta\varphi, H\varphi - \lambda\varphi) = 0,$$

т. е. уравнение Эйлера для функционала Рэлея, определяющее стационарные точки функционала, будет записано как

$$H\varphi = \lambda\varphi$$

и будет совпадать с уравнением на собственные значения оператора H . Попутно мы определили градиент квадратичного функционала $(\varphi, H\varphi)$:

$$\delta\lambda = \delta(\varphi, H\varphi) = 2(H\varphi, \delta\varphi),$$

а градиент λ' имеет вид

$$\lambda' = \frac{\delta}{\delta\varphi}(\varphi, H\varphi) = 2H\varphi.$$

Напомним, что самосопряженный оператор $H = H^+$ имеет действительные собственные значения $\lambda_\alpha^* = \lambda_\alpha$:

$$\lambda_\alpha(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)(\varphi_\alpha, H\varphi_\alpha) = (H\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)^* = \lambda_\alpha^*(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha).$$

При этом собственные функции $\{\varphi_\alpha\}$ образуют ортогональный базис:

$$0 = (\varphi_\alpha, H\varphi_\beta) - (H\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) \Rightarrow (\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = 0$$

при условии $\lambda_\alpha - \lambda_\beta \neq 0$. Из стационарности функционала Рэлея в точках собственных функций получаем условие

$$\sup \frac{(\varphi, H\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \lambda_{\max},$$

где λ_{\max} — максимальное собственное значение оператора H . Аналогично

$$\inf \frac{(\varphi, H\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \lambda_{\min},$$

λ_{\min} — минимальное собственное значение оператора H , т. е. для оператора $H = H^*$ справедливо неравенство

$$\lambda_{\min}(\varphi, \varphi) \leq (\varphi, H\varphi) \leq \lambda_{\max}(\varphi, \varphi).$$

Ограничим неотрицательный оператор H условием $(\varphi, H\varphi) \geq 0$ при любом значении φ , увидим, что это эквивалентно утверждению $\lambda_\alpha \geq 0$. Оператор H положителен ($H > 0$), если $(\varphi, H\varphi) > 0$. Наконец, оператор H положительно определен, если $(\varphi, H\varphi) \geq C(\varphi, \varphi)$, что эквивалентно условию $\lambda_{\min} > 0$.

Приведем примеры самосопряженных операторов.

1. Для любого оператора L оператор $L^*L = (L^*L)^* \geq 0$, поскольку

$$(\psi, L^*L\varphi) = (L\psi, L\varphi) = (L^*L\psi, \varphi) = ((L^*L)^*\psi, \varphi) \geq 0.$$

2. Рассмотрим оператор

$$L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(q(x) \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

в пространстве L_2 на $[a, b]$ при $q(x) > 0$. Найдем условия, при которых $L = L^*$:

$$\begin{aligned} (\psi, L\varphi) &= - \int_a^b \psi(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[q(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \right] dx = \\ &= -\psi(x) q(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \psi \left[q(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \right] dx = \\ &= -\psi(x) q \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \Big|_a^b + \varphi(x) q(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \Big|_a^b - \\ &\quad - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left[q(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \right] \varphi(x) dx = (L\psi, \varphi) + \\ &\quad + \left\{ q(x) \left[\varphi(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) - \psi(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \right] \right\} \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Оператор L является самосопряженным в пространстве L_2 на $[a, b]$, если класс функций, на который он действует, таков, что

$$\left\{ q(x) \left[\varphi(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) - \psi(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \right] \right\} \Big|_a^b = 0.$$

Используя представление для $(\psi, L\varphi)$, после первого интегрирования по частям для $(\varphi, L\varphi)$ получим

$$(\varphi, L\varphi) = -\varphi(x)q(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)\Big|_a^b + \int_a^b \left|\frac{\partial}{\partial x}\varphi\right|^2 q(x)dx.$$

Отсюда видно, что на классе функций

$$\left\{ \varphi : \varphi(x)q(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)\Big|_a^b = 0 \right\},$$

например $\varphi|_a = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}\varphi|_b = 0$, если оператор L неотрицателен:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(q(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \geq 0.$$

3. Приведем условия, при которых $L = -\Delta$ является самосопряженным. Используя теорему Гаусса–Остроградского

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV = \int_{\partial V} (\mathbf{F}, d\sigma)$$

и выбирая в качестве $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ произведение $\psi \nabla \varphi$, получаем

$$\begin{aligned} \int_V [(\nabla \psi, \nabla \varphi)] + \psi \Delta \varphi dV &= \int_{\partial V} (d\sigma, \psi \nabla \varphi) = \\ &= \int_{\partial V} (\psi d\sigma \cdot \nabla) \varphi = \int_{\partial V} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \end{aligned}$$

(первая теорема Грина). Вычитая из правой и левой частей последнего равенства аналогичные выражения, в которых проведена замена $\psi \rightarrow \varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$, получим формулировку второй теоремы Грина:

$$\int_V [\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi] dV = \int_{\partial V} \left[\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] d\sigma.$$

Итак, если оператор $L = -\Delta$ определен на классе функций, таких что

$$\int_{\partial V} \left[\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] d\sigma = 0,$$

то он будет самосопряженным. Из первой теоремы Грина находим класс функций, на которых неотрицателен оператор $L = -\Delta$:

$$-\int_V \varphi \Delta \varphi dV + \int_{\partial V} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int_V |\nabla \varphi|^2 dV \geq 0.$$

Итак, $(\varphi, -\Delta \varphi) \geq 0$, т. е. $-\Delta \geq 0$, если

$$\psi \in \Phi = \left\{ \varphi : \int_{\partial V} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0 \right\}.$$

Отметим, что на этом же классе функций $\nabla^* = -\nabla$.

4. Интегральный оператор с симметричным ядром, например:

$$L\varphi = \int \sum_j \mathcal{L}_{ij}(x, x') \varphi_j(x') dx',$$

где

$$\mathcal{L}_{ij}(x, x') = \mathcal{L}_{ji}(x', x),$$

является неотрицательным на L_2 , если интегральное ядро $\mathcal{L}_{ij}(x, x')$ — ядро Гильберта–Шмидта.

Положительные операторы $H > 0$ позволяют построить гильбертово пространство, в котором скалярное произведение определено формулой

$$(\psi, \varphi)_H \triangleq (\psi, H\varphi).$$

Соответственно норма в таком пространстве Фридрихса записывается как

$$\|\varphi\|_H \triangleq (\varphi, H\varphi)^{1/2}.$$

Проверим, действительно ли форма $(\psi, H\varphi)$ является скалярным произведением:

$$(\psi, \psi)_H = (\psi, H\psi) > 0 \quad \text{при } \psi \neq 0$$

по определению положительности оператора H ;

$$\begin{aligned} (\psi, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2)_H &= (\psi, H(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2)) = \\ &= \alpha_1 (\psi, \varphi_1)_H + \alpha_2 (\psi, \varphi_2)_H \end{aligned}$$

в силу линейности оператора H ;

$$(\psi, \varphi)_H = (\psi, H\varphi) = (H\varphi, \psi)^* = (\varphi, H\psi)^* = (\varphi, \psi)_H^*,$$

здесь предпоследний переход получен в силу эрмитовости оператора H ($H = H^+$).

Частным случаем пространства Фридрихса является пространство Соболева W_1^2 , норма в котором определена выражением

$$\|\varphi\|_{W_2^1} = \|\varphi\|_H,$$

где $H = I - \Delta > 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W_2^1} &= (\varphi, (I - \Delta)\varphi)^{1/2} = \\ &= [(\varphi, \varphi)_{L_2} + (\nabla\varphi, \nabla\varphi)_{L_2}]^{1/2} = \left[\int \varphi^2 dx + \int |\nabla\varphi|^2 dx \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Положительность оператора $(I - \Delta)$ есть следствие общего соотношения $\sum_i H_i > 0$, если хотя бы одно значение $H_i > 0$, а остальные неотрицательны: $(\varphi, \sum_i H_i \varphi) = \sum_i (\varphi, H_i \varphi) > 0$.

Рассмотрим проблемы, возникающие при решении операторных уравнений первого рода

$$L\varphi = s, \tag{9.2}$$

где L — линейный компактный оператор. Напомним, что уравнение второго рода имеет вид $\varphi = L\varphi + s$. Матричное представление операторного уравнения можно получить, используя произвольный (счетный) базис гильбертова пространства $\{\psi_\alpha\}$. Разложим единичный оператор по проекторам:

$$I = \sum_\alpha P_\alpha = \sum_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|,$$

$$I\varphi = \varphi = \sum_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\varphi\rangle = \sum_\alpha \varphi_\alpha |\psi_\alpha\rangle,$$

где $\langle\psi_\beta|\psi_\alpha\rangle = \delta_{\beta\alpha}$. Можно переписать исходное уравнение (9.2) в виде

$$LI\varphi = L \sum_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\varphi\rangle = \sum_\alpha L|\psi_\alpha\rangle\varphi_\alpha = s.$$

Наконец, проецируя обе части последнего равенства на ψ_β , получаем

$$\sum_{\alpha} \langle \psi_\beta | L | \psi_\alpha \rangle \varphi_\alpha = \langle \psi_\beta | s = s_\beta.$$

Вводя обозначение $\langle \psi_\beta | L | \psi_\alpha \rangle = L_{\beta\alpha}$, записываем матричное представление операторного уравнения: $\sum_{\alpha} L_{\beta\alpha} \varphi_\alpha = s_\beta$. Следует отметить, что операторное уравнение обращается в матричное, причем конечномерное, при любом численном методе решения вследствие дискретизации. Поэтому рассмотрим сначала вопросы устойчивости для оператора L в конечномерном пространстве. Используя линейность оператора, получаем

$$L(\varphi + \delta\varphi) = L\varphi + L\delta\varphi = s + \delta s,$$

откуда $L\delta\varphi = \delta s$.

Проведем анализ влияния ошибок δs на точность восстановления φ , которая определяется ошибкой $\delta\varphi$, при задании правой части последнего равенства. Рассмотрим для этого отношение относительной ошибки решения $\|\delta\varphi\|/\|\varphi\|$ к относительной ошибке при задании правой части $\|\delta s\|/\|s\|$:

$$\Delta = \frac{\|\delta\varphi\|}{\|\varphi\|} \left(\frac{\|\delta s\|}{\|s\|} \right)^{-1} = \frac{\|\delta\varphi\|}{\|\delta s\|} \frac{\|s\|}{\|\varphi\|}.$$

Запишем неравенство для верхней границы Δ :

$$\sup \Delta \leq \sup \frac{\|\delta\varphi\|}{\|\delta s\|} \sup \frac{\|s\|}{\|\varphi\|} = \sup \frac{\|\delta\varphi\|}{\|L\delta\varphi\|} \sup \frac{\|L\varphi\|}{\|\varphi\|}.$$

Считая, что существует оператор L^{-1} такой, что $L L^{-1} = I$, записываем, производя замену переменной $\delta\varphi = L^{-1}\psi$:

$$\sup \frac{\|\delta\varphi\|}{\|L\delta\varphi\|} = \sup \frac{\|L^{-1}\psi\|}{\|\psi\|} = \|L^{-1}\|.$$

Тогда исходное неравенство для $\sup \Delta$ принимает вид

$$\sup \Delta \leq \|L^{-1}\| \|L\| \stackrel{\Delta}{=} \text{cond } L,$$

где $\text{cond } L$ — число обусловленности оператора L , используя которое, можно записать соотношение относительных ошибок правой

части и решения:

$$\frac{\|\delta\varphi\|}{\|\varphi\|} \leq \text{cond}L \frac{\|\delta s\|}{\|s\|}.$$

Учитывая, что

$$\|L\| = \sup \frac{\|L\varphi\|}{\|\varphi\|} = \sup \frac{(\varphi, L^* L \varphi)^{1/2}}{(\varphi, \varphi)^{1/2}} = (\lambda_{\max}^{L^* L})^{1/2},$$

$$\|L^{-1}\| = \sup \frac{\|L^{-1}\varphi\|}{\|\varphi\|} = \sup \frac{\|\psi\|}{\|L\psi\|} = \left(\inf \frac{\|L\psi\|}{\|\psi\|} \right)^{-1} = (\lambda_{\min}^{L^* L})^{-1/2}$$

(здесь в последних переходах использовано соотношение Рэлея $\lambda_{\min}^H(\varphi, \varphi) \leq (\varphi, H\varphi) \leq \lambda_{\max}^H(\varphi, \varphi)$, для произвольного значения $H = H^*$ число обусловленности можно представить в следующем виде:

$$\text{cond}L = \left(\lambda_{\max}^{L^* L} / \lambda_{\min}^{L^* L} \right)^{1/2}.$$

Для симметричного L имеем: $L = L^*$, $\lambda^{L^* L} = (\lambda^L)^2$, а число обусловленности можно записать через собственные значения λ оператора L :

$$\text{cond}L = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}.$$

Рассмотрим теперь, как влияют ошибки δL при задании оператора на ошибки $\delta\varphi$ в решении. Пусть точное уравнение имеет вид $L\varphi = s$, а возмущенное — $(L + \delta L)(\varphi + \delta\varphi) = s$, причем предполагается, что существует L^{-1} . С учетом точного уравнения получаем

$$L\delta\varphi + \delta L(\varphi + \delta\varphi) = 0,$$

или

$$\delta\varphi = -L^{-1}\delta L(\varphi + \delta\varphi).$$

На основании этих равенств можно записать неравенство для нормы:

$$\|\delta\varphi\| \leq \|L^{-1}\| \|\delta L\| \|\varphi + \delta\varphi\|.$$

Вводя в правую часть формальный множитель $\|L\|/\|L\|$, для относительной ошибки поля $\delta\varphi$ получаем выражение, содержащее, как и в предыдущем случае, число обусловленности:

$$\frac{\|\delta\varphi\|}{\|\varphi + \delta\varphi\|} \leq \text{cond}L \frac{\|\delta L\|}{\|L\|}.$$

Таким образом, число обусловленности является фактором усиления как ошибок при задании правой части, так и ошибок при задании оператора. Хотя число обусловленности представляет собой максимальный коэффициент усиления ошибок, можно показать, что эта верхняя граница при применении вычислительных методов достигается практически всегда. Прежде всего отметим, что в неравенстве

$$\|L^{-1}\varphi\| \leq \|L^{-1}\| \|\varphi\|$$

равенство возможно в том случае, если функция φ является собственной функцией оператора L и соответствует его минимальному собственному значению. Покажем, что при последовательном увеличении числа узлов конечно-разностной схемы, если не использовать специальных стабилизирующих (“регуляризующих”) методов, число обусловленности оператора увеличивается и тем самым увеличивается ошибка решения. Отметим, что именно этот факт — возникновение неограниченных с переполнением разрядной сетки ошибок решения при использовании ЭВМ — стимулировал в свое время начало активного развития методов решения некорректных задач. Используем для этого соотношения, полученные нами при введении функционала Рэлея, записанного для самосопряженного оператора $H = H^*$:

$$\inf \frac{(\varphi, H\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \lambda_{\min}.$$

Очевидно, что именно на тех функциях φ , на которых функционал Рэлея близок к нижней границе, число обусловленности максимально, т. е. максимальны ошибки в решении операторного уравнения при условии одних и тех же ошибок округления. Посмотрим, как ведет себя нижняя граница функционала Рэлея, если L — интегральный оператор Гильберта — Шмидта, т. е. оператор, интегральное ядро которого интегрируемо с квадратом. Этот оператор заведомо ограничен (т. е. $\|L\| < \infty$):

$$\begin{aligned} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)} &= \frac{\int dx [\int \mathcal{L}(x, x') \varphi(x') dx']^2}{(\varphi, \varphi)} \leq \\ &\leq \int dx \int \mathcal{L}^2(x, x') dx' = c < \infty, \end{aligned}$$

причем последний интеграл ограничен по определению.

Посмотрим, от чего зависит нижняя граница функционала Рэлея:

$$\lambda_{\min}^{L^*L} \leq \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \frac{\int dx [\int \mathcal{L}(x, x') \varphi(x') dx']^2}{(\varphi, \varphi)}.$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой скалярное произведение, зависящее как от параметра от точки x . Без ограничения общности можно считать, что φ нормировано на единицу и что скалярное произведение совпадает с проекцией скалярного ядра \mathcal{L} на функцию φ , если опустить при этом знаменатель, равный единице. Как было показано ранее, базис тригонометрических функций слабо сходится к нулю. В данном случае можно считать, что далекие фурье-компоненты интегрируемого ядра $\mathcal{L}(x, x')$ являются бесконечно малыми величинами (более строго — экспоненциально малыми), если \mathcal{L} не имеет особенностей на вещественной оси: $(\mathcal{L}, \varphi) \sim a(x)e^{-\omega x_1}$ (x_1 — характерная длина функции \mathcal{L} , т. е. расстояние от вещественной оси до особой точки), или фурье-компоненты малы степенным образом, если особенность переходит на вещественную ось. Таким образом, мы получили

$$\lambda_{\min}^{L^*L} \leq \frac{(L\varphi_n, L\varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

что позволяет сделать следующие выводы относительно оператора, который удовлетворяет единственному требованию — его интегральное ядро должно быть интегрируемо с квадратом:

- 1) нижняя граница спектра $\lambda_{\min}^{L^*L}$ равна нулю независимо от того, является ли нуль собственным значением оператора L^*L ;
- 2) нижняя граница функционала Рэлея достигается на функциях, имеющих высокочастотную составляющую.

Первое условие показывает, что понятие числа обусловленности для операторов в бесконечномерных пространствах, строго говоря, не применимо даже в том случае, если 0 не является собственным значением оператора L^*L , соответственно

$$\ker L = \{\varphi : L\varphi = 0\} = \emptyset.$$

Но так как численные методы связаны с конечномерной аппроксимацией, нетрудно проследить, как ведет себя число обусловленно-

сти с увеличением размерности аппроксимации. Понятно, что нижняя и верхняя границы, определяющие число обусловленности

$$\inf_{\varphi \in \Phi_n} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)}, \quad \sup_{\varphi \in \Phi_n} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)},$$

зависят от того множества функций, на которых мы рассматриваем функционал Рэлея. Конечно-разностную аппроксимацию интегрального оператора L можно рассматривать как действие оператора на множестве кусочно-постоянных или кусочно-линейных функций: представление матричного элемента оператора L : $L_{mn} = \langle \psi_m | L | \psi_n \rangle$ соответствует тогда интегрированию по формуле прямоугольников или трапеций. Для оценки числа обусловленности оператора L на множестве кусочно-линейных функций выберем сначала $\varphi \in \Phi_n$, заданные с плотностью n узлов на единице интервала, а затем $\varphi \in \Phi_{2n}$ (более точная конечно-разностная аппроксимация решения). Тогда можно записать следующие неравенства:

$$\inf_{\varphi \in \Phi_n} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)} \leq \inf_{\varphi \in \Phi_{2n}} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)},$$

$$\sup_{\varphi \in \Phi_{2n}} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)} \geq \sup_{\varphi \in \Phi_n} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)}.$$

Эти неравенства являются следствием очевидного вложения $\Phi_n \subset \Phi_{2n}$ (функция с n узлами является частным случаем функции с $2n$ узлами). Ясно, что на более широком множестве нижняя граница может только уменьшиться, а верхняя — только увеличиться. Окончательный вывод сводится к следующему:

$$\operatorname{cond}_{\varphi \in \Phi_{2n}} L \geq \operatorname{cond}_{\varphi \in \Phi_n} L, \quad (9.3)$$

иными словами, при попытке построить более точную аппроксимацию решения (ее легко осуществить при использовании более мощных ЭВМ) мы сталкиваемся со все большей его неустойчивостью (для ЭВМ это означает переполнение любой заранее заданной разрядной сетки). Причем можно априори утверждать, что эти неустойчивые решения будут принимать знакопеременные значения (высокочастотная фурье-компоненты, которая и обуславливает понижение точной нижней границы спектра конечно-разностной

аппроксимации оператора L). Разумеется, конечномерная аппроксимация оператора может быть построена с помощью любого базиса — не обязательно кусочно-постоянных или кусочно-линейных функций, которые к тому же являются неполными базисами. Наиболее естественный базис в задаче $L\varphi = s$ — базис собственных функций оператора L (пусть $L = A^*A$):

$$L\varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha, \quad (\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Тогда функционал Рэлея можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda\varphi &= \frac{(\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \frac{\left(\sum_\alpha (\varphi, \varphi_\alpha) \varphi_\alpha, L \sum_\beta (\varphi, \varphi_\beta) \varphi_\beta \right)}{\left(\sum_\alpha (\varphi, \varphi_\alpha) \varphi_\alpha, \sum_\beta (\varphi, \varphi_\beta) \varphi_\beta \right)} = \\ &= \frac{\sum_\alpha \lambda_\alpha |(\varphi, \varphi_\alpha)|^2 (\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)}{\sum_\alpha |(\varphi, \varphi_\alpha)|^2} = \lambda_1 \frac{\sum_\alpha |(\varphi, \varphi_\alpha)|^2}{\sum_\alpha |(\varphi, \varphi_\alpha)|^2} + \\ &+ \frac{\sum_\alpha (\lambda_\alpha - \lambda_1) |(\varphi, \varphi_\alpha)|^2}{\sum_\alpha |(\varphi, \varphi_\alpha)|^2} \stackrel{\Delta}{=} \lambda_1 + \Delta(\varphi). \end{aligned}$$

Здесь λ_1 — минимальное собственное число оператора L , а $\Delta(\varphi)$ больше нуля. Из этого выражения видно, что если в качестве множества функций выбрать $\Phi_1 = \{\varphi : (\varphi, \varphi_1) = 0\}$, то

$$\inf_{\varphi \in \Phi_1} \lambda(\varphi) = \lambda_2,$$

если $\varphi \in \Phi_2 = \{\varphi : (\varphi, \varphi_1) = 0 \text{ и } (\varphi, \varphi_2) = 0\}$, то

$$\inf_{\varphi \in \Phi_2} \lambda(\varphi) = \lambda_3.$$

Соответственно

$$\operatorname{cond}_{\varphi \in \Phi} L > \operatorname{cond}_{\varphi \in \Phi_1} L > \operatorname{cond}_{\varphi \in \Phi_2} L > \dots,$$

если $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$. Отметим, что полученную цепочку неравенств относительно $\operatorname{cond} L$ можно интерпретировать по аналогии

с ситуацией, рассмотренной ранее, когда рост неустойчивости мы связывали с теоретико-множественным вложением функциональных пространств ((9.3): $\Phi \supset \Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \dots$

Исключение из решения проекций на собственные функции, соответствующие малым собственным значениям оператора $L = A^*A$, способствует стабилизации решения и составляет сущность *метода сингулярного анализа*. Заметим, что аналогичные математические приемы используются и при численном решении прямых задач, включающих *неограниченные* операторы, например дифференциальные. В этом случае формальным критерием неустойчивости служит поведение $\text{cond}L$, связанное с максимальным собственным значением, которое достигается на том же классе быстро осциллирующих функций. Можно назвать такие процедуры, связанные с фильтрацией высокочастотных компонент: например, использование аппроксимации низкого порядка (малое число узлов в конечно-разностной аппроксимации), использование урезанного базиса собственных функций (сингулярный анализ), использование “стихийной” регуляризации.

Попытаемся устраниТЬ рассмотренные ранее сложности, возникающие при решении операторного уравнения $L\varphi = s$ в процессе перехода к экстремальной задаче, традиционно использовавшейся при обработке экспериментальных данных. Суть такой экстремальной задачи сводится к следующему. Конечномерный вектор $\varphi = \{\varphi_n, n = 1 \div N\}$ принимается за решение задачи $L\varphi = s$, если сумма квадратов отклонений $\sum_m (\sum_n L_{mn} \varphi_n - s_m)^2$ минимальна (*метод наименьших квадратов*), т. е.

$$\hat{\varphi} = \arg \min_{\varphi} (L\varphi - s, L\varphi - s).$$

В пределе при $m, n \rightarrow \infty$ векторное скалярное произведение переходит в квадрат нормы в пространстве L_2 :

$$\hat{\varphi} = \arg \inf \|\|L\varphi - s\|_{L_2}^2. \quad (9.4)$$

Решение этой экстремальной задачи получается из уравнения Эйлера $(\delta/\delta\varphi) J = 0$ для функционала

$$J(\varphi) \stackrel{\Delta}{=} \|L\varphi - s\|^2 = (\varphi, L^*L\varphi) - 2(L^*s, \varphi) + (s, s).$$

Градиент для квадратичной формы $(\varphi, H\varphi)$ мы записывали раньше:

$$\frac{\delta}{\delta \varphi}(\varphi, H\varphi) = 2H\varphi.$$

Градиент (L^*s, φ) равен

$$\frac{\delta}{\delta \varphi}(L^*s, \varphi) = L^*s.$$

Окончательно уравнение Эйлера для $J(\varphi)$ имеет следующий вид:

$$L^*L\varphi - L^*s = 0. \quad (9.5)$$

Мы получили, что функция φ , являющаяся решением экстремальной задачи (9.4), должна быть одновременно решением операторного уравнения первого рода (9.5). Если оператор L компактный, например интегральный, то оператор L^*L тоже компактный и неотрицательный. Точная нижняя граница спектра оператора L равна нулю, что означает неограниченность обратного оператора $(L^*L)^{-1}$ (либо то, что он не существует, если 0 является собственным значением). Исходную задачу — метод наименьших квадратов — можно рассматривать как конечно-разностную аппроксимацию, сформулированную в пространстве L_2 (9.4). При этом неустойчивость, возникающая при решении по методу наименьших квадратов, тем выше, чем больше размерность N при условии вложенности конечно-разностных аппроксимаций (9.2).

Отметим, что для физиков естественным является предположение о непрерывности математических моделей, описывающих реальные физические процессы, т. е. малым изменениям параметров системы (среды) должен соответствовать и малый отклик. Совершенно неожиданной оказалась ситуация, возникающая при решении даже линейных обратных задач, где малые вариации в исходных данных обратной задачи (измерениях) приводят к сколь угодно большим осцилляциям решения. Убежденность естествоиспытателей в том, что математическая модель реальных процессов обязана быть непрерывной, привела в свое время [87] к формулировке понятия *корректно*, т. е. *правильна поставленной задачи*.

9.2. Некорректно поставленные задачи

Согласно Г. Адамару, задача $L\varphi = s$, $\varphi \in \Phi$, $s \in S$, называется *корректно поставленной*, если выполнены условия

1) разрешимости:

$$\forall s \in R(L) \exists \varphi : L\varphi = s;$$

2) единственности:

$$\dim \ker(L) = 0;$$

3) устойчивости:

$$\|L^{-1}\| = c < \infty.$$

Задачи, не удовлетворяющие этим условиям, называются *некорректными*. Как мы уже отмечали, такими задачами являются, например, все интерпретационные задачи, если априори не предполагать $\varphi \in R^N$, где N достаточно мало: эти задачи не удовлетворяют по меньшей мере условию устойчивости.

Задача называется *корректной по Тихонову*, если можно указать такое множество функций $\tilde{\Phi} \subset \Phi$, что функция, определенная на этом множестве, удовлетворяет условиям 2) и 3). Суть всех методов регуляризации заключается в построении такого множества. Логической основой выделения из пространства Φ множества $\tilde{\Phi}$ служит *априорная информация* о решении φ . Как было показано в § 9.1, решение задачи

$$\hat{\varphi} = \arg \inf_{\varphi \in \Phi} \|L\varphi - s\|_{L_2}$$

является некорректным, что связано с компактностью оператора L^*L , т. е. с отсутствием или неограниченностью оператора $(L^*L)^{-1}$, а регуляризация связана с решением задачи

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf_{\substack{\varphi \in \Phi \\ \varphi \in \tilde{\Phi}}} \|L\varphi - s\|_{L_2}.$$

Рассмотрим более общую задачу минимизации одного функционала при наличии связей, которые определяют множество $\tilde{\Phi}$ через другие функционалы $\Delta J_i(\varphi)$, $i = 1 \div m$:

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf_{\varphi \in \tilde{\Phi}} J(\varphi),$$

$$\overline{\Phi} = \cap_i \varphi_i \neq \emptyset, \quad \Phi_i = \{ \varphi : \Delta J_i(\varphi) \leq 0 \}.$$

Покажем, что решение этой задачи эквивалентно поиску стационарной точки функции Лагранжа $\mathcal{L}(\varphi, \lambda)$, $\lambda \in R^m$, причем $\lambda \geq 0$. Для упрощения будем считать, что все входящие в задачу функционалы дифференцируемы. Пусть $\tilde{\varphi}$ является решением этой задачи. Класс $\{\delta\varphi\}$ допустимых вариаций определяется условиями

$$\begin{aligned} \delta \Delta J_j(\varphi) &\leq 0, \\ j : \Delta J_j(\tilde{\varphi}) &= 0, \quad j = 1 \div m', \quad m' \leq m, \end{aligned}$$

или

$$\left(\delta\varphi, \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta J_j|_{\varphi=\tilde{\varphi}} \right) \leq 0. \quad (9.6)$$

Утверждение, что $\tilde{\varphi}$ является решением, эквивалентно утверждению: *не существует* $\delta\varphi$ из класса допустимых, приводящих к уменьшению значений $J(\varphi)$:

$$\#\delta\varphi : J(\tilde{\varphi} + \delta\varphi) < J(\tilde{\varphi})$$

или не существуют $\delta\varphi$ такие, что

$$\delta J = \left(\delta\varphi, \frac{\delta}{\delta\varphi} J|_{\varphi=\tilde{\varphi}}(\varphi) \right) < 0. \quad (9.7)$$

Неравенство (9.7) остается справедливым, если к нему добавить неравенства (9.6), умноженные на произвольные положительные константы λ_j , и формально включить аналогичные выражения для связей с множителями $\lambda_i = 0$:

$$\left(\delta\varphi, \frac{\delta}{\delta\varphi} J|_{\varphi=\tilde{\varphi}} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta J_i|_{\varphi=\tilde{\varphi}} \right) < 0.$$

Условие несуществования вариации $\delta\varphi$ приводит к требованию

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} J|_{\varphi=\tilde{\varphi}} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta J_i|_{\varphi=\tilde{\varphi}} = 0,$$

причем $H > 0$. При регуляризации по Тихонову в качестве регуляризующего функционала используется квадрат нормы в пространстве Соболева W_2^n .

Как мы видели ранее, экстремальные задачи с ограничениями сводятся к экстремальной задаче с функцией Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\varphi, \alpha) = J(\varphi) + \alpha \Delta J(\varphi),$$

где α — множитель Лагранжа. Решение задачи с функцией Лагранжа можно рассматривать как семейство α -параметрических задач с неопределенным параметром α , т. е. следующим образом решается последовательность задач: фиксируют значение α_0 , заведомо большое, при котором наверняка удовлетворяется исходное ограничение, и находят решение, соответствующее безусловной экстремальной задаче в пространстве Φ , которое можно рассматривать как уравнение Эйлера для функционала Лагранжа с фиксированными коэффициентами λ_i :

$$\mathcal{L}(\varphi, \lambda) = J(\varphi) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \Delta J_i(\varphi).$$

Стационарная точка функционала Лагранжа дает следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_i} \Big|_{\tilde{\lambda}_i \tilde{\varphi}} &= 0 = \Delta J_i(\tilde{\varphi}), \quad i : \tilde{\lambda}_i > 0, \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \Big|_{\tilde{\varphi} \tilde{\lambda}} &= 0 = \frac{\delta}{\delta \varphi} J \Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}} + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta J_i \Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

т. е. поиск стационарной точки (9.8) является задачей, эквивалентной задаче (9.5), и составляет основу нелинейного программирования и задач оптимального управления. Отметим, что стационарная точка функционала Лагранжа может быть только седловой в пространстве $\Phi \times R_+^m$:

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda}) \leq \mathcal{L}(\varphi, \tilde{\lambda}).$$

Поэтому поиск стационарной точки функционала Лагранжа сводится к минимаксной задаче

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda}) = \min_{\varphi \in \Phi} \max_{\lambda \in R_+^m} \mathcal{L}(\varphi, \lambda)$$

либо

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda}) = \max_{\lambda \in R_+^m} \min_{\varphi \in \Phi} \mathcal{L}(\varphi, \lambda).$$

Итак, решение операторного уравнения мы свели к решению экстремальных задач. Напомним некоторые методы решения экстремальных (оптимизационных) задач. В качестве базовой рассмотрим задачу поиска экстремальной точки $J(\varphi)$ при отсутствии ограничений на φ :

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf_{\varphi \in \Phi} J(\varphi)$$

в предположении, что функционал $J(\varphi)$ ограничен снизу.

Основными методами решения этой задачи в случае дифференцируемого функционала являются методы, использующие вычисление градиента $\delta/\delta\varphi J(\varphi)$. Тогда общую структуру вычислительных методов можно представить в форме явной схемы итерационного (релаксационного) процесса:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - H_n J'_n, \quad H_n > 0, \quad H_n : \Phi^* \longrightarrow \Phi,$$

где $\delta/\delta\varphi|_{\varphi=\varphi_n} J$ — градиент функционала $J(\varphi)$; H_n определяет различные методы оптимизации.

Смысль выбора направления движения $p_n = H_n J'_n$ в функциональном пространстве Φ можно проиллюстрировать на простейшей схеме линеаризации:

$$J(\varphi_{n+1}) = J(\varphi_n - H_n J'_n) \approx J(\varphi_n) - (J'_n, H_n J'_n) < J(\varphi_n),$$

где последнее неравенство написано с учетом условия $J'_n \neq 0$, означающего, что на n -м шаге мы не находились в точке локального минимума.

Простейший выбор $H_n = \alpha_n I$ ($\alpha_n \in R_+^1$) соответствует *методу наискорейшего спуска (движение по антиградиенту)*. Один из способов определения α сводится к следующему:

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha \geq 0} J(\varphi_n - \alpha J').$$

Выбор оператора H_n в форме

$$H_n = \left[\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} \Big|_{\varphi_n} J \right]^{-1}$$

приводит к обобщенной схеме *метода Ньютона*, который соответствует квадратичной аппроксимации минимизируемого функционала $J(\varphi)$ по значениям функционала и его первых двух производных на n -м шаге:

$$J(\varphi) = J(\varphi_n) + (J', \varphi - \varphi_n) + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_n, J''(\varphi - \varphi_n)),$$

$\tilde{\varphi}$, минимизирующая $J(\varphi)$, находится из уравнения Эйлера

$$J''(\varphi - \varphi_n) + J' = 0,$$

откуда

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - [J''_n]^{-1} J'_n.$$

Отметим, что условие применимости метода Ньютона — существование обратного оператора вторых производных функционала $[J'']^{-1}$, которое обеспечивается строгой выпуклостью функционала $J(\varphi)$. Напомним в связи с этим свойства выпуклых функционалов. Функционал $J(\varphi)$ называется *выпуклым*, если для любой пары φ_1 и φ_2 из области определения выполняется неравенство

$$J((1-\lambda)\varphi_1 + \lambda\varphi_2) \leq (1-\lambda)J(\varphi_1) + \lambda J(\varphi_2),$$

где $\lambda \in (0, 1)$ — аргумент функционала в левой части неравенства, который описывает отрезок прямой $\varphi_1 + \lambda(\varphi_2 - \varphi_1)$, соединяющий точки φ_1 и φ_2 , а значение функционала справа представляет собой линейную интерполяцию значений функционалов между точками φ_1 и φ_2 . Выпуклым функционалом является, например, линейный функционал. Нетрудно видеть, что норма также является выпуклым функционалом:

$$\|(1-\lambda)\varphi_1 + \lambda\varphi_2\| \leq \|(1-\lambda)\varphi_1\| + \|\lambda\varphi_2\|.$$

Из неравенства треугольника и из условия однородности

$$\|(1-\lambda)\varphi_1 + \lambda\varphi_2\| \leq (1-\lambda)\|\varphi_1\| + \lambda\|\varphi_2\|.$$

Строго выпуклым называется функционал, удовлетворяющий строгому неравенству:

$$J((1-\lambda)\varphi_1 + \lambda\varphi_2) < (1-\lambda)J(\varphi_1) + \lambda J(\varphi_2),$$

$$\lambda \in (0, 1).$$

Например, квадрат нормы является строго выпуклым функционалом:

$$\begin{aligned} \|(1-\lambda)\varphi_1 + \lambda\varphi_2\|^2 &\leq (1-\lambda)^2\|\varphi_1\|^2 + \lambda^2\|\varphi_2\|^2 + \\ &+ 2\lambda(1-\lambda)\|\varphi_1\|\|\varphi_2\| < (1-\lambda)\|\varphi_1\|^2 + \lambda\|\varphi_2\|^2, \end{aligned}$$

а значит и $(\varphi, H\varphi) \stackrel{\Delta}{=} \|\varphi\|_H^2$, где $H > 0$, также является строго выпуклым функционалом.

Выпуклые функционалы обладают следующими дифференциальными свойствами. Из определения выпуклости для произвольных $\delta\varphi$:

$$J(\varphi + \lambda\delta\varphi) \leq (1 - \lambda)J(\varphi) + \lambda J(\varphi + \delta\varphi)$$

получаем

$$\frac{J(\varphi + \lambda\delta\varphi) - J(\varphi)}{\lambda} \leq J(\varphi + \delta\varphi) - J(\varphi).$$

При λ , стремящейся к нулю, неравенство запишем в виде

$$J(\varphi + \delta\varphi) - J(\varphi) \geq (J' \big|_{\varphi}, \delta\varphi). \quad (9.9)$$

Покажем, что вторая производная строго выпуклого функционала J'' положительно определена. Запишем разложение $J(\varphi + \delta\varphi)$ в ряд Тейлора:

$$J(\varphi + \delta\varphi) = J(\varphi) + (J', \delta\varphi) + \frac{1}{2}(\delta\varphi, J''\delta\varphi) + O(\|\delta\varphi\|^2)$$

и, учитывая неравенство (9.9), справедливое для произвольных $\delta\varphi$, получим

$$J(\varphi + \delta\varphi) - J(\varphi) - (J', \delta\varphi) = \frac{1}{2}(\delta\varphi, J''\delta\varphi) + O(\|\delta\varphi\|^2) \geq 0,$$

откуда следует $J'' \geq 0$. Для строго выпуклого функционала неравенство (9.9) переходит в строгое неравенство $J'' > 0$.

Для примера запишем схему решения экстремальной задачи по методу Ньютона для функционала

$$J(\theta) = \|\mathcal{P}(\theta) - u\|_B^2 + \alpha\|H(\theta_n - \theta_0)\|^2, \quad (9.10)$$

где $\mathcal{P}(\theta)$ — нелинейный оператор; $H = H^* > 0$; $B = B^* > 0$. Запишем первую производную функционала в точке θ_n :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} J = 2[P_n^* B(u_n - u) + \alpha H(\theta_n - \theta_0)],$$

где $P_n = \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} \mathcal{P}$, $u_n = \mathcal{P}(\theta_0)$, и вторую производную:

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_n} J = 2[P_n^* B P_n + \alpha H].$$

Приведем схему расчета производных:

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J(\theta_n + \delta\theta) - J(\theta_n) = [\mathcal{P}(\theta_n + \delta\theta), B\mathcal{P}(\theta_n + \delta\theta)] + \\
&+ \alpha[\theta_n + \delta\theta - \theta_0, H(\theta_n + \delta\theta - \theta_0)] - [\mathcal{P}(\theta_n), B\mathcal{P}(\theta_n)] - \\
&- \alpha[\theta_n - \theta_0, H(\theta_n - \theta_0)] \approx [\mathcal{P}(\theta_n) + \mathcal{P}\delta\theta, B(\mathcal{P}(\theta) + p\delta\theta)] - \\
&- [\mathcal{P}(\theta_n), B\mathcal{P}(\theta_n)] + \alpha[(\delta\theta, H(\theta_n - \theta_0)) + (\delta\theta, H\delta\theta)] \approx \\
&\approx 2 \cdot (\delta\theta P_n^* B(u_n - u) + \alpha H(\theta_n - \theta_0)) + \\
&+ [\delta\theta, (P_n^* B P_n + \alpha H)\delta\theta] \stackrel{\Delta}{=} (\delta\theta, J'_n) + \frac{1}{2}(\delta\theta, J''_n\delta\theta).
\end{aligned}$$

Запишем, наконец, итерационный алгоритм решения нелинейной экстремальной задачи (9.10):

$$\theta_{n+1} = \theta_n - [P_n^* B P_n + \alpha H]^{-1} [P_n^* B(u_n - u) + \alpha H(\theta_n - \theta_0)].$$

Отдельно приведем первую итерацию обобщенного метода Ньютона, когда в качестве начального приближения используется значение θ_0 из уравнения (9.10):

$$\theta_1 = \theta_0 + [P_0^* B P_0 + \alpha H]^{-1} [P_0^* B(u - \mathcal{P}(\theta_0))].$$

Отметим, что исходный функционал $J(\theta)$ — строго выпуклый в силу строгой выпуклости $\|H(\theta_n - \theta_0)\|^2$. Метод Ньютона предпочтительнее по сравнению с градиентным в силу более высокой скорости сходимости.

Рассмотрим здесь множество $\overline{\Phi}$, которое можно представить как квадратичное по φ ограничение — это связано с тем, что уравнение Эйлера для таких задач линейно, и формально алгоритм может быть представлен в операторном виде: $\varphi = R_s$.

Прежде всего отметим, что проявление неустойчивости выражалось в неограниченных по амплитуде ошибках решения. Поэтому естественно ожидать, что, выбрав в качестве $\overline{\Phi}$ шар конечного радиуса в пространстве Φ , мы получим функцию $\tilde{\varphi}$, заведомо не содержащую больших ошибок. Эти соображения являются эвристической основой *регуляризации по Иванову — Лаврентьеву*:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi} &= \arg \inf \left\{ \|L\varphi - s\|_{L_2}^2 \right\}, \\
\tilde{\varphi} &\in \overline{\Phi} = \left\{ \|\varphi\|_{L_2}^2 \leq C \right\}.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Метод регуляризации Иванова–Лаврентьева (9.11) не отфильтровывает высокочастотные компоненты, поскольку ограничение $\|\varphi\|^2 \leq C$ носит интегральный характер для функции φ . Фильтрация высокочастотных компонент будет происходить, если ограничение накладывается на поведение не только амплитуды функции, но и на ее производные. Эти условия и определяют *регуляризацию по Тихонову*:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &= \arg \inf \left\{ \|L\varphi - s\|_{L_2}^2 \right\}, \\ \tilde{\varphi} &\in \overline{\Phi} = \left\{ (\|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\nabla \varphi\|_{L_2}^2) \leq C \right\},\end{aligned}$$

или в более общей форме

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &= \arg \inf \left\{ \|L\varphi - s\|_{L_2}^2 \right\}, \\ \tilde{\varphi} &\in \overline{\Phi} = \left\{ \left(\varphi, \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left[q(x) \frac{\partial^r}{\partial x^r} \right] \varphi \right) \leq C \right\},\end{aligned}\quad (9.12)$$

где $q(x) > 0$. Регуляризация с дифференциальным оператором (9.12), приведенным в последнем ограничении, называется *регуляризацией n-го порядка* (нулевого, первого, второго, …, n-го). Поэтому ограничение $(\|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\nabla \varphi\|_{L_2}^2) \leq C$ соответствует регуляризации по Тихонову первого порядка ($q(x) \equiv 1$) $(\varphi, (I - \partial^2/\partial x^2)\varphi)$, а ограничение $\|\varphi\|_{L_2}^2 \leq C$ – регуляризации по Тихонову нулевого порядка.

Общую схему регуляризации можно представить как решение следующей экстремальной задачи:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &= \arg \inf \|L\varphi - s\|_B^2, \\ \tilde{\varphi} &\in \overline{\Phi} = \left\{ \|\varphi\|_H^2 \triangleq (\varphi, H\varphi) \leq C \right\}.\end{aligned}\quad (9.13)$$

Затем уменьшаем параметр $\alpha_1 = q\alpha_0$, $q < 1$, снова решаем безусловную экстремальную задачу (9.13). Такая процедура продолжается до тех пор, пока полученное решение не будет удовлетворять ограничению

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\alpha &= \arg \inf \left\{ \|L\varphi - s\|_B^2 + \alpha \|\varphi\|_H^2 \right\}, \\ \alpha : \|\tilde{\varphi}_\alpha\|_H^2 &\leq C.\end{aligned}\quad (9.14)$$

Заметим, что при любом значении $\alpha > 0$ экстремальная задача на безусловный экстремум является задачей выпуклого анализа,

и в силу строгой выпуклости $\alpha\|\varphi\|_H^2$ имеет единственное решение, которое может быть получено любым численным методом, например методами градиентного спуска, методом Ньютона с регулировкой шага, методом сопряженных градиентов и т. д. [53]. В методах регуляризации некорректных задач (9.14) α называют *параметром регуляризации*, а $\|\varphi\|_H^2$, обуславливающий строгую выпуклость минимизируемого функционала, — *стабилизирующим*.

Алгоритм решения некорректной задачи выглядит особенно просто именно в том случае, когда оператор в задаче $L\varphi = s$ линейный и когда ограничения квадратичны по φ . Точка экстремума в этом случае должна соответствовать линейному уравнению Эйлера, которое для задачи (9.14) имеет вид

$$(L^*BL + \alpha H)\varphi = L^*Bs,$$

где операторное уравнение первого рода корректно разрешимо, поскольку оператор $(L^*BL + \alpha H)^{-1}$ ограничен: действительно,

$$(\varphi, (L^*BL + \alpha H)\varphi) = (\varphi, L^*BL\varphi) + \alpha(\varphi, H\varphi) \geq \alpha\lambda_{\min}^H(\varphi, \varphi) > 0,$$

производная по параметру регуляризации α не положительна:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\|\tilde{\varphi}_\alpha\|_H^2 \leq 0,$$

поскольку производная представляет собой квадратичную форму с симметричным, не положительным оператором. Это означает, что относительно радиуса шара R_α , которому принадлежит решение φ_α , можно записать: $(\partial/\partial\alpha)R_\alpha \leq 0$. Экстремальную задачу

$$J(\varphi) + \alpha\Delta J(\varphi) \longrightarrow \inf$$

можно интерпретировать как экстремальную:

$$\frac{1}{2}J(\varphi) + \Delta J(\varphi) \longrightarrow \inf,$$

что соответствует поиску функции $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf \Delta J(\varphi), \quad (9.15)$$

откуда

$$\|(L^*BL + \alpha H)^{-1}\| \leq (\alpha\lambda_{\min}^H)^{-1} = C < \infty.$$

На практике радиус компакта, задаваемого ограничением ($\|\varphi\|_H^2 \leq C$), неизвестен, и идеология решения некорректных задач сводится к следующему. Решением некорректной задачи $L\varphi = s$ объявляется $\tilde{\varphi}$, являющееся пределом последовательности $\tilde{\varphi}_\alpha$ при стремлении параметра регуляризации к нулю:

$$\tilde{\varphi}_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow +0} \tilde{\varphi}.$$

Покажем, что уменьшение параметра регуляризации соответствует увеличению радиуса компакта, что эквивалентно снятию ограничения: действительно,

$$\|\tilde{\varphi}_\alpha^2\|_H^2 = (L^*Bs, [(L^*BL + \alpha H)^{-1} H(L^*BL + \alpha H)^{-1}] \cdot L^*Bs)$$

при условии $J(\varphi) \leq C$, причем уменьшению параметра регуляризации α соответствует уменьшение квадрата нормы *невязки* (Δ):

$$\|\Delta\|_B^2 \triangleq \|L\varphi - s\|_B^2.$$

При известном уровне ошибок в задании правой части s такой подход дает практический метод выбора параметра регуляризации (*принцип невязки* [57]).

Заметим, что регуляризация в аспекте решения операторных уравнений сводится к замене компактного оператора L^*BL на строго положительный ($L^*BL + \alpha H$) с $\alpha > \alpha_0 > 0$.

Если используется метод Иванова — Лаврентьева, то $H = I$, и при интерпретации (9.15) $\tilde{\varphi}$ называется *квазирешением* ($\alpha \rightarrow +0$). Если используется метод Тихонова, то

$$H = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left[q(x) \frac{\partial^r}{\partial x^r} \right],$$

что соответствует канонической регуляризации некорректных задач, введенных при решении интегральных уравнений первого рода, например уравнения свертки.

9.3. Статистические критерии получения оценок в терминах функционального анализа

В развитии идеологии регуляризации некорректно поставленных задач существенное место занимало введение ограничений

либо на величину $\|\varphi\|_H^2 \leq C$, либо на квадрат нормы невязки $\|L\varphi - s\|_B^2 \leq C$. На практике указать точно границу этих неравенств не представляется возможным. Попробуем смягчить жесткое требование указания границы, заменив его условием, что квадрат нормы может принимать любые значения, но средняя величина квадрата нормы равна C : $\overline{\|\varphi\|_H^2} = C$. Чтобы формализовать понятие среднего, необходимо каждому значению квадрата нормы присвоить определенный вес, такой что

$$p(\varphi) : (p, F(\varphi)) = C,$$

$$(p, 1) = 1,$$

$$p \geq 0.$$

В нашем случае $F(\varphi) = \|\varphi\|_H^2$. Попытаемся определить этот вес, внося минимум произвола в процедуру его построения.

Потребуем, чтобы информационный функционал Шеннона

$$H = -(p, \ln p) \quad (9.16)$$

(см. § 1.9) достигал максимального значения, или $(p, \ln p) \rightarrow \min$, при условии, что $(P, F) = C$ с учетом условия нормировки $(p, 1) = 1$. С использованием неопределенных множителей Лагранжа экстремальная задача записывается как

$$\hat{p} = \arg \inf \{(p, \ln p) + \alpha(p, F) + \beta(p, 1)\}.$$

Соответствующее уравнение Эйлера имеет вид

$$\ln p + \alpha F + \beta 1 = 0,$$

откуда

$$\hat{p} = p_0 e^{-\alpha F},$$

где $p_0 = e^{-\beta 1} = \text{const}$. Заменив $F(\varphi)$ на $\|\varphi\|_H^2$, получим окончательный вид весовой функции: $p(\varphi)$, соответствующий минимальному произволу в выборе этой функции

$$\hat{p}(\varphi) = p_0 e^{-\alpha \|\varphi\|_H^2} = p_0 e^{-\alpha (\varphi, H\varphi)},$$

где $\alpha > 0$.

Отметив, что полученная весовая функция $\hat{p}(\varphi)$ обладает всеми свойствами плотности вероятности, мы имеем возможность пользоваться всеми свойствами вероятностной меры и проводить статистическую интерпретацию всех конструкций, включающих весовую функцию p , например математическое ожидание и дисперсию:

$$E\varphi \stackrel{\Delta}{=} (\varphi, p),$$

$$E[(\varphi - E\varphi)^2] \stackrel{\Delta}{=} ((\varphi - (\varphi, p))^2, p).$$

Операция математического ожидания E в явном виде линейна:

$$E(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda E(\varphi_1) + \mu E(\varphi_2),$$

поэтому

$$EL\varphi = LE\varphi,$$

т. е. оператор математического ожидания E коммутирует с линейными операторами.

Введем *корреляционный оператор* (коррелятор) при $E\varphi = 0$:

$$K_{\varphi\varphi} : E(\eta, \varphi)(\xi, \varphi)^* = (\eta, K_{\varphi\varphi}\xi) \quad \forall \xi, \eta.$$

Из определения видно, что корреляционный оператор, который формально можно записать как $K_{\varphi\varphi} = E\varphi\varphi^*$, неотрицателен:

$$(\eta, K_{\varphi\varphi}\eta) = E(\eta, \varphi)(\eta, \varphi^*) = E|(\eta, \varphi)|^2 \geq 0.$$

Можно записать коррелятор для линейно преобразованных функций $A\varphi$ и $(B\varphi)^*$:

$$E(A\varphi)(B\varphi)^* = AK_{\varphi\varphi}B^*,$$

поскольку

$$\begin{aligned} E(\eta, A\varphi)(\xi, B\varphi)^* &= E(A^*\eta, \varphi)(B^*\xi, \varphi)^* = \\ &= (A^*\eta, K_{\varphi\varphi} B^*\xi) = (\eta, (AK_{\varphi\varphi} B^*)\xi). \end{aligned}$$

В частности, если коррелятор функции φ равен $K_{\varphi\varphi}$, то коррелятор линейного преобразования $A\varphi$ равен $AK_{\varphi\varphi}A^*$:

$$E\psi\psi^* \stackrel{\Delta}{=} E(A\varphi)(A\varphi)^* = AK_{\varphi\varphi}A^*.$$

Корреляционную функцию $k_{\varphi\varphi}(x, x')$, являющуюся интегральным ядром корреляционного оператора $K_{\varphi\varphi}$, можно представить следующим образом:

$$k_{\varphi\varphi}(x, x') = \mathbb{E}\varphi(x)\varphi^*(x'),$$

так как значения функций $\varphi(x)$ в точках x и x' определяются проекторами P_x и $P_{x'}$:

$$\begin{aligned} P_x(\varphi) &= \int \varphi(y)\delta(x-y)dy, \\ P_{x'}(\varphi) &= \int \varphi(y)\delta(x'-y)dy. \end{aligned}$$

Тогда записываем:

$$\mathbb{E}(P_x \varphi)(P_{x'} \varphi)^* = P_x K_{\varphi\varphi} P_{x'} = k_{\varphi\varphi}(x, x').$$

Введем гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$(\varphi, \psi) \triangleq \text{sp}\mathbb{E}\varphi\psi^* \triangleq \text{sp}K_{\varphi\psi}.$$

Здесь оператор E задается мерой $d\mu_{\varphi\psi} = p(\varphi, \psi)d\varphi d\psi$; $K_{\varphi\psi}$ назовем *кросс-коррелятором функций* φ, ψ , помня, что коррелятор $K_{\varphi\varphi}$, по сути дела, является автокоррелятором. Проверим, что форма (φ, ψ) действительно является скалярным произведением:

- 1) $(\varphi, \varphi) = \text{sp}K_{\varphi\varphi} > 0$;
- 2) $(\varphi, \psi) = \mathbb{E}\varphi\psi^*\text{sp}K_{\varphi\psi} = \int k_{\varphi\psi}(x, x)dx = \int k_{\psi\varphi}^*(x, x)dx = \text{sp}K_{\psi\varphi}^* = \text{sp}(\mathbb{E}\psi\varphi^*)^* = (\psi, \varphi)^*$;
- 3) $(\varphi, \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1(\varphi, \psi_1) + \alpha_2(\varphi, \psi_2)$.

Ортогональные функции φ и ψ называются *некоррелированными*: $(\varphi, \psi) = 0$.

Заметим, что можно ввести гильбертово пространство, определяя скалярное произведение с мерой $d\mu_\varphi = p(\varphi)d\varphi$. Тогда значение скалярного произведения для элементов гильбертова пространства $\varphi(x)$ и $\varphi(x')$ будет задаваться значением корреляционной функции в точке (x, x') :

$$(\varphi|_x, \varphi|_{x'}) = k_{\varphi\varphi}(x, x').$$

Исходя из свойств скалярного произведения, можно записать свойство корреляционной функции: из неравенства Шварца получим

$$|(\varphi|_x, \varphi|_{x'})| \leq ||\varphi|_x||^2 ||\varphi|_{x'}||^2,$$

т. е.

$$|k(x, x')|^2 \leq \sigma_\varphi^2(x) \sigma_\varphi^2(x'), \quad \sigma_\varphi^2(x) = E|\varphi(x)|^2.$$

Введя коэффициент корреляции r для вещественных функций φ :

$$r = \frac{k_{\varphi\varphi}(x, x')}{\sigma_\varphi(x)\sigma_\varphi(x')},$$

получим соотношение для коэффициента корреляции: $-1 \leq r \leq 1$. Определим случайные поля φ как однородные, если выполняется условие $k_{\varphi\varphi}(x, x') = k_{\varphi\varphi}(x - x')$, которое приводит, в частности, к условию постоянства дисперсии: $\sigma_{\varphi\varphi}(x) = \text{const}$.

Как было показано ранее, максимально-энтропийной весовой функцией $p(\varphi)$ является такая, что $p \sim e^{-\alpha(\varphi, H\varphi)}$ удовлетворяет условию $(\varphi, H\varphi) = C$.

Функцию $p(\varphi)$ можно интерпретировать как плотность нормального распределения, которое для $\varphi \in R^n$ имеет вид

$$p(\varphi) = (2\pi)^{-n/2} |K_{\varphi\varphi}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\varphi, K_{\varphi\varphi}^{-1} \varphi) \right\}.$$

Вспомним некоторые свойства гауссовых интегралов.

1. Гауссовский интеграл можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int \exp \left[-\frac{1}{2} (\varphi, H\varphi) \right] D\varphi = \\ &= \int \exp \left[-\frac{1}{2} (U\varphi, UHU^* U\varphi) \right] \left| \frac{D\varphi}{DU\varphi} \right| DU\varphi = \\ &= |\text{Det } U| \int \exp \left[-\frac{1}{2} (\psi, \lambda\psi) \right] D\psi = \\ &= \int \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_\alpha \lambda_\alpha \psi_\alpha^2 \right] \prod_\alpha d\psi_\alpha. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Здесь U — унитарная матрица, строки которой составлены из собственных векторов матрицы H : $H\varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha$, $H\varphi_\beta = \lambda_\beta \varphi_\beta$ ($\varphi_\alpha \varphi_\beta = \delta_{\alpha\beta}$);

$$U^*U = I, \quad \text{Det } U = 1, \quad UHU^* = \Lambda;$$

Λ — диагональная матрица; $\psi = U\varphi$.

Напомним, чему равен однократный интеграл (потребуется для вычисления интеграла (9.17)):

$$I = \int \exp \left[-\frac{1}{2}\lambda x^2 \right] dx.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} I^2 &= \int \exp \left[-\frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2) \right] dx dy = \int_0^\infty \exp \left(-\frac{\lambda}{2}r^2 \right) 2\pi r dr = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \int_{-\infty}^0 e^\rho d\rho = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad I = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int \exp \left[-\frac{1}{2}(\varphi, H\varphi) \right] d\varphi = (2\pi)^{n/2} (\text{Det } H)^{-1/2},$$

и нормировочный коэффициент A : $\int A \exp \left[-\frac{1}{2}(\varphi, H\varphi) \right] d\varphi = 1$ равен

$$A = (2\pi)^{-n/2} (\text{Det } H)^{1/2}.$$

2. Найдем связь оператора H , стоящего в показателе гауссовой меры и коррелятора функции φ :

$$\begin{aligned} E\varphi\varphi^* &= \frac{\int \varphi\varphi^* \exp[-(\varphi, H\varphi)/2] d\varphi}{\int \exp[-(\varphi, H\varphi)/2] d\varphi} \\ &= \frac{\int \psi\psi^* \exp[-(\psi, \Sigma\psi)/2] D\psi}{\int \exp[-(\psi, \Sigma\psi)/2] D\psi}. \end{aligned}$$

Запишем матричный элемент $K_{\gamma\delta}$ коррелятора K :

$$\begin{aligned} K_{\gamma\delta} &= \frac{\int \psi_\gamma\psi_\delta \exp[-(1/2) \sum_{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \psi_\alpha \psi_\beta] \prod_\alpha d\psi_\alpha}{(2\pi)^{-n/2} (\text{Det } \Sigma)^{-1/2}} = \\ &= -2(2\pi)^{-n/2} (\text{Det } \Sigma)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \Sigma_{\gamma\delta}} \times \\ &\times \int \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \psi_\alpha \psi_\beta \right] \prod_\alpha d\psi_\alpha. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Sigma_{\gamma\delta}} \int \exp[-(\psi, \Sigma\psi)/2] D\psi = \\ = \frac{\partial}{\partial \Sigma_{\gamma\delta}} [(2\pi)^{n/2} (\text{Det}\Sigma)^{-1/2}] = (2\pi)^{n/2} \left(-\frac{1}{2} \right) (\text{Det}\Sigma)^{-3/2} \bar{\Sigma}_{\gamma\delta}, \end{aligned}$$

где $\bar{\Sigma}_{\gamma\delta}$ — алгебраическое дополнение элемента $\Sigma_{\gamma\delta}$ матрицы Σ , получаем

$$K_{\gamma\delta} = \frac{\bar{\Sigma}_{\gamma\delta}}{|\text{Det}\Sigma|} = [\Sigma^{-1}]_{\gamma\delta},$$

т. е. $K_{\varphi\varphi} = H^{-1}$.

Полученная связь позволяет записывать плотность нормально-го распределения, используя коррелятор $K_{\varphi\varphi}$, в виде

$$p(\varphi) = \frac{\exp[-(\varphi, K_{\varphi\varphi}^{-1} \varphi)/2]}{\int \exp[-(\varphi, K_{\varphi\varphi}^{-1} \varphi)/2] d\varphi}. \quad (9.18)$$

Распределение называется *невырожденным*, если $K_{\varphi\varphi} > 0$.

Вычислим значение функционала Шеннона для нормального распределения:

$$\begin{aligned} -(p, \ln p) &= - \int A \exp[-(\varphi, K_{\varphi\varphi}^{-1} \varphi)/2] \left(\ln A - \frac{1}{2}(\varphi, K_{\varphi\varphi}^{-1} \varphi) \right) d\varphi = \\ &= -\ln A + \frac{1}{2} A \int (\varphi, K^{-1} \varphi) \exp[-(\varphi, K^{-1} \varphi)/2] d\varphi. \end{aligned}$$

Второе слагаемое, используя замену $\psi = K^{-1/2} \varphi$, можно представить в виде

$$\begin{aligned} A \int (\varphi, K^{-1} \varphi) \exp[-(\varphi, K^{-1} \varphi)/2] d\varphi &= \\ &= A \int (\psi, \psi) \exp[-(\psi, \psi)/2] (\text{Det}K)^{1/2} d\psi = \\ &= (\text{Det}K)^{-1/2} (\text{Det}K)^{1/2} f(n) = f(n). \end{aligned}$$

Здесь $f(n)$ зависит только от размерности пространства. Окончательно записываем:

$$H = -(p, \ln p) = \frac{1}{2} \ln \text{Det}K + f(n). \quad (9.19)$$

Если плотность вероятности $p(\varphi)$ задается в форме (9.18), то $E\varphi = 0$ вследствие четности $p(\varphi)(p(\varphi) = p(-\varphi))$. Для плотности распределения

$$p(\varphi) = A \exp \left[-\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0, K_{\varphi\varphi}^{-1}(\varphi - \varphi_0)) \right],$$

используя замену переменных $\psi = \varphi - \varphi_0$, получаем $E\varphi = \varphi_0$.

Напомним вероятностные характеристики описания системы случайных функций φ и ψ . Пусть совместная плотность распределения φ и ψ будет $p(\varphi, \psi)$. Проекция этой плотности на пространство Φ называется *маргинальной плотностью вероятности*:

$$p(\psi) = \int p(\varphi, \psi) d\varphi.$$

Соответственно проекция $p(\varphi, \psi)$ на пространство ψ дает маргинальную плотность

$$p(\varphi) = \int p(\varphi, \psi) d\psi.$$

Нормированные сечения плотности $p(\varphi, \psi)$ определяют условные плотности — плотность вероятности φ при фиксированном ψ :

$$p(\varphi|\psi) = \frac{p(\varphi, \psi)}{p(\psi)},$$

плотность вероятности ψ при фиксированном φ :

$$p(\psi|\varphi) = \frac{p(\varphi, \psi)}{p(\varphi)}.$$

Независимыми называются такие случайные поля φ и ψ , для которых выполняются условия

$$p(\varphi|\psi) = p(\varphi), \quad p(\psi|\varphi) = p(\psi).$$

В качестве примера рассмотрим модель $u = L\varphi + \varepsilon$, где ε и φ описываются нормальными распределениями $\varphi \in N(0, K_\varphi)$, т. е.

$$p(\varphi) \sim A \exp \left[-\frac{1}{2}(\varphi, K_\varphi^{-1}\varphi) \right].$$

Это распределение принято называть *априорным относительно искомого поля* φ и $\varepsilon \in N(0, K_\varepsilon)$, т. е.

$$p(\varepsilon) \sim A \exp \left[-\frac{1}{2}(\varepsilon, K_\varepsilon^{-1}\varepsilon) \right].$$

Причем предполагаем, что φ и ε статистически независимы: $p(\varphi, \varepsilon) = p(\varphi)p(\varepsilon)$. Распределения $p(\varphi, \varepsilon)$ и $p(u)$ являются нормальными, так как

$$u = \|L\dot{I}\| \begin{vmatrix} \varphi \\ \varepsilon \end{vmatrix}.$$

Совместная плотность вероятности $p(\varphi, U)$ определяется коррелятором

$$\begin{aligned} K \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix} &= E \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix} \|u^* \varphi^*\| = \\ &= \begin{vmatrix} K_{uu} & K_{u\varphi} \\ K_{\varphi u} & K_{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L^* K_\varphi L + K_\varepsilon & LK_\varphi \\ K_\varphi L^* & K_\varphi \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что обратный оператор

$$K^{-1} \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix}$$

можно представить в форме

$$\begin{aligned} K^{-1} \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} K_\varepsilon^{-1} & -K_\varepsilon^{-1} L \\ -L^* K_\varepsilon^{-1} & K_{\delta\varphi}^{-1} \end{vmatrix}, \\ K_{\delta\varphi} &= K_\varphi - K_\varphi L^* (LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} LK_\varphi. \end{aligned}$$

Если существует обратный оператор K_φ^{-1} , то коррелятор $K_{\delta\varphi}$ можно представить в виде

$$K_{\delta\varphi} = (L^* K_\varepsilon^{-1} L + K_\varphi^{-1})^{-1},$$

используя тождество

$$(A + BDB^*)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(B^* A^{-1}B + D^{-1})B^* A^{-1}.$$

Запишем условную плотность вероятности φ при заданном значении $u = L\varphi + \varepsilon$, которую называют *апостериорной плотностью*:

$$p(\varphi|u) = \frac{p(u|\varphi)}{p(u)} \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\varphi - \hat{\varphi}, K_{\delta\varphi}^{-1}(\varphi - \hat{\varphi})) \right\}, \quad (9.20)$$

где

$$\hat{\varphi} = \int \varphi p(\varphi|u) d\varphi \stackrel{\Delta}{=} E_u \varphi = K_\varphi L^*(LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} u; \quad (9.21)$$

$E_u \varphi$ — условное среднее φ .

Представим условную плотность вероятности u при фиксированном φ :

$$p(u|\varphi) = \frac{p(u, \varphi)}{p(\varphi)} \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2}(u - \hat{u}, K_\varepsilon^{-1}(u - \hat{u})) \right\}, \quad (9.22)$$

где $\hat{u} = E_\varphi u = L\varphi$.

Нетрудно видеть, что условная плотность $p(u|\varphi)$ независимо от типа совместного распределения $p(u, \varphi)$ для модели связи $u = L\varphi + \varepsilon$ совпадает с p_ε -распределением ε , т. е.

$$p(u|\varphi) = p_\varepsilon(u - L\varphi).$$

Поясним, как получены выражения (9.20) и (9.22); для этого выпишем квадратичную форму, стоящую в показателе экспоненты совместного распределения $p(u, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \|u - \varphi\| K^{-1} \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix}^\top &= (u, K_\varepsilon^{-1} u) - (u, K_\varepsilon^{-1} L\varphi) - \\ &\quad - (\varphi, L^* K_\varepsilon^{-1} u) + (\varphi, K_{\delta\varphi}^{-1} \varphi). \end{aligned}$$

При фиксированном значении u можно выделить полный квадрат для φ :

$$(\varphi - K_{\delta\varphi} L^* K_\varepsilon^{-1} u, K_{\delta\varphi}^{-1} (\varphi - K_{\delta\varphi} L^* K_\varepsilon^{-1} u)),$$

а для фиксированного значения φ полный квадрат для u записывается как

$$(u - K_\varepsilon K_\varepsilon^{-1} L\varphi, K_\varepsilon^{-1} (u - K_\varepsilon K_\varepsilon^{-1} L\varphi)).$$

Следует отметить, что оператор $K_{\delta\varphi}$ представляет собой разность двух положительных операторов: $K_\varphi > 0$ и $K_\varphi L^*(LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} LK_\varphi > 0$, при этом оператор $K_{\delta\varphi} > 0$.

Рассмотрим статистические критерии нахождения оценок поля φ для модели $u = L\varphi + \varepsilon$, используя полученные выражения для условных плотностей $p(\varphi|u)$ и $p(u|\varphi)$.

1. Пусть известно лишь распределение случайного компонента (шума) ε , т. е. задана плотность $p(\varepsilon)$. Это распределение может быть получено априори путем статистического анализа ошибок измерений в эксперименте. Тогда разумно в качестве решения взять такое $\hat{\varphi}$, чтобы разность $u - L\hat{\varphi}$ была максимально “похожа” на шум ε , т. е. $u - L\hat{\varphi} = \hat{\varepsilon}$ должно быть таким, чтобы вероятность p_ε была максимальной:

$$\hat{\varphi} = \arg \sup p_\varepsilon(u - L\varphi) = \arg \sup p(u|\varphi) = \arg \sup \ln p_\varepsilon(u - L\varphi). \quad (9.23)$$

Такой способ нахождения решения φ в математической статистике называется *методом максимального правдоподобия* [70], при этом $\ln p(u|\varphi)$ называется *функцией правдоподобия*. Монотонная неубывающая функция (логарифм) выбрана в связи с тем, что многие эмпирические распределения являются экспоненциальными, в особенности это касается нормального распределения, которое согласно центральной предельной теореме [70] является самой распространенной моделью реальных распределений. Решение экстремальной задачи (9.23) может быть получено одним из численных методов. Мы здесь выделим нормальное распределение, так как функция правдоподобия в этом случае является квадратичным функционалом, и можно в явном виде выписать уравнение Эйлера:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \arg \inf (u - L\varphi, K_\varepsilon^{-1}(u - L\varphi)), \\ (L^* K_\varepsilon^{-1} L)\varphi &= L^* K_\varepsilon^{-1} u. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Анализ уравнения (9.24) показывает, что метод максимального правдоподобия в случае нормального распределения тождествен методу наименьших квадратов и обладает теми же недостатками: неустойчивостью решения в силу компактности оператора $L^* K_\varepsilon^{-1} L$. В случае распределения Лапласа метод максимального правдоподобия приводит к решению экстремальной задачи в норме L_1 :

$$\hat{\varphi} = \arg \inf \|u - L\varphi\|_{L_1},$$

что эквивалентно методу наименьших модулей:

$$\hat{\varphi} = \arg \inf |u - L\varphi|.$$

2. Регуляризованное решение $\tilde{\varphi}$ мы можем получить только в том случае, если обладаем априорной информацией о решении.

Пусть наряду с распределением $p(\varepsilon)$ задано априорное распределение $p(\varphi)$. Представляется целесообразным в качестве решения выбрать такое, чтобы оно обеспечивало одновременно соблюдение двух условий: во-первых, функция $\tilde{\varphi}$ должна быть такой, чтобы разность $u - L\varphi$ была как можно более похожа на шум ε (аналогично условию максимального правдоподобия); во-вторых, функция $\tilde{\varphi}$ должна как можно лучше соответствовать априорным представлениям $p(\varphi)$. Учитывая предположение о статистической независимости φ и ε , соблюдение этих условий сводится к требованию

$$\tilde{\varphi} = \arg \sup p_\varepsilon(u - L\varphi)p(\varphi) = \arg \sup p(u|\varphi)p(\varphi). \quad (9.25)$$

Согласно формуле Байеса

$$p(\varphi|u) = \frac{p(\varphi)p(u|\varphi)}{p(u)},$$

и оценку $\tilde{\varphi}$ (9.25) можно представить как

$$\tilde{\varphi} = \arg \sup p(\varphi|u). \quad (9.26)$$

Полученное решение (9.26) называется оценкой *максимума апостериорной вероятности*.

Стратегия Байеса определяет решение φ следующим образом:

$$\tilde{\varphi} = E_u \varphi = \int \varphi p(\varphi|u) d\varphi, \quad (9.27)$$

которое в случае симметричного апостериорного распределения $p(\varphi|u)$ тождественно $\tilde{\varphi}$ из представления (9.26).

В случае нормальных распределений $p(\varphi)$, $p(\varepsilon)$ можно записать явный вид регуляризованного решения [103, 106]:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \arg \inf [|u - L\varphi|_{K_\varepsilon^{-1}}^2 + |\varphi|_{K_\varphi^{-1}}^2] = \\ &= K_\varphi L^* (LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} u. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Анализ формулы (9.28) показывает, что при использовании априорной информации о поле φ экстремальная задача содержит стабилизирующий функционал $|\varphi|_{K_\varphi^{-1}}^2$, при этом коррелятор можно определить с точностью до множителя, и тогда экстремальная

задача (9.28) принимает вид, совпадающий с общей схемой регуляризации (9.14):

$$\hat{\varphi} = \arg \inf [||u - L\varphi||_{K_\varphi^{-1}}^2 + \alpha ||\varphi - \varphi_0||_{K_\varphi^{-1}}^2]. \quad (9.29)$$

Решение $\tilde{\varphi}$ (см. формулу (9.28)) принято называть решением по *методу статистической регуляризации*. Как видно из равенства (9.21), решение, полученное с использованием стратегии Байеса, интерпретируется как условное среднее. Статистический подход дает возможность наряду с решением получить распределение ошибок решения:

$$\begin{aligned} E_u((\varphi - \tilde{\varphi})(\varphi - \tilde{\varphi})^*) &= K_{\delta\varphi}, \\ K_{\delta\varphi} &= K_\varphi - K_\varphi L^*(LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1}LK_\varphi. \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай представления корреляторов K_φ и K_ε :

$$K_\varphi = \sigma_\varphi^2 I, \quad K_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 I.$$

При этом решение $\tilde{\varphi}$ (9.29) находим из экстремальной задачи

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf [||u - L\varphi||^2 + \alpha_0 ||\varphi||^2],$$

где $\alpha_0 = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\varphi^2$ — параметр регуляризации, который в этом случае имеет наглядный физический смысл: во-первых, $\alpha_0 \rightarrow 0$ при $\sigma_\varphi^2 \rightarrow \infty$, т. е. стремление параметра регуляризации к нулю однозначно связано со снятием априорных ограничений; во-вторых, одна и та же степень устойчивости (регуляризации) экстремальной задачи получается при соотношении $\sigma_\varphi^2 = 0(\sigma_\varepsilon^2)$. С учетом этих моментов физически обосновывается скорость стремления параметра регуляризации к нулю в методах функциональной регуляризации: если

$$J(\varphi) = ||L\varphi - u||_{L_2}^2 + \alpha ||\varphi||_H^2$$

и если $||L\varphi - u||_{L_2} = \delta$, то $\alpha = O(\delta^2)$.

Обратимся еще раз к методу максимального правдоподобия. В точке решения $\hat{\varphi}$ первая производная функционала обращается в нуль:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} [\ln p(u|\varphi)] = 0,$$

а мерой чувствительности измерений к вариациям $\delta\varphi$ служит вторая производная, входящая в квадратичную форму:

$$-\frac{1}{2} \left(\delta\varphi, \left[\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} \ln p(u|\varphi) \right] \delta\varphi \right).$$

Проведя осреднение по всему множеству возможных значений u , получим информационный оператор Фишера [84]:

$$F = -E \left(\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} \ln p(u|\varphi) \right).$$

Для нормального распределения p и для нашей задачи $u = L\varphi + \varepsilon$ будем иметь следующее выражение для оператора Фишера:

$$F = E \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} (L\varphi - u, K_\varepsilon^{-1} (L\varphi - u)) = L^* K_\varepsilon^{-1} L.$$

Заметим, что оператор Фишера определяет соответствие между расстояниями в пространстве решений φ и в пространстве измерений:

$$(\delta\varphi, F\delta\varphi) = (L\delta\varphi, K_\varepsilon^{-1} L\delta\varphi) = (\delta u, K_\varepsilon^{-1} \delta u),$$

т. е. характеризует дискриминантную метрику в пространстве решений

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_F^2 = \|u_1 - u_2\|_{K_\varepsilon^{-1}}^2.$$

От оператора Фишера зависит поведение функционала правдоподобия в окрестности точки экстремума. Так, если представление оператора F в собственном базисе имеет вид

$$F = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \psi_{\alpha} \psi_{\alpha}^*,$$

где $(\psi_{\alpha}, \psi_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta}$, $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, то направления в функциональном пространстве, определяемые ψ_{α} при больших значениях α , являются теми направлениями, вдоль которых функционал правдоподобия близок к стационарному, т. е. функции φ_1 и φ_2 практически неразличимы:

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_F^2 \approx 0,$$

если

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} |(\varphi_1 - \varphi_2, \psi_{\alpha})|^2 = \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2,$$

где α_0 — пороговое значение индекса, при котором отношение $\lambda_{\alpha_0}/\lambda_{\max}$ достаточно мало.

Собственный базис оператора Фишера называется *базисом Корунена – Лоэва*. Нормальное распределение, записанное в этом базисе, распадается на произведения плотностей вероятности проекций на орты базиса:

$$\begin{aligned} p(\varphi) &\sim \exp \left[-\frac{1}{2}(\varphi, F\varphi) \right] = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\varphi_{\alpha}|^2 \right] = \\ &= \prod_{\alpha} \exp \left[-\frac{1}{2} \lambda_{\alpha} |\varphi_{\alpha}|^2 \right] \sim \prod_{\alpha} p(\varphi_{\alpha}), \end{aligned}$$

где $\varphi_{\alpha} = (\psi_{\alpha}, \varphi)$. Записывая разложение оператора Фишера в виде

$$F = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \lambda_{\alpha} \psi_{\alpha} \psi_{\alpha}^* + \sum_{\alpha=\alpha_0+1}^{\infty} \lambda_{\alpha} \psi_{\alpha} \psi_{\alpha}^*,$$

плотность вероятности $p(\varphi)$ можно приближенно представить как

$$p(\varphi) \approx \tilde{p}(\varphi) \sim \prod_{\alpha=1}^{\alpha_0} \exp \left[-\frac{1}{2} \lambda_{\alpha} |\varphi_{\alpha}|^2 \right],$$

т. е. статистический ансамбль достаточно полно в вероятностном отношении описывается проекциями на орты, соответствующие большим собственным значениям оператора Фишера λ_{α} ($\alpha = 1 \div \alpha_0$).

Дадим еще одну интерпретацию статистической регуляризации и комплексирования измерений, используя оператор Фишера.

Пусть наряду с моделью *косвенных измерений* поля

$$u = L\varphi + \varepsilon, \quad \varepsilon \in N(0, K_{\varepsilon}),$$

задана априорная информация $\varphi \in N(\varphi_0, K_{\varphi})$; эту информацию можно формально представить в виде модели *прямого измерения* всего поля φ :

$$\varphi_0 = I\varphi + \eta, \quad \eta \in N(0, K_{\varphi}).$$

Отметим, что в общем случае модель прямого измерения записывается как $u_i = P_i \varphi + \varepsilon_i$, где P_i — проектор, вырезающий значение φ в отдельных точках параметрического пространства, например в отдельных пространственно-временных точках.

Как мы показывали ранее, косвенные измерения $u = L\varphi + \varepsilon$ порождают в пространстве φ нормальное распределение вида

$$P_L(\varphi) \sim \exp \left[-\frac{1}{2} (\|\varphi - \hat{\varphi}\|_{L^* K_\varepsilon^{-1} L}^2) \right],$$

$$\hat{\varphi} = (L^* K_\varepsilon^{-1} L)^{-1} L^* u,$$

а прямые (априорные) измерения описываются плотностью нормального распределения

$$P_I(\varphi) \sim \exp \left[-\frac{1}{2} \|\varphi - \varphi_0\|_{K_\varphi^{-1}}^2 \right].$$

Информация, полученная из косвенных и прямых измерений, считается независимой, поэтому совместная оценка φ по результатам косвенных и прямых измерений определяется произведением плотностей вероятностей. Тогда

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf (\|\varphi - \hat{\varphi}\|_{F_1}^2 + \|\varphi - \varphi_0\|_{F_2}^2), \quad (9.30)$$

здесь операторы Фишера F_1 и F_2 определяют количество информации, полученной соответственно в косвенных измерениях: $F_1 = L^* K_\varepsilon^{-1} L$ и количество априорной информации (“прямых” измерений): $F_2 = K_\varphi^{-1}$. Уравнение Эйлера для экстремальной задачи (9.30) имеет вид

$$(F_1 + F_2)\tilde{\varphi} = F_1\hat{\varphi} + F_2\varphi_0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= (F_1 + F_2)^{-1} (F_1\hat{\varphi} + F_2\varphi_0) = \\ &= (L^* K_\varepsilon^{-1} L + K_\varphi^{-1})^{-1} (L^* K_\varepsilon^{-1} u + K_\varphi^{-1} \varphi_0) = \\ &= \varphi_0 + K_\varphi L^* (L K_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} (u - L\varphi_0), \end{aligned}$$

или

$$\tilde{\varphi} - \varphi_0 = K_\varphi L^* (L K_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} (u - L\varphi_0),$$

т. е. мы получили оценку стандартной статистической регуляризации для модели

$$L(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon = u - L\varphi_0.$$

Общую схему комплексирования набора M измерений (косвенных и прямых) с использованием априорной информации

$$\begin{aligned} L_1\varphi + \varepsilon_1 &= u_1, \\ L_2\varphi + \varepsilon_2 &= u_2, \\ &\dots \\ L_M\varphi + \varepsilon_M &= u_M, \\ I_{M+1}\varphi + \varepsilon_{M+1} &= u_{M+1} \equiv \varphi_0, \end{aligned}$$

где для косвенных измерений L_i — интегральный оператор, для прямых измерений $L_i = P_i$ — проектор такой, что $P = P^*$, $P = P^2$. Если $\varepsilon_i \in N(0, K_{\varepsilon_i})$, $i = 1 \div M + 1$, то оптимальная оценка поля φ , определяющего состояние исследуемой системы,

$$\tilde{\varphi} = F^{-1} \left(\sum_{i=1}^{M+1} F_i u_i \right).$$

Здесь оператор F^{-1} , обратный оператору Фишера:

$$F = \sum_{i=1}^{M+1} F_i = \sum_{i=1}^M (L_i^* K_{\varepsilon_i}^{-1} L_i) + I K_{\varphi}^{-1} I,$$

определяет коррелятор ошибок решения $\tilde{\varphi}$:

$$E(\delta\varphi\delta\varphi^*) = F^{-1}.$$

Итак, процедура комплексирования должна включать в себя априорную информацию либо прямые измерения, поскольку только в этом случае можно получить устойчивое решение. Следует отметить, что прямые измерения способны заменить априорную информацию, если они охватывают измерение всего поля φ , а не измерения поля в отдельных точках.

Рассмотренная статистическая интерпретация комплексирования измерений позволяет записать задачу восстановления нестационарного поля φ_t , описывающего состояние системы. В этом случае роль априорной информации может выполнять уравнение, описывающее динамику φ_t :

$$D_t \varphi_t + \eta_t = g, \quad \eta_t \in N(0, K_\eta),$$

$$K_\eta = \sigma_\eta^2 \delta(t - t')$$

(g — функция источника) при условии ограниченности обратного оператора динамики D_t .

Заметим, что в частном случае представления динамического оператора $D_t = (\partial/\partial t + A(t))$, где $A(t)$ — положительный оператор, получаем динамическую модель, используемую в динамической фильтрации Калмана и Калмана–Бьюси [3].

Заменив комплекс косвенных и прямых измерений оператором L , запишем систему, определяющую решение φ с учетом априорной информации (динамической модели):

$$\begin{aligned} L\varphi_t + \varepsilon &= u, \\ D_t\varphi_t + \eta_t &= g. \end{aligned}$$

Формальное решение можно представить через операторы Фишера, записав уравнение Эйлера:

$$\begin{aligned} (L^* K_\varepsilon^{-1} L + D_t^* K_\eta^{-1} D_t) \tilde{\varphi}_t &= (L^* K_\varepsilon^{-1} u + D_t^* K_\eta^{-1} (g + \varphi_t^0)), \\ \varphi_t^0 : D_t \varphi_t^0 &= 0, \quad \varphi_t^0|_{t=0} = \varphi_0. \end{aligned}$$

Корреляционный оператор ошибок решения является обратным к оператору Фишера $F = F_t$:

$$F_t = (L^* K_\varepsilon^{-1} L + D_t^* K_\eta^{-1} D_t) > 0$$

в силу положительности оператора $D_t^* K_\eta^{-1} D_t$.

Проанализируем решения, полученные с применением идеологии математической статистики.

Пусть решение линейной задачи $u = L\varphi + \varepsilon$ достигается с помощью линейной процедуры R :

$$\hat{\varphi} = Ru = RL\varphi + R\varepsilon.$$

Тогда ошибка полученного решения описывается выражением

$$\delta\varphi \stackrel{\Delta}{=} \hat{\varphi} - \varphi = (RL - I)\varphi + R\varepsilon.$$

Ошибка $\delta\varphi$ не зависит от истинного значения φ , если $RL = I$. Такой оператор R мы получаем при использовании метода наименьших квадратов, если существует обратный оператор $(L^* K_\varepsilon^{-1} L)^{-1}$. Действительно:

$$R = (L^* K_\varepsilon^{-1} L)^{-1} L^* K_\varepsilon^{-1},$$

$$RL = (L^* K_\varepsilon^{-1} L)^{-1} (L^* K_\varepsilon^{-1} L) = I.$$

Величина условного среднего от ошибки $\delta\varphi$ называется *смещением* (b):

$$b \stackrel{\Delta}{=} E_\varphi \delta\varphi = (RL - I)\varphi.$$

Характеристикой точности решения является коррелятор ошибок:

$$K_{\delta\varphi} \stackrel{\Delta}{=} E[\delta\varphi \delta\varphi^*].$$

Решение $\tilde{\varphi}$ такое, что

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf \text{sp} K_{\delta\varphi},$$

называется *эффективным*.

Прежде всего отметим, что решение некорректных задач по методу наименьших квадратов (при существовании оператора $(L^* K_\varepsilon^{-1} L)^{-1}$) является несмешенным, но заведомо неэффективным: средние ошибки решения бесконечны. Действительно,

$$\begin{aligned} E[\delta\varphi \delta\varphi^*] &= E[(R\varepsilon)(R\varepsilon)^*] = RE[\varepsilon \varepsilon^*]R^* = RK_\varepsilon R^* = \\ &= (L^* K_\varepsilon^{-1} L)^{-1} L^* K_\varepsilon^{-1} K_\varepsilon K_\varepsilon^{-1} L (L^* K_\varepsilon^{-1} L)^{-1} = \\ &= (L^* K_\varepsilon^{-1} L), \quad \text{sp} K_{\delta\varphi} = \infty, \end{aligned}$$

в силу неограниченности обратного оператора Фишера в некорректных задачах.

Построим оператор R , дающий эффективное решение — обладающий минимальными ошибками в среднем при всех возможных реализациях ошибок ε с коррелятором K_ε и возможными функциями из ансамбля с коррелятором K_φ . Запишем коррелятор ошибок для произвольного “решающего” оператора R :

$$K_{\delta\varphi} = Ebb^* + Enn^*,$$

$$n = R\varepsilon,$$

$$K_{\delta\varphi} = (RL - I)K_\varphi(RL - I)^* + RK_\varepsilon R^*.$$

Условие оптимальности алгоритма R , т. е. дающего решение с минимальной дисперсией ошибок в любой пространственной точке, будет следующим:

$$\tilde{R} = \arg \inf \text{sp} K_{\delta\varphi}. \quad (9.31)$$

Введем гильбертово пространство операторов с ограниченным следом — пространство операторов Гильберта–Шмидта, определив скалярные произведения следующим выражением:

$$(A, B)_H = (A, HB) = \operatorname{sp}(A^* HB)$$

при $H > 0$. Тогда задача (9.31) сводится к минимизации квадратичной формы

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= \arg \inf [||(RL - I)^*||_{K_\varphi}^2 + ||R^*||_{K_\varepsilon}^2] = \\ &= \arg \inf [(L^* R^* - I, K_\varphi (L^* R^* - I)) + (R^*, K_\varepsilon R^*)],\end{aligned}$$

поэтому уравнение Эйлера принимает вид

$$(LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)R^* = LK_\varphi.$$

Оптимальный решающий оператор \tilde{R} описывается выражением

$$\tilde{R} = K_\varphi L^* (LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} \quad (9.32)$$

и дает следующий коррелятор ошибок решения:

$$K_{\delta\varphi} = K_\varphi - K_\varphi L^* (LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} LK_\varphi.$$

При этом дисперсия ошибок в точке x минимальна по сравнению с дисперсией ошибки решения, полученного с помощью отличного от \tilde{R} линейного оператора.

Заметим, что оптимальный решающий оператор \tilde{R} (см. выражение (9.32)) — это оператор *линейной регрессии* [3], который принято записывать в виде $\tilde{R} = K_{\varphi u} K_u^{-1}$. Точность восстановления поля φ характеризуется коррелятором

$$K_{\delta\varphi} = K_\varphi - K_{\varphi u} K_u^{-1} K_{u\varphi}.$$

Отклонение решающего правила (ΔR) от оптимального \tilde{R} приводит к увеличению коррелятора ошибок решения на положительный оператор [17]:

$$\Delta K_{\delta\varphi} = \Delta R (LK_\varphi L^* + K_\varepsilon) \Delta R.$$

Для решения конкретных задач необходимо ввести количественную меру информации, поскольку только в этом случае можно провести количественное сравнение различных экспериментов,

поставить математическую задачу планирования эксперимента и придать смысл утверждению о достаточности либо недостаточности данных для решения обратной задачи $L\varphi + \varepsilon = u$.

Функционал Шеннона (9.16), являющийся мерой неопределенности системы, выражается через плотность распределения случайной величины p_φ :

$$H_\varphi = -(p(\varphi), \ln p(\varphi)).$$

Исходя из представления совместной плотности вероятности:

$$p(\varphi, u) = p(\varphi)p(u|\varphi) = p(u)p(\varphi|u),$$

можно записать свойство аддитивности следующим образом:

$$H_{u\varphi} = H_\varphi + H_{u|\varphi} = H_u + H_{\varphi|u}, \quad (9.33)$$

где $H_{u|\varphi}$ и $H_{\varphi|u}$ — условные энтропии. В качестве меры информации о поле φ , содержащейся в данных u , используется разность априорной (H^{apr}) и апостериорных (H^{post}) энтропий (аналогично ΔS — разности больцмановских энтропий при переходе системы из одного состояния в другое):

$$I_{\varphi u} \stackrel{\Delta}{=} H^{apr} - H^{post} = H_\varphi - H_{\varphi|u},$$

или если используется свойство аддитивности (9.33),

$$I_{\varphi u} = H_\varphi + H_u - H_{u\varphi} = H_u - H_{\varphi|u}.$$

Покажем, что информация $I_{\varphi u}$ всегда неотрицательна, т. е. $H_\varphi \geq H_{\varphi|u}$. Докажем вспомогательное неравенство

$$-\int p(\varphi) \ln \frac{p(\varphi)}{q(\varphi)} d\varphi \leq 0, \quad (9.34)$$

где $q(\varphi) : \int q(\varphi)d\varphi = 1$. Используя неравенство Иенсена [70] $Ef(\varphi) \leq f(E\varphi)$, которое справедливо для любых выпуклых f , можно записать:

$$\begin{aligned} -\int p(\varphi) \ln \frac{p(\varphi)}{q(\varphi)} d\varphi &= E \ln \frac{q(\varphi)}{p(\varphi)} \leq \ln E \frac{q(\varphi)}{p(\varphi)} = \\ &= \ln \int p(\varphi) \frac{q(\varphi)}{p(\varphi)} d\varphi = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Заменив $p(\varphi)$ на $p(\varphi|u)$ и $q(\varphi)$ на $p(\varphi)$ в неравенстве (9.34), получим

$$-\int p(\varphi|u) \ln \frac{p(\varphi|u)}{p(\varphi)} d\varphi \leq 0,$$

т. е.

$$-\int p(\varphi|u) \ln p(\varphi|u) d\varphi \leq -\int p(\varphi|u) \ln p(\varphi) d\varphi.$$

Усреднив неравенства по u , запишем:

$$-\int \int p(\varphi, u) \ln p(\varphi|u) d\varphi du \leq -\int p(\varphi) \ln p(\varphi) d\varphi,$$

что и доказывает наше утверждение: $H_\varphi \geq H_{\varphi|u}$.

Отметим, что неравенство (9.34) послужило основой для введения дискриминантной метрики Кульбака [49] в пространстве распределений:

$$\begin{aligned} \rho(p_1, p_2) &= \int (p_1 - p_2) \ln \frac{p_1}{p_2} d\varphi = \\ &= \int p_1 \ln \frac{p_1}{p_2} d\varphi - \int p_2 \ln \frac{p_1}{p_2} d\varphi \geq 0, \end{aligned}$$

причем $\rho(p_1, p_2) = 0$ только при $p_1 = p_2$.

Напомним, что плотности априорного и апостериорного распределений никак не связаны с методом решения обратной задачи, и в этом смысле количество информации является объективной мерой уменьшения неопределенности системы в результате проведения измерений.

Найдем явный вид информации о поле φ , содержащейся в данных $u = L\varphi + \varepsilon$ при $\varphi \in N(0, K_\varphi)$ и $\varepsilon \in N(0, K_\varepsilon)$, используя соотношение (9.19) шенноновской энтропии для нормально распределенных функций:

$$\begin{aligned} I_{\varphi u} &= H^{apr} - H^{apost} = H_\varphi - H_{\varphi|u} = \\ &= -(p_\varphi, \ln p_\varphi) + [p_{\varphi|u}, \ln p(\varphi|u)] = \frac{1}{2} \ln \text{Det} K_\varphi - \frac{1}{2} \ln \text{Det} K_{\varphi|u}, \end{aligned}$$

здесь K_φ — априорный коррелятор поля;

$$K_{\varphi u} \equiv K_{\delta\varphi} = K_\varphi - K_\varphi L^*(LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} LK_\varphi$$

—апостериорный коррелятор.

Заметим, что смысл количества информации определяется разностью хартлиевских мер информации, если детерминант коррелятора интерпретировать как число независимых состояний в функциональном пространстве, пропорциональное величине объема $V = [\prod_\alpha \lambda_\alpha]^{1/2}$. Используя равенство

$$\text{Det}K_\varphi(\text{Det}K_{\delta\varphi})^{-1} = \text{Det}K_\varphi K_{\delta\varphi}^{-1},$$

можно представить количество информации как

$$I_{\varphi u} = \frac{1}{2} \ln \text{Det}(I + K_\varphi F),$$

где F — информационный оператор Фишера. В собственном базисе оператора $K_\varphi F$ — информационном операторе Козлова [55, 103] — количество информации можно представить следующим образом:

$$I_{\varphi u} = \frac{1}{2} \ln \prod_\alpha (1 + \lambda_\alpha) = \frac{1}{2} \text{sp} \ln (1 + K_\varphi F).$$

Выясним физический смысл собственных значений информационного оператора Козлова: $K_\varphi F \varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha$. Для этого рассмотрим функционалы Рэлея вида

$$J_1(u) = \frac{(u, LK_\varphi L^* u)}{(u, u)},$$

имеющие смысл дисперсии полезного сигнала $s = L\varphi$, причем стационарные значения функционала $J_1(u)$, достигаемые на собственных функциях коррелятора $LK_\varphi L^*$, совпадают с собственными значениями коррелятора:

$$J_2(u) = \frac{(u, K_\varepsilon u)}{(u, u)},$$

имеющего смысл дисперсии шумового компонента n модели $u = s + n$. Отношение $J = J_1/J_2$ имеет физический смысл отношения сигнал/помеха:

$$J = \frac{J_1}{J_2} \Rightarrow \frac{s}{n}.$$

Этот четкий физический смысл прослеживается в том случае, если стационарные значения функционала J достигаются на функциях, являющихся одновременно собственными как для оператора $LK_\varphi L^*$, так и для K_ε , т. е. в согласованном (“каноническом”) базисе.

Функционал J можно записать либо в форме

$$J = \frac{(u, LK_\varphi L^* u)}{(u, K_\varepsilon u)},$$

либо вводя замену переменных $u = K^{-1/2}\tilde{u}$. Экстремальные свойства функционала можно исследовать на множестве функций \tilde{u} :

$$J = \frac{(\tilde{u}, K_\varepsilon^{-1/2} LK_\varphi L^* K_\varepsilon^{-1/2} \tilde{u})}{(\tilde{u}, \tilde{u})}.$$

Стационарные точки определяются уравнениями на собственные значения:

$$K_\varepsilon^{-1/2} LK_\varphi L^* K_\varepsilon^{-1/2} \tilde{u}_\alpha = \lambda_\alpha \tilde{u}_\alpha,$$

которые тождественны уравнению

$$K_\varphi F \varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha,$$

причем φ_α и \tilde{u}_α связаны соотношением $\tilde{u}_\alpha = K^{-1/2}L\varphi_\alpha$.

Итак, собственные значения оператора $K_\varphi F$ имеют смысл отношения сигнал/шум для разных компонент решения в каноническом базисе, и шенноновская информация показывает, какие из компонент решения $\varphi = \sum_\alpha \varphi_\alpha (\varphi_\alpha, \varphi)$ информационно обеспечены:

$$I_{\varphi u} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \ln(1 + \lambda_\alpha).$$

9.4. Элементы математического планирования эксперимента

Введенные в § 9.3 информационные меры служат естественной базой для постановки задач математического планирования эксперимента, возможность планирования которого связана с выбором условий (σ) из некоторого множества Σ . Например, выбор канала измерений, выбор временного и частотного интервалов измерений,

выбор геометрии расстановки приборов в задачах дистанционного зондирования. Общая математическая постановка задачи планирования эксперимента (поиск σ) сводится к следующему:

$$\tilde{\sigma} = \arg \inf_{\sigma \in \Sigma} \Phi(\sigma) = \arg \sup_{\sigma \in \Sigma} \Phi^{-1}(\sigma).$$

Целесообразно функционал Φ выбрать выпуклым, при этом он должен быть ограничен снизу (сверху).

Постановка эксперимента, связанная с решением обратной задачи $L\varphi + \varepsilon = u$, называется *регрессионной моделью*, если φ априори представлено в конечномерном базисе. В этом случае строится наилучшая несмешенная оценка, которую, как было показано ранее, находят методом наименьших квадратов. Стандартное представление уравнения регрессии при отсутствии априорной информации о φ имеет вид

$$u_{ij} = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha}(x_i) + \varepsilon_{ij},$$

где $\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha}(x_i)$ — функция регрессии. Из представления

$$L(x_i)\varphi = L \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\psi_{\alpha}, \varphi) = \sum_{\alpha} (\psi_{\alpha}, \varphi) L \psi_{\alpha}$$

следует соответствие $\varphi_{\alpha} = (\psi_{\alpha}, \varphi)$ и $\mathbf{f}_{\alpha}(x_i) = L_{\alpha}(x_i)\psi_{\alpha}$ ($\{\varphi_{\alpha}\}$ — неизвестные параметры; x_i — контролируемые переменные, например координаты регистрации $i = 1 \div n$, индекс j меняется от 1 до r_i , $\sum r_i = N$). *Нормированным планом эксперимента* $\sigma(N)$ назовем совокупность величин:

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \right\},$$

где $\sum p_i = 1$, $p_i = r_i/N$. В этом случае в качестве аргумента функционала используется информационная матрица Фишера:

$$\mathbf{F}(\sigma) = \sum_i p_i \mathbf{f}^T(x_i) K_{\varepsilon}^{-1}(x_i) \mathbf{f}(x_i),$$

$$\mathbf{f}^T(x_i) = \|f_1(x_i), f_2(x_i) \dots f_{\alpha}(x_i) \dots\|,$$

$$f_{\alpha}(x_i) = L(x_i)\psi_{\alpha}.$$

Непрерывным планом эксперимента называют $p(x)$, такое, что

$$p(x) \geq 0, \quad \int_X p(x)dx = 1.$$

В качестве критериев оптимальности планов используются следующие [54, 55, 105]:

1. $\tilde{\sigma} = \arg \inf \text{Det} F^{-1}(\sigma) = \arg \sup \text{Det} F(\sigma)$,
здесь F — оператор Фишера, зависящий от плана как от параметрической функции, и тогда оптимальный план $\hat{\sigma}$ называется *D-оптимальным*. При этом минимизируется объем эллипсоида рассеяния оценки наименьших квадратов. Задача может быть бессодержательной даже в случае конечного базиса для вполне непрерывных L -операторов.
2. $\tilde{\sigma} = \arg \inf \lambda_{\max}(F(\sigma)) = \arg \sup \lambda_{\min}(F(\sigma))$
($\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ — минимальное и максимальное собственные числа оператора Фишера $F(\sigma)$). Этот критерий приводит к *E-оптимальному* плану, при этом минимизируется ошибка наименее информативной линейной комбинации параметров φ :

$$F\varphi = \lambda_{\min}\varphi.$$

3. $\tilde{\sigma} = \arg \inf_{\sigma \in \Sigma} \sup_{x \in X} (\mathbf{f}^T(x), F^{-1}(\sigma)\mathbf{f}(x)).$
Это выражение — критерий, минимизирующий максимальное значение дисперсии оценки функции регрессии. Соответствующий план называется *G-оптимальным*.
4. $\tilde{\sigma} = \arg \inf_{\sigma} \int_X \mathbf{f}^T(x) F^{-1}(\sigma) \mathbf{f}(x) dx.$
Этот критерий минимизирует среднее по X значение дисперсии оценки функции регрессии.
5. $\tilde{\sigma} = \arg \inf A F^{-1}(\sigma).$
Этот критерий минимизирует величину риска, задаваемого матрицей A при обобщенных квадратичных потерях:

$$\mathbb{E}(\varphi - \hat{\varphi}, A(\varphi - \hat{\varphi})).$$

Такой критерий называют *L-оптимальным*.

Задачи планирования эксперимента имеют очевидное прикладное значение. При этом в число критериев оптимальности включаются оптимальные затраты, ресурсы, качественные параметры и т. д.

В каждом конкретном случае задача построения критерия может быть очень сложной, а меры, по которым производится осреднение, обладают существенной неопределенностью. Как правило, единый критерий построить не удается. План эксперимента должен удовлетворять совокупности критериев, т. е. задача планирования становится многокритериальной. С введением векторного критерия $\{\Phi_\alpha(\sigma)\}$ планы могут быть частично упорядочены: говорят, что σ_1 доминирует над σ_2 по отношению к множеству $\{\Phi_\alpha(\sigma)\}$, если $\{\Phi_\alpha(\sigma_1)\} \leq \{\Phi_\alpha(\sigma_2)\}$ для всех значений α , причем хотя бы для одного из них выполняется строгое неравенство. *Оптимальным по Парето* называется всякий план из множества Парето — критерия Φ_α , т. е. такого множества $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, для элементов которого в множестве Σ нет доминирующих условий σ .

Спецификой постановки задач математического планирования экспериментов, связанных с обратными задачами математической физики, является обязательное включение априорной информации, в частности, использование согласованного базиса для регуляризации решения.

Г л а в а 10

ПОСТРОЕНИЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Восстановление коэффициентов — функций пространственных координат, описывающих локальные свойства среды, — по известным характеристикам поля зондирующего сигнала составляет предмет обратной задачи в математической физике [15, 18-20, 71, 72, 104, 133]. При постановке соответствующих обратных задач исходными данными служат поля, детерминированным образом заданные на пространственно-временном континууме. В реальном физическом эксперименте, в том числе в дистанционном зондировании, наблюдения проводятся в конечном числе “точек” пространства, при цифровой записи осуществляется временное квантование регистрируемого сигнала, при этом сам зарегистрированный сигнал представляет собой трансформацию физического поля на входе приемного устройства. Свести реальный эксперимент к традиционной математической постановке можно в том случае, если считать приборную запись непрерывной во времени и сначала осуществить так называемую “редукцию к идеальному прибору” (что представляет собой широко известную некорректную задачу [69, 87]), а затем провести пространственно-временную интерполяцию. Подобная процедура приводит к потере информации, хотя и применяется в ряде случаев [112].

Чтобы сформулировать математическую модель и поставить обратную задачу, адекватную реальному физическому эксперименту (дистанционному зондированию в частности), необходимо учесть основные факторы, определяющие формирование модели. Естественной математической моделью интерпретации физического эксперимента является восстановление полей искомых парамет-

ров среды по значениям набора функционалов — “функционалов” измерений. Так в интерпретационных задачах возникает сопряженное пространство линейных функционалов, являющихся математической моделью линейных приборных устройств, регистрирующих зондирующий сигнал. Как будет показано в этой главе, это сопряженное пространство позволяет дать прозрачную физическую интерпретацию структуры функционалов, действующих непосредственно на поля искомых параметров. Эти функционалы названы нами *томографическими*.

10.1. Построение линейных функционалов измерений

Первый этап решения обратной задачи дистанционного зондирования есть построение модели связи между данными измерений и неизвестными полями параметров среды. В качестве исходных данных и используются, как правило, цифровые записи, регистрируемые приемниками, локализованными в пространстве. Искомые параметры, описывающие свойства среды, являются элементами $(\theta(x))$ функциональных пространств (Θ) : $\theta(x) \in \Theta$, например поля магнитных и гравитационных аномалий, проводимости $(\sigma(x))$, упругих параметров Ламе $(\lambda(x), \mu(x))$, плотности $(\rho(x))$ и т. д. Пространство измерений — это пространство функционалов $\{h_n\}$ над полями зондирующих сигналов $(\varphi \in \Phi)$; модель измерений

$$u_n : u_n = H_n(\varphi) \triangleq \langle h_n | \varphi \rangle,$$

$n = 1 \div N$ — число цифровых отсчетов приемной системы, $\{h_n\} \in \Phi^*$.

Томографический эксперимент определяется отображением функционального пространства в пространство измерений: $\Theta(R^3) \rightarrow R^N$. Здесь экспериментальные данные, содержащие шум, являются функционалами искомых полей параметров:

$$u_n = \mathcal{P}_n(\theta) + \varepsilon_n. \quad (10.1)$$

Пусть процесс распространения описывается линейным оператором L_θ :

$$L_\theta \varphi = s, \quad (10.2)$$

где φ — поле зондирующего сигнала; \mathbf{s} — поле источника;

$$L_\theta : L_\theta (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha L_\theta \varphi + \beta L_\theta \psi.$$

Оператор L_θ определяет свойства среды. Проблема интерпретации томографического эксперимента с математической точки зрения сводится к восстановлению оператора L_θ по измеренным данным. Чтобы получить решение, необходимо построить функционалы $\mathcal{P}_n \in \Theta^*$, опираясь на связь $H_n(\varphi(\theta)) = \mathcal{P}_n(\theta)$ и закон распространения (10.2).

Будем считать, что поле φ генерируется группой источников и регистрируется приемником с диаграммой направленности Ω и фиксированной ориентацией главного лепестка диаграммы \mathbf{e} . Полагая размеры приемника малыми по сравнению с характерными размерами задачи (длиной волны зондирующего сигнала, характерными масштабами неоднородности), будем считать приемник локализованным в точке. Так, например, при интерпретации сейсмических данных полный набор экспериментальных значений мы получим, если учтем, что в условиях эксперимента участвуют J групп источников, $3 \times K$ (K — число точек приема) трасс от каждой группы и обрабатываемых отсчетов цифровой записи сейсмотрассы: $N = 3KJL$ отсчетов. Нужно отметить, что фиксируется не непосредственно поле φ , а его трансформация аппаратной функцией регистрирующего канала H , который включает временное и амплитудное квантование. Самая общая модель трансформации зондирующего сигнала, регистрируемого каналом, представляется линейным оператором свертки. Вводя сквозную нумерацию отсчетов (индекс $n = 1 \div N$), отдельный отсчет цифровой записи можно представить в виде

$$u_n = H_n L_\theta^{-1} \mathbf{s} + \varepsilon_n,$$

$$H : H_n \varphi = \int \int \int dx d\tau d\Omega h_n(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}; t_n - \tau, x_n - x) \varphi(x, \mathbf{e}, \tau), \quad (10.3)$$

$$\mathbf{e} : \mathbf{e} \in R^3,$$

здесь все неизвестные свойства среды включены в оператор L_θ^{-1} ; экспериментальные данные — результат свертки поля φ с аппаратной функцией h . Только в идеализированной постановке (когда $h_n(t_n - t) = \delta(t - t_n)$, что соответствует бесконечной спектральной полосе пропускания приемника — физически нереализуемой, и

когда диаграмма направленности $h(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}) = h(\mathbf{e}_n^T, \mathbf{e})$) экспериментальное значение, не отягощенное случайной ошибкой ε , совпадает с проекцией поля $\varphi(x, t)$ на направление \mathbf{n} . В качестве реальной модели детерминированной части конкретного измерения может быть принят функционал $h_n = h_n(\varphi)$, который считается непрерывным по физическому смыслу задачи и линейным по техническим требованиям. В связи с нелинейностью функционала $\mathcal{P}_n(\theta)$ из правой части равенства (10.1) (даже при наличии явного выражения его действия на поле θ и при осуществлении условия $\varepsilon_n \rightarrow 0$) решение с необходимостью имеет интерпретационную форму. Как правило, основным элементом на каждом шаге итерации является линеаризация функционала \mathcal{P}_n . Пусть среда описывается полем $\Theta_0 = \Theta_0(x)$, тогда модель измерений (10.1) переходит в

$$u_n = \mathcal{P}_n(\Theta_0) + \frac{\delta}{\delta \theta} \Big|_{\Theta_0} \mathcal{P}_n(\delta \theta) + \tilde{\varepsilon}_n,$$

где $\tilde{\varepsilon}_n$ включает как случайную ошибку ε_n , так и ошибку, обусловленную детерминированной частью модели и связанную с линеаризацией.

Для поля Θ_0 реализуется уравнение распространения $L_0 \varphi = \mathbf{s}$. Будем считать, что искомое поле θ является близким к полю Θ_0 , т. е. $\theta = \Theta_0 + \delta \theta$, $\delta \theta \ll \Theta_0$. Решение φ_0 может быть получено иногда в аналитической форме, если используется один из приближенных методов, например геометрической оптики. Формальное решение для среды с полем параметров θ записывается как

$$\varphi = \varphi_0 + L_0^{-1} \delta L_\theta \varphi \quad (10.4)$$

($\delta L_\theta = L_0 - L_\theta$ — возмущающий оператор). Равенство (10.4) есть следствие операторного тождества:

$$L_\theta^{-1} \equiv L_0^{-1} + L_0^{-1} (L_0 - L_\theta) L_\theta^{-1}$$

представления $\varphi = L_\theta^{-1} \mathbf{s}$.

Отметим, что представленная конструкция (10.4) может быть получена в случае, если поле φ_0 удовлетворяет однородному уравнению $L_0 \varphi_0 = 0$. Записав оператор $L = L_0 - \delta L_\theta$, а решение φ — в виде $\varphi = \varphi_0 + \delta \varphi$, получим уравнение

$$L_0 \delta \varphi = \delta L_\theta \varphi,$$

т. е. поправка возмущенного поля описывается тем же уравнением, что и поле φ_0 в опорной среде, но уже с эффективным источником: $\mathbf{s} = \delta L_\theta \boldsymbol{\varphi}$, включающим в себя, помимо поля φ_0 , еще и поправку $\delta\varphi$.

Полная модель (10.3) с учетом выражения (10.4) будет записана как

$$u_n = H_n [\varphi_0 + L_0^{-1} \delta L_\theta \varphi] + \varepsilon_n. \quad (10.5)$$

Здесь свойства среды отражаются как членом δL_θ , так и сомножителем φ . Из-за наличия зависимости φ от $\delta\theta$ детерминированная часть модели измерений оказывается нелинейной относительно $\delta\theta$. Если $\delta\theta$ достаточно мало, т. е. если выполняется условие

$$\frac{\|H_n L_0^{-1} \delta L_\theta (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0)\|^2}{E(\varepsilon_n^2)} \ll 1 \quad (10.6)$$

(E — оператор математического ожидания), то φ в выражении (10.5) может быть заменено на $\boldsymbol{\varphi}_0$. С физической точки зрения выполнение неравенства (10.6) определяет адекватность модели $u_i(\boldsymbol{\varphi})$ реальным измерениям; в результате замены $\boldsymbol{\varphi}$ на $\boldsymbol{\varphi}_0$ модельная ошибка в выражении (10.5) много меньше, чем ошибка измерений.

Проанализируем норму ошибки линеаризации, используя следующее неравенство:

$$\|H L_0^{-1} \delta L_\theta (\varphi - \varphi_0)\| \leq \|H L_0^{-1} \delta L_\theta\| \|\varphi - \varphi_0\|.$$

Норма разности полей φ и φ_0 ограничена, что вытекает из физических соображений (физические поля не обладают бесконечной энергией): $\|\varphi - \varphi_0\| \leq c < \infty$. Оператор $H L_0^{-1} \delta L_\theta$ компактен, это связано с компактностью оператора H (интегрального оператора свертки), определяющего пространственно-временную дискретизацию. При $\delta\theta \rightarrow 0$ $\|H L_0^{-1} \delta L_\theta\| \rightarrow 0$ и условие (10.6) заведомо удовлетворяется. Запишем модификацию модели (10.5) с учетом условия (10.6):

$$u_n = H_n [\varphi_0 + L_0^{-1} \delta L_\theta \varphi_0] + \tilde{\varepsilon}_n. \quad (10.7)$$

Ошибки, включающие ошибки линеаризации, подавляются действием оператора H_n . Запишем модель (10.7), введя билинейную форму:

$$u_n = \langle h_n | \varphi_0 \rangle_{V,T,\Omega} + \langle h_n | L_0^{-1} \delta L_\theta \varphi_0 \rangle_{V,T,\Omega} + \tilde{\varepsilon}_n,$$

$$\langle \xi | \eta \rangle_{V,T,\Omega} = \int_{\Omega} \int_V \xi(\mathbf{e}, x, t) * \eta(\mathbf{e}, x, t) dx d\Omega$$

(* — знак свертки по времени; V — область зондирования; T — временной интервал измерений).

Редуцирем экспериментальные данные на известное значение

$$u_n^0 = \mathcal{P}_n(\Theta_0) \equiv \langle h_n | \varphi_0 \rangle_{V,T,\Omega},$$

получаем

$$\tilde{u}_n = \langle h_n | L_0^{-1} \delta L_\theta \varphi_0 \rangle_{V,T,\Omega} + \tilde{\varepsilon}_n, \quad (10.8)$$

где $\tilde{u}_n = u_n - u_n^0$.

10.2. Томографический функционал

Выделим в возмущающем операторе δL_θ монотонную функцию $\nu(\delta\theta)$. Принимая во внимание тот факт, что во многих томографических задачах оператор δL_θ близок к локальному, например, является дифференциальным оператором, запишем выражение (10.8) как

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \langle (L_0^{-1})^* h_n | \delta L_\theta \varphi_0 \rangle_{V,T,\Omega} + \tilde{\varepsilon}_n = \\ &= \langle \langle G_0^* h_n \left| \frac{\delta}{\delta \nu} \delta L_\theta \right| G_0 \mathbf{s} \rangle_{T,\Omega} | \nu(\delta\theta) \rangle_V + \tilde{\varepsilon}_n, \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\text{где } G_0 = L_0^{-1}; \quad \frac{\delta}{\delta \nu} \delta L_\theta : \frac{\delta u}{\delta \nu} = \langle G_0^* h_n \left| \frac{\delta}{\delta \nu} \delta L_\theta \right| \varphi_0 \rangle_{T,\Omega}.$$

Интегральное ядро функционала относительно $\nu(\delta\theta)$ будем называть *томографическим функционалом*:

$$p_n^\nu = \langle \varphi_{\text{out}} | s^\nu | \varphi_{\text{in}} \rangle_{T,\Omega}, \quad (10.10)$$

где $\varphi_{\text{in}} = \varphi_0$ — падающее поле в известной опорной среде Θ_0 , φ_0 , $L_0 \varphi_0 = \mathbf{s}$, $\varphi_{\text{out}} : L_0^* \varphi_{\text{out}} = \mathbf{h}_n$ — обращенное поле, “генерированное” приемником; $S^\nu = (\delta/\delta\nu)\delta L_\theta$ — оператор взаимодействия полей φ_{in} и φ_{out} .

Учитывая определение (10.10), запишем модель (10.9) как

$$\tilde{u} = P\nu + \tilde{\varepsilon},$$

$$\tilde{u} = \|\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n, \dots, \tilde{u}_N\|^T, \tilde{\varepsilon} = \|\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_n, \dots, \tilde{\varepsilon}_N\|^T,$$

$$P = \begin{vmatrix} \langle p_{11} | & \dots & \langle p_{1m} | & \dots & \langle p_{1M} | \\ \dots & & \dots & & \dots \\ \langle p_{n1} | & \dots & \langle p_{nm} | & \dots & \langle p_{nM} | \\ \dots & & \dots & & \dots \\ \langle p_{N1} | & \dots & \langle p_{Nm} | & \dots & \langle p_{NM} | \end{vmatrix}, \nu = \begin{vmatrix} |\nu_1\rangle \\ \dots \\ |\nu_m\rangle \\ \dots \\ |\nu_M\rangle \end{vmatrix}.$$

Томографический функционал определяет влияние всех элементов пространственной области на n -й отсчет экспериментальных данных. Нужно отметить, что в традиционной лучевой томографии томографический функционал является сингулярным и локализуется вдоль луча, соединяющего источник и приемник; вес его вдоль луча постоянен, в то время как в дифракционной томографии даже при условии применимости лучевого описания полей φ_{in} , φ_{out} каждый элемент объема исследуемой области управляет двумя лучевыми траекториями: от приемника и источника (причем каждый элемент пространственной области имеет собственный вес, который определяется взаимодействием полей φ_{in} , φ_{out}). Нужно заметить, что математические методы вычислительной томографии базируются на методах решения задач интегральной геометрии, когда данные (проекции) представлены интегралами параметрических функций на многообразиях меньшей размерности (лучи, двумерные поверхности), в то время как в дифракционной томографии носители томографического функционала принадлежат пространству R^3 . Отметим, что основное содержание томографического эксперимента связано с перекрытием носителей томографических функционалов, т. е. информация об одном и том же элементе объема содержится во всей последовательности измерений. Измерения связаны как с изменениями локализации группы источников (φ_{in} в формуле (10.10)), так и с локализацией, ориентацией приемника и отсчетов (φ_{out} в формуле (10.10)) динамических полей.

Априорные данные могут быть представлены как в вероятностной, так и детерминированной форме, например, задается определенный тип пространственной симметрии. Детерминированная форма задания априорной информации позволяет перевести томографический функционал в пространство меньшей размерности. Если априори среда предполагается горизонтально однородной, то носитель томографического функционала является однородным, а соответствующий томографический функционал является проек-

цией Радона обобщенного томографического функционала на вертикальное направление. В случае сферической симметрии параметр ядра томографического функционала является радиальной координатой.

10.3. Примеры построения и интерпретации томографических функционалов

Рассмотрим примеры построения и интерпретации томографических функционалов.

10.3.1. Скалярное волновое уравнение

Операторы L_0 и L_θ имеют вид

$$L_0 = -\Delta + c_0^{-2}(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_\theta = -\Delta + c^{-2}(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\Theta_0 = c_0(x), \quad \theta = c(x), \quad x \in R^3, \quad \nu = \nu(x) = \frac{1}{c_0^2} \left(1 - \frac{c_0^2}{c^2}\right),$$

$$S^\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad p = \left\langle \varphi_{\text{out}} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right| \varphi_{\text{in}} \right\rangle_T.$$

В этом случае сопряженный оператор Грина

$$G^* : G^*(x, x'; t - t') = G(x', x; -(t - t'))$$

определяет распространение волны от приемника в обратном времени. Носитель томографического функционала в однородной опорной среде локализуется в параболическом слое, когда падающее поле является плоской волной, и в эллиптическом слое, когда падающее поле является сферической волной (при условии точечности приемника).

На рис.10.1,*a* показано сечение носителя томографического функционала, проходящее через ось симметрии; слой параболоида образован кинематически эквивалентными точками ($c = \text{const}$). На рис.10.1,*б,в* схематически дана конфигурация носителя томографического функционала, если источник (s) точечный, а приемник (r)

с аппаратной функцией $h(t) = \delta(t)$, причем δ — пространственно-временное представление полей φ_{in} , φ_{out} , v — носитель томографического функционала.

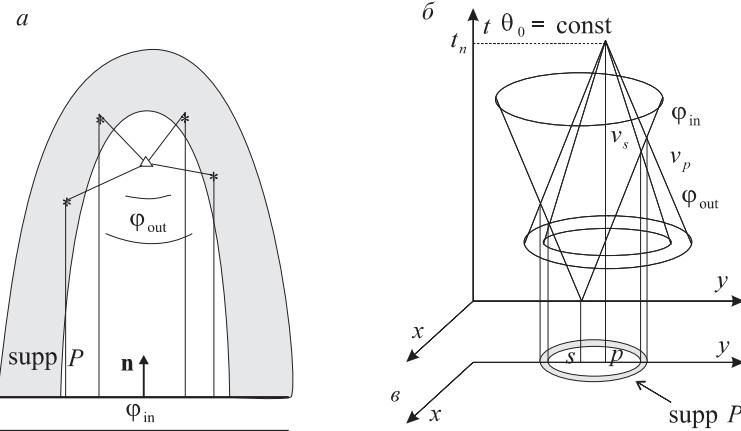


Рис. 10.1. Пространственно-временное представление полей и носитель томографического функционала.

10.3.2. Уравнение Ламе для однородной изотропной безграничной среды

Операторы распространения волнового поля в опорной (L_0) и возмущенной (L_θ) средах записываются в виде

$$L_0 \boldsymbol{\varphi} = \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} - [(\lambda_0 + \mu_0) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \mu_0 \Delta \boldsymbol{\varphi} + \nabla \lambda_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nabla \mu_0 \times \nabla \times \boldsymbol{\varphi} + 2(\nabla \mu_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}] ,$$

$$L_\theta \boldsymbol{\varphi} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} - [(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \mu \Delta \boldsymbol{\varphi} + \nabla \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nabla \mu \times \nabla \times \boldsymbol{\varphi} + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}] . \quad (10.11)$$

Здесь

$$\Theta_0 = \begin{vmatrix} |\lambda_0(x)\rangle \\ |\mu_0(x)\rangle \\ |\rho_0(x)\rangle \end{vmatrix} , \quad \Theta = \begin{vmatrix} |\lambda(x)\rangle \\ |\mu(x)\rangle \\ |\rho(x)\rangle \end{vmatrix} ,$$

$$\begin{aligned}\nu(\delta\theta) &= \delta\theta, & \lambda(x) &= \lambda_0(x) + \delta\lambda(x), \\ \mu(x) &= \mu_0(x) + \delta\mu(x), \\ \rho(x) &= \rho_0(x) + \delta\rho(x).\end{aligned}$$

Структура оператора P в данном случае будет описываться как

$$\langle p^\nu | = ||\langle P^\lambda | \langle P^\mu | \langle P^\rho | ||.$$

Возмущающий оператор $\delta L = L_0 - L_\theta$ из равенства (10.4) равен

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta L_\lambda + \delta L_\mu + \delta L_\rho, \\ \delta L_\lambda : \delta L_\lambda \varphi &= \delta\lambda \nabla \nabla \cdot \varphi + \nabla \delta\lambda \nabla \cdot \varphi = \nabla (\delta\lambda \nabla \cdot \varphi), \quad (10.12) \\ \delta L_\mu : \delta L_\mu \varphi &= \delta\mu \nabla \nabla \cdot \varphi + \delta\mu \Delta \varphi + \nabla \delta\mu \times \nabla \times \varphi + \\ &+ 2(\nabla \delta\mu \cdot \nabla) \varphi = 2\delta\mu \Delta \varphi + \delta\mu \times \nabla \times \nabla \varphi + \\ &+ \nabla \delta\mu \times \nabla \times \varphi + 2(\nabla \delta\mu \cdot \nabla) \varphi, \\ \delta L_\rho : \delta L_\rho \varphi &= -\delta\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi. \quad (10.13)\end{aligned}$$

Выражение $(\nabla \delta\mu \cdot \nabla) \varphi$ в координатной форме с единичными векторами \mathbf{e}_i можно записать как

$$\sum_i (\nabla \delta\mu \cdot \nabla \varphi_i) \mathbf{e}_i.$$

Используя тождество

$$\nabla \cdot (\eta \nabla \xi) = \eta \Delta \xi + \nabla \eta \cdot \nabla \xi,$$

трансформируем выражение

$$2\delta\mu \Delta \varphi + 2(\nabla \delta\mu \cdot \nabla) \varphi$$

так, что оно примет вид

$$2 \sum_i \nabla \cdot (\delta\mu \nabla \varphi_i) \mathbf{e}_i.$$

Используя тождество

$$\nabla \times (\xi \mathbf{f}) = \nabla \xi \times \mathbf{f} + \xi \nabla \times \mathbf{f},$$

мы получаем

$$\delta\mu\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\varphi} + \nabla\delta\mu \times \nabla \times \boldsymbol{\varphi} = \nabla \times \delta\mu\nabla \times \boldsymbol{\varphi}.$$

Окончательно запишем действие оператора δL_μ в форме

$$\delta L_\mu = \nabla \times (\delta\mu\nabla \times \boldsymbol{\varphi}) + 2\nabla \cdot (\delta\mu\nabla \boldsymbol{\varphi}).$$

Напомним, что значения томографических функционалов (10.10) можно записать в виде

$$\langle p^\theta | \delta\theta \rangle_V = \int_V \boldsymbol{\varphi}_{\text{out}} \otimes \delta L_\theta \boldsymbol{\varphi}_{\text{in}} dx$$

для вариаций любого поля параметров $\delta\theta$ (символ \otimes означает свертку по времени и суммирование по всем индексам входящих векторных либо тензорных выражений, символ $*$ оставлен для обычной свертки по времени). Например:

$$\psi_{ik} \otimes \varphi_{lm} \stackrel{\Delta}{=} \psi_{ik} * \delta_{il} \delta_{km} \varphi_{lm}.$$

Детерминированную часть $\bar{u}_n = \tilde{u}_n - \tilde{\varepsilon}_n$ модели (10.9) можно представить как

$$\bar{u}_n = \int_V \boldsymbol{\varphi}_{\text{out}} \otimes \delta L_\lambda \boldsymbol{\varphi}_{\text{in}} dx + \int_V \boldsymbol{\varphi}_{\text{out}} \otimes \delta L_\mu \boldsymbol{\varphi}_{\text{in}} dx + \int_V \boldsymbol{\varphi}_{\text{out}} \otimes \delta L_\rho \boldsymbol{\varphi}_{\text{in}} dx. \quad (10.14)$$

Выделим дивергентную часть первого слагаемого из правой части равенства (10.14) с учетом выражения для δL_λ (10.12):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_{\text{out}} \otimes \delta L_\lambda \boldsymbol{\varphi}_{\text{in}} &= \boldsymbol{\varphi}_{\text{out}} \otimes \nabla(\delta\lambda \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\text{in}}) \equiv \\ &\equiv \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{\text{out}} \otimes \delta\lambda \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\text{in}}) - \delta\lambda \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\text{out}} \otimes \nabla \boldsymbol{\varphi}_{\text{in}} \end{aligned}$$

и примем теорему Гаусса — Остроградского:

$$\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{\text{out}} \otimes \delta\lambda \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\text{in}}) dx = \int_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{\text{out}} \otimes \delta\lambda \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\text{in}}),$$

затем выберем объем интегрирования достаточно большим, так, что можно принять $\delta\lambda|_{\partial V} \equiv 0$, тогда соответственно интеграл по поверхности исчезнет, и первое слагаемое в правой части равенства

(10.14) можно записать как

$$\begin{aligned} \int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \delta L_\lambda \varphi_{\text{in}} dx &= \int_V \delta \lambda \nabla \cdot \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \cdot \varphi_{\text{in}} dx = \\ &= \int_V p^\lambda(x) \delta \lambda(x) dx = \langle \langle \varphi_{\text{out}} | S^\lambda | \varphi_{\text{in}} \rangle_T | \delta \lambda \rangle_V, \\ S^\lambda : p^\lambda &= \langle \varphi_{\text{out}} | S^\lambda | \varphi_{\text{in}} \rangle = -\nabla \cdot \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \cdot \varphi_{\text{in}}, \end{aligned} \quad (10.15)$$

т. е. действие оператора взаимодействия S^λ полей φ_{in} и φ_{out} сводится к симметричной трансформации полей φ_{in} и φ_{out} в поле их дивергенций: $\nabla \cdot \varphi_{\text{in}}$ и $\nabla \cdot \varphi_{\text{out}}$. Чтобы определить действие оператора S^μ , воспользуемся тождеством

$$\nabla \cdot (\xi \mathbf{f}) = \nabla \xi \cdot \mathbf{f} + \xi \nabla \cdot \mathbf{f},$$

с учетом которого, а также выражения для δL_μ из формулы (10.13), получим

$$\begin{aligned} \int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \cdot (\delta \mu \nabla \varphi_{\text{in}}) dx &= \\ &= \int_V \nabla \cdot (\varphi_{\text{out}} \otimes \delta \mu \nabla \varphi_{\text{in}}) dx - \int_V \nabla \varphi_{\text{out}} \otimes \delta \mu \nabla \varphi_{\text{in}} dx. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Применение теоремы Гаусса—Остроградского и учет условия $\delta \mu|_{\partial V} = 0$ приводят к исчезновению первого интеграла в правой части равенства (10.16), а во второй интеграл $\delta \mu$ входит множителем.

Аналогично взаимодействие φ_{out} со вторым слагаемым в правой части равенства (10.16) дает

$$\begin{aligned} \int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \times (\delta \mu \nabla \times \varphi_{\text{in}}) dx &= \\ &= \int_V \nabla \cdot \int_T dt' \varphi_{\text{out}}(t-t') \times \delta \mu \nabla \times \varphi_{\text{in}}(t') dx + \\ &+ \int_V (\delta \mu \nabla \times \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \times \varphi_{\text{in}}) dx. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Здесь первый интеграл в правой части имеет дивергентную форму и исчезает: $\delta\mu|_{\partial V} = 0$. Окончательно, используя равенства (10.16) и (10.17), находим

$$\begin{aligned} \int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \delta L_\mu \varphi_{\text{in}} dx &= \\ \int_V dx [\nabla \times \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \times \varphi_{\text{in}} - 2\nabla \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \varphi_{\text{in}}] \delta\mu &= \\ = \int_V dx p^\mu(x) \delta\mu(x) &= \langle \langle \varphi_{\text{out}} | S^\mu | \varphi_{\text{in}} \rangle_T | \delta\mu \rangle_V, \end{aligned}$$

$$S^\mu : p^\mu = \langle \varphi_{\text{out}} | S^\mu | \varphi_{\text{in}} \rangle = \nabla \times \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \times \varphi_{\text{in}} - 2\nabla \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \varphi_{\text{in}}. \quad (10.18)$$

Действие оператора S^ρ с учетом равенства (10.13) определяется выражением

$$\int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \delta L_\rho \varphi_{\text{in}} dx = - \int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{\text{in}} dx, \quad (10.19)$$

которое можно записать в явно симметричной относительно полей (φ_{out} и φ_{in}) форме; проводя интегрирование подынтегрального выражения из правой части равенства (10.19) по частям:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{out}} \otimes \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{\text{in}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \varphi_{\text{out}} (T-t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{\text{in}}(t) = \\ &= \varphi_{\text{out}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{in}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{out}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{in}} dt \end{aligned}$$

и принимая во внимание, что $\varphi_{\text{out}}|_{+\infty} = 0$, $\partial/\partial t \varphi_{\text{in}}|_{-\infty} = 0$, получаем

$$S^\rho : p^\rho = \langle \varphi_{\text{out}} | S^\rho | \varphi_{\text{in}} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{out}} \otimes \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{in}}. \quad (10.20)$$

Итак, формулы (10.15), (10.18) и (10.20) определяют операторы взаимодействия S^λ , S^μ и S^ρ полей φ_{in} и φ_{out} . Физическая интерпретация томографических функционалов заключается в том, что их интегральные ядра представляют собой пространственные функции

влияния вариаций полей искомых параметров среды на отсчетные экспериментальные значения волнового поля зондирующего сигнала. Носитель томографического функционала определяется областью взаимодействия полей φ_{in} и φ_{out} , заведомо ограниченной в силу физических условий томографического эксперимента (конечный временной интервал измерений и конечная скорость распространения поля φ_{out}).

Норма томографического функционала обусловлена амплитудой функции влияния, связанной с оператором взаимодействия. На рис. 10.2 приведены диаграммы рассеяния плоских волновых полей элементарными возмущениями модуля сдвига μ и массовой плотности ρ (диаграмма рассеяния на возмущении параметра Ламе λ является изотропной). Диаграммы характеризуют взаимодействие полей φ_{in} и φ_{out} , когда их источники расположены на больших расстояниях от рассеивающего объекта (в дальней зоне). Поле генерируется “источником” с временной зависимостью, определяемой аппаратной функцией сейсморегистрирующего канала. Вследствие ограниченной полосы частот аппаратной функции при взаимодействии полей φ_{in} и φ_{out} , которое во всех случаях носит характер свертки во временной области (соответственно произведения — в спектральной области), выписываются лишь перекрывающиеся спектральные компоненты полей φ_{in} и φ_{out} .

Анализ томографических функционалов позволяет провести математическое планирование томографического эксперимента, управляя входящими в структуру томографического функционала параметрами (пространственной локализацией источников и приемников φ_{in} и φ_{out} , формой зондирующего сигнала φ_{in} , выбором временного интервала регистрации φ_{out}). При этом характер взаимодействия определяется только влиянием параметров среды на физику распространения зондирующего сигнала: например, если поле является чисто вихревым (поперечная волна в опорной однородной среде), то томографический функционал p^λ становится нулевым, соответственно такой томографический эксперимент заведомо обладает нулевой информативностью по отношению к полю параметра λ . Физически содержательный томографический эксперимент определяется не только нормой томографических функционалов, но и областью пересечения носителей.

Отдельно рассмотрим ситуацию, при которой *опорную среду* можно считать *однородной*.

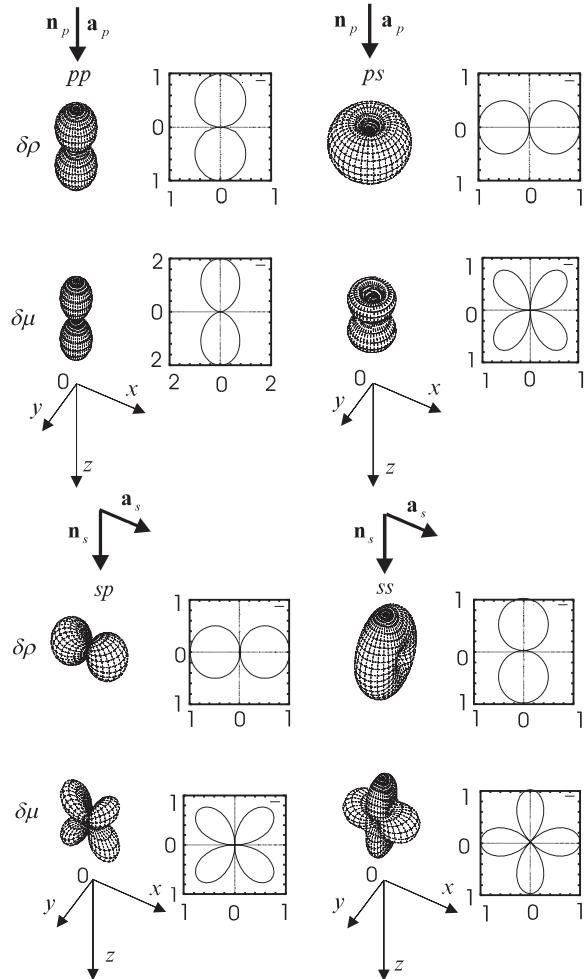


Рис. 10.2. Диаграммы рассеяния продольной и поперечной волн на элементарных рассеивателях. Справа от пространственного изображения диаграмм дано их сечение в плоскости (x, z) ; \mathbf{n}_q и \mathbf{a}_q — соответственно нормаль к фронту и единичный амплитудный вектор падающей на элементарную неоднородность q -волны ($q = p, s$).

Пусть вариации упругих параметров в однородной изотропной среде таковы, что $|\nabla \lambda|$, $|\nabla \mu|$ и $\delta \rho$ достаточно малы. Рассмотрим две ситуации, когда поле φ_{in} является чисто продольной волной и когда φ_{in} — чисто поперечная волна. В первом случае введем функцию

$$\nu_p(v_p^2) = \rho_0 \left(\frac{v_p^2}{v_{p_0}^2} - 1 \right),$$

при этом $\rho_0 \delta(v_p^2) = \delta(\lambda + 2\mu)$. Записав действие оператора возмущения на поле $\varphi_{\text{in}} \equiv \varphi_p$, где $\varphi_p : \nabla \times \varphi_p \equiv 0$, получим

$$\begin{aligned} \delta L \varphi_p &= \delta \lambda \nabla \nabla \cdot \varphi_p + 2\delta \mu \Delta \varphi_p = \\ &= (\delta \lambda + 2\delta \mu) \Delta \varphi_p = \delta(\lambda + 2\mu) \Delta \varphi_p. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Замечая, что в точках пространства, где отсутствует источник, справедливо уравнение

$$\left(\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\lambda_0 + 2\mu_0) \Delta \right) \varphi_p = 0,$$

заменим в представлении (10.21) $\Delta \varphi_p$ на $(\rho_0/\lambda_0 + 2\mu_0) \partial^2 \varphi_p / \partial t^2$. Тогда

$$\delta L \varphi_p = \delta \nu_p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_p.$$

Соответствующий томографический функционал и оператор взаимодействия имеют вид

$$S^{\nu_p} : p^{\nu_p} = \langle \varphi_{\text{in}} | S^{\nu_p} | \varphi_{\text{out}} \rangle = - \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{in}} \otimes \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{out}}. \quad (10.22)$$

Во втором случае введем функцию

$$\nu_s(v_s^2) = \rho_0 \left(\frac{v_s^2}{v_{s_0}^2} - 1 \right),$$

тогда

$$\rho \delta(v_s^2) = \delta \mu.$$

Запишем действие возмущающего оператора на поле $\varphi_{\text{in}} \equiv \varphi_s$, где $\varphi_s : \nabla \cdot \varphi_s \equiv 0$:

$$\delta L \varphi_s = \delta \mu \Delta \varphi_s.$$

Используя уравнение для соленоидального поля φ_s :

$$\left(\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \Delta \right) \varphi_s = 0,$$

получаем

$$\delta L \varphi_s = \delta \nu_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_s.$$

Томографический функционал для ν_s имеет вид

$$S^{\nu_s} : p^{\nu_s} = \langle \varphi_{in} | S^{\nu_s} | \varphi_{out} \rangle = - \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{in} \otimes \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{out}. \quad (10.23)$$

Несмотря на то, что операторы S^{ν_p} выражении (10.22) и S^{ν_s} в выражении (10.23), определяющие взаимодействие полей φ_{in} и φ_{out} , идентичны, носители соответствующих томографических функционалов различны, что связано с разными скоростями распространения волн сжатия (v_p) и сдвига (v_s). Чтобы проиллюстрировать конфигурацию носителя томографического функционала, рассмотрим плоскую падающую волну. На рис. 10.3, *a* изображены характеристические конусы, соответствующие полю точечного источника φ_{out} , генерированному приемником в момент t_n и распространяющемуся в обратном времени. Внешняя коническая поверхность соответствует распространению со скоростью волны сжатия внутренней волны сдвига. В трехмерном пространстве R^3 поле сосредоточено между этими коническими поверхностями (для упрощения на рис. 10.3, *a* опущено действие свертки по времени, в предположении, что “источник” моделируется δ -функцией по времени). Нормаль к фронту плоской волны ориентирована в направлении, противоположном e_Z . На этом рисунке поле φ_{in} представляет собой плоскую волну сжатия с конечной длительностью сигнала. Носитель томографического функционала (см. рис. 10.3, *b*) ограничен в пространстве двумя поверхностями: внешняя — параболоид вращения, являющийся пространственной проекцией сечения внешнего характеристического конуса (v_p) плоскостью фронта падающей P -волны. Внутренняя поверхность — эллипсоид вращения, соответствующий пространственной проекции сечения внутреннего конуса (v_s) плоскостью падающего поля P -волны. Оси симметрии обеих поверхностей, ограничивающих носитель томографического функционала, совпадают с e_Z .

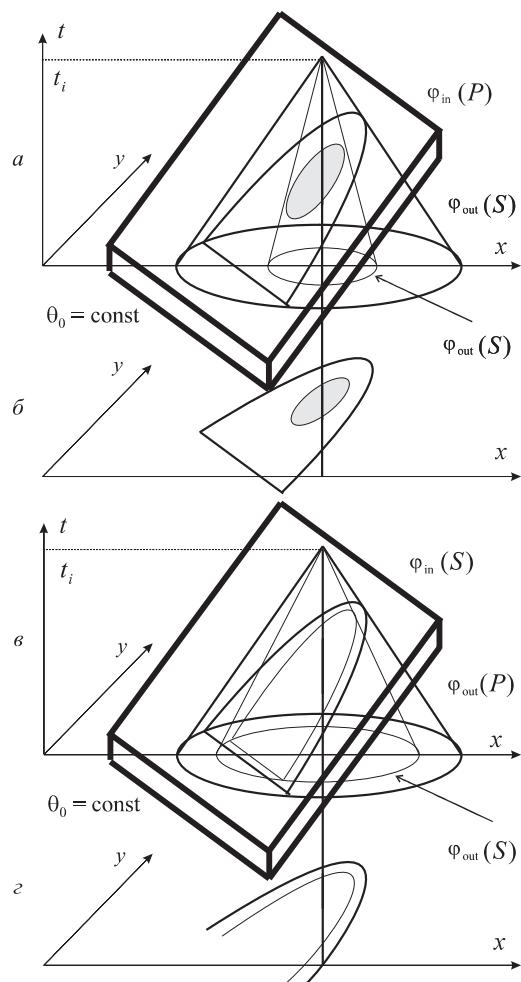


Рис. 10.3. Характеристические конусы, соответствующие полю точечного источника φ_{out} . Поле φ_{in} , с конечной длительностью сигнала, представляет собой плоскую волну сжатия (а, б) и плоскую сдвиговую волну (в, г); б, г — носители томографического функционала.

На рис. 10.3, в падающее поле φ_{in} — плоская S -волна. В этом случае внешняя поверхность, ограничивающая носитель функционала (см. рис. 10.3, 2), — гиперболоид вращения, внутренняя — параболоид вращения, ось симметрии та же: e_Z .

10.3.3. Уравнение переноса стационарного зондирующего сигнала

При исследовании пространственной структуры атмосферы Земли и других планет, плазменных объектов в широком классе физических экспериментов, где измеряемые величины являются квадратичными функциями волновых полей, а также при описании прохождения потоков частиц в среде возникает уравнение переноса.

Пусть поле зондирующего сигнала имеем:

$$\varphi(x, \mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \in \Omega = \{\mathbf{n} : |\mathbf{n}| = 1\}.$$

Запишем операторы уравнения переноса для опорной (L_0) и возмущенной (L_θ) сред в случае изотропного рассеяния:

$$L_0 \varphi = (\mathbf{n}, \nabla \varphi) + \alpha_0(x) \varphi - \sigma_0(x) \int_{\Omega} \varphi(x, \mathbf{n}) d\mathbf{n}, \quad (10.24)$$

$$L_\theta \varphi = (\mathbf{n}, \nabla \varphi) + \alpha(x) \varphi - \sigma(x) \int_{\Omega} \varphi(x, \mathbf{n}) d\mathbf{n} \quad (10.25)$$

(α — коэффициент абсорбции; β — коэффициент рассеяния; $\Theta_0 = \|\alpha_0(x)\|, \nu(\delta\theta) = \delta\theta$). Оператор взаимодействия имеет два компонента: $S^\nu = [S^\alpha, S^\sigma]$, а томографический функционал представляется как $\langle p^\nu \rangle = [\langle p^\alpha \rangle, \langle p^\sigma \rangle]$. Операторы взаимодействия S^α и S^σ легко находим из представления оператора возмущения для уравнений (10.24) и (10.25):

$$\delta L = \delta L_\alpha + \delta L_\beta,$$

$$\delta L_\alpha : \delta L_\alpha \varphi = \delta \alpha \varphi, \quad (10.26)$$

$$\delta L_\sigma : \delta L_\sigma \varphi = \delta \sigma \int_{\Omega} \varphi(x, \mathbf{n}') d\mathbf{n}'. \quad (10.27)$$

Томографические функционалы записываются в виде

$$\begin{aligned}\langle p^\alpha | \delta\alpha \rangle_\Omega &= \int_{\Omega} \varphi_{\text{out}} \delta L_\alpha \varphi_{\text{in}} d\mathbf{n}, \\ \langle p^\sigma | \delta\sigma \rangle_\Omega &= \int_{\Omega} \varphi_{\text{out}} \delta L_\sigma \varphi_{\text{in}} d\mathbf{n}.\end{aligned}$$

Подставив δL_α и δL_σ в форме (10.26), (10.27), получим

$$S^\alpha : \langle p^\alpha | = \langle \varphi_{\text{out}} | S^\alpha | \varphi_{\text{in}} \rangle_\Omega = \langle \varphi_{\text{out}} | S^\alpha | \varphi_{\text{in}} \rangle_\Omega, \quad (10.28)$$

$$S^\sigma : \langle p^\sigma | = \langle \varphi_{\text{out}} | S^\sigma | \varphi_{\text{in}} \rangle_\Omega = \langle \varphi_{\text{out}} | \int_{\Omega} \varphi_{\text{in}}(x, \mathbf{n}') d\mathbf{n}' \rangle_\Omega. \quad (10.29)$$

Анализ формул (10.28) и (10.29) показывает, что в изотропном случае действие томографического функционала, соответствующего коэффициенту поглощения α , сводится к интегрированию произведения полей φ_{in} и φ_{out} по полному телесному углу, а действие томографического функционала коэффициента рассеяния определяется произведением интегралов по полному телесному углу полей φ_{in} и φ_{out} . Отметим, что поле φ_{in} , входящее в выражение томографических функционалов, является решением уравнения переноса в опорной среде (10.24). Поле φ_{out} удовлетворяет сопряженному уравнению

$$-(\mathbf{n}, \nabla \varphi) + \alpha_0(x) - \sigma_0(x) \int_{\Omega} \varphi(x, \mathbf{n}') d\mathbf{n}' = h,$$

где h — поле, “генерированное” приемником.

10.3.4. Уравнение диффузии

В задачах геоэлектрики, как правило, рассматривают квазистационарные поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , которые при отсутствии токов и зарядов удовлетворяют однородным уравнениям диффузии:

$$\Delta \varphi - \sigma \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 0,$$

здесь φ является вектором \mathbf{E} или \mathbf{H} . Эволюционные операторы в опорной (L_0) и возмущенной (L_θ) средах имеют вид

$$L_0 = \Delta - \sigma_0(x) \frac{\partial}{\partial t},$$

$$L_\theta = \Delta - \sigma(x) \frac{\partial}{\partial t},$$

где $\sigma(x) = \sigma_0(x) + \delta\sigma(x)$. Оператор возмущения δL_σ можно записать $\delta L_\sigma = \delta\sigma\partial/\partial t$, тогда томографический функционал можно записать как

$$p^\sigma = \varphi_{\text{in}} \otimes \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{out}}. \quad (10.30)$$

Заметим, что φ_{in} и φ_{out} в выражении (10.30) удовлетворяют уравнениям соответственно

$$L_0 \varphi_{\text{out}} = 0, \quad L_0^* \varphi_{\text{in}} = \mathbf{h},$$

где

$$L_0^* = \Delta + \sigma_0(x) \frac{\partial}{\partial t}.$$

10.4. Лучевые томографические функционалы в динамико-кинематической интерпретации данных дистанционного зондирования

Интерпретация данных дистанционного зондирования велась в двух вариантах: в качестве данных томографического эксперимента использовалась либо фазовая характеристика зондирующего сигнала — и тогда мы имели дело с лучевой томографией, либо волновое поле самого зондирующего сигнала — и тогда это соответствовало дифракционной томографии. В последнем случае структура волнового поля сигнала содержит в себе информацию о пространственной области, ограниченной лишь кинематически, в то время как в лучевой томографии сбор информации о характеристиках среды происходит в окрестности криволинейного луча. Кинематическое ограничение в дифракционной томографии возникает только при наличии включенного в некоторый момент времени источника, до начала действия которого среда находилась в покое. Можно построить томографическую интерпретацию и при наличии стационарных сигналов. Она будет учитывать как кинематическое, так и

динамическое ограничения, причем интерференционный принцип формирования волнового поля позволит строить его спектральную амплитуду как суперпозицию полей, имеющих лучевую структуру.

Проиллюстрируем формирование амплитудного спектра волны на примере акустического поля, созданного точечным источником внутри однородного поля толщиной h и удовлетворяющего однородным граничным условиям на верхней и нижней границах слоя:

$$(\nabla^2 + k^2) \varphi = -\delta(z - z_0) \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}, \quad (10.31)$$

$$\varphi|_{z=0} = 0, \quad \varphi|_{z=h} = 0.$$

Рассмотрим сначала удовлетворяющее условию излучения решение (10.31), не учитывая граничные условия, т. е. $\varphi_0(x) = e^{ikl}/(4\pi l)$ (l — отрезок прямой (отрезок “луча”), соединяющий точку источника $(0, z_0)$ и точку наблюдений $x = (\rho, z)$). Интерпретация отрезка l как отрезка “луча” усиливается характером убывания амплитуды обратно пропорционально площади поперечного сечения лучевой трубы. Лучи, падающие на верхнюю границу $z = 0$, отражаются от нее, при этом характер отражения определяется граничным условием $\varphi|_{z=0} = 0$. Чтобы сумма падающего и отраженного полей равнялась нулю, необходимо считать коэффициент отражения равным -1 . Поскольку все отраженные лучи ведут себя так, как будто они были испущены из мнимого источника, расположенного зеркально относительно плоскости $z = 0$ в точке $z = -z_0$, то отраженная волна ведет себя как $e^{ikl}/(4\pi l)$ (l — отрезок прямой от мнимого источника до точки наблюдения). Аналогично происходит отражение от нижней границы, коэффициент отражения от которой будет равен $+1$, а мнимый источник расположен в точке $2h - z_0$. Тогда многократное отражение приводит к появлению семейств лучей, каждый из которых генерируется мнимыми источниками с координатами $2h_n + z_0$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Волновое поле в этом случае равно сумме падающей и многократно отраженных волн. Каждая из отраженных волн — это сферическая волна, излученная соответствующим мнимым источником (метод изображения):

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{e^{ikl_\uparrow}}{l_\uparrow} - \frac{e^{ikl_\downarrow}}{l_\downarrow} \right], \quad (10.32)$$

где

$$l_{\uparrow} = [\rho^2 + ((z - z_0) + 2hn)^2]^{1/2}$$

—луч, выходящий из источника по направлению к верхней границе;

$$l_{\downarrow} = [\rho^2 + ((z + z_0) + 2hn)^2]^{1/2}$$

—луч, выходящий из источника по направлению к нижней границе.

Покажем, как связано простейшее лучевое представление (10.32) с более сложной аппроксимацией волнового поля в вертикально неоднородной среде. С учетом осевой симметрии задачи, запишем волновое уравнение для ханкель-образов поля $\tilde{\varphi}(ka, z)$:

$$\tilde{\varphi}(ka, z) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(ka\rho) \varphi(\rho, z) \rho d\rho,$$

где $J_0(ak\rho)$ — функция Бесселя нулевого порядка;

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{\infty} J_0(ka\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) d\rho + \frac{\partial^2 \varphi(ka, z)}{\partial z^2} + \\ + k^2 n^2(z) \tilde{\varphi}(ka, z) = \delta(z - z_0); \end{aligned} \quad (10.33)$$

$$\tilde{\varphi}(ka, 0) = 0; \quad \partial \tilde{\varphi} / \partial z - (ka, h) = 0;$$

$n(z)$ — лучевой показатель преломления. Учтем, что

$$2\pi \int_0^{\infty} J_0(ka\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) d\rho = -k^2 a^2 \tilde{\varphi}(ka, z)$$

и получим следующую форму записи для уравнения (10.33):

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(ka, z)}{\partial z^2} + k^2 [n^2(z) - a^2] \tilde{\varphi}(ka, z) = -\delta(z - z_0) \quad (10.34)$$

с теми же граничными условиями. Введем для решения уравнения (10.34), удовлетворяющего первому граничному условию, обозначение $\tilde{\varphi}_1(ka, z_>)$, а для решения, удовлетворяющего второму граничному условию — $\tilde{\varphi}_2(ka, z_<)$, тогда можно записать общее решение:

$$\tilde{\varphi}(ka, z) = \tilde{\varphi}_1(ka, z_<) \tilde{\varphi}_2(ka, z_>) / W(ka), \quad (10.35)$$

где

$$W = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\varphi}_2 \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial z} & \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

— вронскиан, символы $z_>$, $z_<$ означают, что $z > z_0$ и $z < z_0$ соответственно.

Выразим $\tilde{\varphi}_1(ka, z_<)$ и $\tilde{\varphi}_2(ka, z_>)$ через восходящие и низходящие волновые поля

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(ka, z_<) &= U(ka, z_<) + r_1(ka, z_<) D(ka, z_<), \\ \tilde{\varphi}_2(ka, z_>) &= D(ka, z_>) + r_2(ka, z_>) U(ka, z_>). \end{aligned}$$

Здесь U — решение однородного уравнения, представляющего асимптотически при больших значениях ka в окрестностях z_0 волны, распространяющиеся вверх (*up*) в направлении отрицательных значений z ; D — соответственно волна, уходящая вниз (*down*). При этом нормировка U и D выбрана так, что

$$\begin{aligned} W[U, D] &= -2ik, \\ r_1 &= \frac{U(ka, 0)}{D(ka, 0)}, \quad r_2 = \frac{\partial_z D(ka, h)}{\partial_z U(ka, h)} \end{aligned}$$

— коэффициенты отражения соответственно на верхней и нижней границах.

Учитывая, что

$$W(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) = (1 - r_1 r_2) W(U, D) = 2ik(1 - r_1 r_2),$$

запишем окончательное представление для волнового поля, используя ханкель-образ $\tilde{\varphi}(ka, z)$ (10.35):

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, z) &= \frac{ik}{4\pi} \int_0^\infty J_0(ka\rho) [U(ka, z_<) + r_1 D(ka, z_<)] \times \\ &\quad \times [D(ka, z_>) + r_2 U(ka, z_>)] (1 - r_1 r_2)^{-1} a da. \end{aligned}$$

Раскладывая бином $(1 - r_1 r_2)^{-1}$ на множители, получаем представление многократного рассеяния, аналогичное лучевому:

$$\varphi(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ik}{4\pi} \int_0^\infty J_0(ka, \rho) [(r_1 r_2)^n U(ka, z_<) D(ka, z_>) +$$

$$+ (r_1 r_2)^{n+1} U(ka, z_>) D(ka, z_<) + r_1^{n+1} r_2^n D(ka, z_<) \times \\ \times D(ka, z_>) + r_1^n r_2^{n+1} U(ka, z_>) U(ka, z_<)] a da. \quad (10.36)$$

Здесь первое слагаемое описывает волну, которая вышла из источника вверх, отразилась n раз на каждой границе и распространяется вниз; второе слагаемое описывает такую же картину с $(m+1)$ -кратным отражением от каждой границы; третье и четвертое слагаемые интерпретируются как волна, вышедшая из источника в одном направлении, отразившаяся n раз от одной границы и $n+1$ раз от другой и распространяющаяся после этого в противоположном направлении. Понятие отражения включает здесь понятие рефракции, т. е. соответствующие точки поворота описываются равенством $n^2(z) = a^2$ (см. уравнение (10.34)).

Решение, полученное для волнового поля (10.36), представляет собой волновое поле возбужденное точечным источником, помещенным в точку $\rho = 0$ и $z = z_0$, т. е. функцию Грина. Лучевая интерпретация функции Грина, проведенная ранее, в значительной степени опирается на тот факт, что функцию Грина для волнового уравнения можно записать в виде лучевой суммы:

$$G(x, x_0) = \sum_j g_j(x, x_0) \exp[i\omega\tau_j(x, x_0)],$$

где g_j — амплитуда волнового поля, отвечающая j -му лучу; τ_j — соответствующий эйконал. Очевидно, что все эти лучи лежат в плоскости, ортогональной к границам слоев.

10.5. Построение падающего и обращенного полей в слоистой опорной среде

Входящие в конструкцию томографических функционалов (10.10) поля φ_{in} и φ_{out} являются решениями прямых задач, которые в случае произвольной опорной среды связаны со значительными математическими трудностями. Как обычно, решение таких прямых задач упрощается, если опорную среду можно считать априори наделенной определенными свойствами симметрии. Наибольшей симметрией, естественно, является однородная безгранична среда, и имеющиеся аналитические представления полей φ_{in} и φ_{out} относятся именно к такому случаю. Следующий класс сред, обладающий меньшей симметрией, — класс слоисто-однородных сред.

Такие среды чрезвычайно широко распространены (это задачи дистанционного зондирования в геофизике) в силу оболочечной структуры Земли и околоземного пространства. При локальном описании сферически-симметричные оболочки аппроксимируются плоско-параллельными слоями. Опишем алгоритмическую структуру построения полей φ_{in} и φ_{out} в этом случае [23, 61, 131].

Задачи распространения упругих акустических и электромагнитных волн с нулевыми начальными условиями могут быть сведены к решению дифференциального матричного уравнения первого порядка [148, 149]:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \tilde{\varphi} = \beta \tilde{L} \tilde{\varphi} = \beta \begin{vmatrix} 0 & \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{vmatrix}. \quad (10.37)$$

Так, если уравнение $L\varphi = 0$ описывает распространение упругих волн в изотропной среде с параметрами ρ, λ, μ , то записываем фурье-преобразование по латеральным координатам (x_1, x_2) и по временной частоте ω :

$$\begin{aligned} \varphi(\omega, p_1, p_2, x_3) &= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} dt dx_1 dx_2 \varphi(t, x_1, x_2, x_3) \times \\ &\times \exp[i\omega t - ip_1 x_1 - ip_2 x_2]. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Для $\tilde{\varphi}$ получим представление

$$\tilde{\varphi}_1 = \begin{vmatrix} \partial_t \tilde{\varphi}_{(3)} \\ \tilde{\sigma}_{(1)} \\ \tilde{\sigma}_{(2)} \end{vmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_2 = \begin{vmatrix} \tilde{\sigma}_{(3)} \\ \partial_t \tilde{\varphi}_{(1)} \\ \partial_t \tilde{\varphi}_{(2)} \end{vmatrix},$$

где $\partial_t \varphi_{(i)}$ — скорость частиц в направлении i -го орта; $\sigma_i = \sigma_{3i}$ — компонент тензора напряжений; тильда означает соответствующую фурье-трансформанту.

В этом случае

$$\tilde{L}_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda+2\mu} & \frac{\lambda S_1}{\lambda+2\mu} & -\frac{\lambda S_2}{\lambda+2\mu} \\ \frac{\lambda S_1}{\lambda+2\mu} & a & -\frac{\mu(3\lambda+2\mu)S_1 S_2}{\lambda+2\mu} \\ \frac{\lambda S_2}{\lambda+2\mu} & -\frac{\mu(3\lambda+2\mu)S_1 S_2}{\lambda+2\mu} & b \end{vmatrix},$$

где $a = \rho - \frac{4\mu(\lambda+\mu)S_1^2}{\lambda+2\mu} - \mu S_2^2$; $b = \rho - \mu S_2^1 - \frac{4\mu(\lambda+\mu)S_2^2}{\lambda+2\mu}$;

$$\tilde{L}_2 = \begin{vmatrix} \rho & S_1 & S_2 \\ S_1 & \mu^{-1} & 0 \\ S_2 & 0 & \mu^{-1} \end{vmatrix}.$$

Здесь $S_i = p_i/\omega$ ($i = 1, 2$) — компоненты вектора медленности; $\beta = -i\omega$.

Уравнение (10.37) описывает плоскую $P-SV$ -волну с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, если начальные условия выбирать в виде $\tilde{\sigma}_2 = \partial_t \tilde{\varphi}_2 = 0$, и плоскую SH -волну, если начальные условия выбирать в виде $S_1 = 0$, $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_3 = \partial_t \tilde{\varphi}_1 = \partial_t \tilde{\varphi}_3 = 0$. Наконец, если в качестве нормали к фронту плоской волны выбрать \mathbf{e}_3 и начальные условия $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = \partial_t \tilde{\varphi}_1 = \partial_t \tilde{\varphi}_2 = 0$, то уравнение (10.37) будет описывать плоскую P -волну.

Для электромагнитных волн записывается уравнение Максвелла для изотропной среды:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Для фурье-трансформант, аналогичных представленным в выражении (10.38), получим следующее представление $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ из уравнения (10.37):

$$\beta = -i\omega, \quad \tilde{\varphi}_1 = \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \end{vmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_2 = \begin{vmatrix} -H_2 \\ H_1 \end{vmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_1 = \begin{vmatrix} \mu - \frac{S_1^2}{\gamma} & -\frac{S_1 S_2}{\gamma} \\ -\frac{S_1 S_2}{\gamma} & \mu - \frac{S_2^2}{\gamma} \end{vmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}}_2 = \begin{vmatrix} \gamma - \frac{S_2^2}{\mu} & \frac{S_1 S_2}{\mu} \\ \frac{S_1 S_2}{\mu} & \gamma - \frac{S_1^2}{\mu} \end{vmatrix}.$$

Здесь $S_i = p_i/\omega$, $i = 1, 2$ и $\gamma = \sigma/(\omega i) + \varepsilon$.

Границные условия требуют, чтобы тангенциальные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} были непрерывными при переходе через границу. В случае горизонтально-слоистой среды это требование сводится к непрерывности векторов $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$. Выбор составляющих вектора $\tilde{\varphi}$ сделан с таким расчетом, чтобы поток энергии в x_3 -направлении представлялся в виде

$$R_3 = -\frac{1}{4}(\tilde{\varphi}_1^* \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_2^* \tilde{\varphi}_1) = -\frac{1}{4}\tilde{\varphi}^* M \tilde{\varphi},$$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{vmatrix}$$

(\mathbf{I} — единичная матрица размерностью 2×2).

Для акустической среды представление векторов $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ и матриц $\tilde{\mathbf{L}}_1$ и $\tilde{\mathbf{L}}_2$ уравнения (10.37) дается в виде

$$\beta = -i\omega, \quad \tilde{\varphi}_1 = \|\partial_t \tilde{\varphi}_3\|, \quad \tilde{\varphi}_2 = \|\tilde{\sigma}\|,$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_1 = \left\| \frac{1}{\lambda} - \frac{S^2}{\rho} \right\|, \quad \tilde{\mathbf{L}}_2 = \|\rho\|, \quad S^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2}{\omega^2}.$$

Решение эволюционного уравнения (10.37) может быть представлено в общей форме через матрицу перехода $P(x_3, x_3^0)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_3} P(x_3, x_3^0) = \beta \tilde{\mathbf{L}}(x_3) P(x_3, x_3^0) \quad (10.39)$$

и начальным условиям $P(x_3^0, x_3^0) = I$.

Учитывая, что уравнение (10.39) можно представить в эквивалентной форме:

$$P(x_3, x_3^0) = I + \beta \int_{x_3^0}^{x_3} dx'_3 L(x'_3) P(x'_3, x_3^0),$$

запишем матрицу перехода в итерационной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= I + \int_{x_3^0}^{x_3} \tilde{\mathbf{L}}(x'_3) dx'_3 + \int_{x_3^0}^{x_3} dx'_3 \tilde{\mathbf{L}}(x'_3) \int_{x_3^0}^{x'_3} dx''_3 \tilde{\mathbf{L}}(x''_3) + \\ &+ \int_{x_3^0}^{x_3} dx'_3 \tilde{\mathbf{L}}(x'_3) \int_{x_3^0}^{x'_3} dx''_3 \tilde{\mathbf{L}}(x''_3) \int_{x_3^0}^{x'''_3} dx'''_3 \tilde{\mathbf{L}}(x'''_3) + \dots \end{aligned}$$

Отметим, что матрица перехода для сопряженного уравнения отличается знаком β .

Г л а в а 11

ТОМОГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ СРЕДЫ

Представление о реконструктивной томографии как о задаче восстановления изображения объекта по его лучевым проекциям постепенно трансформировалось в задачу интегральной геометрии — восстановить функцию $\theta(x)$ по значениям заданного u :

$$u(x) = \int_{\Sigma(x)} \theta(x') w(x, x') d\sigma,$$

$x \in R^n$; $\Sigma(x)$ — семейство k -мерных многообразий в пространстве R^k , $k < n$; $w(x, x')$ — весовая функция; $d\sigma$ — элемент меры на $\Sigma(x)$.

Как мы видели в гл. 10, где было введено понятие томографического функционала, задачей реконструктивной томографии можно считать любую задачу восстановления распределенных параметров системы, в частности, любую задачу дистанционного зондирования. При этом исходными данными томографической задачи считаются интегралы от параметрических функций, заданных на многообразиях той же размерности, что и размерность области определения. В линейном приближении эти многообразия фиксированы, в общем случае они перестраиваются неявным образом на каждом шаге итерации.

11.1. Элементы линейной томографии

Математическую основу классической томографии составляет преобразование Радона [108, 109]:

$$u(p, \mathbf{n}) = \hat{R}\varphi = \int_X \varphi(\mathbf{x}) \delta(p - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{x} \triangleq \langle \delta(p - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) | \varphi(\mathbf{x}) \rangle,$$

где $u(p, \mathbf{n})$ — радон-образ функции $\varphi(\mathbf{x})$, заданной в N -мерном пространстве; $\delta(p - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n})$ — сингулярное ядро преобразования Радона, вырезающее $(N - 1)$ -мерную гиперплоскость (прямую в двумерном случае), заданную вектором нормали \mathbf{n} и параметром прицельного расстояния p -расстоянием от начала координат до гиперплоскости: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = p$.

Преобразование Радона возникло в классической томографии как математическая модель описания многоракурсных просвечиваний рентгеновскими лучами биологических “мягких” объектов, т. е. объектов, в которых рассеяние рентгеновских лучей можно считать малым. Уравнение переноса точечного (x_0), моноэнергетического (E_0), коллимированного (ν_0) источника рентгеновского излучения есть редуцированное уравнение переноса:

$$(\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla) I(x) + \varphi(x) I(x) = c \delta(x - x_0) \delta(\nu - \nu_0) \delta(E - E_0) \quad (11.1)$$

($I(x)$ — поток первичных рентгеновских фотонов; $\boldsymbol{\nu}$ — направление коллимации источника; $\varphi(x, E)$ — линейный коэффициент ослабления; E — энергия фотонов). При этом предполагается, что векторы $\boldsymbol{\nu}$ компланарны, т. е. задача рассматривается как двумерная. Решение уравнения (11.1) можно записать, проведя замену переменных $\mathbf{x} \rightarrow (p, \mathbf{n})$:

$$I(p, \mathbf{n}, E_0) = c_0 \exp\left\{-\int_{\mathcal{L}(p, \mathbf{n})} \varphi(x) dx\right\}, \quad (11.2)$$

где $\mathcal{L}(p, \mathbf{n})$ — линия, вдоль которой распространяется излучение. Логарифмируя соотношение (11.2), получаем запись преобразования Радона для двумерной задачи:

$$-\ln \frac{I(p, \mathbf{n}, E_0)}{c} \triangleq u(p, \mathbf{n}) = \int_{\mathcal{L}} \varphi(x) dx = \int_X \varphi(x) \delta(p - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) dx,$$

здесь в последнем равенстве интегрирование распространяется на всю область определения $\varphi(x)$.

Модель планарного сечения объекта возникает при описании зондирования плоским лазерным пучком (“световым ножом”), если исследуется плазма. При этом плоский пучок после прохождения исследуемого объема плазмы фокусируется на фотодиод. Как нетрудно видеть, в обоих случаях томографический эксперимент опирается на адекватное использование лучевого описания распространения зондирующего сигнала (длина волны мала по сравнению с характерными размерами неоднородности и сильно вытянутой вперед индикаторной рассеяния).

Перед рассмотрением основных свойств прямого преобразования Радона напомним некоторые свойства линейных непрерывных функционалов — обобщенных функций:

$$l(\varphi) \stackrel{\Delta}{=} (l, \varphi) = (l(x), \varphi(x)),$$

где $x \in R^n$.

11.1.1. Замена переменных

Пусть $x = Ly + x_0$ — невырожденное преобразование, тогда

$$[l(Ly + x_0), \varphi(y)] = |L|^{-1} [l(x), \varphi(L^{-1}(x - x_0))],$$

отсюда для дельта-функции

$$\langle \delta(Ly + x_0) | \varphi(y) \rangle \stackrel{\Delta}{=} \langle \delta(x) | |L|^{-1} \varphi(L^{-1}(x - x_0)) \rangle.$$

В частности,

- а) $\langle \delta(x - x_0) | \varphi \rangle = \varphi(x_0);$
- б) $\langle \delta(ay) | \varphi(y) \rangle = \langle \delta(x) | |a|^{-n} \varphi(a^{-1}x) \rangle;$
- в) если $L : L^*L = I$ и $x_0 = 0$, то

$$\langle \delta(Ly) | \varphi(y) \rangle = \langle \delta(x) | \varphi(L^*x) \rangle;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \langle \delta(L(x)) | \varphi(x) \rangle &= \sum_k \langle \delta(y) | |L'|_{x_k}|^{-1} \varphi(L'|_{x_k}^{-1}y + x_k) \rangle = \\ &= \sum_k |L'|_{x_k}|^{-1} \varphi(x_k), \end{aligned}$$

где $x_k : L(x_k) = 0$.

Например:

$$\delta(x^2 - c^2 t^2) = \frac{1}{2ct} [\delta(x - ct) + \delta(x + ct)];$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi);$$

$$\delta(x - x_0) = \left[\prod_i |h_i| \right]^{-1} \prod_i \delta(q_i - q_i^0).$$

Здесь $q_i = q_i(x)$, $h_i = \sum_k (\partial x_k / \partial q_i)^2$, что соответствует переходу от декартовых к криволинейным ортогональным координатам $q_i(x)$.

11.1.2. Дифференцирование обобщенных функций

Пусть $l \in C^n$, $|\alpha| \leq n$, тогда

$$(D^\alpha l, \varphi) = (-1)^\alpha (l, D^\alpha \varphi).$$

В частности,

$$\langle D^\alpha \delta | \varphi \rangle \triangleq (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0).$$

Перечислим основные свойства [66, 108] преобразования Радона.

1. Линейность следует из определения

$$\hat{R}[\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2] = \alpha_1 \hat{R}[\varphi_1] + \alpha_2 \hat{R}[\varphi_2].$$

2. На основании (11.2) поворот объекта приводит к повороту вектора **n** в аргументе радон-образа:

$$\hat{R}[\varphi(Ox)] = u(p, On), \quad (11.3)$$

преобразование подобия с коэффициентом $\alpha \neq 0$ приводит к увеличению прицельного расстояния в α раз и уменьшению значения радон-образа в α^{1-n} раз:

$$R[\varphi(\alpha x)] = \alpha^{-n} u\left(p, \frac{\mathbf{n}}{\alpha}\right) = \alpha^{1-n} u(\alpha p, \mathbf{n}).$$

3. Сдвиг объекта на x_0 приводит к сдвигу прицельного расстояния на $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0$:

$$\hat{R}[\varphi(x - x_0)] = u(p - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0, \mathbf{n}).$$

4. Радон-образ от производной функции φ , описывающей объект, записывается как

$$\hat{R}[(\mathbf{k} \cdot \nabla)\varphi] = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial u(p, \mathbf{n})}{\partial p},$$

соответственно для смешанной производной

$$\hat{R}[(\mathbf{k} \cdot \nabla)(\mathbf{l} \cdot \nabla)\varphi] = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial^2 u(p, \mathbf{n})}{\partial p^2}.$$

Отсюда

$$\hat{R}[(\nabla \cdot \nabla)\varphi(x)] = |\mathbf{n}|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 u(p, \mathbf{n})}{\partial p^2}. \quad (11.4)$$

Наконец, по отношению к произвольным линейным дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами $\hat{L} = L(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_k)$

$$\hat{R}[\hat{L}\varphi(x)] = \hat{L}\left(n_1 \frac{\partial}{\partial p}, \dots, n_k \frac{\partial}{\partial p}\right) u(p, \mathbf{n}).$$

В качестве примера использования свойства (11.4) применим прямое преобразование Радона к трехмерному волновому уравнению:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi(x, t) = 0,$$

$$\hat{R}\left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi\right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(p, \mathbf{n}),$$

что позволяет свести трехмерное волновое уравнение к одномерному.

5. Дифференцирование радон-образа

$$(\mathbf{k} \cdot \nabla) \hat{R}[\varphi(x)] = -\frac{\partial}{\partial p} \hat{R}[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})\varphi(x)]$$

для двух векторов \mathbf{k} и \mathbf{l} и производных по компонентам единичного вектора \mathbf{n} позволяет записать:

$$(\mathbf{k} \cdot \nabla)(\mathbf{l} \cdot \nabla)u(p, \mathbf{n}) = \frac{\partial^2}{\partial p^2} \hat{R}[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x})\varphi(x)].$$

6. Радон-образ свертки функций будет следующим:

$$\hat{R}\left[\int g(x - x')s(x')dx'\right] = \int s(x')dx' \int g(x - x')\delta(p - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})dx.$$

Проведя замену переменных: $x - x' = y$, получим

$$\begin{aligned} u(p, \mathbf{n}) &= \int s(x')dx' \int g(y)\delta(p - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{y})dy = \\ &= \int s(x')\hat{R}[g(p - \mathbf{n} \cdot y, \mathbf{n})]dx' = \\ &= \int \hat{R}[g(p - p', \mathbf{n})]dp' \int s(x')\delta[p' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}']dx', \end{aligned}$$

т. е.

$$\hat{R}[g * s] = \hat{R}[g] * \hat{R}[s].$$

Отметим, что радон-образ от многомерной свертки равен одномерной свертке — по прицельному расстоянию p^* радон-образов.

7. Связь преобразования Радона с преобразованием Фурье. Запишем преобразование Фурье по прицельному расстоянию от радон-образа $u(p, \mathbf{n})$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(p, \mathbf{n}) &= (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ip\nu} dp \int \varphi(x) \delta(p - \mathbf{x} \cdot n) dx = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int dx \varphi(x) \int e^{-ip\nu} \delta(p - \mathbf{x} \cdot n) dp = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int \varphi(x) e^{-i\nu(\mathbf{x} \cdot n)} dx, \end{aligned}$$

а в операторной форме:

$$F_p[u(p, \mathbf{n})] \stackrel{\Delta}{=} F_p[\hat{R}[\varphi(x)]] = (2\pi)^{(n-1)/2} F_{\mathbf{x}}[\varphi(x)]. \quad (11.5)$$

Одномерное преобразование Фурье радон-образа эквивалентно многомерному преобразованию Фурье от функции $\varphi(x)$, характеризующей объект. Полученная связь фурье-преобразования радонового образа и многомерного фурье-преобразования от φ формулируется как обобщенная теорема о центральном сечении: при фиксированном \mathbf{n} одномерное фурье-преобразование от радон-образа дает центральное сечение многомерного спектра Фурье вдоль луча $\mathbf{n}\nu$, проходящего через начало координат.

Приведем вывод обратного преобразования Радона, пользуясь соотношением (11.5):

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (2\pi)^{(-n+1)/2} F_x^{-1} F_p u(p, \mathbf{n}) = \\ &= C_n \int d(\nu \mathbf{n}) e^{i\nu \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} \int dp e^{-i\nu p} u(p, \mathbf{n}) = \\ &= C_n \int d(\nu \mathbf{n}) \int dp e^{i\nu(q-p)} u(p, \mathbf{n}),\end{aligned}$$

где $q = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$. Учитывая, что $d(\nu \mathbf{n}) = d\mathbf{n} \nu^{n-1} d\nu$, запишем представление $\varphi(x)$ в виде

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= C_n \int_{|\mathbf{n}|=1} d\mathbf{n} \int_0^\infty d\nu \nu^{n-1} \int dp e^{i\nu(q-p)} u(p, \mathbf{n}) = \\ &= C_n \int_{|\mathbf{n}|=1} d\mathbf{n} J(\mathbf{n}, q).\end{aligned}$$

Расширим пределы интегрирования по ν от $-\infty$ до $+\infty$, введя четную функцию $J_e(\mathbf{n}, q)$:

$$J_e(\mathbf{n}, q) = \frac{1}{2} [J(\mathbf{n}, q) + J(-\mathbf{n}, -q)]$$

или, используя явный вид интеграла $J(\mathbf{n}, q)$:

$$\begin{aligned}J_e(\mathbf{n}, q) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \nu^{n-1} d\nu \int_{-\infty}^\infty u(p, \mathbf{n}) e^{i\nu(q-p)} dp + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty \nu^{n-1} d\nu \int_{-\infty}^\infty u(p, -\mathbf{n}) e^{-i\nu(q-p)} dp +\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\nu|^{n-1} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} u(p, \mathbf{n}) e^{i\nu(q-p)} dp.$$

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного значений n .

1. n — нечетное. Проведя $n - 1$ раз интегрирование по частям $J_{\text{н}}(\mathbf{n}, q)$, получим

$$\begin{aligned} J_{\text{н}}(\mathbf{n}, q) &= \frac{1}{2} (i)^{1-n} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} u(p, \mathbf{n}) e^{i\nu(q-p)} = \\ &= \frac{1}{2} (i)^{1-n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} u(p, \mathbf{n}) \delta(q-p) dp = \\ &= \frac{1}{2} (i)^{1-n} \left. \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} \right|_{p=q=\mathbf{n} \cdot x} u(p, \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Итак, для нечетного значения n вычисление интеграла $J_{\text{н}}(\mathbf{n}, q)$ сводится к взятию производной $(n - 1)$ -го порядка по прицельному расстоянию p в точке $p = g = \mathbf{n} \cdot x$ от радон-образа $u(p, \mathbf{n})$. Окончательная формула обращения Радона в этом случае представляется в форме

$$\varphi(x) = C_n \int_{|\mathbf{n}|=1} \left. \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} \right|_{p=\mathbf{n} \cdot x} u(p, \mathbf{n}) d\mathbf{n}, \quad (11.6)$$

где $C_n = (2\pi i)^{1-n}/2$.

2. n — четное. Аналогично случаю нечетных n проведем интегрирование по частям $n - 1$ раз интеграла $J_{\text{ч}}(\mathbf{n}, g)$:

$$\begin{aligned} J_{\text{ч}}(\mathbf{n}, q) &= \frac{1}{2} (i)^{1-n} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\nu) d\nu \int dp e^{-i\nu(p-q)} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} u(p, \mathbf{n}) = \\ &= \frac{1}{2} (i)^{1-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} u(p, \mathbf{n}) \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \operatorname{sgn}(\nu) e^{-i\nu(p-q)} = \\ &= \frac{(i)^{-n}}{2\pi} \int \frac{(\partial/\partial p)^{n-1} u(p, \mathbf{n})}{p-q} dp. \end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение

$$F[\operatorname{sgn}(\nu)] = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \left(\frac{1}{p} \right),$$

\mathcal{P} — символ интегрирования в смысле главного значения Коши.
Вводя обозначение \mathcal{H} для преобразования Гильберта:

$$\mathcal{H}(u) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left(\frac{1}{p} * u(p) \right),$$

можно записать обращение Радона в четномерном пространстве:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -iC_n \int_{|\mathbf{n}|=1} d\mathbf{n} \left[\mathcal{H} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} u(p, \mathbf{n}) \right\} \right] (\mathbf{n} \cdot x, n) = \\ &= -\frac{iC_n}{\pi} \int_{|\mathbf{n}|=1} d\mathbf{n} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial/\partial p)^{n-1} u(p, \mathbf{n})}{p - \mathbf{n} \cdot x} dp. \end{aligned} \quad (11.7)$$

В случае четного значения n восстановление функции $\varphi(x)$ требует последовательного применения операции производной $(n-1)$ -го порядка по прицельному расстоянию p от радон-образа $u(p, \mathbf{n})$, преобразования Гильберта по прицельному расстоянию p , интегрирования по сфере.

Анализируя представления инверсии Радона для четных и нечетномерных пространств (11.6), (11.7), можно отметить “локальность” инверсии Радона при n нечетном. В этом случае используются радоновские поверхности по гиперплоскостям, проходящим в окрестности пространственной точки восстановления x . В нечетномерных пространствах инверсия Радона существенно нелокальна, что в явном виде представлено интегральным преобразованием Гильберта. Проявление локальности и нелокальности инверсии Радона вызвано глубокими связями между преобразованием Радона и гармоническими функциями. В частности, эта связь проявляется в нелокальности волнового фронта в четномерных пространствах: за волновым фронтом следует диффузионный шлейф в отличие от локального резко очерченного волнового фронта в нечетномерном пространстве.

Представим преобразования Радона в операторной форме. Для произвольной функции $\psi(p, \mathbf{n})$ (где $p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$), такой что

$\psi(p, \mathbf{n}) = \psi(-p, -\mathbf{n})$, введем сопряженный оператор Радона R^* :

$$R^* \psi = \int_{|\mathbf{n}|=1} \psi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{n}) d\mathbf{n}.$$

Тогда инверсия Радона для нечетного значения n имеет следующую операторную форму:

$$\begin{aligned} R^- &= R^* \Gamma_e, \\ \Gamma_e &= C_n \left. \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} \right|_{p=\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned}$$

а для четного значения n

$$R^- = R^* \Gamma_a, \quad \Gamma_a = -iC_n \mathcal{H} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1}.$$

Операторы Γ_o и Γ_e являются аналогами оператора $(RR^*)^-$, входящего в структуру решения интегрального уравнения $R\varphi = u$ методом наименьших квадратов: $\varphi = R^*(RR^*)^- u$. Индекс в обращении Радона R^- использован нами в связи с тем, что инверсия Радона является неустойчивой процедурой и требует применения регуляризации [66, 88].

11.2. Применение инверсии Радона в дифракционной томографии

Линеаризованная модель измерений в задачах зондирования объекта сигналом φ с законом распространения $L\varphi = s$ представлена выражением (10.9):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \langle (L_0^{-1})^* h_n | \delta L_\theta \varphi_0 \rangle + \tilde{\varepsilon}_n \stackrel{\Delta}{=} \\ &\stackrel{\Delta}{=} \langle \varphi_{n(out)} | \delta L_\theta | \varphi_{in} \rangle + \tilde{\varepsilon}_n. \end{aligned}$$

Идеализированный аналог этой модели получим, если аппаратную функцию (h_n) представим точечным приемником с бесконечной полосой пропускания, т. е. если $h_n \Rightarrow \delta(x - x_n)\delta(t - t_n)$, и пренебрежем шумами: $\tilde{\varepsilon}_n \Rightarrow 0$. Тогда модель \tilde{u}_n будет представлена как рассеянное поле в точке наблюдения x_n , т. е.

$$\tilde{u}_n = \tilde{\varphi}|_{x_n} \stackrel{\Delta}{=} (\varphi - \varphi_{in})|_{x_n}.$$

Запишем эту модель: $\tilde{\varphi} = \langle \varphi_{out} | \delta L_\theta | \varphi_{in} \rangle$.

Рассмотрим пример скалярного волнового уравнения $(c^{-2} \partial^2 / \partial t^2 - \Delta) \varphi = 0$ в случае, когда опорная среда считается однородной, т. е. $c_0(x) = c_0 = \text{const}$. Как было показано в § 10.3, томографический функционал p для скалярного волнового уравнения имеет вид

$$p : \tilde{\varphi} = \langle p | \nu(x) \rangle,$$

где $\nu(x) = c_0^{-2} (1 - c_0^2/c^2(x))$, а интегральное ядро томографического функционала представлено выражением

$$p = \langle \varphi_{out} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right| \varphi_{in} \rangle_T.$$

Для точечного источника s в однородной среде поля φ_{in} и φ_{out} имеют одинаковую структуру:

$$\begin{aligned} \varphi_{in} &= \frac{1}{4\pi|x-x_s|} \delta\left(t - t_s - \frac{|x-x_s|}{c_0}\right), \\ \varphi_{out} &= \frac{1}{4\pi|x-x_r|} \delta\left(t_r - t - \frac{|x-x_r|}{c_0}\right) \end{aligned}$$

(x_s, t_s — соответственно местоположение и момент включения источника s ; x_r, t_r — соответственно местоположение приемника и текущее время регистрации). Конкретный вид томографического функционала:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_T dt \frac{1}{|\Delta x_r|} \delta\left(t_r - t - \frac{|\Delta x_r|}{c_0}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \\ &\quad \times \frac{1}{|\Delta x_s|} \delta\left(t - t_s - \frac{|\Delta x_s|}{c_0}\right), \\ |\Delta x_s| &= |x - x_s|, \quad |\Delta x_r| = |x - x_r|. \end{aligned}$$

Раскладывая $|\Delta x_r|$ и $|\Delta x_s|$ в ряд и оставляя в знаменателе первые члены разложения, а в аргументах δ -функции два первых члена разложения (что соответствует приближению Фраунгофера), имеем

$$p = \frac{1}{(4\pi)^2 |\mathbf{x}_r| |\mathbf{x}_s|} \int_T dt \delta\left(t_r - t - \frac{|\mathbf{x}_r|}{c_0} - \frac{\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{x}}{c_0}\right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \delta'' \left[t - t_s - \frac{|\mathbf{x}_s|}{c_0} - \frac{\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{x}}{c_0} \right] = \frac{1}{(4\pi)^2 |\mathbf{x}_r| \cdot |\mathbf{x}_s|} \times \\
& \times \delta'' \left[(t_r - t_s) - \frac{(|\mathbf{x}_s| + |\mathbf{x}_r|)}{c_0} - \frac{(\mathbf{n}_r + \mathbf{n}_s, \mathbf{x})}{c_0} \right] = \\
= & \frac{c_0}{(4\pi)^2 |\mathbf{x}_r| |\mathbf{x}_s|} \delta''(q_r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}), \\
q_r & = (t_r - t_s) C_0 - (|\mathbf{x}_s| + |\mathbf{x}_r|), \\
\mathbf{n}_r & = \frac{\mathbf{x}_r}{|\mathbf{x}_r|}, \quad \mathbf{n}_s = \frac{\mathbf{x}_s}{|\mathbf{x}_s|}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}_r + \mathbf{n}_s.
\end{aligned}$$

Здесь вектор \mathbf{n} соответствует нормали к плоскости, относительно которой пучок φ_{in} с вектором \mathbf{n} зеркально отражается в направлении $-\mathbf{n}_r$. Окончательно рассеянное поле связано с функцией $\nu(x)$ преобразованием Радона:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi} = \langle p | \nu(x) \rangle & = \frac{c_0}{(4\pi)^2 |\mathbf{x}_r| |\mathbf{x}_s|} \int \nu(x) \delta''(q_r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) dx = \\
& = \text{const} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \int \nu(x) \delta(p - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) dx.
\end{aligned}$$

Преобразование Радона, формально записанное как интеграл по точкам плоскости $\{X : p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}\}$, при разных значениях времени регистрации (t_r) является аппроксимацией представления $\hat{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi} = \frac{c_0}{(4\pi)^2 |\mathbf{x}_r| |\mathbf{x}_s|} \delta''[(t_r - t_s) c_0 - (|\Delta x_r| + |\Delta x_s|)].$$

Эта форма записи предполагает при различных значениях времени регистрации интегрирование по соответствующим эллипсоидам вращения с осью симметрии, проходящей через точки источника (\mathbf{x}_s) и приема (x_r) — фокусы эллипсоидов, что соответствует физически прозрачной интерпретации: происходит интегрирование по множеству кинематически эквивалентных точек в пространстве, т. е. по уровням постоянной суммарной фазы.

Обобщенную инверсию Радона в идеализированной дифракционной томографии рассмотрим на более сложном примере, приведенном в работе [122]. Скалярное волновое уравнение в опорной среде со скоростью распространения $c_0(x)$

$$\left(\frac{1}{c_0^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \varphi(x, t) = 0$$

представим в форме уравнения Гельмгольца

$$(k^2 n_0^2(x) + \Delta) \varphi_{in}(x, k) = 0,$$

где $k^2 n^2(x) = \omega^2/c_0^2(x)$, ω — круговая частота. Вводя безразмерную функцию

$$\mu(x) = -\frac{\omega^2}{k^2} \nu(x), \quad \nu(x) = \frac{1}{c_0^2(x)} \left(1 - \frac{c_0^2(x)}{c^2(x)}\right),$$

запишем уравнение Гельмгольца в среде со скоростью распространения волн $c(x)$:

$$[k^2 (n_0^2(x) + \mu(x)) + \Delta] \varphi(x, k) = 0.$$

Возмущающий оператор (оператор умножения) имеет вид $\delta L = k^2 \mu(x)$. Будем считать, что опорная среда такова, что поля φ_{in} и φ_{out} достаточно хорошо аппроксимируются нулевыми членами лучевого разложения. Тогда рассеянное поле представляется как

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(k, x_r) &= k^2 \langle \varphi_{out} | \mu(x) | \varphi_{in} \rangle = \langle p_r | \mu(x) \rangle = \\ &= k^2 \int \mathcal{A}_{out}(x, x_r) e^{ik\tau(x, x_r)} \mu(x) \mathcal{A}_{in}(x, x_s) e^{-k\tau(x, x_s)} dx. \end{aligned}$$

Амплитуды \mathcal{A} удовлетворяют уравнению переноса, а τ удовлетворяет уравнению эйконала:

$$(\nabla \tau, \nabla \tau) = n_0^2(x),$$

$$\left[(\nabla \tau, \nabla) + \frac{1}{2} \Delta \tau \right] \mathcal{A} = 0.$$

Томографический функционал p представляется интегральным ядром:

$$\begin{aligned} p &= k^2 \mathcal{A}_{out}(x) \mathcal{A}_{in} \exp\{ik[\tau(x, x_r) + \tau(x, x_s)]\} \stackrel{\Delta}{=} \\ &\stackrel{\Delta}{=} k^2 \mathcal{A}(x) \exp(ik\tau). \end{aligned}$$

Определим обобщенное причинное преобразование Радона, ассоциированное с представлением рассеянного поля $\hat{\varphi} = \langle p | \mu \rangle$ в форме

$$R\mu = \langle \mathcal{A}(x) \delta(q - \tau(x)) | \mu(x) \rangle,$$

причем $R \equiv 0$ при $t < 0$.

Заметим, что рассеянное поле $\tilde{\varphi}$ с точностью до множителя c можно представить как преобразование Фурье от обобщенного радон-образа $R\mu$:

$$\tilde{\varphi} = c F_q R\mu.$$

Пусть точка локализации источника x_s находится внутри замкнутой области V с границей ∂V в предположении таких опорной среды и границы, что каждая точка на границе может быть соединена единственным лучом с точкой источника, при этом лучи не пересекаются. В этом случае можно параметризовать точки на границе ∂V соответствующими точками на единичной сфере, окружающими источник. Тогда действие сопряженного оператора R^* определяется следующим образом:

$$R^* \psi = \int_{\partial V} \psi(q, x_r) |_{q=\tau(x_r, x_s, x)} w(x, x_r) dx_r,$$

где $w(x, x_r)$ — гладкая неотрицательная весовая функция, которая выбирается в виде

$$w(x, x_r) = D(x, x_r) \mathcal{A}^{-1}(x, x_r) h(x, x_r),$$

где $h(x, x_r)$ — “режущий” множитель, обеспечивающий неотрицательность $w(x, x_r)$, т. е. взаимную однозначность точек на ∂V и на единичной сфере:

$$D(x, x_r) = \begin{vmatrix} \partial_{x_1}^2 \tau & \partial_{x_2}^2 \tau & \partial_{x_3}^2 \tau \\ \partial_{x_1 x_r 1}^2 \tau & \partial_{x_2 x_r 1}^2 \tau & \partial_{x_3 x_r 1}^2 \tau \\ \partial_{x_1 x_r 2}^2 \tau & \partial_{x_2 x_r 2}^2 \tau & \partial_{x_3 x_r 2}^2 \tau \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{A}^{-1}(x, x_r) = [\mathcal{A}_{out}(x, x_r) \mathcal{A}_{in}(x)]^{-1}.$$

Можно показать [122], что $D dx_r = D_0 d\Omega$ (Ω — телесный угол) и что $D_0(x, x_r) = n(x)[1 + \cos \theta(x)]$ ($\cos \theta(x) = \mathbf{e}_{out} \cdot \mathbf{e}_{in}$, $\mathbf{e} = \mathbf{e}(x)$ — единичный вектор направления луча в точке x).

Запишем обобщенный интегральный оператор Фурье, определенный следующим образом:

$$\Phi \mu(x) = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \int_{\partial V} \int_V e^{ik\tau(x, x', x_r)} \tilde{a}(x, x', x_r) \mu(x') dx' dx_r k^2 dk, \quad (11.8)$$

где $\tau(x, x', x_r) = \tau(x', x_r, x_s) - \tau(x, x_r, x_s)$,

$$a(x, x', x_r) = \frac{\mathcal{A}(x', x_r)}{\mathcal{A}(x, x_r)} D(x, x_r) h(x, x_r).$$

Так как обобщенный оператор Фурье (Φ) включает в себя оператор Фурье (F^+):

$$F^+ : F_k^+ \varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \tilde{\varphi} e^{-ikq} dk,$$

можно записать обобщенное преобразование Фурье как композицию трех операторов:

$$\Phi = R^* F_k^+ F_q.$$

Проанализировать смысл введенного обобщенного фурье-оператора можно, записывая линейный член разложения фазы:

$$\tau(x, x') \approx \nabla_x \tau(x, x_r, x_s)(x - x'),$$

$$\begin{aligned} I_{\partial V^0} \mu &= \frac{1}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \int_{\partial V^0} \int_V e^{ik\nabla_x \tau(x, x_r, x_s)(x - x')} \times \\ &\quad \times D(x, x_r) \mu(x') dx' dx_r k^2 dk. \end{aligned}$$

Введем замену переменных $p = k \nabla_x \tau(x, x_r, x_s)$, тогда последний интеграл можно переписать в форме

$$I_{\partial V^0} \mu = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_{\Omega^0(x)} \int_V e^{ip(x - x')} \mu(x) dx' dp.$$

Здесь $\Omega^0(x)$ — образ области интегрирования при принятой замене переменной.

Анализ формулы (11.8) показывает, что обобщенный оператор Фурье обеспечивает восстановление спектра функции $\mu(x)$, определяемой спектральной областью $\Omega^0(x)$, последняя, в свою очередь, связана с частью поверхности границы ∂V^0 , по которой ведется интегрирование рассеянного поля $\tilde{\varphi}$, и с невырожденностью якобиана перехода от координат на поверхности (координат регистрации) к

лучевым координатам. Поэтому приближенное операторное равенство

$$I_{\partial V^0} \approx R^* F_k^+ F_q$$

определяет оператор реконструкции

$$\mu \approx R^* F_k^+ \tilde{\varphi}.$$

Отметим, что полученное решение является математически изящным, но, на наш взгляд, достаточно далеким от реальных интерпретационных задач. Даже при сделанных идеализированных предположениях о связи рассеянного поля с восстанавливаемой структурой среды используется линеаризованная модель, которая опирается на лучевое представление волновых полей в опорной среде. Невырожденность якобиана, входящего в обобщенный сопряженный оператор R^* , заведомо не выполняется, если поле φ_{in} имеет какую-либо временную структуру, отличную от δ -функции по времени. Это нетрудно видеть из обобщенного преобразования Радона, включающего $\delta(q - \tau(x))$ — многообразие той же размерности, что и размерность задачи. Каждое значение соответствует интегрированию по трехмерной области. Так, в случае точечных источников такой областью является поверхность эллипсоида с фокусами в точках x_r и x_s , если временная зависимость представляется δ -функцией и слоем эллипса вращения при конечной длительности поля φ_{in} (см. рис. 10.1,б).

11.3. Принципы построения алгоритмов реконструктивной томографии

Чтобы построить алгоритм реконструкции, запишем модель (10.9), используя понятие томографического функционала:

$$u_n = \sum_{\mu} \langle p_{\mu n} | \nu_{\mu} (\delta\theta) \rangle + \varepsilon_n \quad (11.9)$$

(μ — индекс соответствующего поля, $\mu = 1 \div M$). Невязка ε_i включает как случайный компонент, генерируемый полями неидентифицируемых источников и аппаратурными шумами, так и возможную неадекватность модели, порожденную, во-первых, ошибками

в задании аппаратной функции; во-вторых, ошибками в априорном представлении о среде, т. е. игнорированием диссипативных и нелинейных эффектов в описании процессов распространения зондирующих сигналов; в-третьих, ошибками вследствие линеаризации поля φ ; в-четвертых, предположением гладкости $\theta(x)$ и т. д. Исходя из физических представлений о стохастической структуре шумового поля как о сумме большого числа независимых источников, допустимо рассматривать случайную компоненту как аддитивную и нормально распределенную [34, 93, 94]. Статистический анализ экспериментальных данных обычно ограничивается определением первых двух моментов случайного компонента. Как мы уже упоминали в § 9.3, при заданных двух моментах максимально энтропийным распределением является нормальное, что служит еще одним аргументом в пользу выбора гауссовых случайных величин при построении модели.

Наиболее простой и чаще всего используемой моделью K_ε при построении практических алгоритмов является модель равноточных некоррелированных ошибок, т. е. $\mathbf{K}_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}$ (\mathbf{I} —единичная матрица, а единственный параметр σ_ε^2 —дисперсия случайного компонента). Для неравноточных некоррелированных наблюдений

$$\mathbf{K}_\varepsilon = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_2^2 \end{vmatrix}.$$

Простейший для математической обработки способ описания коррелированных ошибок наблюдений — модель марковского случайного процесса с матрицей корреляций

$$\mathbf{K}_\varepsilon = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & \gamma^2 & \dots & \gamma^N \\ \gamma & 1 & \gamma & \dots & \gamma^{N-1} \\ \gamma^2 & \gamma & 1 & \dots & \gamma^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^N & \gamma^{N-1} & \gamma^{N-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Эта форма удобна тем, что можно в явном виде записать обратную

матрицы $\mathbf{K}_\varepsilon^{-1}$:

$$\mathbf{K}_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{1 - \gamma^2} \begin{vmatrix} 1 & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 1 + \gamma^2 & -\gamma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что $\mathbf{K}_\varepsilon^{-1}$ представляет собой конечно-разностный аналог симметричного положительного оператора $(-\Delta + \gamma I)$, который часто используется при регуляризации по А.Н. Тихонову.

В дальнейшем изложении будем предполагать матрицу ковариаций ошибок измерений известной, однако одновременное оценивание параметров распределения и искомых параметров среды не представляет принципиальных трудностей, хотя и требует дополнительных затрат машинного времени, поскольку задача оценивания становится при этом заведомо нелинейной [103].

В силу того, что случайный компонент ε принципиально неустраним, любая процедура решения обратной задачи, связанная с интерпретацией реальных экспериментальных данных, неизбежно становится задачей статистического оценивания. Отметим, что все описанные в § 9.3 методы регуляризации позволяют строить формально устойчивые решения томографических задач, представляя искомые поля $\nu(\delta\theta)$ в любой точке исследуемой области пространства. Поля, несущие информацию о среде, можно считать многокомпонентными [144]. Однако решение таких задач при интерпретации данных дистанционного зондирования теряет физический смысл вследствие информационной необеспеченности, т. е. практически не происходит уточнения априорных представлений о полях параметров среды. Идеология восстановления полей по значениям конечного числа функционалов измерений развивалась в геофизике в работах [118, 119]. В соответствии с этой идеологией попытаемся заменить поле параметров среды во всем пространстве восстановлением значений некоторого числа линейных функционалов l от поля $\nu(\delta\theta)$. Эта задача корректна только в том случае, когда искомый функционал l принадлежит линейной оболочке томографических функционалов $\{p_n, n = 1 \div N\}$, т. е. лежит в подпространстве

$$\overline{\Phi}^* = \{l : \exists \alpha : (l - P^* \alpha) \nu(\delta\theta) = 0 \forall \nu\}.$$

Этот способ регуляризации сложился стихийно в процессе решения практических обратных задач и широко используется в различных модификациях, хотя и без должного анализа.

Если априорная информация о $\nu(\delta\theta)$ отсутствует, то устойчивость решения, полученного по методу максимального правдоподобия, определяется оператором Фишера, который заведомо вырожден. Вырожденность оператора Фишера означает, что в пространстве Θ существует направление, определяющее также элементы функционального пространства, о которых отсутствует информация, а потому дисперсия соответствующего линейного функционала неограничена. В то же время функционал l является линейной комбинацией томографических функционалов $\{p_n\}$, иными словами, если разрешимо сопряженное уравнение $P^* \alpha - l = 0$, то его решение обладает конечной дисперсией.

На практике часто применяется способ решения обратных задач путем представления искомого решения $\nu(\delta\theta)$ в виде конечного ряда:

$$|\nu(\delta\theta)\rangle = \sum_q |\psi_q\rangle \langle \psi_q | \nu(\delta\theta)\rangle \leftrightarrow \sum_q \nu_q |\psi_q\rangle.$$

В этом случае необходимо, чтобы оценки коэффициентов ν_q имели конечную дисперсию, т. е. должны быть разрешимы уравнения $P_\alpha^* - \nu_q = 0$. В качестве базиса $\{\nu_q\}$ используется либо несколько функций из полного ортонормированного набора (например ряд Фурье, Фурье—Бесселя, базис Карунена—Лоэва и т. д. — выбор базиса, как правило, определяется интуитивными априорными представлениями о среде), но заведомо не полный базис (характеристические функции непересекающихся пространственных областей, B -сплайны и т. д. [90, 92]), либо эвристический (неполный, неортогональный) — функции типа “модельных тел” (например представление полей в магнито- и гравиразведке).

Ошибка $\Delta\nu$ в восстановлении поля $\nu(\delta\theta)$ при представлении в виде конечного ряда

$$|\nu(\delta\theta)\rangle = \sum_q \nu_q |\psi_q\rangle$$

определяется, во-первых, ошибками $\Delta\nu_q$ в восстановлении коэффициентов ν_q , т. е. значений линейных функционалов $\langle \psi_q | \nu \rangle$; во-вторых, составляющей поля $\nu(\delta\theta)$, не вошедшой в данное разложение.

ние, т. е.

$$\Delta\nu(\delta\theta) = \sum_q \Delta\nu_q |\psi_q\rangle + \tilde{\nu},$$

$$\text{где } \tilde{\nu} \in \Theta = \left(I - \sum_q |\psi_q\rangle\langle\psi_q| \right) \Theta.$$

Отметим, что при анализе решений практических задач бесконечная ошибка, связанная с $\hat{\theta}$, обычно игнорируется, т. е. интуитивно предполагается, что искомое решение действительно принадлежит подпространству, соответствующему выбранному базису.

Задача восстановления значения произвольного линейного функционала может быть введена в класс корректности, если использовать дополнительную информацию либо путем введения вероятностной (невырожденной) меры в пространстве Θ , либо введением детерминированных ограничений (как правило, квадратичных). Введение вероятностной меры, например гауссовой с положительным коррелятором K_θ , приводит к тому, что дисперсия σ_l^2 любого линейного функционала l становится конечной:

$$\sigma_l^2 = l(K_\theta \Delta l) = l((F + K_\theta^{-1})^{-1} l),$$

здесь $F = P^* K_\varepsilon^{-1} P$ — оператор Фишера; $\Delta l = l - P^* \alpha$. Понятно, что если ввести детерминированное ограничение, зафиксировав замкнутую область в пространстве параметров, например шар: $\|\nu(\delta\theta)\|_{L_2} = 1$, то дисперсия любого линейного функционала будет конечной. Но далеко не всегда такая постановка содержательна: ошибка может достигать размеров поперечника априорной области, даже если разрешимо $P^* \alpha = l$ [57].

Регуляризация с введением компактов в пространстве Θ , например множества монотонных ограниченных функций в L_2 [14], реализуется методами математического программирования — в отличие от случая квадратичных ограничений соответствующие алгоритмы нельзя представить в виде замкнутой формулы: эти алгоритмы существенно многошаговые.

Следует отметить, что все ранее приведенные выводы являются следствием связи $(l, \nu) = l(\hat{\nu})$, т. е. наилучшая оценка линейного функционала поля ν совпадает со значением этого функционала от наилучшей оценки поля. Все основные формулы и связи могут быть получены аналогично оптимальному решающему оператору, схема построения которого была приведена в § 9.3. Тем не менее,

чтобы подчеркнуть совпадающие и различающиеся моменты в подходе Бейкуса—Гильберта и в подходе, излагаемом в данной главе, представим схему решения обратной задачи.

По N значениям u_n суммы M линейных функционалов p_μ восстановить значение заданного линейного функционала l от неизвестного поля параметров среды ν_μ . Для произвольного линейного функционала $l(\nu)$ мы будем искать решение в форме линейной комбинации измерений:

$$l(\nu) = \sum_n \alpha_n u_n = (\alpha, u), \quad (11.10)$$

$$l(\nu) \equiv \langle l|u \rangle.$$

Используя модель экспериментального материала (11.9), записываем линейную оценку (11.10) в окрестности точки X :

$$\nu_\mu(\delta\theta) = \sum_{\mu'} \langle (\alpha_\mu^X, p_{\mu'}) | \nu_{\mu'}(\delta\theta) \rangle_V + (\alpha_\mu^X, \varepsilon).$$

Уточним теперь формулировку “поле в окрестности точки x ”: в качестве $\nu(\delta\theta_\mu^X)$ можно принять, например, среднее значение в шаре радиусом ρ с центром в точке X , т. е. значение линейного функционала от неизвестного поля $\nu(\delta\theta_\mu^X)$:

$$\nu_\mu(\delta\theta^X) = \langle l^x | \nu_\mu \rangle_V,$$

$$l^x = \left(\frac{4}{3} \pi \rho^3 \right)^{-1} H(\rho - |x - X|),$$

$$H(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0, \\ 1 & \text{при } \xi \geq 0. \end{cases}$$

Независимо от конкретного выбора линейной процедуры ошибку η_μ^X восстановления $\langle l^x | \nu_\mu \rangle$ можно формально записать в виде

$$\begin{aligned} \eta_\mu^l &= \langle l | \nu_m \rangle - \sum_{\mu'} (\alpha, \langle p_{\mu'} | \nu_{\mu'} \rangle) - (\alpha, \varepsilon) = \\ &= \langle l - (\alpha, p_\mu) | \nu_\mu \rangle \sum_{\mu' \neq \mu} \langle (\alpha, p_{\mu'}) | \nu_{\mu'} \rangle - (\alpha, \varepsilon). \end{aligned} \quad (11.11)$$

Проведем качественную интерпретацию этого выражения. Ошибка η_μ зависит как от искомого поля $\nu_\mu(\delta\theta)$ (первый член в выражении (11.11)), так и от других полей $\nu_{\mu'} (\mu' \neq \mu)$, а также от случайной компоненты ε . Составляющая ошибки, зависящая от поля ν_μ , тем меньше, чем меньше норма функционала $l - (\alpha, p_\mu)$, т. е. чем лучше аппроксимация оцениваемого функционала l линейной комбинацией томографических функционалов p_μ . Нетрудно видеть, что удовлетворительную аппроксимацию l , носитель которого сосредоточен в окрестности точки X , можно осуществить только в том случае, когда в совокупность $\{p_{\mu n}\}$ входят такие функционалы, что их носители имеют пересечения с этой окрестностью. Ошибка η_μ^l — сумма линейных форм от неизвестных ν_μ ($\mu = 1 \div M$) и ε , при этом каждая из форм зависит от вектора коэффициентов α , определяющего выбор конкретной процедуры восстановления.

Вектор α следует выбирать так, чтобы модельные ошибки восстановления $|\eta_\mu|$ или $(\eta_\mu)^2$ были минимальными. В свою очередь, квадрат ошибки можно характеризовать квадратичной формой, в которую должны войти все линейные формы, составляющие η_μ в формуле (11.11).

Мы рассмотрим решение, которое минимизирует квадрат ошибки восстановления:

$$\hat{\alpha} = \text{arginf} [(\Lambda - Q^* \alpha)^* K (\Lambda - Q^* \alpha)],$$

где $Q = \|P|I\|$ и I — единичный оператор размерностью числа измерений;

$$(Q^* \alpha)^* = \|\alpha_1 \dots \alpha_n \dots \alpha_N\| \times \\ \times \begin{vmatrix} \langle p_{11}(x) | & \dots & \langle p_{\mu 1}(x) | & \dots & \langle p_{M1}(x) | & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 \\ \langle p_{1n}(x) | & \dots & \langle p_{\mu n}(x) | & \dots & \langle p_{Mn}(x) | & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 \\ \langle p_{1N}(x) | & \dots & \langle p_{\mu N}(x) | & \dots & \langle p_{MN}(x) | & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \\ \Lambda^* = \|\lambda_1^* \dots \lambda_\mu^* \dots \lambda_M^* \dots \lambda_{M+1}^* \dots \lambda_{M+N}^*\|,$$

где λ^* с индексом $1 \div M$ равны $\langle 0 |$ (кроме $\lambda_\mu^* = \langle l(x) |$), а λ^* с индексами $(M+1) \div (M+N)$ равны нулю. Оператор K должен быть положительным.

Оптимальная оценка $\hat{\alpha}$, которая в силу линейности модели и линейности оцениваемого функционала определяет и оптимальную

оценку самого функционала l , в этом случае дается выражением

$$\hat{\alpha} = (QKQ^*)^{-1} QK\Lambda. \quad (11.12)$$

Поскольку ошибка оценки (11.11) зависит от неизвестных полей $\nu_\mu(\delta\theta)$ и случайных величин ε , то выбор конкретного оператора K в критерии определяет класс функций $\{\nu_\mu, \mu = 1 \div M\}$ и статистическую структуру случайного компонента ε , что эквивалентно введению априорной информации.

Приведем статистическую интерпретацию оператора K и оценки $\hat{\alpha}$. Если множество полей $\{\nu_\mu(\delta\theta)\}$, принимаемых в качестве допустимых решений, характеризуется гауссовой мерой в соответствующем функциональном пространстве и случайная компонента имеет нормальное распределение, то решение, реализующее минимум квадрата ошибки восстановления $E(\eta_\mu^l)$ (среднее по полям $\{\nu_\mu(\delta\theta)\}$ и реализациям ε):

$$K = \begin{vmatrix} K_{\nu_1\nu_1} & \dots & K_{\nu_1\nu_\mu} & \dots & K_{\nu_1\nu_M} & \dots & K_{\nu_1\varepsilon} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{\nu_\mu\nu_1} & \dots & K_{\nu_\mu\nu_\mu} & \dots & K_{\nu_\mu\nu_M} & \dots & K_{\nu_\mu\varepsilon} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{\varepsilon\nu_1} & \dots & K_{\varepsilon\nu_\mu} & \dots & K_{\varepsilon\nu_M} & \dots & K_{\varepsilon\varepsilon} \end{vmatrix}.$$

Здесь $K_{\nu_\mu\nu_{\mu'}}$ — оператор интегрального типа такой, что для любых линейных функционалов ξ и η выполняется условие

$$\langle \xi | K_{\nu_\mu\nu_{\mu'}} | \eta \rangle = E \langle \xi | \nu_\mu \rangle \langle \nu_{\mu'} | \eta \rangle,$$

$$K_{\varepsilon\varepsilon} = E(\varepsilon\varepsilon^T),$$

$$K_{\varepsilon\nu_\mu} : E\varepsilon \langle \nu_\mu | \eta \rangle = K_{\varepsilon\nu_\mu} | \eta \rangle.$$

Оптимальная оценка $\hat{\alpha}$ из формулы (11.12) определяет структуру алгоритма восстановления с минимальной дисперсией ошибок. Можно записать оценку, в которой в явной форме представлены статистические связи полей ν_μ и $\nu_{\mu'}$ (в предположении отсутствия связей между полями ν_μ и случайным компонентом ε $K_{\mu\varepsilon} = 0$):

$$\hat{\alpha} = \left[P_\mu K_{\nu_\mu\nu_\mu} P_\mu^* + \sum_{\mu' \neq \mu} (P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'}\nu_\mu} P_\mu^* + P_\mu K_{\nu_\mu\nu_{\mu'}} P_{\mu'}^*) + \right.$$

$$+ \sum_{\mu' \neq \mu} \sum_{\mu'' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'} \nu_{\mu''}} P_{\mu''}^* + K_{\varepsilon \varepsilon} \Big]^{-1} \times \\ \times \left(P_{\mu} K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} + \sum_{\mu' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'} \nu_{\mu}} \right) |l\rangle.$$

В частном случае, когда отсутствуют статистические связи различных полей $\nu_{\mu}(\delta\theta)$ и $\nu_{\mu'}(\delta\theta)$, а также связи $\nu_{\mu}(\delta\theta)$ и ε , оптимальная оценка (11.12) примет вид

$$\hat{\alpha}_M = \left(P_{\mu} K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} P_{\mu}^* + \sum_{\mu' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'} \nu_{\mu'}} P_{\mu'}^* + K_{\varepsilon \varepsilon} \right)^{-1} P_{\mu} K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} |l\rangle,$$

$$P_{\mu} K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} P_{\mu}^* = \\ = \begin{vmatrix} \langle p_{1\mu} | K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} | p_{1\mu} \rangle & \dots & \langle p_{1\mu} | K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} | p_{N\mu} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle p_{n\mu} | K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} | p_{1\mu} \rangle & \dots & \langle p_{n\mu} | K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} | p_{N\mu} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle p_{N\mu} | K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} | p_{1\mu} \rangle & \dots & \langle p_{N\mu} | K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} | p_{N\mu} \rangle \end{vmatrix}$$

— ковариационная матрица полезного (относительно восстановляемого μ -го поля параметров) сигнала;

$$\left(\sum_{\mu' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'} \nu_{\mu'}} P_{\mu'}^* + K_{\varepsilon \varepsilon} \right)$$

— ковариационная матрица эффективного шума, включающая статистические связи полей $\{\nu_{\mu'}, \mu' \neq \mu\}$, а также случайного компонента ε . Запишем дисперсию ошибки оценки:

$$\text{E}(\eta_{\mu}^l)^2 = \langle l | K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} - K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} P_{\mu}^* \left(P_{\mu} K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} P_{\mu}^* + \right. \\ \left. + \sum_{\mu' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'} \nu_{\mu'}} P_{\mu'}^* + K_{\varepsilon \varepsilon} \right)^{-1} P_{\mu} K_{\nu_{\mu} \nu_{\mu}} | l \rangle,$$

или, введя оператор Фишера:

$$\text{E}(\eta_{\mu}^l)^2 = \langle l | F_{\mu}^{-1} | l \rangle,$$

$$F_\mu = \left[P_\mu^* \left(\sum_{\mu' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'} \nu_{\mu'}} P_{\mu'} + K_{\varepsilon \varepsilon} \right)^{-1} P_\mu + K_{\nu_\mu \nu_\mu}^{-1} \right].$$

Из последнего выражения очевидно, что качество оценки μ -го поля тем лучше, чем выше чувствительность обрабатываемых данных к вариациям μ -го поля и чем меньше влияние вариаций остальных полей ($\mu' \neq \mu$) на экспериментальные данные.

Модель экспериментального материала (11.9) формально включает [91] все поля параметров среды, которые входят в уравнения распространения зондирующего сигнала. Априори ясно, что не все поля из $\nu_\mu(\delta\theta)$ обладают необходимой величиной отношения сигнал/помеха, учитывая систему наблюдений при выбранном плане эксперимента. Чтобы построить адекватную модель экспериментального материала, надо ввести количественную меру влияния вариаций каждого параметра на поле измерений. С этой целью введем понятие *информационной чувствительности поля наблюдений* (u) по отношению к фиксированному линейному полю параметров ($\nu(\delta\theta)$) — как предел производной информации Шеннона $I_\alpha(l(\nu)/u)$ по α (отношение сигнал/помеха) при $\alpha \rightarrow 0$:

$$S_l^P = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \alpha} I_\alpha \left(\frac{l(\nu)}{u_P} \right),$$

$$I_\alpha \left(\frac{l(\nu)}{u_P} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{\mathbb{E}(\eta_{\text{apr}}^l)^2}{\mathbb{E}(\eta_\alpha^l)^2}, \quad \mathbb{E}(\eta_{\text{apr}}^l)^2 = \langle l | K_{\nu\nu} | l \rangle,$$

$$\mathbb{E}(\eta_\alpha^l)^2 = \langle l | (P^* K_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} P + K_{\nu\nu}^{-1})^{-1} | l \rangle,$$

$$K_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma_\varepsilon^2 I, \quad K_{\nu\nu} = \sigma_\nu^2 I, \quad \alpha = \sigma_\nu^2 / \sigma_\varepsilon^2.$$

Найдем явный вид производной по α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} I_\alpha \left(\frac{l(\nu)}{u_p} \right) &= -\frac{1}{2} \frac{\langle l | l \rangle}{\langle l | I - \alpha P^*(\alpha P P^* + I)^{-1} P | l \rangle} \times \\ &\times \left[-\frac{\langle l | P^*(\alpha P P^* + I)^{-1} P | l \rangle}{\langle l | l \rangle} + \right. \\ &\left. + \alpha \frac{\langle l | P^*(\alpha P P^* + I)^{-1} P P^* (\alpha P P^* + I)^{-1} P | l \rangle}{\langle l | l \rangle} \right], \end{aligned}$$

и, переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, получим

$$S_l^P = \lim_{\alpha \rightarrow 0} I_\alpha \left(\frac{l(\nu)}{u_P} \right) = \frac{1}{2} \frac{\langle l | P^* P | l \rangle}{\langle l | l \rangle} = \frac{1}{2} \frac{\| P | l \rangle \|_{R^N}^2}{\| l \rangle \|_{L_2}^2}. \quad (11.13)$$

Сфера применения информационной чувствительности поля наблюдений — формирование модели экспериментального материала и планирование томографического эксперимента.

Физический смысл выражения (11.13) следующий: информационная чувствительность данной системы томографических функционалов тем выше, чем больше энергия полезного сигнала, прошедшего через среду с неоднородностью, поле которой совпадает с весовой функцией оцениваемого функционала l . В случае лучевой томографии и оцениваемого функционала типа среднего в элементе объема подобный качественный вывод очевиден. Но важной особенностью введенной меры информационной чувствительности является то, что она позволяет получить количественную характеристику для произвольных томографических функционалов (напомним, что дифракционные томографические функционалы знакопеременны — см. § 4.3) и произвольных оцениваемых функционалов (например оценивания коэффициентов пространственного фурье-преобразования искомого поля параметра). Мера информационной чувствительности позволяет определить вклад каждого из входящих в модель (11.9) полей и построить адекватную модель, исключив из нее поля, информационно не обеспеченные данным планом эксперимента (набором томографических функционалов).

11.4. Ошибки восстановления, разрешающая длина и метод Бейкуса–Гильберта

Анализ ошибок восстановления проведем, следуя схеме, использованной в § 9.3. Пренебрегая влиянием всех полей ν_μ , кроме одного, перепишем ошибку оценки (11.11):

$$\eta^l = \langle l - (\alpha, p)\nu \rangle - (\alpha, \varepsilon) \quad (11.14)$$

или, вводя обозначения b (смещение) и e (шум):

$$\eta = b + e,$$

где $b = E_\nu \eta = \langle l - (\alpha, p)\nu \rangle \equiv \langle l - \tilde{l} | \nu \rangle$; $e = -(\alpha, \varepsilon)$; E_ν — символ условного математического ожидания.

Заметим, что основной причиной некорректной постановки задачи оценивания является отсутствие априорной информации о множестве решений $\{\nu(\delta\theta)\}$ [118, 119]. Действительно, несмешенную оценку можно построить только в том случае, когда оцениваемый функционал l принадлежит линейной оболочке томографических функционалов (α, p) , но это условие заведомо не выполняется, если, например, l сингулярен, а p_n регулярны ($n = 1 \div N$). Поэтому ошибка оценки η^l в силу неограниченности множества $\{\nu(\delta\theta)\}$ в общем случае может быть бесконечной, и невозможно ввести какой-либо критерий оптимальности оценивания.

В этой связи приведем анализ метода Бейкуса—Гильберта (B—G) (§ 6.16), получившего в последние годы достаточно широкое распространение в отечественной и зарубежной литературе [2, 94, 112, 134]. Кратко изложим идею и алгоритмическую структуру работы [119], в которой признается наличие случайной компоненты в измерениях, но декларируется отсутствие априорной информации о множестве решений $\{\nu(\delta\theta)\}$. Используя обозначения формулы (11.14), запишем критерий оптимальности в смысле критерия Бейкуса—Гильberta. В публикации [79] рассматривается одномерная задача: $x \in R^1$. В критерий J_{B-G} включены две составляющие. Первая часть: *R-критерий “дельтообразности”*: оценивается сингулярный функционал $\langle \hat{l}_{B-G} | = \delta(x - X)$ и, если обозначить $(\alpha, p) \equiv (\alpha(X), p(x)) \equiv \tilde{l}$, то

$$R = \langle l_{B-G} - \tilde{l} | K_{B-G} | l_{B-G} - \tilde{l} \rangle,$$

где интегральный оператор K_{B-G}^X имеет сингулярное ядро вида

$$k_{B-G}^X(x', x'') = c(x' - X)(x'' - X)\delta(x' - x''),$$

в явной форме содержащее точку оценивания X, a , а относительно параметров α :

$$R = (\alpha, V^* \alpha),$$

где

$$\begin{aligned} V^* v_{nm} &= c \int \int dx' dx'' p_n(x')(x' - X)\delta(x' - x'')(x'' - X)p_m(x'') = \\ &= c \int \int p_n(x)p_m(x)(x - X)^2 dx. \end{aligned}$$

Величина R связывается с разрешающей способностью метода по координате x ; для этого константу c в пространстве R^1 полагают равной 12 из того условия, что если в критерий

$$R = 12 \int \tilde{l}(x)(x - X)^2 dx$$

вместо линейной комбинации

$$\tilde{l} = \sum_{n=1}^N \alpha_n(X) p_n(x),$$

образующей “разрешающее ядро”, подставить равномерное на интервале Δ распределение, то R численно будет равно величине интервала Δ , т. е.

$$R = 12 \int \tilde{l}^2(x)(x - X)^2 dx \leftarrow 12 \int_{X-\Delta/2}^{X+\Delta/2} \left[\frac{1}{\Delta} (x - X)^2 \right] dx \equiv \Delta.$$

При этом интервал Δ интерпретируется как разрешающая длина по координате x .

Влияние *случайного компонента* ε , вызванного, например, ошибками измерений, учитывается *второй составляющей критерия* J_{B-G} :

$$N(\alpha, K_\varepsilon \alpha)$$

$(K_\varepsilon = E(\varepsilon \varepsilon^T))$ — ковариационная матрица ошибок измерений).

Окончательно, в качестве критерия оптимальности оценивания функционала l предлагается минимизировать сумму взвешенных квадратичных по α форм R и N :

$$J_{B-G} = (1 - \gamma)R + \gamma N, \quad \gamma \in [0, 1],$$

или

$$J_{B-G} = (1 - \gamma)\langle l - \tilde{l} | K_{B-G} | l - \tilde{l} \rangle + \gamma(\alpha, K_\varepsilon \alpha)$$

при условии $\langle \tilde{l} | 1 \rangle = 1$. Дополнительное условие введено по аналогии с $\langle l_{B-G} | 1 \rangle \equiv \int \delta(x - X) dx$. Легко видеть, что без этого дополнительного условия критерий дает единственное решение — нулевое.

Минимизацию критерия J_{B-G} предлагается проводить при различных значениях параметра γ , и в качестве оптимальной оценки ($\hat{\alpha}$)

выбирается такое значение, которое соответствует минимуму суммы R и N , обеспечивающее в интерпретации метода Бейкуса—Гильберта компромиссный выбор между “разрешающей длиной” и “ошибкой”.

Проведем сравнение критериев оптимальности J_{B-G} и критерия оптимальности, введенного Рыжиковым и Трояном (Р-Т) в работе [83] и рассмотренного в § 11.3:

$$J_{P-T} = [(\Lambda - Q^* \alpha)^* K_{P-T} (\Lambda - Q^*)],$$

который для данного случая (единственное одномерное оцениваемое поле без априорной связи $\nu(\delta\theta)$ и ε) запишем в виде

$$J_{P-T} = \langle l_{P-T} - \tilde{l} | K_{\nu\nu} | l_{P-T} - \tilde{l} \rangle + (\alpha, K_\varepsilon \alpha).$$

Как уже указывалось, первая составляющая критерия J_{P-T} , связанная со смещением b , обязана включать априорную информацию о $\nu(\delta\theta)$, и в критерии J_{P-T} эта априорная информация задается оператором K_{P-T} , определяющим множество возможных решений $\{\nu(\delta\theta)\}$. Априорная информация может быть задана введением вероятностей, например гауссовой, меры на множестве $\{\nu(\delta\theta)\}$ и тогда K_{P-T} имеет смысл априорного ковариационного оператора поля $\{\nu(\delta\theta)\}$.

Класс решений $\nu(\delta\theta)$ можно также задать условием $\langle \nu | H | \nu \rangle \leq C$, где H —эрмитов положительный оператор, например в случае

$$x \in R^1, \quad H = \sum_{q=0}^r \partial_q (u \partial_q), \quad u < 0,$$

и тогда с точностью до множителя γ —параметра регуляризации— K_{P-T} представляет оператор Грина для оператора H , при этом класс $\{\nu(\delta\theta)\}$ интерпретируется как класс решений r -й степени гладкости.

Нетрудно видеть, что в критерии J_{B-G} первая составляющая представляет собой квадратичную форму смещения, причем в качестве оператора, ответственного за априорную информацию о классе решений, используются интегральный оператор K_{B-G} с сингулярным ядром. Этот оператор в явной форме зависит от точки X , а так как выбор оцениваемой точки X произволен, то “априорные” представления в методе Бейкуса—Гильберта волевым образом трансформируются вместе с изменением точки X , что недопустимо

при обработке фиксированного объема экспериментальных данных. Кроме того, интерпретация первой составляющей J_{B-G} , связанной со смещением, как разрешающей длины представляется неравномерной, хотя бы потому, что “разрешающее” ядро $((\alpha(X), p(x)))$ является знакопеременным. Более естественно использовать в качестве оцениваемого функционала не $l^x = \delta(x - X)$, а функционал, имеющий наглядный физический смысл среднего значения искомого поля $\nu(\delta\theta)$ в окрестности точки X , при этом диаметр окрестности определяет “разрешающую длину”, а ошибка оценки имеет дисперсию $\langle l|F|l \rangle$ и включает в себя как смещение b , так и шум e .

Линейное условие $\langle \tilde{l}|1 \rangle$, используемое в J_{B-G} , привнесено искусственно, его введение обусловлено двумя факторами: во-первых, оцениваемый функционал сосредоточен в точке X ; во-вторых, ядро K_{B-G}^X обращается в нуль в той же точке, отсутствие линейного условия не позволяет получить осмысленной оценки. Следует подчеркнуть, что дельта-функция Дирака определяется не условием $\langle l^X|1 \rangle = 1$, а условием $\langle l^X|\psi \rangle = \psi(X)$, и если быть последовательными в развитии логики метода Бейкуса — Гильберта, то необходимо накладывать бесконечное множество линейных условий “дельтообразности” $\langle \tilde{l}|\psi_r \rangle = \psi(X)$ ($\{\psi_r\}$ — полная система базисных функций).

Если же ядро k_{B-G}^X не обращается в нуль в точке X , то критерий оптимальности не требует линейных условий. Отметим, что в работе [119] были рассмотрены разные варианты задания ядра k_{B-G}^X , но в дальнейшем в подавляющем большинстве приложений используется именно форма ядра

$$k_{B-G}^X = c(x' - X)(x'' - X)\delta(x' - x'').$$

Можно показать, что введение линейного условия в (Р–Т)-алгоритме приводит к увеличению дисперсии оценки. В этом случае (Р–Т)-критерий имеет форму

$$\tilde{J}_{P-T} = J_{P-T} + \gamma \langle l - \tilde{l} | \nu_m \rangle$$

(ν_m — модельное поле) и оптимальная оценка

$$\tilde{\alpha} = \arg \inf \tilde{J}_{P-T}$$

определяется в виде

$$\tilde{\alpha} = K_{uu}^{-1}(u_r + \varkappa u_m),$$

где $u_r = PK_{\nu\nu}|l\rangle$; $u_m = P\nu_m$; $K_{uu} = PK_{\nu\nu}P^* + K_\varepsilon$;

$$\kappa = \frac{\langle l^X | \nu_m \rangle - u_r^T K_{uu}^{-1} u_m}{u_m^T K_{uu}^{-1} u_m}.$$

Используя выражение для κ , окончательно получаем

$$\tilde{\alpha} = \left[I - \frac{1}{u_m^T K_{uu}^{-1} u_m} K_{uu}^{-1} u_m u_m^T \right] K_{uu}^{-1} u_r + \langle l^X | \nu_m \rangle \frac{K_{uu}^{-1} u_m}{u_m^T K_{uu}^{-1} u_m}.$$

Запишем увеличение дисперсии оценки функционала l^X при введении дополнительного линейного условия в критерий

$$\Delta\eta^2 = (\tilde{\eta} - \eta)^2 = \frac{(\langle l^X | \nu_m \rangle - u_m^T K_{uu}^{-1} u_r)^2}{u_m^T K_{uu}^{-1} u_m} \geq 0.$$

Анализ дисперсии $\Delta\eta^2$ показывает, что введение дополнительного линейного условия $\langle l^X - \tilde{l} | \nu_m \rangle = 0$ аналогично использованию в критерии Бейкуса — Гильберта условия $\langle \tilde{l} | 1 \rangle = 1$ приводит к уменьшению эффективности оценки.

Проведенный анализ позволяет заключить, что корректное построение вычислительного алгоритма восстановления полей упругих параметров по сейсмомографическим данным следует проводить на основе квадратичного критерия оптимальности:

$$J_{P-T} = \langle l_{P-T}^X - \tilde{l} | K_{P-T} | l_{P-T}^X - \tilde{l} \rangle,$$

здесь в качестве оцениваемого функционала l_{P-T}^X используется функционал, который имеет наглядный физический смысл среднего значения искомого поля в окрестности точки X ; например в прямоугольном параллелепипеде abc с центром в точке (X_1, X_2, X_3) :

$$l_{P-T}^X = (abc)^{-1} H\left(\frac{a}{2} - |x_1 - X_1|\right) H\left(\frac{b}{2} - |x_2 - X_2|\right) H\left(\frac{c}{2} - |x_3 - X_3|\right),$$

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \geq 0, \\ 0 & \text{при } \xi < 0. \end{cases}$$

Дисперсия оценки имеет вид

$$E\eta^2 = \langle l_{P-T}^X | F^{-1} | l_{P-T}^X \rangle$$

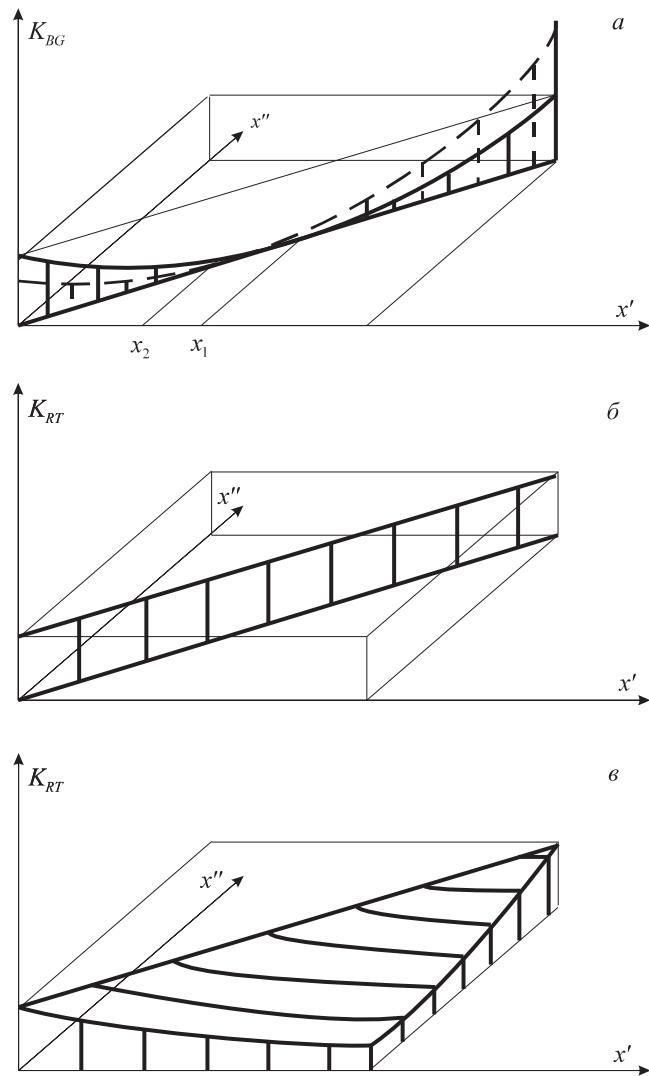


Рис. 11.1. Интегральные ядра корреляционных операторов: *a* — (B-G)-метод, *б* и *в* — (P-T)-метод для некоррелированного однородного поля и марковского однородного поля соответственно.

и включает в себя как смещение b , так и шум e .

Критерий J_{P-T} в полной мере учитывает как априорные представления об упругих полях, так и статистическую структуру ошибок наблюдений. На рис. 11.1 представлены интегральные ядра корреляционных операторов, входящих в критерий K_{B-G} (*a*),

$$K_{B-G}(x', x'') = (x' - X)(x'' - X)\delta(x' - x''),$$

K_{P-T} для некоррелированного однородного поля (*b*) и K_{P-T} для марковского однородного поля (*c*), которые характеризуют задание априорной информации в (B-G)- и (P-T)-методах.

11.5. Обратное проецирование в дифракционной томографии

Напомним еще раз модель данных дифракционного томографического эксперимента:

$$u = P\theta + \varepsilon,$$

где томографический оператор P

$$P\theta \Rightarrow \int p_t(\xi, x)\theta(x)dx,$$

$$P_t(\xi, x) = \langle G_0^* h_t^{\xi_r} | S_{[x]}^\theta | G_0 S^{\xi_s} \rangle \equiv \varphi_{out\{t\}} | S_{[x]}^\theta | \varphi_{in}^{\xi_s},$$

причем G_0^* включает в себя инверсию времени при интерпретации нестационарного зондирующего сигнала; интегральное ядро томографического функционала $p(\cdot, x)$ представляет собой весовую функцию вклада вариации параметров среды в точке x в цифровой отсчет, полученный в момент t на экспериментальной записи, соответствующей ξ -й паре источник — приемник, и возникает в результате локального взаимодействия $S_{[x]}^\theta$ обращенного поля $\varphi_{out\{t\}}^{\xi_r} L_0^* \varphi_{out} = h_t^{\xi_r}$, генерированного приемником $h_t^{\xi_r}$, “включенным” (в обратном времени) в момент t в точке ξ_r , и падающего поля $\varphi_{in}^{\xi_s} L_0 \varphi_{in} = s^{\xi_s}$.

Регуляризованный алгоритм $\hat{R}\hat{\theta} = Ru$ обращения данных u строится на основе решения экстремальной задачи:

$$\hat{R} = \arg \inf (\|RP - I\|_{K_\theta}^2 + \|R\|_{K_\varepsilon}^2),$$

где $\|A\|_B = (\text{sp}ABA^*)^{1/2}$, и имеет вид

$$\hat{R} = K_\theta P^* (PK_\theta P^* + K_\varepsilon)^{-1}, \quad (11.15)$$

обеспечивая минимальную дисперсию ошибок восстановления, т. е.

$$\hat{R} = \arg \inf_R \text{sp}K_{\delta\theta},$$

$$K_{\delta\theta} = K_\theta - RK_u R^*, \quad K_u = PK_\theta P^* + K_\varepsilon.$$

Построение оптимального оператора \hat{R} связано с большими вычислительными трудностями. С аналогичными трудностями сталкиваются и при реализации точных алгоритмов в традиционной лучевой томографии. Но в задачах вычислительной томографии эти трудности обходятся путем построения эвристических алгоритмов, позволяющих эффективно использовать хотя бы часть содержащейся в экспериментальных данных информации. Один из наиболее употребимых алгоритмов такого рода — процедура обратного проецирования [27, 52, 122]. Необходимо отметить, что обратное проецирование является компонентом точного аналитического обращения Радона [108, 109], в котором в качестве данных для обратного проецирования используются не непосредственно экспериментальные данные (значения радоновских проекций), а произвольные от гильберт-образов.

Рассмотрим субоптимальный алгоритм \tilde{R} восстановления изображений среды, в основе которого лежат принципы методов обращения зарегистрированных волновых полей и обратного проецирования. Запишем алгоритм \tilde{R} в виде

$$\tilde{\theta}(x) = \tilde{R}u(x) = \alpha^{-1} \sum_{\xi} \langle \Phi_{\text{out}}^{\xi} | S_{[x]}^{\theta} | \Phi_{\text{in}}^{\xi} \rangle,$$

где суммирование идет по результатам обработки отдельных экспериментов; Φ_{in}^{ξ} — прямое продолжение волнового поля, генерированного s -й группой источников; Φ_{out}^{ξ} — обращенное продолжение поля, зарегистрированного r -й группой приемников; α — размерный множитель, пропорциональный числу обработанных экспериментальных данных. Вводя параметризацию экспериментальной записи в виде

$$u_{(t)}^{\xi} = \sum_{t_n} \sum_{\xi_s} \sum_{\xi_r} u^{\xi_r \xi_s t_n} \delta(t - t_n) \delta(x_s - \xi_s) \delta(x_r - \xi_r),$$

перепишем выражение для оценки $\tilde{\theta}(x)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(x) &= \alpha^{-1} \sum_{t_n} \sum_{\xi_s} \sum_{\xi_r} u^{\xi_r \xi_s t_n} p^{\xi_r \xi_s t_n} \equiv \\ &\equiv \alpha^{-1} \sum_{t_n} \sum_{\xi} u^{\xi} (t_n) p_{t_n}(\xi, x) = \alpha^{-1} P^* u.\end{aligned}\quad (11.16)$$

Ядро томографического функционала $p_{t_n}(\xi, x)$ в данном случае порождается модельной аппаратной функцией регистрирующего канала $h_{t_n}^{\xi_r} = \delta(t - t_n)\delta(x_r - \xi_r)$, что соответствует предположению о широкополосной регистрации экспериментальных данных. Отметим, что в последнем выражении для оценки $\tilde{\theta}(x)$ в явной форме записана процедура обратного проецирования.

Покажем место обратного проецирования в алгоритме обобщенного обращения, рассмотренного в § 11.3. Для этого запишем результат оптимального восстановления произвольного линейного функционала $l(\theta) \equiv \langle l | \theta \rangle$ [82]:

$$\hat{l}(\theta) = \langle \widehat{l|\theta} \rangle = \langle u(PK_\theta P^* + K_\varepsilon)^{-1} PK_\theta | l \rangle$$

и рассмотрим упрощенный вариант, когда $K_\theta \Rightarrow I$, $\langle l | \Rightarrow \langle l_{[x]} | \equiv \equiv \langle \delta(x - [x]) |$. Тогда выражение для $\hat{l}(\theta)$ принимает вид

$$\hat{\theta}_{[x]} \equiv \langle \widehat{l_{[x]} | \theta} \rangle = \langle u | (PP^* + K_\varepsilon)^{-1} P | l_{[x]} \rangle.$$

Учитывая, что

$$P | l_{[x]} \rangle \Rightarrow \int P_t(\xi, x) \delta(x - [x]) dx = P_t(\xi, [x]),$$

и полагая $(PP^* + K_\varepsilon) \sim \alpha I$, получаем аналог действия алгоритма \tilde{R} :

$$\hat{\theta}_{[x]} \sim \alpha^{-1} \sum_{t_n} \sum_{\xi} u^{\xi} (t_n) P_{t_n}(\xi, [x]).$$

Сравнение формул (11.15) и (11.16) позволяет увидеть, какими недостатками обладает обобщенное обратное проецирование: не учитывается статистика ошибок измерений, не принимаются априорные представления о полях параметров среды, игнорируется связь различных обобщенных радоновских проекций.

Несомненным достоинством обратного проецирования является его технологичность — алгоритм сводится к хорошо разработанным процедурам продолжения волновых полей [39, 44, 45, 62, 121, 142].

Напомним, что классические методы продолжения упругих полей [43, 62, 86, 120] сводятся к процедуре $\hat{u} = G_0^* u$. Как следует из анализа алгоритма обобщенного обратного проецирования (11.16), процедура обращенного продолжения входит в качестве одной из составляющих процедуры восстановления изображения среды: $\Phi_{\text{out}} = G_0^* u$. Из представления (11.15) видно, что для применения продолжения в качестве метода восстановления необходимо использовать информацию о свойствах зондирующего сигнала Φ_{in} и характере взаимодействия прямого и обращенного продолженных полей (S^θ). Алгоритм обобщенного обратного проецирования эквивалентен процедуре обобщенного продолжения при условиях, что падающее поле Φ_{in} представляет собой плоский фронт, а оператор взаимодействия S^θ — оператор умножения.

Отметим, что процедуру обобщенного обратного проецирования можно интерпретировать как обработку голограммы. Напомним, что в основе оптической голографии лежит возможность фиксации амплитуды и фазы оптического сигнала. В оптике это достигается записью интерференционной картины, возникающей в результате суперпозиции фронтов монохроматического (лазерного) опорного пучка и поля волны, рассеянной объектом. Если в оптической голографии использование монохроматического пучка — единственная возможность зафиксировать помимо амплитуды еще и фазу волны, то во многих задачах дистанционного зондирования зарегистрированное поле сигналов содержит оба этих параметра рассеянного поля. Аналогия с голографией прослеживается в явном виде в процедуре обобщенного обратного проецирования:

$$\hat{\theta} \sim \alpha^{-1} \langle G^*(u - u_0) | S^\theta | \varphi_{\text{in}} \rangle,$$

$$u_0 = \varphi_{\text{in}}|_{x=\xi_r}.$$

Роль опорного пучка играет в данном случае произвольное поле φ_{in} , но, как и в оптической голографии, не несущее никакой информации. “Голографическое” изображение возникает в результате взаимодействия опорного поля φ_{in} и освещенной “голограммы” $u - u_0$, при этом передача информации в пространство происходит по тем

же законам, что и распространение опорного поля φ_{in} . Оператор взаимодействия S^θ , как мы видели, в общем случае отличен от оператора умножения и определяется только законом распространения зондирующего сигнала.

Покажем, что процедура построения поля φ_{out} в виде G^*u может быть представлена в явной форме аналитического продолжения поля, зарегистрированного на некоторой части пространственной поверхности. Сделаем это на примере продолжения скалярного волнового поля.

Используя вторую теорему Грина в форме

$$\int_V [\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi] dV = \oint_{\partial V} [\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi] \cdot d\sigma,$$

где $d\sigma = \mathbf{n} d\sigma$, выберем ψ такое, что

$$\psi \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = -4\pi\delta(x - x'),$$

причем x' лежит внутри объема V , ограниченного замкнутой поверхностью ∂V , а поле φ генерируется источниками, лежащими вне объема V . Запишем интеграл Кирхгофа [50, 120, 121]:

$$\varphi(x') = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} [\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi] \cdot d\sigma. \quad (11.17)$$

Здесь в явном виде записана связь параметров поля в любой точке объема x' и поля на замкнутой поверхности, т. е. интеграл Кирхгофа представляет форму аналитического продолжения поля с поверхности внутрь объема, ограниченного этой поверхностью. Эта форма продолжения не всегда удобна для практического использования, так как кроме задания самой функции φ на поверхности ∂V требуется еще знание нормальной производной поля $(\mathbf{n} \cdot \nabla)\varphi$. Пусть φ — поле давлений, тогда в фурье-представлении по времени с учетом того, что $\nabla \varphi = -i\omega \rho \mathbf{v}$ (v), интеграл Кирхгофа записывается как

$$\begin{aligned} \varphi(x') &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left[\omega(x) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp(-ik|x-x'|)}{|x-x'|} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i\omega \rho v_n \frac{\exp(-ik|x-x'|)}{|x-x'|} \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Добавим к полю ψ поле ψ_0 такое, что ψ_0 удовлетворяет однородному волновому уравнению:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi_0 = 0$$

и граничному условию на ∂V :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla|_{\partial V} \psi' \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{n} \cdot \nabla|_{\partial V})(\psi + \psi_0),$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^0}{\partial n} \Big|_{\partial V} &= -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \frac{1 + ik|x - x'|}{|x - x'|62} \exp(-ik|x - x'|), \\ \mathbf{e} &= (\mathbf{x}' - \mathbf{x})|x - x'|^{-1}. \end{aligned}$$

Граничному условию можно легко удовлетворить, если в качестве границы взять часть плоскости $x_3 = x_3^0$, тогда ψ^0 — поле точечного источника, расположенного зеркально по отношению к точке x' . При таком выборе поля ψ' интеграл Кирхгофа принимает вид

$$\varphi(x') = \frac{i\omega\rho}{2\pi} \int (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(x)) \frac{\exp(-ik|x - x'|)}{|x - x'|} d\boldsymbol{\rho}, \quad (11.18)$$

где $\boldsymbol{\rho} = (x_1, x_2)$. Интеграл по части сферы, замыкающей границу ∂V , полагается равным нулю в предположении, что радиус сферы достаточно большой, а продолжаемое поле φ , генерированное включенным в момент $t = 0$ источником вне объема V , интересует нас лишь в ограниченном временном интервале $(0, T)$. Интеграл (11.18) описывает продолжение нормальной составляющей поля скорости $\mathbf{v}(x)$, заданной на части плоскости $x_3 = x_3^0$ в поле давлений $\varphi(x')$ в направлении $(-\mathbf{n})$: еще раз напомним, что в формуле Грина \mathbf{n} — внешняя нормаль. Это интегральное представление называют *интегралом Рэлея*.

Второй интеграл Рэлея получается при выборе поля ψ^0 так, чтобы выполнялось условие

$$\psi' \Big|_{\partial V} \stackrel{\Delta}{=} (\psi + \psi^0) \Big|_{\partial V} = 0.$$

Тогда представление интеграла Кирхгофа записывается как

$$\begin{aligned} \varphi(x') &= \frac{1}{2\pi} \int (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}(x)) \varphi \Big|_{x_3=x_3^0}(x) \frac{1 + ik|x - x'|}{|x - x'|} \times \\ &\quad \times \exp(-ik|x - x'|) d\rho, \end{aligned} \quad (11.19)$$

$\rho = (x_1, x_2)$. Выражение (11.19) описывает прямое продолжение поля давления с плоскости $x_3 = x_3^0$ в направлении $(-\mathbf{n})$ и его также называют *интегралом Рэлея*.

Представление (11.19) можно получить, используя эволюционную форму представления волнового уравнения, параметром эволюции при этом будем считать $x_3 \equiv z$. Для фурье-компонент поля $\tilde{\varphi}(k_x, k_y, z, \omega)$ волновое уравнение принимает вид уравнения Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{\varphi} + k_z^2 \tilde{\varphi} = 0,$$

где $k_z^2 = -k_x^2 - k_y^2 + \omega^2/c^2$.

Представляя приближенное решение $\tilde{\varphi}$ в виде невзаимодействующих полей $\tilde{\varphi}_\uparrow$ и $\tilde{\varphi}_\downarrow$, удовлетворяющих уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - ik_z \right) \tilde{\varphi}_\uparrow = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + ik_z \right) \tilde{\varphi}_\downarrow = 0,$$

можно записать решение в форме

$$\tilde{\varphi}_{\{\uparrow\downarrow\}}(z_2) = \tilde{\varphi}_{\{\uparrow\downarrow\}}(z_1) \exp \left\{ \pm i \int_{z_1}^{z_2} k_z dz \right\}. \quad (11.20)$$

Аналогичное выражение можно получить для ВКБ-приближения (см. § 5.3), где уравнение эйконала при $\varphi = \varphi_0 \exp[i\tau(z)]$ $(\partial\tau(z)/\partial z)^2 = k_z^2$ в предположении слабо-неоднородной по координатам x, y среде, т. е. среда является квазислоистой. Уравнение эйконала распадается на два:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = k_z, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = -k_z.$$

При малых значениях Δz выражение (11.20) можно в приближенном виде записать как

$$\tilde{\varphi}(z + \Delta z) \approx \tilde{\varphi}(z) \exp\{\pm ik_z \cdot \Delta z\},$$

где $\exp(\pm ik_z \cdot \Delta z)$ является оператором продолжения в частотной области, при этом положительный знак отвечает случаю, когда направление распространения волны и направление продолжения

вектора волнового поля противоположны, что соответствует продолжению в обратном времени, а минус — соответственно при совпадении этих направлений:

$$\tilde{H}_- = \exp(ik_z \cdot \Delta z), \quad \tilde{H}_+ = \exp(-ik_z \cdot \Delta z),$$

при этом операторы прямого и обращенных продолжений связаны соотношением $\tilde{H}_- = \tilde{H}_+^*$.

Для установления связи второго интеграла Рэлея и оператора прямого продолжения рассмотрим поле точечного источника, который расположен в начале координат:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} \exp(-i(k_x x + k_y y)) d\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{ik_z}, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Это поле продолжено с плоскости $z = 0$ на некоторый уровень $\Delta z \neq 0$. Продолженное поле должно иметь вид $\exp[ikr]/r$. Применив оператор прямого продолжения к полю $\varphi_0|_{z=0}$, получим равенство

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ik_z} \exp\{-ik_z \Delta z\} \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y,$$

где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Дифференцируя обе части этого равенства по z , будем иметь

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-ikr}}{r} \int \exp\{-ik_z \Delta z\} \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y &\stackrel{\Delta}{=} \\ \stackrel{\Delta}{=} 2\pi F_{k_x}^{-1} F_{k_y}^{-1} \tilde{H}_+. \end{aligned}$$

Отсюда пространственно-частотное представление оператора \tilde{H}_+ имеет вид

$$H_+ = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}}{2\pi} \frac{(1 + ikr)}{r^2} \exp(-ikr) = \frac{\Delta z}{2\pi} \frac{(1 + ikr)}{r^3} \exp(-ikr).$$

Таким образом, мы показали, что продолжение волнового поля, полученного из эволюционного уравнения с параметром эволюции

z , тождественно продолжению волнового поля, выраженного через второй интеграл Рэлея.

Еще раз подчеркнем, что построение поля φ_{out} связано с использованием сопряженной функции Грина, которая в пространственно-временной области соответствует распространению сигнала в обратном времени, а в пространственно-частотной области это находит отражение в комплексном сопряжении функции Грина.

Покажем, как концепция обратного проецирования появляется естественным образом при решении нелинейной задачи

$$u = \mathcal{P}(\theta) + \varepsilon,$$

где $\mathcal{P}(\theta)$ — нелинейный обобщенный томографический оператор.

Как мы показывали в § 9.1, метод Ньютона решения экстремальной задачи

$$\tilde{\theta} = \arg \inf \{ \|u - \mathcal{P}(\theta)\|_{K_\varepsilon^{-1}}^2 + \|\theta - \theta_0\|_{K_\theta^{-1}}^2 \}$$

приводит к итерационному процессу

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n - [P_n^* K_\varepsilon^{-1} P_n + K_\theta^{-1}]^{-1} \times \\ &\quad \times [P_n^* K_\varepsilon^{-1} (u_n - u) + K_\theta^{-1} (\theta_n - \theta_0)], \end{aligned}$$

первый шаг которого является точным решением, если выражение

$$u = \mathcal{P}(\theta_0) + \frac{\delta}{\delta \theta} \Big|_{\theta_0} \mathcal{P} \delta \theta + \varepsilon$$

удовлетворительно аппроксимирует исходную модель.

Градиентный метод решения экстремальной задачи на каждой итерации в явном виде включает оператор обратного проецирования

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \alpha [P_n^* K_\varepsilon^{-1} (u_n - u) + K_\theta^{-1} (\theta_n - \theta_0)],$$

поэтому, если линеаризованная модель удовлетворительна, то направление градиентного спуска определяется выражением

$$\delta \theta = \tilde{\alpha} P^* K_\varepsilon^{-1} (u - \mathcal{P}(\theta_0))$$

либо, заменяя исходную модель эквивалентной:

$$K_\varepsilon^{-1/2} u = K_\varepsilon^{-1/2} \mathcal{P}(\theta) + K_\varepsilon^{-1/2} \varepsilon$$

или $\tilde{u} = \tilde{\mathcal{P}}(\theta) + \tilde{\varepsilon}$, получаем явную запись обратного проецирования:

$$\delta\tilde{\theta} = \tilde{\alpha}\tilde{P}^*(\tilde{u} - \tilde{\mathcal{P}}(\theta_0)).$$

Заметим, что ньютоновскую процедуру решения нелинейной задачи можно представить вариантом обобщенного градиентного метода, если считать, что количество информации о θ , содержащееся в U , мало, т. е. оператор Фишера F_n не вносит существенного вклада в априорную информацию: $\|F_n\| \ll \|K_\theta^{-1}\|$. В этом случае обратная вторая производная исходного регуляризованного функционала равна K_θ , и первый шаг итерации дает обратное проецирование с последующей фильтрацией:

$$\delta\tilde{\alpha}\tilde{K}_\theta\tilde{P}^*(\tilde{u} - \tilde{\mathcal{P}}(\theta_0)).$$

Причем фильтрация целиком определяется априорной информацией и соответствует сглаживанию с ядром оператора \tilde{K}_θ . Если коррелятор \tilde{K}_θ описывает однородные поля θ , то фильтрация сводится к операции свертки изображения, полученного обратным проецированием, поскольку ядро $k_\theta(x, x')$ коррелятора K_θ такое, что $k_\theta(x, x') = k_\theta(|x - x'|)$ и $\delta\theta = k_\theta * \delta\theta$.

Заметим, что именно обращенное проецирование с последующей фильтрацией входит в формальный алгоритм градиентного спуска, применяемый в работах [82, 144, 135], где интерпретационные модели сейсмотомографии записаны в предположении, что физическая аппаратура обладает бесконечной полосой пропускания. Алгоритм, представленный в этих работах, можно интерпретировать как последовательность, состоящую в распространении поля сейсмического сигнала, генерированного физическими источниками, в прямом времени φ_{in} , затем обращенного продолжения поля невязок с поверхности регистрации φ_{out} и взаимодействие полей φ_{in} и φ_{out} с последующей фильтрацией. Так, в работе [144] алгоритм представлен в виде

$$\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)} - \alpha^{(n)} K_\varphi (S^\theta \varphi_{in}^{(n)})^T \varphi_{out}^{(n)},$$

где $\varphi_{in}^{(n)} L_{\theta_n} \varphi_{in}^{(n)} = s$; s — функция источника;

$$\varphi_{out}^{(n)} L_{\theta_n}^* \varphi_{out}^{(n)} = \delta s^{(n)},$$

где $\delta s^{(n)} = K_\varepsilon^{-1} \varphi_{in}^{(n)} - \varphi_{obs}$; φ_{obs} — поле измерений. Предполагается, что поле φ_{obs} с точностью до аддитивной ε совпадает в точках наблюдений с полем сейсмического сигнала.

11.6. Методы регуляризации в задачах трехмерной лучевой томографии

Традиционная томографическая интерпретация данных дистанционного зондирования опирается на лучевое представление распространения сигнала, при этом траектория луча в опорной среде предполагается известной [26]. Использование аналитического обращения Радона в задачах дистанционного зондирования в силу заведомой неполноты данных ведет к грубым ошибкам [6]. Методы алгебраической реконструкции используют либо априорное разбиение среды на блоки [5], либо конечный базис пространственных функций [53].

Как мы уже отмечали, даже при обработке данных “полноракурсной” томографии необходимо применять методы регуляризации вследствие неизбежных ошибок наблюдений и ошибок округления при расчетах на ЭВМ [88], в реальном же томографическом эксперименте к этим ошибкам добавляются ошибки, связанные с малой ракурсностью наблюдений. В математическом аспекте решение обратной задачи связано с обращением вполне непрерывного оператора P и действием на функцию, заведомо не принадлежащую образу оператора P , т. е. обратная задача является существенно некорректной.

Рассмотрим возможности метода регуляризации при решении обратных трехмерных задач и дадим физическую интерпретацию алгоритмов [81]. При этом примем во внимание, что регуляризацию целесообразно осуществлять для уравнений, записанных в функциональных пространствах. Только в этом случае можно гарантировать, что алгебраизированные аналоги этих уравнений будут регуляризованы независимо от размерности соответствующих евклидовых пространств.

Как обычно, в качестве модели принимаем

$$P\nu + \varepsilon = u. \quad (11.21)$$

Здесь ν — поле, связанное с физическими параметрами среды, например скоростью распространения упругой волны или коэффициентом ослабления, включающим в себя поглощение и рассеяние в задачах сейсмики; P — интегральный оператор с сингулярным ядром: $\delta(\mathcal{L}_{\{i=1,\dots,n\}}(x))\varphi_0(x)$, ε — невязка модельных и экспериментальных значений, которая предполагается случайной, распределен-

ленной по нормальному закону с нулевым средним и положительно определенной матрицей ковариации $\mathbf{K}_\varepsilon = \mathbf{E}\varepsilon\varepsilon^T$, и включает ошибку наблюдений и ошибку линеаризации.

Модель экспериментальных данных в форме (11.21) вводится в предположении, что $\nu(x)$ представляет собой малые плавные отклонения относительно μ_0 — поля параметров опорной среды, т. е. $\nu(x) = (\mu - \mu_0)/\mu_0$ нигде не обращается в нуль, где μ — поле абсолютных значений физических параметров, которое предполагается плавным по отношению к характерным масштабам задачи, в данном случае — по отношению к характерной длине волны зондирующего сигнала. Следует заметить, что, во-первых, плавность ν является необходимым условием для лучевой интерпретации распространения упругой волны; во-вторых, малость $\mu(x)$ обуславливает допустимость линеаризации:

$$\mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(\mu) + \mathcal{P}'|_{\mu_0}(\mu - \mu_0)\mathcal{P}(\mu_0) + \mathcal{P}_\nu,$$

$$P = \mathcal{P}'|_{\mu_0}\hat{\mu}_0.$$

В общем случае линеаризацию можно рассматривать как первый шаг итеративного решения нелинейной задачи, но при обработке данных лучевой сейсмомографии последующие итерации, как правило, информационно не обеспечены.

Физические требования к применимости модели (11.21) как раз и определяют способы регуляризации решения обратной задачи: найти

$$\hat{\nu} = \arg \inf \|P_\nu - u\|_{K_\varepsilon^{-1}}^2$$

при условии гладкости и ограниченности ν . Формализация этих условий сводится к рассмотренной в § 9.2 регуляризации по Тихонову [87], которая с использованием параметра регуляризации α приводит к решению экстремальной задачи:

$$\hat{\nu} = \arg \inf \|P\nu - u\|_{K_\varepsilon^{-1}}^2 + \alpha(\nu, (I - \Delta)\nu), \quad (11.22)$$

$$\text{где } \|f\|_{K_\varepsilon^{-1}}^2 = \sum_i \sum_j [k_\varepsilon^{-1}]_{ij} f_i f_j;$$

I — единичный оператор; Δ — оператор Лапласа; (\cdot, \cdot) — символ скалярного произведения в гильбертовом пространстве $(\nu, (I - \Delta)\nu) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\nu, \nu) + (\nabla \nu, \nabla \nu)$ при условии исчезновения ν или $\nabla \nu$ на границах области интегрирования.

Решение задачи (11.22) можно записать в виде

$$\hat{\nu} = D^{-1} P^* (P D^{-1} P^* + K_\varepsilon)^{-1} u,$$

где P^* — оператор, сопряженный по Лагранжу оператору P , $D^{-1} = \alpha^{-1}(I - \Delta)^{-1}$ — интегральный оператор с ядром, равным функции Грина для оператора $D \stackrel{\Delta}{=} \alpha(I - \Delta)$:

$$D^{-1}(\mu(x)) = \int dx' \frac{1}{\alpha} \frac{\exp(-|x - x'|)}{|x - x'|} \mu(x') \equiv \frac{1}{\alpha} \frac{\exp(-|x|)}{|x|} * \mu(x), \quad (11.23)$$

где $\alpha^{-1} \exp(-|x|)/|x|$ — потенциал Юкавы, известный в квантовой механике и теории поля.

Упрощенная регуляризация по Тихонову соответствует решению экстремальной задачи в классе только гладких функций ν , т. е.

$$\hat{\nu} = \arg \inf [\|P\nu - u\|_{K_\varepsilon^{-1}}^2 + \alpha \|\nabla \nu\|^2],$$

и дает оператор D_1^{-1} такой, что

$$D_1^{-1}(\mu(x)) = \int dx' \frac{1}{\alpha} \frac{1}{|x - x'|} \mu(x') = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{|x|} * \mu(x), \quad (11.24)$$

где $\alpha^{-1}|x|^{-1}$ — кулоновский потенциал.

Рассмотрим композицию операторов $P D^{-1} P^*$ и $D^{-1} P^*$. Учитывая действие оператора P , соответствующего интегрированию пространственной функции $\nu(x)$ по траекториям лучей, и действие операторов D^{-1} и D_1^{-1} , видим, что матричный элемент $(P D^{-1} P^*)_{ij}$ получится в результате свертки δ -функций, локализованных на траекториях лучей i и j , с соответствующими потенциалами:

$$\begin{aligned} (P D_1^{-1} P^*)_{ij} &= \frac{1}{\alpha} \int \int \mu_0(x') \delta(\mathcal{L}_i(x')) \delta(\mathcal{L}_j(x'')) \frac{\mu_0(x'')}{|x' - x''|} dx' dx'' = \\ &= \mu_0 \delta(\mathcal{L}_i(x)) * \frac{1}{\alpha} \frac{1}{|x|} * \mu_0 \delta(\mathcal{L}_j(x)), \end{aligned} \quad (11.25)$$

$$\begin{aligned} (P D^{-1} P^*)_{ij} &= \frac{1}{\alpha} \int \int \delta(S L_i(x')) \delta(S L_j(x'')) \frac{\exp(|x' - x''|)}{|x' - x''|} \times \\ &\quad \times dx' dx'' = \delta(\mathcal{L}_i(x)) * \frac{\exp(-|x|)}{\alpha|x|} * \delta(S L_j(x)). \end{aligned} \quad (11.26)$$

Физический смысл матричного элемента $(PD_1^{-1}P^*)_{ij}$ формулы (11.25) — энергия кулоновского взаимодействия двух заряженных с плотностями заряда $(4\pi/\alpha)^{1/2}\mu_0$ нитей, локализованных вдоль i -го и j -го лучей; матричный элемент (11.26) — энергия нитей i и j , взаимодействующих через потенциал Юкавы.

Результат действия оператора $D^{-1}P^*$ — набор m полей (по числу лучей), создаваемых в каждой точке пространства каждым из m лучей с кулоновским или юкавовским полем.

При статистической интерпретации алгоритма (11.22) оценка поля соответствует оптимальной статистической экстраполяции или регрессии:

$$\hat{\nu} = K_{\nu u}K_{uu}^{-1}u,$$

где $K_{\nu u} = D^{-1}P^*$, $K_{uu} = PD^{-1}P^* + K\varepsilon$, т. е. соответствует априорным представлениям о поле ν как о случайному однородном и изотропном поле с корреляционными функциями, совпадающими в формуле (11.23) с потенциалом Юкавы и в формуле (11.24) — с кулоновским потенциалом.

Если воспользоваться концепцией локальной регуляризации [76], нетрудно записать регуляризационный алгоритм, адекватно включающий более полную априорную информацию. Такой априорной информацией может быть представление о поле ν как о случайному однородному анизотропному. Это может быть связано с геофизическими представлениями о пространственном распределении неоднородностей среды: так, например, в случае слоистой модели опорной среды встречается ситуация, когда ориентация неоднородностей совпадает с пространственной ориентацией слоев, причем можно указать характерные размеры неоднородностей, т. е. величины осей априорного эллипсоида рассеяния случайного поля ν . Если существует априорная информация о преимущественной локализации неоднородностей, то метод локальной регуляризации позволяет интерпретировать поле ν как случайное изотропное неоднородное и адекватным образом включать эту информацию в вычислительную процедуру. При этом должно соблюдаться соответствие между априорными представлениями о характерных размерах неоднородностей, масштабах корреляции и принятой лучевой моделью распространения зондирующего сигнала: наименьший радиус должен быть не меньше характерной длины волны. Тем самым физические требования к лучевой интерпретации сейсмотомографии с необходимостью приводят к тому, что при решении этих задач должна

применяться регуляризация по Тихонову не ниже первого порядка.

Применение локальной регуляризации основано на том, что в регуляризующем функционале $(\nu, (I_\Delta)\nu)$ вместо эллиптического оператора Δ используется оператор $K_{ij}\partial_i\partial_j$ с положительно определенной матрицей коэффициентов K , что в представлении корреляционных функций соответствует замене $|x| \rightarrow (x, K^{-1}x)^{1/2}$. Следует отметить, что введение локальной регуляризации оставляет в силе все доказательства теорем тихоновской регуляризации вследствие эквивалентности норм соответствующих пространств Соболева.

При практической реализации алгоритмов матрица \mathbf{K}^{-1} задается шестью параметрами: величинами трех осей корреляции и тремя углами Эйлера, определяющими ориентацию эллипсоида относительно системы координат, связанной со схемой наблюдений — матричные элементы $(K^{-1})_{ij}$ рассчитываются путем преобразования подобия, индуцированного матрицей поворота от собственной системы координат эллипсоида к системе координат схемы наблюдений.

11.7. Построение функций Грина для некоторых типов зондирующих сигналов

Будем рассматривать слабый зондирующий сигнал, например малые смещения в сейсмике, тогда процесс распространения сигнала в среде можно представить в виде линейного операторного уравнения

$$\hat{L}_\theta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{s},$$

где \hat{L}_θ — тензорный линейный оператор, зависящий от полей параметров среды; $\boldsymbol{\varphi}$ — векторное поле зондирующего сигнала; \mathbf{s} — векторная функция источника, которую полагаем известной. Одним из основных элементов решения обратной задачи дистанционного зондирования является проблема восстановления поля $\varphi(\mathbf{x}, t)$ в опорной среде с известным полем $\theta_0(x)$ при заданной функции источника \mathbf{s} :

$$\boldsymbol{\varphi} = \hat{L}^{-1} \mathbf{s}, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\varphi} = \hat{G} \mathbf{s},$$

где $\hat{L}\hat{G} = \hat{I}$; \hat{G} — оператор Грина.

Приведем примеры построения функции Грина для полей зондирующих сигналов различной физической природы.

11.7.1. Функция Грина для волнового уравнения

Пусть имеем “волновое уравнение”, заданное в форме

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + H \right) \varphi = 0, \quad (11.27)$$

где H — оператор, действующий на пространственные переменные. Чтобы найти функцию Грина уравнения (11.27), запишем решение в виде бесконечного ряда по собственным функциям оператора H :

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \varphi_n(x), \quad (11.28)$$

здесь $\varphi_n(x)$ такие, что $H\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ и $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$. Подставив представление (11.28) в волновое уравнение (11.27), будем иметь

$$\sum_n (\ddot{A}_n + A_n \lambda_n) \varphi_n = 0. \quad (11.29)$$

Умножив равенство (11.29) скалярно на $\varphi_{n'}$, получим для каждого значения n уравнение для коэффициентов $A_n(t)$:

$$\ddot{A}_n(t) + A_n(t) \lambda_n = 0,$$

которое имеет следующее решение:

$$A_n(t) = a_n e^{i\sqrt{\lambda_n}t} + b_n e^{-i\sqrt{\lambda_n}t}. \quad (11.30)$$

Отметим, что $A_n(0) = a_n + b_n$, а производная в (\cdot) 0 $\dot{A}_n(0) = i\sqrt{\lambda}(a_n - b_n)$. Задавая начальные условия решения волнового уравнения

$$\dot{\varphi}(x, t)|_{t=0} \stackrel{\Delta}{=} \dot{\varphi}_0 \quad (11.31)$$

$$\text{и } \dot{\varphi}(x, t) \stackrel{\Delta}{=} \dot{\varphi}_0, \quad (11.32)$$

можно получить систему уравнений для коэффициентов a_n, b_n :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sum_n (a_n + b_n) \varphi_n, \\ \dot{\varphi}_0 &= i \sum_n \sqrt{\lambda_n} (a_n - b_n) \varphi_n. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Умножив скалярно систему (11.33) на φ_n , будем иметь

$$(\varphi_n, \varphi_0) = a_n + b_n,$$

$$(\varphi_n, \dot{\varphi}_0) = i\sqrt{\lambda_n} (a_n - b_n).$$

Каждый из коэффициентов имеет следующее представление:

$$a_n = \frac{1}{2} \left[(\varphi_n, \varphi_0) - \frac{i}{\sqrt{\lambda_n}} (\varphi_n, \dot{\varphi}_0) \right], \quad (11.34)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left[(\varphi_n, \varphi_0) + \frac{i}{\sqrt{\lambda_n}} (\varphi_n, \dot{\varphi}_0) \right]. \quad (11.35)$$

Поскольку в волновом уравнении начальные условия представляются двумя функциями (11.31), (11.32), можно для каждой из них построить функцию Грина и общее решение представить в виде

$$\varphi = G_1 \varphi_0 + G_2 \dot{\varphi}_0.$$

Подставив представления (11.34), (11.35) в правую часть равенства (11.30) и коэффициенты $A_n(t)$ — в представление (11.28), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \sum_n \cos \sqrt{\lambda_n} t \varphi_n(x) (\varphi_n, \varphi_0) + \\ &+ \sum_n \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}} \varphi_n(x) (\varphi_n, \dot{\varphi}_0). \end{aligned} \quad (11.36)$$

Замечая, что представление оператора H через собственные функции может быть записано в виде

$$H = \sum_n \lambda_n \varphi_n \varphi_n^*$$

и соответственно

$$f(H) = \sum_n f(\lambda_n) \varphi_n \varphi_n^*,$$

можно записать функции Грина G_1 и G_2 в операторном представлении:

$$\hat{G}_1 = \cos \sqrt{H} t, \quad \hat{G}_2 = \frac{\sin \sqrt{H} t}{\sqrt{H}}.$$

Из выражения (11.36) легко можно вывести координатную форму функции Грина:

$$\begin{aligned} g_1(x, t; x', t') &= \sum_n \cos \sqrt{\lambda_n} (t - t') \varphi_n(x) \varphi_n^*(x'), \\ g_2(x, t; x', t') &= \sum_n \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} (t - t')}{\sqrt{\lambda_n}} \varphi_n(x) \varphi_n^*(x'). \end{aligned}$$

Конкретные представления функции Грина для волнового уравнения можно получить, имея систему собственных функций оператора H .

В качестве примера рассмотрим *волновое уравнение без источника*, описывающее распространение волн в однородной бесконечной среде:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0.$$

Собственные функции оператора, в данном случае равного $(-\Delta)$ ($x \in R^3$), определяются как

$$\varphi_k = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx}, \quad x \in R^3.$$

Здесь нормировочный коэффициент соответствует условию $(\varphi_k, \varphi_{k'}) = \delta(k - k')$. Тогда координатное представление \hat{G}_2 будет иметь вид

$$\begin{aligned} g_2(x, t; x', t') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin c|k|(t - t')}{c|k|} e^{ik(x-x')} d^3k = \\ &= \frac{1}{4\pi c|x-x'|} \{ \delta(|x-x'| + c(t-t')) - \delta(|x-x'| - c(t-t')) \}. \end{aligned}$$

Из этого представления видно, что при условии $t > t'$ срабатывает только вторая часть функции Грина, т. е.

$$g_2(x, t; x', t') = \frac{1}{4\pi c} \left\{ -\frac{\delta(|x-x'| - c(t-t'))}{|x-x'|} \right\} \triangleq G_{(-)} \quad (11.37)$$

при $t > t'$, что соответствует распространению волны в прямом времени, в то время как функция Грина для распространения волны

в обратном времени $t < t'$ равна

$$g_2(x, t; x', t') = \frac{1}{4\pi c} \left[-\frac{\delta(|x - x'| + c(t - t'))}{|x - x'|} \right] \triangleq G_{(+)}$$

при $t < t'$.

11.7.2. Функция Грина для “уравнения Пуассона”

Запишем уравнение Пуассона в форме

$$H\varphi = s,$$

где $H > 0$, $s = s(x)$ — функция источника. Функция Грина в операторной форме записывается как $G = H^{-1}$ в координатном представлении

$$G(x, x') = \sum_{\lambda_n \neq 0} \lambda_n^{-1} \varphi_n(x) \varphi_n^*(x'). \quad (11.38)$$

Здесь λ_n — собственные значения оператора H . В представлении (11.38) суммирование ведется только по $\lambda_n \neq 0$, что эквивалентно представлению решения в виде

$$\varphi = H^{-1}s + k\varphi_0,$$

где φ_0 — собственная функция оператора H , соответствующая $\lambda_n = 0$ и приводящая к равенству

$$H\varphi = s = H\varphi + kH\varphi_0$$

для произвольного коэффициента k . Если оператор H равен $-\Delta$ ($x \in R^3$) (мы рассматриваем уравнение Пуассона в безграничном пространстве), то функция Грина в координатном представлении

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\exp[ik(x - x')]}{k^2} d^3k = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|x - x'|} \int_0^\infty \frac{\sin k|x - x'|}{k} dk = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - x'|}. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Решение *уравнения Пуассона* записывается в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(x') dx'}{|x - x'|} + k\varphi_0(x),$$

где φ_0 : $\Delta\varphi_0 = 0$; k — произвольное число.

11.7.3. Функция Грина для уравнения Ламе в однородной изотропной неограниченной среде

Векторное уравнение Ламе $L\varphi = \mathbf{s}$ имеет единственное решение, которое может быть выражено через тензор Грина \hat{G} такой, что его интегральное ядро — тензор-функция $\hat{g}(x, t; x', t')$ — удовлетворяет уравнению

$$L\hat{g} = \delta(x - x') \delta(t - t') I.$$

В безграничном однородном пространстве запаздывающая функция Грина $g_-(x, x'; t, t')$ удовлетворяет условию $g_- \equiv 0$ при $t < t'$. Чтобы построить в явном виде фундаментальное решение уравнения Ламе, вводят, пользуясь теоремой Гельмгольца, представление векторных полей через скалярные и векторные потенциалы (4.20):

$$\begin{aligned}\varphi &= -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{s} &= -\nabla\Phi_s + \nabla \times \mathbf{A}_s,\end{aligned}$$

которые удовлетворяют соответственно скалярному и векторному волновым уравнениям

$$\ddot{\Phi} - v_p^2 \Delta \Phi = \frac{\Phi_s}{\rho}, \quad (11.40)$$

$$\ddot{\mathbf{A}} - v_s^2 \Delta \mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}_s}{\rho}. \quad (11.41)$$

Представление вектора \mathbf{s} в виде суммы векторов потенциального и соленоидального полей позволяет ввести векторное поле \mathbf{H} такое, что

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = \mathbf{s} = -\nabla\Phi_s + \nabla \times \mathbf{A}_s.$$

Учитывая тождество $-\nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H})$, можно увидеть, что

$$\Phi_s = \nabla \cdot \mathbf{H}, \quad (11.42)$$

$$\mathbf{A}_s = \nabla \times \mathbf{H}. \quad (11.43)$$

Для векторного точечного источника, локализованного в начале прямоугольной системы координат, первый орт которой коллинеарен вектору силы, т. е. $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_1 s(t)\delta(x)$, можно записать решение векторного уравнения Пуассона $\nabla^2 \mathbf{H} = -\mathbf{s}$, пользуясь функцией Грина для скалярного уравнения Пуассона (11.39):

$$H(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V dx' \frac{s(t)\delta(x')}{|x - x'|} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{e}_1 \frac{s(t)}{|\mathbf{x}|}. \quad (11.44)$$

Используя соотношения для скалярного потенциала (11.42) и векторного (11.43) и представление \mathbf{H} в виде (11.44), получим

$$\Phi_s = \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \mathbf{e}_1 \frac{s(t)}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{s(t)}{4\pi} \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1}, \quad (11.45)$$

$$\mathbf{A}_s = \nabla \times \left(\frac{1}{4\pi} \mathbf{e}_1 \frac{s(t)}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{s(t)}{4\pi} \begin{vmatrix} 0 \\ \partial_3 |\mathbf{x}|^{-1} \\ \partial_2 |\mathbf{x}|^{-1} \end{vmatrix}. \quad (11.46)$$

Подставив функции источников в виде выражений (11.45) и (11.46), перепишем волновые уравнения (11.40) и (11.41):

$$\ddot{\Phi} - v_p^2 \Delta \Phi = \frac{s(t)}{4\pi\rho} \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1}, \quad (11.47)$$

$$\ddot{\mathbf{A}} - v_s^2 \Delta \mathbf{A} = \frac{s(t)}{4\pi\rho} \begin{vmatrix} 0 \\ \partial_3 |\mathbf{x}|^{-1} \\ -\partial_2 |\mathbf{x}|^{-1} \end{vmatrix}. \quad (11.48)$$

Запишем запаздывающие функции Грина для волновых уравнений (11.47), (11.48), используя запаздывающую функцию Грина, полученную для $L = (\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2)$ (см. (11.37)):

$$\begin{aligned} g_\Phi(x, x'; t - t') &= \frac{1}{4\pi v_p^3} \frac{\delta(|x - x'| - v_p(t - t'))}{|x - x'|} = \\ &= \frac{1}{4\pi v_p^2} \frac{\delta((t - t') - |x - x'|/v_p)}{|x - x'|}, \end{aligned} \quad (11.49)$$

$$g_A(x, x'; t - t') = I \frac{1}{4\pi v_s^2} \frac{\delta((t - t') - |x - x'|/v_s)}{|x - x'|}. \quad (11.50)$$

Решение волновых уравнений (11.47) и (11.48) представляется в форме

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int dx' dt' g_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') \left[\frac{s(t')}{4\pi\rho} \partial_1 |\mathbf{x}'|^{-1} \right], \quad (11.51)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int dx' dt' g_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') \frac{s(t')}{4\pi\rho} \begin{vmatrix} 0 \\ \partial_3 |\mathbf{x}'|^{-1} \\ -\partial_2 |\mathbf{x}'|^{-1} \end{vmatrix}. \quad (11.52)$$

С использованием выражений для функций Грина (11.49) и (11.50) решения (11.51), (11.52) записываются в виде

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi)^2 \rho v_p^2} \int dx' dt' \frac{\delta((t - t') - |x - x'|/v_p)}{|x - x'|} s(t') \partial_1 |\mathbf{x}'|^{-1}, \quad (11.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(4\pi)^2 \rho v_s^2} \int dx' dt' \frac{\delta((t - t') - |x - x'|/v_s)}{|x - x'|} \times \\ &\times s(t') \begin{vmatrix} 0 \\ \partial_3 |\mathbf{x}'|^{-1} \\ -\partial_2 |\mathbf{x}'|^{-1} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (11.54)$$

Интегрируя по t' решение (11.53) и введя замену переменных $|x - x'|/v_p = \tau$, получаем для скалярного потенциала

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi)^2 \rho v_p^2} \int_0^\infty d\tau \frac{s(t - \tau)}{\tau} \oint_{|x - x'|=v_p \tau} \partial_1 |\mathbf{x}'|^{-1} d\sigma. \quad (11.55)$$

Для вычисления интеграла по поверхности из правой части равенства (11.55) рассмотрим интеграл вида

$$\partial_i \oint_{|x - x'|=r} \frac{d\sigma}{|\mathbf{x}'|}, \quad (11.56)$$

где $r = v_p \tau$, $d\sigma = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$, $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{r}$,

$$(\mathbf{x}', \mathbf{x}') = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2(\mathbf{x}, \mathbf{r}) + (\mathbf{r}, \mathbf{r})$$

(рис. 11.2) или $x'^2 = x^2 - 2xr \cos \theta + r^2$. Запишем полный дифференциал последнего выражения и получим

$$x' dx' = xr \sin \theta d\theta,$$

откуда

$$d\sigma = \frac{2\pi r |\mathbf{x}'| dx'}{|\mathbf{x}'|}.$$

Интеграл (11.56) легко вычисляем:

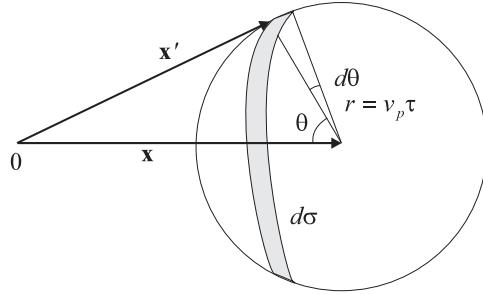


Рис. 11.2. Иллюстрация к вычислению интеграла по поверхности из правой части равенства (11.55).

$$\partial_i \oint_{|x-x'|=r} \frac{d\sigma}{|\mathbf{x}'|} = 2\pi r \partial_i |\mathbf{x}|^{-1} \int_{|x|-r}^{|x|+r} dx' = \begin{cases} 4\pi r^2 \partial_i |\mathbf{x}| & \text{при } r < |\mathbf{x}|, \\ 0 & \text{при } r > |\mathbf{x}|. \end{cases} \quad (11.57)$$

Используя представление (11.57) для интеграла по поверхности, перепишем выражение (11.55) для потенциала $\Phi(\mathbf{x}, t)$:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (\partial_1 |\mathbf{x}|^{-1}) \int_0^{|\mathbf{x}|/v_p} \tau s(t-\tau) d\tau. \quad (11.58)$$

Аналогично вычисляется векторный потенциал после замены переменных в решении (11.54): $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/v_p = \tau$ и с учетом представления (11.57)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^{|\mathbf{x}|/v_p} \tau s(t-\tau) d\tau \begin{vmatrix} 0 \\ -\partial_3 |\mathbf{x}|^{-1} \\ -\partial_2 |\mathbf{x}|^{-1} \end{vmatrix}. \quad (11.59)$$

По полученным решениям для скалярного и векторного потенциалов (11.58) и (11.59) восстановим потенциальную и соленоидальную компоненты поля $\boldsymbol{\varphi}_p$ и $\boldsymbol{\varphi}_s$:

$$\boldsymbol{\varphi}_p = -\nabla\Phi = -\frac{1}{4\pi\rho} \begin{vmatrix} \partial_1^2 |\mathbf{x}|^{-1} \\ \partial_2 \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1} \\ \partial_3 \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1} \end{vmatrix} \int_0^{|\mathbf{x}|/v_p} d\tau s(t-\tau) \tau -$$

$$-\frac{|\mathbf{x}| s(t - |\mathbf{x}|/v_p)}{4\pi \rho v_p^2} \begin{vmatrix} \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_1 |\mathbf{x}| \\ \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_2 |\mathbf{x}| \\ \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_3 |\mathbf{x}| \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_s &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\rho} \begin{vmatrix} -\partial_2^2 |\mathbf{x}|^{-1} - \partial_3^2 |\mathbf{x}|^{-1} \\ \partial_1 \partial_2 |\mathbf{x}|^{-1} \\ \partial_1 \partial_3 |\mathbf{x}|^{-1} \end{vmatrix} \int_0^{|\mathbf{x}|/v_s} \tau s(t - \tau) d\tau + \\ &+ \frac{|\mathbf{x}| s(t - |\mathbf{x}|/v_s)}{4\pi \rho v_s^2} \begin{vmatrix} -\partial_2 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_2 |\mathbf{x}| - \partial_3 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_3 |\mathbf{x}| \\ \partial_2 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_1 |\mathbf{x}| \\ \partial_3 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_1 |\mathbf{x}| \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Введя обозначения $\gamma_i = \partial_i |\mathbf{x}|$ и полагая, что направление действия источника \mathbf{e}_j , т. е. заменив 1 на j , получим после простых преобразований

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} &= \boldsymbol{\varphi}_p + \boldsymbol{\varphi}_s = \frac{\hat{P}}{4\pi \rho v_p^2 |\mathbf{x}|} \mathbf{s}\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{v_p}\right) + (\hat{I} - \hat{P}) \times \\ &\times \frac{1}{4\pi \rho v_s^2 |\mathbf{x}|} \mathbf{s}\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{v_s}\right) + (3\hat{P} - \hat{I}) \frac{1}{4\pi \rho |\mathbf{x}|^3} \int_{|\mathbf{x}|/v_p}^{|\mathbf{x}|/v_s} \tau \mathbf{s}(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Запаздывающая функция Грина после интегрирования по τ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} g(x, x'; t - t') &= \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\hat{P}}{v_p^2} \frac{\delta(t - t' - r/v_p)}{r} + \frac{(\hat{I} - \hat{P})}{v_s^2} \frac{\delta(t - t' - r/v_s)}{r} + \right. \\ &\left. + (3\hat{P} - \hat{I}) \frac{(t - t')[\theta(t - t' - r/v_p) - \theta(t - t' - r/v_s)]}{r^3} \right\}, \end{aligned}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad P = (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_r^T).$$

11.7.4. Функция Грина для уравнения диффузии

Запишем “уравнение диффузии” в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H \right) \varphi = 0, \quad (11.60)$$

где $H > 0$. Оператор H действует только на пространственные переменные. Для нахождения функции Грина уравнения (11.60) представим решение в виде разложения по собственным функциям оператора H :

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \varphi_n(x). \quad (11.61)$$

Подставив разложение (11.61) в уравнение (11.60), получим уравнение для коэффициентов $A_n(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\dot{A}_n + A_n \lambda_n) \varphi_n = 0,$$

т. е.

$$A_n(t) = A_n(0) e^{-\lambda_n t}. \quad (11.62)$$

В разложении (11.61) коэффициент $A_n(t)$ равен проекции функции $\varphi(x, t)$ на орт собственного базиса оператора H φ_n , т. е.

$$A_n(t) = (\varphi_n, \varphi).$$

Обозначив $\varphi(x, t = 0)$ через φ_0 , запишем:

$$A_n(0) = (\varphi_n, \varphi_0). \quad (11.63)$$

Подставив выражение (11.63) в представление (11.62) и далее представление (11.62) — в разложение (11.61), найдем связь между $\varphi(x, t)$ и $\varphi(x, t = 0)$:

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) (\varphi_n, \varphi_0). \quad (11.64)$$

Из формулы (11.64) видно, что функция Грина в операторной форме может быть записана как $\hat{G} = e^{-\hat{H}t}$, а в координатном представлении как

$$G(x, x'; t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n (t-t')} \varphi_n(x) \varphi_n^*(x').$$

Пусть оператор $H = -a^2 \nabla^2$ ($x \in R^3$), тогда функция Грина для уравнения диффузии ($t > t'$) записывается как

$$G(x, t; x', t') = \frac{1}{a(2\sqrt{\pi(t-t')})^3} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}\right\}.$$

11.7.5. Функция Грина для операторного уравнения второго рода

Запишем необходимое уравнение в форме

$$\varphi + H\varphi = s, \quad (11.65)$$

здесь $H > 0$. Представив уравнение (11.65) в виде $(I + H)\varphi = s$, можно записать координатное представление оператора Грина $G = (I + H)^{-1}$:

$$G(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \lambda_n)^{-1} \varphi_n(x) \varphi_n^*(x').$$

Для примера найдем функцию Грина уравнения

$$(-\nabla^2 + m)\varphi = s.$$

Координатным представлением функции Грина будет

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{1}{8\pi^3} \int d^3 k \frac{\exp[ik(x-x')]}{k^2 + m} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i|x-x'|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[ik|x-x'|]}{k^2 + m} k dk = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\exp[-m|x-x'|/2]}{|x-x'|}. \end{aligned}$$

Последнее выражение носит название *потенциала Юкавы*.

11.8. Примеры восстановления параметров локальных неоднородностей методом дифракционной томографии

В этом параграфе рассматривается ряд результатов численного моделирования по восстановлению параметров локальных неоднородностей методом дифракционной томографии. Разрешающую

способность дифракционной томографии демонстрируют результаты восстановления большого числа неоднородностей с размерами, много меньшими длины волны, расположенных в трехмерной однородной опорной среде [98, 99]. Результаты восстановление параметров локальной неоднородности сложной формы с размерами порядка длины волны [42] дают возможность оценить ошибки, связанные с использованием приближения Борна.

11.8.1. Оценка разрешающей способности

Рассмотрим численные эксперименты [98, 99], позволяющие оценить разрешающую способность метода дифракционной томографии для схемы наблюдений, представленной регулярной сетью трехкомпонентных сейсмоприемников. Опорная среда предполагается однородной и безграничной, падающее волновое поле является плоской p -волной с заданной формой сигнала и нормалью к волновому фронту. Для сканирования разрешающей способности в некоторой области изучаемой среды помещается тестовая маска, являющаяся регулярной сетью точечных дифракторов. Синтетические сейсмограммы (прямая задача) рассчитываются с использованием приближения Борна. Геометрия таких экспериментов представлена на рис. 11.3. Все результаты даются в масштабе, нормированном к характерной длине волны λ падающей p -волны в опорной среде ($v_{p_0} = 4000$ м/с, $v_{s_0} = 2000$ м/с). Скорость p -волны внутри рассеивателей равна 3300 м/с. Изображение тестовой маски восстанавливается путем обработки нескольких экспериментов, различающихся нормалями к волновому фронту и возможно формами сигналов, при этом оценивается поле параметра $w = (v_{p_0}/v_p - 1)$. В экспериментах падающие плоские волны характеризуются нормалями \mathbf{n}_0 , \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 такими, что $(\mathbf{n}_0, \mathbf{e}_z) = 1$, $(\mathbf{n}_1, \mathbf{e}_x) = \sqrt{2}/2$, $(\mathbf{n}_2, \mathbf{e}_x) = \sqrt{2}/2$, где \mathbf{e}_z и \mathbf{e}_x — единичные векторы, направленные вдоль осей z и x соответственно. Для имитации реальных сейсмограмм добавляется белый шум с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением σ .

Исследована разрешающая способность дифракционной томографии в зависимости от таких параметров, как расстояние между сейсмоприемниками, тип падающей волны, уровень шума.

На рис. 11.4 представлены результаты серии экспериментов с расстояниями между сейсмоприемниками в регулярной сетке соот-

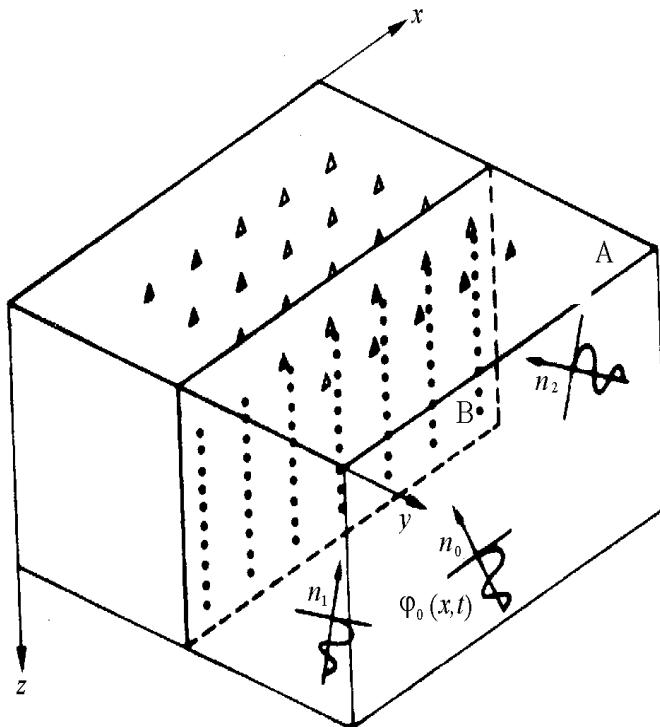


Рис. 11.3. Геометрия численного эксперимента: А — плоскость ($z = 0$) регулярной сети геофонов, В — плоскость ($y = \text{const}$) тестовой маски (шаг между рассеивателями вдоль оси z равен $1,5 \lambda$ и вдоль оси x — $1,0 \lambda$).

ветственно: $0,5 \lambda$, 3λ и 5λ , при уровне шума 5 % и двух падающих плоских волнах, которые используются для формирования синтетических сейсмограмм. Самое лучшее восстановление маски достигается для $d = 3 \lambda$, рис. 11.4, б. Анализ численных экспериментов показывает, что более высокое качество восстановления наблюдается для двух падающих плоских волн, чем в случае одной падающей волны. Применяемый для восстановления алгоритм позволяет провести обработку сейсмограмм с более высоким уровнем шума — 20 %.

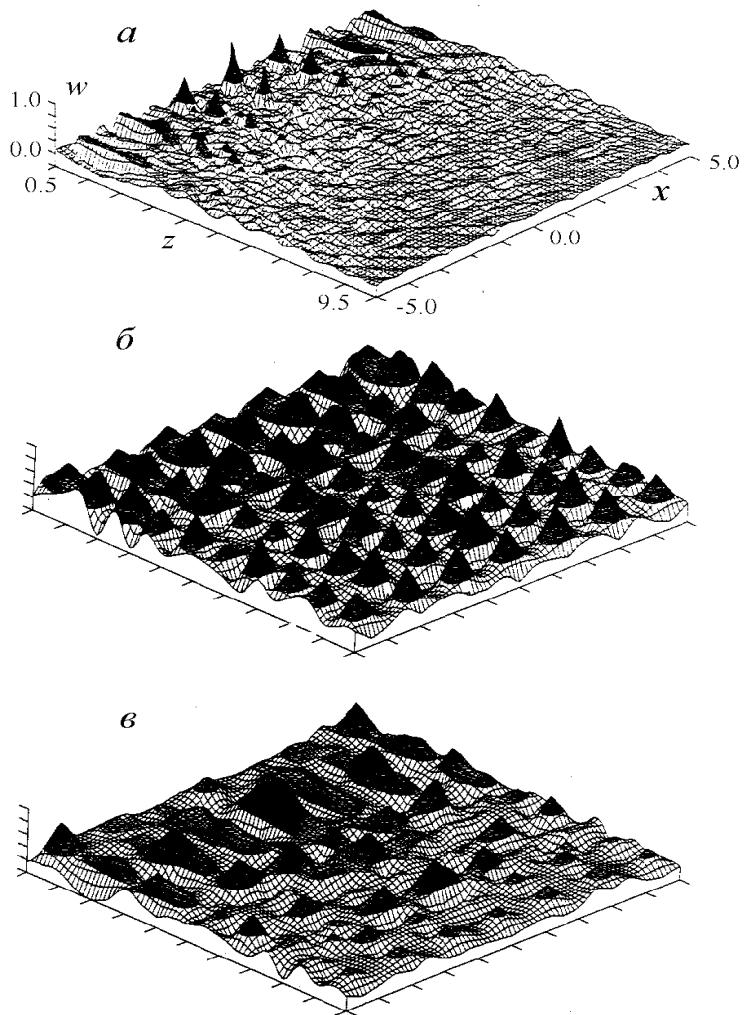


Рис. 11.4. Изображение тестовой маски, генерируемой двумя падающими плоскими волнами с нормалями \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 ($w = v_{p_0}^2/v_p^2 - 1$): *a* — $d = 0,5 \lambda$; *b* — $d = 3 \lambda$; *c* — $d = 5 \lambda$.

11.8.2. Оценка точности восстановления параметров неоднородностей

Рассмотрим некоторые результаты численного моделирования, позволяющие оценить точность метода дифракционной томографии при восстановлении локальных возмущений упругих и электрических параметров. В обоих случаях двумерная прямая задача на распространение упругих волн (решение уравнения Ламе (4.17), (10.11)) и на распространение электромагнитных волн (решение уравнений Максвелла (4.61)–(4.64)) решается конечно-разностным методом. Это позволяет корректно описать процесс рассеяния волнового поля неоднородностями со сложной геометрией и дать оценку точности метода дифракционной томографии в зависимости от контрастности целевого объекта относительно опорной среды.

Перейдем к рассмотрению восстановления упругих параметров. Используя понятие томографического функционала (см. §§ 10.2, 10.3), вектор разностного поля (поля, рассеянного искомой неоднородностью — см. § 10.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) = & \int_S [\delta\lambda(\mathbf{x})\mathbf{p}^\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) + \delta\mu(\mathbf{x})\mathbf{p}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) + \\ & + \delta\rho(\mathbf{x})\mathbf{p}^\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t)]d\mathbf{x},\end{aligned}\quad (11.66)$$

где \mathbf{x}_s , и \mathbf{x}_r — соответственно координаты источника и точки наблюдения; \mathbf{p}^λ , \mathbf{p}^μ и \mathbf{p}^ρ — векторы томографических функционалов, отвечающие искомым возмущениям среды $\delta\lambda$, $\delta\mu$ и $\delta\rho$ соответственно. В предположении линейной связи между возмущениями параметров упругой среды ($\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\rho$):

$$\delta\lambda(\mathbf{x}) = c_\lambda\delta\mu(\mathbf{x}), \quad \delta\rho(\mathbf{x}) = c_\rho\delta\mu(\mathbf{x}), \quad (11.67)$$

интегральное уравнение (11.66) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) \approx & \int_S [c_\lambda\mathbf{p}^\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) + \mathbf{p}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) + \\ & + c_\rho\mathbf{p}^\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t)]\delta\mu(\mathbf{x})d\mathbf{x}.\end{aligned}\quad (11.68)$$

После дискретизации уравнения (11.68) приходим к системе линейных уравнений относительно вектора \mathbf{d}_μ искомых значений $\delta\mu(\mathbf{x})$

$$P\mathbf{d}_\mu = \mathbf{d}_u, \quad (11.69)$$

где \mathbf{d}_u — временные отсчеты компонент волнового поля, рассеянного неоднородностью. Решение системы линейных уравнений (11.69) находим, минимизируя сумму квадратов расхождений левой и правой частей (11.69), что с учетом принятой регуляризации приводит к системе линейных уравнений

$$[P'P + \alpha_1(B'_x B_x + B'_z B_z) + \alpha_2 C' C + \alpha_3 D' D] \mathbf{d}_\mu = P' \mathbf{d}_u. \quad (11.70)$$

В уравнении (11.70) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — регуляризующие коэффициенты; B_x и B_z — конечно-разностные аналоги вторых частных производных соответственно по переменным x и z ; C и D — “штрафные” матрицы на ненулевые значения искомых величин (\mathbf{d}_μ) в граничных точках и в окрестности граничных точек исследуемой области S соответственно.

Минимизация квадратов невязок левой и правой частей уравнения (11.69) позволяет находить также и коэффициенты c_λ и c_ρ . При этом система уравнений (11.70) решается многократно, а минимум такой невязки (и отвечающие ему значения c_λ, c_ρ и $\delta\mu(\mathbf{x})$) можно найти градиентным методом.

Исследована возможность определения параметров неоднородности при параметрическом ее задании. В этом случае для минимизации суммы квадратов разностей левой и правой частей уравнения (11.69) также используется градиентный метод.

Точность решения прямой задачи в присутствии локальной неоднородности, задаваемой величиной

$$\delta\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0,25\mu_m \left[1 + \cos\left(\pi \frac{x-\hat{x}}{\Delta_x}\right) \right] \left[1 + \cos\left(\pi \frac{z-\hat{z}}{\Delta_z}\right) \right], & \text{если } |x - \hat{x}| < \Delta_x \text{ и } |z - \hat{z}| < \Delta_z, \\ 0, & \text{если } |x - \hat{x}| > \Delta_x \text{ или } |z - \hat{z}| > \Delta_z, \end{cases} \quad (11.71)$$

где (\hat{x}, \hat{z}) — положение максимального μ_m значения отклонения величины $\mu(\mathbf{x})$ от значения $\mu_0(\mathbf{x})$ в опорной модели, а Δ_x и Δ_z характеризуют размер такой неоднородности в горизонтальном (e_1) и вертикальном (e_3) направлениях соответственно, оценивается по внутренней сходимости. При этом в случае $\Delta_x = \Delta_z \approx \lambda_s = v_s T_0$ и параметров неоднородности, используемых в дальнейшем, уменьшение шага по времени в два раза по отношению к величине шага, используемого при моделировании, приводит к относительному расхождению между результатами вычислений дифрагированного

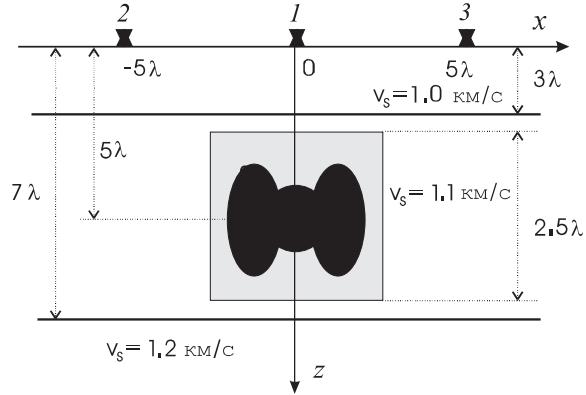


Рис. 11.5. Модель среды и схема наблюдения: 1–3 — точки наблюдения и возбуждения волнового поля; S — область восстановления параметров среды; $\lambda \equiv \lambda_s = 0,02$ км.

поля на 2–5 %. С учетом проведенного тестирования моделирование проводится для величин шага по времени 0,0005 с (40 отсчетов на текущий период).

Для создания локальных неоднородностей используется простая аналитическая зависимость (11.71). Расположение восстанавливаемой неоднородности и область восстановления S изображены на рис. 11.5. Рассматриваемые здесь неоднородности со сложной геометрией получены суммированием значений параметров,ываемых моделью (11.71). Модель неоднородности, выделенная на рис. 11.5 более темным цветом, составлена из трех зависимостей модели (11.71) со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}_0, & \hat{z}_1 &= \hat{z}_0 & (\Delta_x = \Delta_z = 0,45\lambda_s), \\ \hat{x}_2 &= \hat{x}_0 + 0,5\lambda_s, & \hat{z}_2 &= \hat{z}_0 & (\Delta_x = 0,5\lambda_s, \Delta_z = \lambda_s), \\ \hat{x}_3 &= \hat{x}_0 - 0,5\lambda_s, & \hat{z}_3 &= \hat{z}_0 & (\Delta_x = 0,5\lambda_s, \Delta_z = \lambda_s), \\ \hat{x}_0 &= 0, & \hat{z}_0 &= 5,0\lambda_s, & \mu_{m1} = \mu_{m2} = \mu_{m3} = 1,2. \end{aligned} \quad (11.72)$$

Рассматривается также несимметричная неоднородность, задава-

мая параметрами

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}_0 - 0,25\lambda_s, & \hat{z}_1 &= \hat{z}_0 + 0,6\lambda_s & (\Delta_x = \Delta_z = 0,5\lambda_s), \\ \hat{x}_2 &= \hat{x}_0 + 0,25\lambda_s, & \hat{z}_2 &= \hat{z}_0 + 0,1\lambda_s & (\Delta_x = \Delta_z = 0,5\lambda_s), \\ \hat{x}_3 &= \hat{x}_0 + 0,25\lambda_s, & \hat{z}_3 &= \hat{z}_0 - 0,5\lambda_s & (\Delta_x = \Delta_z = 0,45\lambda_s), \\ \hat{x}_0 &= 0, & \hat{z}_0 &= 5,0\lambda_s & \mu_{m1} = \mu_{m2} = \mu_{m3} = 1,2. \end{aligned} \quad (11.73)$$

Неоднородность расположена в однородном слое ($v_s = 1,1$ км/с), контактирующем с однородным полупространством ($v_s = 1,2$ км/с) и с однородным слоем ($v_s = 1,0$ км/с), ограниченным свободной поверхностью ($z = 0$). Максимальная контрастность неоднородности по скорости — 20 % ($\delta v_{p\ max} = 0,37$ км/с, $\delta v_{s\ max} = 0,21$ км/с). Точки наблюдения и возбуждения волнового поля (1–3 на рис. 11.5) расположены под свободной поверхностью ($z = 0$) на глубине ~ 3 м.

Для восстановления параметров неоднородностей (11.72), (11.73) кроме решения системы уравнений (11.70) применяется также подход, основанный на параметрическом задании неоднородностей в более широком классе функций, чем зависимость (11.71), и нахождении искомых параметров минимизацией суммы квадратов разностей левой и правой частей уравнения (11.69). Элементарная пробная форма

$$\delta\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & r > \Delta + \Delta_1, \\ 0,5\mu_m [1 + \cos(\pi \frac{r-\Delta_1}{\Delta})], & \Delta_1 < r < \Delta + \Delta_1, \\ \mu_m, & r < \Delta_1, \end{cases}$$

$$r = \sqrt{(x - \hat{x})^2 + (z - \hat{z})^2 h_z^2 + (x - \hat{x})(z - \hat{z}) h_{xz}^2} \quad (11.74)$$

определяется семью параметрами: координатами положения ее центра \hat{x} , \hat{z} ; величинами Δ и Δ_1 , задающими соответственно эллипс с постоянным значением $\delta\mu = \mu_m$ и область плавного изменения $\delta\mu$ от значения μ_m до нуля; максимальным значением модуля сдвига μ_m ; множителями h_x и h_{xz} . Восстановление параметров неоднородностей осуществляется с использованием от одной до трех элементарных функций (11.74), при этом для определения от 9 до 23 искомых величин (включая c_λ и c_ρ из интегрального уравнения (11.68)) применяется градиентный метод. Сходимость градиентного метода, к значениям, близким к истинным, имеет место, когда отличие начальных значений от истинных не превышает 50 %, а отличие для \hat{x} , $\hat{z} = 0,25\text{--}0,3 \lambda_s$.

Прежде чем перейти к рассмотрению результатов численного моделирования, сделаем несколько замечаний. Система линейных уравнений (11.70) всегда решается при ненулевых значениях регуляризующих коэффициентов α_1 и α_2 . Как показали численные эксперименты, условие гладкости восстанавливаемых параметров среды, задаваемое по вторым производным, дает лучший результат, чем аналогичное применение первых производных, а регуляризация с использованием “штрафных функций” на ненулевые значения в граничных точках области S , является вполне естественной для областей с ограниченными размерами. Подобная регуляризация ($\alpha_2 \neq 0$) приводит к уменьшению ошибки определения скоростей примерно на 10–20 %. Штрафная функция на отличие от нуля значений восстанавливаемых величин ($\alpha_3 \neq 0$) используется как способ введения данных типа априорных относительно местоположения и размеров восстанавливаемой неоднородности. Введением такой штрафной функции можно уменьшить размеры области восстановления. Выбор параметра регуляризации α_1 не вызывает затруднений, поскольку в большом диапазоне его изменения (2–3 порядка) после перехода от плохой обусловленности системы (11.70) восстанавливаемая функция оказывается очень стабильной лишь при увеличении α_1 с небольшой тенденцией к большей гладкости. Параметр α_2 выбирается так, чтобы значения восстанавливаемых величин на границе области S (см. рис. 11.5) были много меньше их максимального значения.

Число узлов в исследуемой области S равно 25×25 . Приведенные ниже примеры восстановления параметров неоднородностей получены по двум (x - и z -) компонентам волнового поля, “измеренного” в точках 1–3 (см. рис. 11.5), возбужденного источниками, расположенными в этих же точках (9 пар источник–приемник). Сразу отметим, что восстановление параметров неоднородностей только по z -компонентам приводит к увеличению ошибки восстановления на 10–20 %.

Перейдем к рассмотрению результатов восстановления неоднородностей (11.72) и (11.73) (изображенных соответственно на рис. 11.6, *a* и 11.7, *a*) с максимальным возмущением скорости распространения продольных волн $v_{p\ max} = 0,37$ км/с при скорости распространения продольных волн в опорной среде $v_p = 1,9$ км/с.

На рис. 11.6, *b* (11.7, *b*) представлены результаты восстановления (максимальное значение $v_{p\ max} = 0,31$ ($v_{p\ max} = 0,29$)), полученные

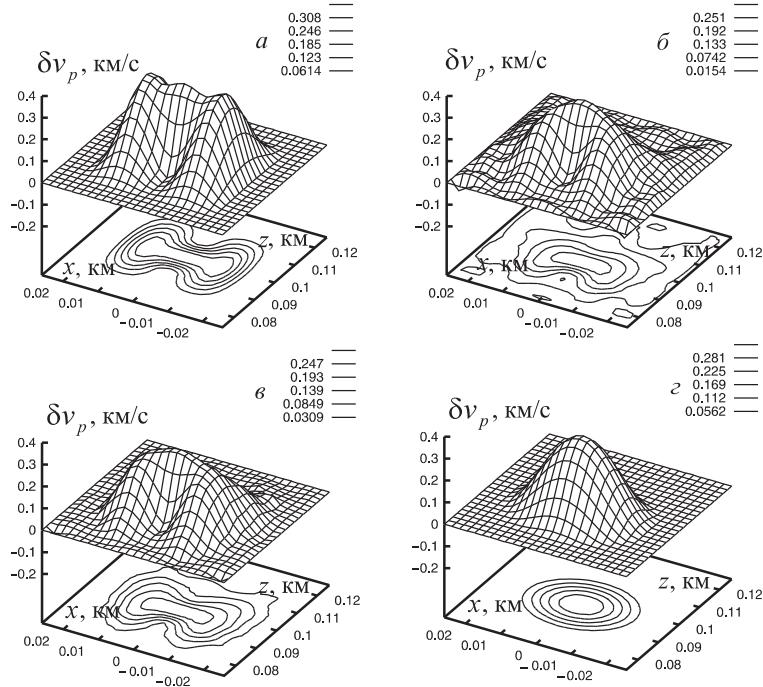


Рис. 11.6. Результат восстановления v_p для неоднородности (11.72):
 а — модель; б — результат восстановления: б, в — решение системы
 уравнений (11.70) при $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_3 \neq 0$ соответственно;
 г — параметрическое задание восстанавливаемой неоднородности.

решением системы линейных уравнений (11.70) с одновременным определением величин c_λ и c_ρ (из уравнения (11.68)) при $\alpha_3 = 0$. Величины c_λ и c_ρ отвечают минимуму суммы квадратов разностей левой и правой частей уравнения (11.69), который определяется градиентным методом. Эффект введения штрафных функций ($\alpha_3 \neq 0$, уравнение (11.70)), что можно рассматривать как привлечение априорной информации относительно местоположения неоднородности и ее размеров, показан на рис. 11.6, в ($v_{p\ max} = 0,30$). Как правило, 4–5 итераций метода Ньютона было достаточно для определения c_λ и c_ρ с ошибкой не больше 1 % при выборе начальных значений ($c_{\lambda 0}$ и $c_{\rho 0}$), отличающихся от истинных, по крайней мере, на 50 %. В рассмотренных случаях ошибка определения c_λ и

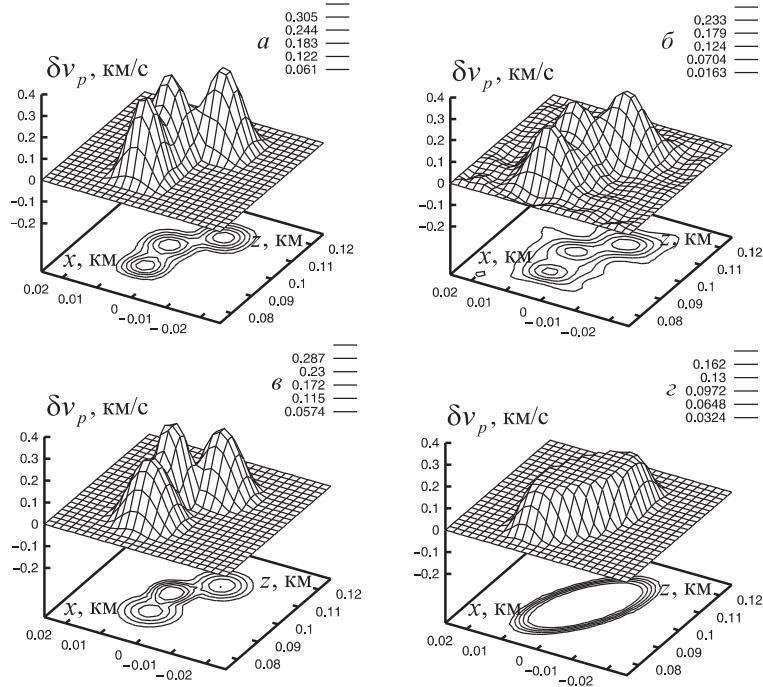


Рис. 11.7. Результат восстановления v_p для неоднородности (11.73):
 а — модель; б-г — результат восстановления: б — решение системы
 уравнений (11.70) при $\alpha_3 = 0$; г — параметрическое задание
 восстанавливаемой неоднородности с использованием соответственно
 трех и одной функции (11.74).

c_ρ не превышают соответственно 11 и 90 %, при этом величина c_ρ всегда оказывается завышенной. Столь большую ошибку восстановления $\delta\rho$ можно объяснить тем, что при принятой модельной связи параметров, рассеянное волновое поле, вызванное возмущением $\delta\rho$, “в среднем”, вносит малый вклад в полное рассеянное поле.

Близкие величины ошибок определения c_λ и c_ρ получены и в случае параметрического задания восстанавливаемых неоднородностей с использованием формулы (11.74). Результаты восстановления неоднородности (11.72) (см. рис. 11.6, а) при помощи одной функции вида (11.74) представлены на рис. 11.6, г ($v_{p \max} = 0,337$ км/с), а неоднородности (11.73) — на рис. 11.7, б и 11.7, г

соответственно для случаев трех и одной зависимостей вида (11.74).

Возможность определения c_λ позволяет восстанавливать величину $\gamma = v_s/v_p$. В рассматриваемом здесь случае ($\lambda = \mu$) ошибка в определении γ по данным численного моделирования не превышает 1 %.

С увеличением контрастности целевого объекта по отношению к опорной среде увеличиваются ошибки определения его параметров. Результаты численного моделирования показывают, что при скоростной контрастности 40–80 % ошибка восстановления скорости может достигать 40–50 %. В случаях восстановления симметричных объектов удовлетворительный результат может быть получен использованием трех (и даже двух) пар источник–приемник.

Заканчивая рассмотрение результатов численного моделирования восстановления параметров локальных неоднородностей, приведем пример определения локальной аномалии проводимости, полученный зондированием нестационарным электромагнитным полем. Схема решения этой задачи буквально повторяет рассмотренный выше случай зондирования упругими волнами. При этом запись томографического функционала \mathbf{P}^σ , связанного с рассеянием на возмущении проводимости σ , близка по записи к томографическому функционалу, связанному с возмущением массовой плотности (см. выражение (10.19)) и следующим образом выражается через \mathbf{E}_{out} и \mathbf{E}_{in} — напряженности электрического поля:

$$\mathbf{P}^\sigma = \mathbf{E}_{\text{out}} \otimes \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{\text{in}}.$$

Отметим, что томографический функционал \mathbf{P}^ε , связанный с возмущением диэлектрической проницаемости ε , с точностью до обозначений совпадает с упомянутым выше томографическим функционалом для массовой плотности

$$\mathbf{P}^\varepsilon = \mathbf{E}_{\text{out}} \otimes \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_{\text{in}}.$$

Используя понятие томографического функционала, интегральное уравнение для искомого возмущения проводимости $\delta\sigma$ можно записать в виде

$$\delta\mathbf{E} = \int_S \delta\sigma \mathbf{P}^\sigma d\mathbf{x}, \quad (11.75)$$

где $\delta\mathbf{E}$ — разностное поле. На рис. 11.8 приведен пример восстановления неоднородности простой формы с размером порядка длины волны зондирующего сигнала, расположенной в однородной опорной среде с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 10$. Неоднородность задана функцией вида (11.71) с максимальным

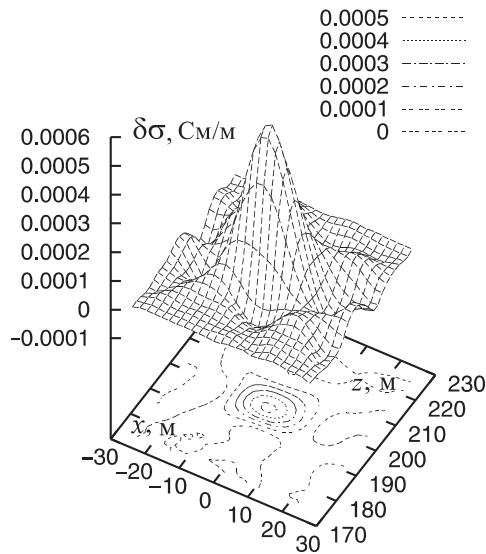


Рис. 11.8. Восстановление возмущения электрической проводимости.

значением проводимости 10^{-3} См/м. Зондирование выполнено на частоте $5 \cdot 10^6$ Гц. Используется схема наблюдения, аналогичная рассмотренной ранее, с удалением неоднородности от линии наблюдения 10λ ($\lambda=20$ м). Система линейных уравнений (11.70) решается при нулевых значениях регуляризующих коэффициентов α_2 и α_2' .

Как и в случае восстановления возмущения упругой среды, ошибка восстановления имеет величину порядка максимальной контрастности неоднородности относительно опорной среды.

Г л а в а 12

МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И АНАЛИЗА ГЕОФИЗИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

12.1. Преобразование Фурье

12.1.1. Ряды Фурье

Действительная функция $f(t)$ на интервале $-T/2 < t < T/2$, если существует интеграл

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(\tau)| d\tau, \quad (12.1)$$

порождает ряд Фурье — бесконечный тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\{in\omega_0 t\}, \quad (12.2)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos n\omega_0 \tau d\tau, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin n\omega_0 \tau d\tau,$$
$$c_n = \bar{c}_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \exp\{in\omega_0 \tau\} d\tau. \quad (12.3)$$

Если в качестве разложения выбрать интервал $(a, a + T)$, то интегралы из выражений (12.3) следует брать не в интервале между $-T/2$ и $T/2$, а между a и $a + T$.

Если существует интеграл

$$\int_{-T/2}^{T/2} [f(\tau)]^2 d\tau,$$

то средняя квадратическая погрешность

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(\tau) - P_n(\tau)]^2 d\tau,$$

где

$$P_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^n (\alpha_n \cos n\omega_0 t + \beta_n \sin n\omega_0 t)$$

— произвольный тригонометрический многочлен, при каждом n принимает наименьшее значение, когда он является частичной суммой

$$s_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^n (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

ряда Фурье функции $f(t)$ с коэффициентами a_n, b_n из формул (12.3).

Если тригонометрический ряд (12.2) сходится к $f(t)$ в интервале $(-T/2, T/2)$ равномерно, то его коэффициенты с необходимостью являются коэффициентами Фурье (12.3) функции $f(t)$.

Действительные коэффициенты a_n и b_n и комплексные коэффициенты c_n связаны формулами

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, & b_n &= i(c_n - c_{-n}), \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & c_n &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (n = 0, 1, 2 \dots), \end{aligned} \quad (12.4)$$

где $b_0 = 0$. Ряд Фурье (12.3) четной или нечетной функции $f(t)$ сводится соответственно к ряду Фурье по косинусам и ряду Фурье по синусам.

Условие разложимости непрерывной функции $f(t)$ в ряд Фурье, кроме абсолютной сходимости $f(t)$ (12.1), сводится к ограниченности вариации $f(t)$ (конечное число экстремальных точек на конечном интервале). Последнее условие всегда выполняется на практике.

12.1.2. Интеграл Фурье

Продемонстрируем качественно переход от ряда Фурье к интегралу Фурье при $T \rightarrow \infty$. Подставив выражения (12.3) в правую часть равенств (12.4), получим

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp\{-in\omega_0 t\} dt \right] \exp\{in\omega_0 t\} (1/T).$$

При стремлении T к бесконечности $1/T$ становится бесконечно малой, следовательно,

$$1/T \rightarrow d\nu_0 = d\omega_0/2\pi.$$

Разница между соседними гармониками $n\omega_0$ и $(n+1)\omega_0$ становится бесконечно малой, т. е. $n\omega_0$ обращается в непрерывную переменную ω . Таким образом, дискретный спектр $n\omega_0$, связанный с рядом Фурье, переходит в непрерывный спектр. Нижний индекс у ν и ω можно опустить, так как при переходе к пределу он не будет иметь значения. Одновременно сумма

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\{in\omega_0 t\}$$

перейдет в интеграл

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\{i\omega t\} dt \right] \exp\{i\omega t\} d\omega / 2\pi. \quad (12.5)$$

Внутренний интеграл из правой части равенства (12.5) называют *преобразованием Фурье* функции $f(t)$:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\{-i\omega t\} dt, \quad (12.6)$$

а внешний интеграл из правой части равенства (12.5) — *обратным преобразованием Фурье* функции $\tilde{f}(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp\{i\omega t\} d\omega. \quad (12.7)$$

Можно встретить и другие записи прямого и обратного преобразований Фурье, например, с множителем $\sqrt{1/2\pi}$ как перед прямым преобразованием, так и перед обратным.

Достаточное условие для существования преобразования Фурье функции $f(t)$ состоит в том, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

должен быть ограничен.

Если функция $f(t)$ вещественная, то обратное преобразование Фурье можно записать в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (12.8)$$

где

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos \omega y dy \quad (12.9)$$

— косинус-преобразование $f(t)$,

$$-X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sin \omega y dy \quad (12.10)$$

— синус-преобразование $f(t)$. При этом оказывается, что

$$\tilde{f}(\omega) = R(\omega) + iX(\omega) = A(\omega) \exp\{i\gamma(\omega)\},$$

где

$$A(\omega) = [R^2(\omega) + X^2(\omega)]^{1/2} \quad (12.11)$$

— амплитудный спектр,

$$\gamma(\omega) = \arctg[X(\omega)/R(\omega)] \quad (12.12)$$

— фазовый спектр.

В случае функций многих переменных $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, если существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)| d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n,$$

определены прямое

$$\begin{aligned} C(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \times \\ &\times \exp \left[-i \sum_{j=1}^n \omega_j \tau_j \right] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \end{aligned}$$

и обратное

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \times \\ &\times \exp \left[-i \sum_{j=1}^n \omega_j t_j \right] d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n. \end{aligned}$$

преобразования Фурье.

12.2. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа тесно связано с преобразованием Фурье. Если не применять обобщенных функций, то многие функции, как, например, $\sin at$ и $\cos at$, не имеют преобразования Фурье, так как интеграл, определяющий преобразование, расходится. Однако если умножить функцию на $\exp(-\sigma|t|)$, где величина σ действительна и положительна и такая, что выполняется условие

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \{\exp(-\sigma|t|)f(t)\} = 0$, то функция $\{\exp(-\sigma|t|)f(t)\}$ будет иметь преобразование Фурье, которое называется *преобразованием Лапласа* от $f(t)$. Если $f(t) = 0$ при $t < 0$, то получается *одностороннее преобразование Лапласа*

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (12.13)$$

где $s = \sigma + i\omega$, при этом должно быть выполнено условие $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \{\exp(-s|t|)f(t)\} = 0$. Обратное преобразование Лапласа, называемое *формулой обращения Меллина*, записывается в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (12.14)$$

где путь интегрирования представляет собой прямую, проходящую правее начала координат параллельно мнимой оси так, что интеграл сходится.

Во многих случаях преобразование Лапласа оказывается предпочтительней преобразования Фурье, например в случаях, когда функция $F(s)$ из преобразования (12.14) имеет особенности типа полюсов на мнимой оси.

12.3. Z-преобразование

Z-преобразование представляет собой особую форму преобразований, полезную при вычислениях, когда используются функции в цифровом (дискретном) виде.

Пусть задана последовательность чисел b_k , полученная как дискретное представление непрерывной функции $f(t)$ при заданных временах $t_k = k\Delta$ ($k = \dots, -1, 0, 1, \dots$), где Δ — интервал дискретизации. Запишем дискретный аналог $f_d(t)$ функции $f(t)$ в виде

$$f_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \delta t - k\Delta, \quad (12.15)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция. Преобразование Фурье от $f_d(t)$ может быть записано в виде суммы

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_d(t) \exp(-i\omega t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \exp(-ik\omega\Delta). \quad (12.16)$$

Вводя обозначение $Z = \exp(-i\omega\Delta)$, запишем $B(\omega)$ (12.16) как полином

$$B(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k Z^k, \quad (12.17)$$

где $B(Z)$ есть Z -преобразование $f_d(t)$ ¹.

12.4. Преобразование Радона сейсмограмм

Прямое преобразование Радона сейсмограмм записывается в виде

$$s(p, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, px + \tau) dx$$

(рис. 12.1). Обратное преобразование Радона определяется как

$$u(x, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} H \frac{d}{d\tau} s(p, \tau) dp = -PHD[s(p, \tau)],$$

или

$$u(x, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{\pi\tau} * \frac{\partial}{\partial\tau} s(p, \tau) \right] dp.$$

Запишем двумерное преобразование Фурье от сейсмограммы (рис. 12.2):

$$u(k_x, \omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \exp[i(\omega t - k_x x)] dx dt.$$

¹Иногда Z определяется как $Z = \exp(i\omega\Delta)$, в результате чего появляется полином, в котором показатели степеней Z будут обратны по знаку по сравнению с теми, которые рассмотрены выше.

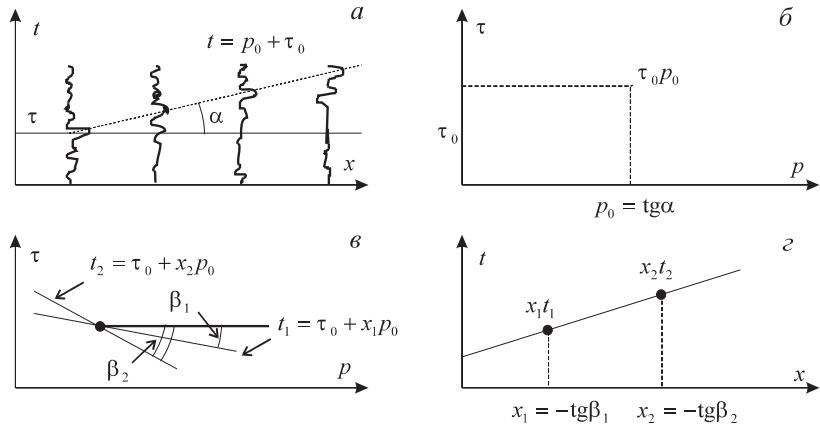


Рис. 12.1. Прямое и обратное преобразования Радона. Прямая линия в пространственно-временных координатах (а) и точка на плоскости с координатами угловой коэффициент-время отражения (б). Точка на плоскости с координатами угловой коэффициент-время отражения (с) и линия в пространственно-временных координатах (с).

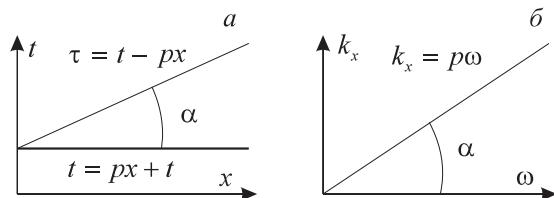


Рис. 12.2. Линия в пространственно-временных координатах (а) и на плоскости с координатами волновое число-частота (б).

Используя формулу $k_x = p\omega$, можно переписать выражение для спектра $u(k_x, \omega)$ в виде

$$u(p\omega, \omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \exp[i(\omega t - p\omega x)] dx dt,$$

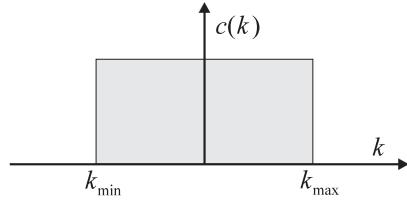


Рис. 12.3. Функция окна при интегрировании в k -области.

или, введя переменную $t = \tau + px$, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} u(p\omega, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x, \tau + px) dx \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} s(p, \tau) d\tau = FR[u(x, t)], \end{aligned}$$

где $s(p, \tau) = \int_{-\infty}^{\omega} u(x, \tau + px) dx$ — преобразование Радона сейсмограммы u . Таким образом, двумерное преобразование Фурье можно представить как преобразование Радона и одномерное преобразование Фурье. Фильтрация в области волновое число–частота $(k - \omega)$ сводится к интегрированию в пределах от k_{min} до k_{max} (рис. 12.3):

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{k_{min}}^{k_{max}} u(k) \exp(ikx) dk,$$

где $p = |\omega|p$, или

$$u(x) = \frac{|\omega|}{2\pi} \int_{p_{min}}^{p_{max}} u(p) \exp(i\omega px) dp \quad (dk = |\omega|dp).$$

Полная фильтрация сейсмограммы в плоскости (ω, k) может быть записана как (рис. 12.4)

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \int_{p_{min}}^{p_{max}} u(\omega, p) |\omega| \exp[-i\omega(t - px)] dp d\omega =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} dp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \exp[-i\omega(t - px)] \times \right. \\
&\quad \times \left. FR[u(x, t)] |\omega| d\omega \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} R[u(x, t)] * (F^{-1}[|\omega|]) dp.
\end{aligned}$$

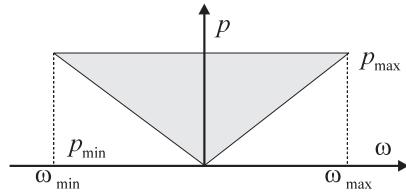


Рис. 12.4. Область интегрирования в плоскости (ω, k) .

12.5. Преобразование Гильберта и аналитический сигнал

Пусть функция $S(t)$ ограничена с нормой L^p , т. е.

$$S(t) \in L^p(-\infty, \infty), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^p dt < \infty, \quad p \geq 1.$$

В этом случае можно определить прямое

$$Q(t) = -\frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\tau)}{t - \tau} d\tau = -S(t) * \frac{1}{\pi t}$$

и обратное преобразование Гильберта

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

где под V.P. понимается главное значение по Коши при $t = \tau$.

Вычислим прямое преобразование Фурье от преобразования Гильберта $Q(t)$:

$$Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) \exp(i\omega t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{\tau - t} dt d\tau.$$

После замены переменной $\tau - t = u$ получим простое выражение для спектра:

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \exp(i\omega\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega u)}{u} du d\tau = \\ &= -S(\omega) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega u)}{u} du = \\ &= -S(\omega) \frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega u}{u} du = -iS(\omega) \operatorname{sign} \omega, \end{aligned}$$

так как (рис. 12.5)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega u}{u} du = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \omega.$$

Отметим, что $|Q(\omega)| = |S(\omega)|$, $\arg Q(\omega) = \arg S(\omega) \pm \pi/2$.

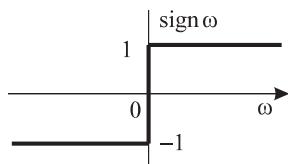


Рис. 12.5. Графическое представление функции $\operatorname{sign} \omega$.

Величина $Q(\omega)$ является *квадратурным фильтром*, который изменяет фазу на $\pm\pi/2$, но не оказывает действия на амплитудный спектр.

Пусть $Z(t)$ — комплексная (временная) функция или аналитический сигнал:

$$Z(t) = S(t) + iQ(t), \quad \text{или} \quad Z(t) = a(t) \exp(i\varphi(t)),$$

где

$$\begin{aligned} S(t) &= \operatorname{Re}Z(t) = a(t) \cos \varphi(t), \\ Q(t) &= \operatorname{Im}Z(t) = a(t) \sin \varphi(t). \end{aligned}$$

Амплитудную и фазовую функцию можно представить в виде

$$a(t) = (S^2(t) + Q^2(t))^{1/2} \quad \text{и} \quad \varphi(t) = \arctan(Q(t)/S(t)).$$

Амплитудная и фазовая функции аналитического сигнала используются при интерпретации сейсмических данных.

12.6. Кепстральное преобразование

Операция типа свертки может быть заменена операцией перемножения спектров исходных сигналов, полученных в результате прямого преобразования Фурье (из временной в спектральную область). Кепстральное преобразование (из временной области в кепстральную) позволяет заменить операцию свертки сложением кепстротов исходных сигналов. Кроме этого, возможны случаи, когда в кепстральной области сигналы разделяются лучше, чем в спектральной области, что приводит к более эффективной фильтрации.

Обратное преобразование Фурье от логарифма частотного спектра дает *кепстр*

$$\hat{f}(\zeta) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \ln[\tilde{f}(\omega)] \exp(i\omega\zeta) d\omega. \quad (12.18)$$

Преобразование из временной области в кепстральную можно выполнять в четыре этапа:

- 1) $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt,$
- 2) $\tilde{f}(\omega) = |\tilde{f}(\omega)| \exp[i\varphi(\omega)],$
- 3) $\ln \tilde{f}(\omega) = \ln |\tilde{f}(\omega)| + i\varphi(\omega),$
- 4) $\hat{f}(\zeta) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [\ln |\tilde{f}(\omega)| + i\varphi(\omega)] \exp(i\omega\zeta) d\omega.$

Для возвращения во временную область операции из преобразований (12.19) следует обратить:

- 1) $\bar{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\zeta) \exp(-i\omega\zeta) d\zeta,$
 - 2) $\tilde{f}(\omega) = \exp[\bar{f}(\omega)],$
 - 3) $f(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) |\exp(i\omega t)| d\omega.$
- (12.20)

Переменная ζ называется *кепстральной частотой*. В кепстральной области процесс, эквивалентный фильтрации во временной или в частотной области, называется *кепстральной фильтрацией*.

Отметим, что при переходе в кепстральную область важным шагом является определение фазы $\varphi(\omega)$. Это связано с тем, что тангенс является периодической функцией с периодом $n\pi$. Поэтому значение фазы $\varphi(\omega)$ можно вычислить только с точностью до $n\pi$. Если исходить из положения о непрерывности фазы $\varphi(\omega)$, то при ее численном определении следует пользоваться, например, критерием малости абсолютной величины производной фазовой функции.

12.7. Биспектральный анализ

В п. 1.10.5 была введена корреляционная функция для действительной случайной функции. Рассмотрим автоковариационную функцию 2-го порядка² $b(\tau_1, \tau_2)$ для действительной случайной функции $\xi(t)$:

$$b(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \xi(t + \tau_1) \xi(t + \tau_2) dt. \quad (12.21)$$

Выполнив двумерное преобразование Фурье от функции $b(\tau_1, \tau_2)$, получим двумерный спектр

$$B(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau_1, \tau_2) \exp\{-i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 \quad (12.22)$$

²Здесь мы не будем касаться условий существования автоковариационной функции 2-го порядка. На практике имеют дело с реализациями случайных функций конечной длины. В этом случае существование такой функции не вызывает сомнений.

автоковариационной функции, при этом оказывается справедливым следующее равенство:

$$B(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_1)f(\omega_2)f^*(\omega_1 + \omega_2),$$

где $f(\omega)$ — преобразование Фурье от функции $\xi(t)$, символ * отмечает комплексное сопряжение. Заметим, что функция $b(\tau_1, \tau_2)$ из формулы (12.21) обладает свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} b(\tau_1, \tau_2) &= b(\tau_2, \tau_1) = b(-\tau_2, \tau_1 - \tau_2) = \\ &= b(\tau_1 - \tau_2, -\tau_2) = b(-\tau_1, \tau_2, -\tau_1) = b(\tau_2 - \tau_1, -\tau_1), \end{aligned}$$

откуда следует справедливость следующих равенств для спектральной функции $B(\omega_1, \omega_2)$:

$$\begin{aligned} B(\omega_1, \omega_2) &= B(\omega_2, \omega_1) = B(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) = \\ &= B(-\omega_1 - \omega_2, -\omega_1) = B(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) = B(-\omega_1 - \omega_2, -\omega_2). \end{aligned}$$

Поскольку здесь рассматривается действительный процесс $\xi(t)$, то выполняется также и равенство

$$B(\omega_1, \omega_2) = B^*(-\omega_1, -\omega_2).$$

На примере дискретного линейного фильтра рассмотрим связь его фазовой характеристики с фазовой характеристикой биспектральной функции выходного сигнала. Пусть процесс x_t представляется дискретной сверткой фильтра w_s с “входным” процессом g_t

$$x_t = \sum_{s=0}^{\infty} w_s g_{t-s}.$$

Если процесс g_t является стационарным и некоррелированным, то функцию автоковариации 2-го порядка процесса x_t можно записать в виде

$$b(\tau_1, \tau_2) = \gamma_g^3 \sum_{s=0}^{\infty} w_s w_{s+\tau_1} w_{s+\tau_2}, \quad (12.23)$$

где $\gamma_g^3 = M[g_t^3]$, $w_s = 0$, $s < 0$. Представим спектр $B_x(\omega_1, \omega_2)$ автоковариационной функции $b(\tau_1, \tau_2)$ из выражения (12.23) в виде

произведения спектральных функций фильтра $W(\omega)$:

$$\begin{aligned} B_x(\omega_1, \omega_2) &= \gamma_g^3 \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} s_s w_{s+\tau_1} w_{s+\tau_2} \times \\ &\times \exp[-i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)] = \gamma_g^3 W(\omega_1) W(\omega_2) W(-(\omega_1 + \omega_2)) = \\ &= \gamma_g^3 W(\omega_1) W(\omega_2) W^*(\omega_1 + \omega_2), \end{aligned}$$

где

$$W(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} w_s \exp(-i\omega s), \quad \begin{cases} -\pi \leq \omega_1 \leq \pi, \\ -\pi \leq \omega_2 \leq \pi, \\ -\pi \leq \omega_1 + \omega_2 \leq \pi. \end{cases}$$

Отметим, что спектр автоковариационной функции 2-го порядка процесса x_t с точностью до множителя совпадает со спектром автоковариационной функции 2-го порядка фильтра w_s :

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = \gamma_g^3 B_\omega(\omega_1, \omega_2).$$

Обозначив фазы спектров автоковариационной функции 2-го порядка фильтра и самого фильтра как $\psi(\omega_1, \omega_2)$ и $\varphi(\omega)$ соответственно

$$\begin{aligned} B_\omega(\omega_1, \omega_2) &= G_\omega(\omega_1, \omega_2) \exp(i\psi(\omega_1, \omega_2)), \\ W(\omega) &= H(\omega) \exp(i\varphi(\omega)), \end{aligned}$$

можно записать очевидное равенство

$$\psi(\omega_1, \omega_2) = \varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2) - \varphi(\omega_1 + \omega_2). \quad (12.24)$$

Таким образом, вычислив фазу спектра $\psi(\omega_1, \omega_2)$ автоковариационной функции 2-го порядка процесса x_t , можно определить фазу спектра фильтра $\varphi(\omega)$.

12.8. Фильтр Калмана

Рассмотренная в § 6.11 рекуррентная процедура нахождения искомых параметров может быть положена в основу построения алгоритма *динамической*, или *калмановской*, *фильтрации*. Анализ сейсмических сигналов показывает, что они изменяют форму при

прохождении через среду. Учет такого изменения можно сделать, используя следующие модели:

$$u_i = \varphi_i \theta_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \in N(0, \sigma_{\varepsilon_i}^2), \\ \theta_i = F_{ii-1} \theta_{i-1} + \mathbf{G} \delta_{i-1}, \quad \delta_i \in N(0, \sigma_{\delta_i}^2),$$

где θ_i — вектор амплитуд для отсчета с номером i :

$$\theta_i = \begin{bmatrix} \theta_i^{(1)} \\ \vdots \\ \theta_i^{(M)} \end{bmatrix}, \quad \theta_{i-1} = \begin{bmatrix} \theta_{i-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \theta_{i-1}^{(M)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Компоненты векторов θ_i и θ_{i-1}

$$\begin{bmatrix} \theta_i^{(2)} = \theta_{i-1}^{(1)} \\ \dots \\ \theta_i^{(M)} = \theta_{i-1}^{(M-1)} \end{bmatrix}.$$

Вектор $\varphi_i = [\varphi_i^{(1)}, \dots, \varphi_i^{(M)}]$ — вектор-строка формы сигнала для отсчета с номером i . Матрица

$$F_{ii-1} = \begin{bmatrix} r_{i-1}(1) & r_{i-1}(2) & \dots & r_{i-1}(M-1) & r_{i-1}(M) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

— матрица перехода от θ_{i-1} к θ_i , $r_{i-1}(\mu)$ — элементы априорной автокорреляции компонента вектора θ_{i-1} . Иллюстрация процедуры калмановской фильтрации представлена на рис. 12.6.

Оценку θ_i можно найти из квадратического критерия путем минимизации

$$l(\theta_i) = \frac{-1}{2\sigma_{\varepsilon_i}^2} (u_i - \varphi_i \theta_i)^2 - \frac{1}{2} (\theta_i - \hat{\theta}_i')^T R_{\theta_i}^{-1} (\theta_i - \hat{\theta}_i'),$$

где $\hat{\theta}_i' = F_{ii-1} \theta_{i-1}$,

$$R_{\theta_i}^{-1} = \langle \theta_i \theta_i^T \rangle = F_{ii-1} R_{\theta_{i-1}} F_{ii-1}^T + \mathbf{G} \sigma_{\delta_{i-1}}^2 \mathbf{G}^T.$$

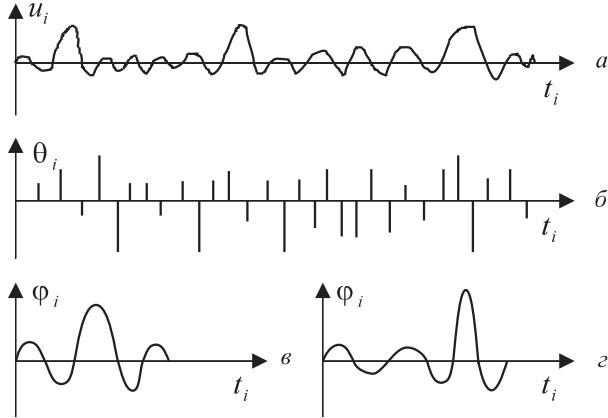


Рис. 12.6. Иллюстрация калмановской фильтрации: *a* — исходная сейсмопресса; *б* — импульсная сейсмопресса; *в*, *г* — форма сигналов для различных участков записи.

Оценка $\boldsymbol{\theta}_i$ имеет вид

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i}{\sigma_{\varepsilon i}^2} + R_{\theta'_i}^{-1} \right)^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T u_i}{\sigma_{\varepsilon i}^2} + R_{\theta'_i}^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i' \right).$$

Используя тождества (6.39), можно записать рекуррентную формулу для оценок параметров и соответствующей матрицы ковариаций

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_i' + R_{\theta'_i} \boldsymbol{\varphi}_i^T (\boldsymbol{\varphi}_i R_{\theta'_i} \boldsymbol{\varphi}_i^T + \sigma_{\varepsilon i}^2)^{-1} (u_i - \boldsymbol{\varphi}_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_i'), \\ R_{\theta_i} &= R_{\theta'_i} - R_{\theta'_i} \boldsymbol{\varphi}_i^T (\boldsymbol{\varphi}_i R_{\theta'_i} \boldsymbol{\varphi}_i^T + \sigma_{\varepsilon i}^2)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_i R_{\theta'_i}. \end{aligned}$$

Для расчета оценок по рекуррентным формулам необходимо задать начальный вектор $\boldsymbol{\theta}_0$ и матрицу R_{θ_0} . Если нет априорных сведений, обычно принимают следующие начальные условия:

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_{\theta_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Процедура легко реализуется на ЭВМ.

12.9. Многофакторный анализ временных рядов

Рассмотрим временной ряд

$$\{x_i\}_{i=1}^N \Rightarrow x_i = f((i-1)\Delta t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Функция $f(t)$ может быть случайной.

I. Преобразование одномерного временного ряда в многомерный временной ряд

Выберем число $M < N$, которое назовем *максимальным числом главных компонент (МЧГК)*. Представим первые M элементов временного ряда x_i как первую строку матрицы X . В качестве элементов второй строки возьмем элементы временного ряда от x_2 по x_{M+1} включительно. Последнюю строку с номером $k = N - M + 1$ составят M элементов временного ряда x_k, x_{k+1}, \dots, x_N :

$$X = (x_{ij})_{i,j=1}^{k,M} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_M \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k & x_{k+1} & x_{k+2} & \dots & x_N \end{bmatrix}. \quad (12.25)$$

Подобную матрицу с элементами $x_{ij} = x_{i+j-1}$, можно рассматривать как M -размерную выборку объема k .

II. Анализ главных компонент: сингулярное разложение выборочной корреляционной матрицы

1. Вычисление средних значений и стандартных отклонений для столбцов матрицы X :

$$\bar{x}_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{i+j-1}, \quad s_j = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_{i+j-1} - \bar{x}_j)^2}, \quad (12.26)$$

где \bar{x}_j является скользящим средним, а s_j — стандартным отклонением с окном шириной k .

2. Введем центрированную матрицу X^* :

$$x_{ij}^* = \frac{(x_{ij} - \bar{x}_j)}{s_j}, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, M. \quad (12.27)$$

3. Вычислим выборочную корреляционную матрицу

$$R = \frac{1}{k} X^{*T} X^* \quad (12.28)$$

с элементами

$$r_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \frac{1}{s_i s_j} (x_{i+l-1} - \bar{x}_i)(x_{j+l-1} - \bar{x}_j).$$

4. Вычислим собственные числа и собственные векторы матрицы R (т. е. выполним сингулярное разложение):

$$R = P \Lambda P^T, \quad (12.29)$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_M \end{bmatrix}$$

— диагональная матрица собственных чисел и

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_M) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{M1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{M2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1M} & p_{2M} & \dots & p_{MM} \end{bmatrix}$$

— ортогональная матрица собственных векторов матрицы R .

В этом случае выполняются следующие равенства:

$$P^T = P^{-1}, \quad P^T P = P P^T = I_M,$$

$$\Lambda = P^T R P, \quad \sum_{i=1}^M \lambda_i = M, \quad \prod_{i=1}^M \lambda_i = \det R.$$

Интерпретация матриц P и Λ . Матрицу P можно рассматривать как матрицу перехода от матрицы X^* к матрице, составленной из главных компонент

$$X^*P = Y = (y_1, y_2, \dots, y_M).$$

Если рассматривать случайный временной ряд x_i , то собственные числа матрицы R — выборочные дисперсии главных компонент, а их квадратные корни — среднеквадратичные отклонения. Выборочные среднеквадратичные отклонения пропорциональны полуосям эллипсоидов, задаваемых матрицей R .

Если временному ряду $\{x_i\}$ является стационарным, в том смысле, что любая часть временного ряда длины $s = \min(M, k)$ несет в себе всю информацию относительно процесса $\{x_i\}$, то можно усреднить матрицу R вдоль диагоналей и получать автокорреляционную функцию $r(\tau)$:

$$r(\tau) = \frac{1}{M - \tau} \sum_{j=1}^{M-\tau} r_{j,j+\tau}, \quad \tau = 1, \dots, M. \quad (12.30)$$

III. Отбор главных компонент

Как было упомянуто выше, главные компоненты определяются следующим образом:

$$Y = X^*P = (y_1, y_2, \dots, y_M).$$

Нормируем главные компоненты (при $\lambda_M \neq 0$)

$$Y^* = Y\Lambda^{-1/2} = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_M^*).$$

В этом случае главные компоненты являются ортонормированными:

$$Y^{*T}Y^* = I_M.$$

Таким образом, получено разложение исходного M -мерного процесса на ортогональные составляющие.

Преобразование

$$y_j = X^*p_j$$

очень близко к линейному преобразованию исходных временных рядов дискретным оператором свертки

$$\begin{aligned} y_j(l) &= \sum_{q=1}^M X_{lq}^* p_{jq} = \sum_{q=1}^M (x_{l+q-1} - \bar{x}_q) \frac{p_{jq}}{s_q} = \\ &= \sum_{q=1}^M x_{l+q-1} \frac{p_{jq}}{s_q} - \sum_{q=1}^M \bar{x}_q \frac{p_{jq}}{s_q}. \end{aligned}$$

Иначе говоря, процедура многофакторного анализа формирует набор линейных фильтров в которых собственные векторы играют роль переходных функций.

Визуальный анализ собственных векторов и главных компонент, полученных после линейной фильтрации, может дать полезную информацию относительно структуры процесса.

Может оказаться полезной информация, полученная в результате наблюдения за двумерными диаграммами (по x -оси – p_i или y_i , по y -оси p_j или y_i).

П р и м е р. Если двумерная диаграмма для p_i и p_{i+1} близка к окружности, то собственные векторы можно интерпретировать как пару sin–cos на языке преобразования Фурье. Рассмотрим функции

$$\begin{cases} x(t) = a(t) \cos(\omega(t)t + \psi(t)), \\ y(t) = a(t) \sin(\omega(t)t + \psi(t)), \end{cases}$$

полагая $a(t)$, $\omega(t)$ и $\psi(t)$ медленно изменяющимися функциями

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos(\alpha(t)t), \\ y(t) = r(t) \sin(\alpha(t)t), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = a(t), \\ \alpha(t) &= \arctan \frac{y(t)}{x(t)} = \omega(t)t + \psi(t). \end{aligned}$$

Выберем две последовательности с задержкой τ и найдем разность полярных углов:

$$\Delta\alpha = \alpha(t + \tau) - \alpha(t) = \omega(t + \tau)(t + \tau) +$$

$$\begin{aligned}
& + \psi(t + \tau) - \omega(t)t - \psi(t) = \\
& = (\omega(t + \tau) - \omega(t))t + \psi(t + \tau) - \psi(t) = \\
& = (\omega'(t)\tau + o(\tau))t + (\omega(t) + \\
& + \omega'(t)\tau + o(\tau))\tau + \psi'(t)\tau + o(\tau).
\end{aligned}$$

Если $\omega(t)$ и $\psi(t)$ — медленно изменяющиеся функции, такие что $\omega'(t)$ и $\psi'(t)$ имеют порядок малости $O(\tau^2)$, можно записать

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha(t) &= \omega(t)\tau = \frac{2\pi\tau}{T(t)}, \\
\omega(t) &= \frac{\Delta\alpha(t)}{\tau} \quad \text{и} \quad T(t) \approx \frac{2\pi\tau}{\Delta\alpha(t)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, вычисляя разность полярных углов, мы можем оценить мгновенную частоту $\omega(t)$ и мгновенный период $T(\tau)$ “гармонических колебаний” отвечающих выбранной паре собственных векторов.

Следует отметить, что невозможно оценить частоты, превышающие

$$\omega_N = \frac{\pi}{\tau}.$$

IV. Восстановление одномерных временных рядов

С учетом ортогональности матрицы P можно записать

$$\begin{aligned}
X^* &= YP^T = (y_1, y_2, \dots, y_M) \cdot \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ \vdots \\ p_M^T \end{pmatrix} = \\
&= \sum_{l=1}^M y_l P_l^T = \sum_{l=1}^M X_l^*.
\end{aligned}$$

Снятие нормировки и центрирование матрицы X^*

$$X = \bar{x} I_k^T + X^* S = X_0^* + \sum_{l=1}^M X_l^* S = \sum_{l=0}^M X_l^* S.$$

В результате получаем исходную матрицу как сумму $M+1$ матриц.

Преобразование к начальному временному ряду может быть выполнено усреднением по диагоналям, прилегающим к главной диагонали. Определим оператор усреднения \mathcal{A} :

$$x = \mathcal{A}(X) = \sum_{l=0}^M \mathcal{A}(X_l^* S). \quad (12.31)$$

Таким образом, получено представление начального временного ряда как суммы $M+1$ временных рядов.

Следует отметить, что при применении алгоритма, интерактивный подход к исследованию (т. е. “диалог” между исследователем и ЭВМ) является естественной его особенностью.

Выбор параметров

Основной входной параметр M алгоритма МЧГК следует полагать меньшим, чем $N/2$.

Выбор величины M зависит от типа решаемой задачи:

1. *Наблюдение латентной периодичности.*

Вычисляем собственные числа при максимальном значении M и определяем число l собственных чисел, удовлетворяющих условию $\lambda_i > 0$. На следующем шаге анализ выполняется при $M = l$.

2. *Сглаживание временных рядов.*

В этом случае мы рассматриваем алгоритм как алгоритм фильтрации. При фильтрации следует уменьшать число главных компонент, участвующих в восстановлении временного ряда, при этом большим значениям M , соответствует более узкая полоса фильтрации.

3. *Выделение периодичности с известным периодом.*

M должно быть равно периоду T и N должно быть кратно периоду T .

Следует отметить, что рассматриваемый алгоритм очень стабилен к вариациям величины M .

Промежуточные результаты интерпретации.

1. Собственные числа корреляционной матрицы, отвечающей M -размерному представлению временного ряда.
2. Собственные векторы корреляционной матрицы.
3. Главные компоненты, отвечающие M -размерному представлению временного ряда.
4. Восстановленный временной ряд при различном числе главных компонент.

Отметим два предельных случая.

- $M \ll N$. В этом случае можно рассматривать собственные векторы как переходные функции линейного фильтра, а главные компоненты — как результат действия такого фильтра.
- $M \simeq N/2$. При таком соотношении M и N алгоритм можно рассматривать как аппроксимационный и применять, например, для выделения гармонических составляющих временного ряда.

12.10. Фильтр Винера

Операция свертки двух векторов \mathbf{h} и \mathbf{x} (см. § 6.4) определяется выражением

$$y_k = \sum_{j=0}^{L_h} h_j x_{k-j}, \quad k = 0, \dots, L_y \quad (L_y = L_h + L_x - 1), \quad (12.32)$$

где L_h — длина фильтра \mathbf{h} , L_x — длина фильтруемого сигнала \mathbf{x} . Операцию свертки в дискретном представлении можно представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{L_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{L_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{L_h} \end{bmatrix}, \quad (12.33)$$

или

$$\mathbf{y} = X\mathbf{h}. \quad (12.34)$$

Если вектор \mathbf{y} и матрица X известны, можно найти вектор \mathbf{h} , используя метод наименьших квадратов (см. § 6.4) и решая систему линейных уравнений

$$X^T X \mathbf{h} = X^T \mathbf{y} \quad (12.35)$$

или предусматривая регуляризацию решения

$$(X^T X + \alpha I) \mathbf{h} = X^T \mathbf{y}, \quad (12.36)$$

где I — единичная матрица, α — коэффициент регуляризации.

Пусть только один элемент вектора \mathbf{y} равен 1, а другие элементы равны нулю, тогда фильтр \mathbf{h} называется фильтром Винера. В этом случае вектор \mathbf{x} преобразуется в вектор $\mathbf{y} = [\dots, 1, \dots]$ фильтром \mathbf{h} .

Рассмотрим случай фильтрации сигнала $x(t)$ с непрерывной зависимостью от своего аргумента t . Найдем фильтр $h(t)$, минимизирующий “сумму” квадратов расхождений E между некоторым “требуемым” сигналом $\hat{y}(t)$ и “фактическим” $y(t)$:

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T [y(t) - \hat{y}(t)]^2 dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right] - \hat{y}(t) \right\}^2 dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \left\{ \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) x(t - \sigma) d\sigma \right] dt - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} [h(\tau) x(t - \tau) d\tau] \hat{y}(t) dt + \int_{-T}^T \hat{y}^2(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (12.37)$$

Меняя порядок интегрирования, выразим величину E через автокорреляционные функции входного сигнала R_{xx} и “требуемого” сигнала $R_{\hat{y}\hat{y}}$, также через взаимокорреляционную функцию входного и “требуемого” сигналов $R_{x\hat{y}}$:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) d\sigma \left[\lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T x(t - \tau) x(t - \sigma) dt \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \left[\lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T \hat{y}(t) x(t-\tau) dt \right] + \\
& + \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T \hat{y}^2(t) dt = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) R_{xx}(\tau-\sigma) d\sigma - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) R_{x\hat{y}}(\tau) d\tau + R_{\hat{y}\hat{y}}(0).
\end{aligned} \tag{12.38}$$

Применяя методы вариационного исчисления к представлению (12.38), можно получить интегральное уравнение относительно искомой функции (фильтра) $h(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) R_{xx}(\tau-t) dt = R_{x\hat{y}}(\tau), \quad \tau \geq 0. \tag{12.39}$$

Последнее интегральное уравнение называется *уравнением Винера–Хопфа*. Вопросы, связанные с решением уравнения (12.39) рассмотрены в [132].

12.11. Фильтр ошибки предсказания и принцип максимальной энтропии

Рассмотрим фильтр $\mathbf{h} = \{h_1, \dots, h_n\}$, предсказывающий значения причинно-обусловленного ряда $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ ($m > n$), на один шаг по времени на основе текущего и прошлых значений \mathbf{x} :

$$\begin{aligned}
x_j &= h_1 x_{j-1} + h_2 x_{j-2} + \dots + h_n x_0 = \sum_{k=1}^n h_k x_{j-k}, \\
j &= 1, \dots, m; \quad x_{j-k} = 0 \text{ при } k > j.
\end{aligned} \tag{12.40}$$

Обычно полагают, что предсказанное значение x_0 равно нулю. Ошибку предсказания (e_j) величины x_j можно записать в виде

$$e_j = \sum_{k=1}^n h_k x_{j-k} - x_j = \sum_{k=0}^n h_k x_{j-k}, \tag{12.41}$$

где $h_0 = -1$. Фильтр $-1, h_1, h_2, \dots, h_n$ называют *фильтром ошибки предсказания порядка $(n+1)$ для предсказания на один интервал*.

Кроме рассмотренного выше фильтра ошибки предсказания, существуют другие типы фильтров, используемые для различного рода преобразований временных рядов (см., например, [21]).

Применяя метод наименьших квадратов (см. §§ 6.4, 12.10) для нахождения фильтра \mathbf{h} , можно записать систему уравнений (см. также систему линейных уравнений (12.35)):

$$\sum_{k=1}^n h_k R_{xx}(r-k) = R_{xx}(r), \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (12.42)$$

где $R_{xx}(r)$ — автокорреляционная функция входного сигнала.

Получим выражение для суммы квадратов величин e_j (12.41)

$$\begin{aligned} E &= \sum_{j=0}^m e_j^2 = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{k=1}^n h_k x_{j-k} - x_j \right)^2 = \\ &= \sum_{j=0}^m \left[\left(\sum_{k=1}^n h_k x_{j-k} \sum_{l=1}^n h_l x_{j-l} \right) - 2x_j \left(\sum_{k=1}^n h_k x_{j-k} \right) + x_j^2 \right]. \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования и используя уравнения (12.42), представляем E через автокорреляционную функцию R_{xx} :

$$\begin{aligned} E &= \sum_k h_k \left[\sum_l h_l \left(\sum_j x_{j-k} x_{j-l} \right) \right] - \\ &\quad - 2 \sum_k h_k \left(\sum_j x_j x_{j-k} \right) + R_{xx}(0) = \\ &= \sum_k h_k \left[\sum_l h_l R_{xx}(k-l) \right] - 2 \sum_k h_k R_{xx}(-k) + R_{xx}(0) = \\ &= \sum_k h_k R_{xx}(k) - 2 \sum_k h_k R_{xx}(-k) + R_{xx}(0). \end{aligned}$$

Учитывая, что $h_0 = -1$, получаем

$$E = - \sum_k h_k R_{xx}(k). \quad (12.43)$$

Из соотношений (12.42) и (12.43) можно получить следующее матричное уравнение:

$$\begin{vmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(-1) & \dots & R_{xx}(-n) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(1-n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(n) & R_{xx}(n-1) & \dots & R_{xx}(0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (12.44)$$

Понятие информации и энтропии, рассмотренные в § 1.9, играют большую роль в теории вероятностей и ее приложениях. В теории информации энтропия характеризует меру неопределенности временного ряда. Количество информации, которую можно извлечь, увеличивается с ростом энтропии. Полностью предсказуемый сигнал не несет никакой информации. Абсолютно непредсказуемый сигнал, например, белый шум, несет потенциально максимальную информацию. При фильтрации *методом максимума энтропии* стремятся так преобразовать входной сигнал, чтобы он был непредсказуем настолько, насколько это возможно при сохранении его автокорреляционной функции. Целью такого преобразования может быть выделение одиночных сигналов на фоне упорядоченных помех.

В § 1.9 была введена энтропия H для системы неравновероятных событий (1.54). Можно распространить это понятие на стационарный временной ряд конечной длины n (H_n) и на стационарный бесконечный временной ряд $n \rightarrow \infty$ (H) (см., например, [84]), при этом вводят понятие удельной энтропии

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} [H_n / (n + 1)]. \quad (12.45)$$

В работе [140] показано, что энтропия временного ряда бесконечной длительности

$$H = \frac{1}{2} \ln E_\infty = \frac{1}{2} \ln(\omega_N / \pi) + \frac{1}{4\omega_N} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \ln[R_\infty(\omega)] d\omega \quad (12.46)$$

связана с энергией ошибки предсказания E_∞ (12.43) при $n = \infty$

$$E_\infty = \frac{\omega_N}{\pi} \exp \left[\frac{1}{2\omega_N} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \ln[R_\infty(\omega)] d\omega \right] \quad (12.47)$$

и спектральной плотностью $R_\infty(\omega)$ входного сигнала \mathbf{x}

$$R_\infty(\omega) = R_\infty(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(k)z^k. \quad (12.48)$$

В формулах (12.47), (12.46) ω_N — частота Найквиста.

При обработке данных на практике автокорреляционная функция $R_{xx}(i)$ входного сигнала является конечной. Можно предполагать, что вне интервала измерений $R_{xx}(i) = 0$, $|k| > n$. Однако подобные значения автокорреляционной функции можно выбрать так, чтобы величина H была устойчива по отношению к значениям $R_{xx}(i)$ при $|k| > n$ [124]. Используя формулы (12.46), (12.48), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial R_{xx}(k)} = 0 = \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \frac{z^k}{R_\infty(z)} d\omega, \quad |k| > n. \quad (12.49)$$

Не приводя выкладок, выпишем конечный результат:

$$R_\infty(z) = E[h(z)h(z^{-1})]^{-1}, \quad (12.50)$$

где E и $h(z)$ — соответственно сумма квадратов ошибок предсказания (12.43) и z -преобразование фильтра ошибки предсказания (12.44). Вопросы, связанные с решением системы уравнений (12.44), рассмотрены в работах [115, 140].

Рассмотрим рекуррентную процедуру решения системы уравнений (12.44) для нахождения фильтра ошибки предсказания $1, -h_1, \dots, -h_n, \dots, -h_N$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) в случае временного ряда $x_1, \dots, x_m, \dots, x_M$ ($m = 1, 2, \dots, M$) конечной длины. При этом будем определять автокорреляционную функцию с учетом нормировки на число элементов временного ряда, участвующих в ее вычислении:

$$R_m = \frac{1}{M-m} \sum_{k=1}^{M-m} x_k x_{k+m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, M-1).$$

Аналогичным образом нормируется и сумма квадратов расхождений фильтра ошибки предсказания E .

Заметим, что (на “нулевом” шаге $n = 0$) выполняется очевидное тождество

$$R_0 \cdot 1 = E_0, \quad \text{где} \quad E_0 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x_k^2.$$

На первом шаге ($n = 1$) находим коэффициент h_{nn} фильтра ошибки предсказания $1, -h_{11}$ (где первая цифра нижнего индекса — номер шага), минимизируя сумму ошибок предсказания

$$E_1 = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{j=1}^{M-1} (e_j^2 + \tilde{e}_j^2),$$

вычисленную усреднением по предсказаниям в прямом

$$e_j = x_{j+1} - h_{11}x_j$$

и обратном

$$\tilde{e}_j = x_j - h_{11}x_{j+1}$$

направлениях,

$$E_1 = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{j=1}^{M-1} [(x_{j+1} - h_{11}x_j)^2 + (x_j - h_{11}x_{j+1})^2]. \quad (12.51)$$

Рассматривая E_1 как функцию от h_{11} , находим h_{11} как решение уравнения

$$\begin{aligned} dE_1/dh_{11} &= 0 = \\ &= \frac{1}{2(N-1)} \sum_{j=1}^{M-1} 2[(x_{j+1} - d_{11}x_j)(-x_j) + (x_j - d_{11}x_{j+1})(-x_{j+1})] = \\ &= \frac{1}{2(N-1)} \sum_{j=1}^{M-1} [-(x_j x_{j+1} - x_{j+1} x_j) + h_{11}(x_{j+1}^2 + x_j^2)]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$h_{11} = 2 \sum_{j=1}^{M-1} x_j x_{j+1} / \sum_{j=1}^{M-1} (x_j^2 + x_{j+1}^2).$$

Используя выражение (12.51), находим E_1 . Отметим, что R_1 можно найти из первого уравнения системы уравнений

$$\begin{vmatrix} R_0 & R_1 \\ R_1 & R_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -h_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

В общем случае средняя суммарная ошибка для прямого и обращенного фильтров записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2(M-n)} \sum_{j=1}^{M-n} \left[\left(x_j - \sum_{k=1}^n h_{nk} x_{j+k} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(x_{j+n} - \sum_{k=1}^n h_{nk} x_{j+n+k} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Среднюю ошибку можно также записать в виде

$$E_n = \frac{1}{2(M-n)} \sum_{j=1}^{M-n} [(b_{nj} - h_{nn} b'_{nj})^2 + (b'_{nj} - h_{nn} b_{nj})^2],$$

где

$$\begin{aligned} b_{1j} &= x_j, \quad b'_{1j} = x_{1+j}, \\ b_{nj} &= \sum_{k=0}^n h_{n-1,k} x_{j+k} = \sum_{k=0}^n h_{n-1,n-k} x_{j+m-k}, \\ b'_{nj} &= \sum_{k=0}^n h_{n-1,k} x_{j+m-k} = \sum_{k=0}^n h_{n-1,n-k} x_{j+k}, \end{aligned}$$

при этом для коэффициентов b и b' и коэффициентов фильтра h оказываются справедливыми следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} b_{nj} &= b_{n-1,j} - h_{n-1,n-1} b'_{n-1,j+1}, \\ b'_{nj} &= b_{n-1,j+1} - h_{n-1,n-1} b'_{n-1,j+1}, \\ h_{nk} &= h_{n-1,k} - h_{n,m-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ h_{n0} &= -1, \quad h_{nk} = 0 \quad (k > n). \end{aligned}$$

Решая уравнение для $h_{nn} - dE_n/dh_{nn} = 0$, получаем

$$h_{nn} = 2 \sum_{j=1}^{M-n} b_{nj} b'_{nj} / \sum_{j=1}^{M-n} (b_{nj} + b'^2_{nj}). \quad (12.52)$$

Покажем, что величина E_n также удовлетворяет рекуррентному соотношению. Запишем систему уравнений, определяющую фильтр ошибки предсказания для случая $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & R_3 \\ R_1 & R_0 & R_1 & R_2 \\ R_2 & R_1 & R_0 & R_1 \\ R_3 & R_2 & R_1 & R_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -h_{n1} \\ -h_{n2} \\ -h_{n3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (12.53)$$

Подставляя в систему уравнений (12.53) рекуррентное соотношение для h_{nj} , получаем

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & R_3 \\ R_1 & R_0 & R_1 & R_2 \\ R_2 & R_1 & R_0 & R_1 \\ R_3 & R_2 & R_1 & R_0 \end{vmatrix} \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ -h_{n-1,1} \\ -h_{n-1,2} \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -h_{n3} \\ -h_{n-1,1} \\ -h_{n-1,2} \\ 0 \end{vmatrix} \right\} = \\ & = \begin{vmatrix} E_{n-1} \\ 0 \\ 0 \\ h_{n3}E_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{n3}E_{n-1} \\ 0 \\ 0 \\ E_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В общем случае рекуррентная формула для E_n записывается следующим образом:

$$E_n = E_{n-1}(1 - h_{nn}^2).$$

Отметим, что, как следует из равенства (12.52), $|h_{nn}| < 1$, поэтому справедливы неравенства $0 < E_n < E_{n-1}$.

Литература

1. Аки К., Ричардс П. *Количественная сейсмология*. Т.1,2. М., 1983.
2. *Акустика дна океана* / Под ред. У.Купермана, Ф.Енсена. М., 1984.
3. Алберт А. *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание*. М., 1977.
4. Алексеев А.С., Кремлев А.Н., Жерняк Т.Ф. *Об обратной задаче дифракции акустических волн и методов визуализации и волновой миграции* // Геология и геофизика. 1981. № 1.
5. Алексеев А.С., Михайленко В.Г., Чеверда В.А. *Численные методы решения прямых и обратных задач теории распространения волн* // Актуальные проблемы вычисл. и прикл. математики. Новосибирск, 1983.
6. Алексеев А.С., Лаврентьев М.Н., Преображенский Н.Г. *Вопросы реконструктивной томографии*. Новосибирск, 1985.
7. Альберт Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. *Теория сплайнсов и ее приложения*. М., 1972.
8. Андерсон Т.В. *Статистический анализ временных рядов*. М., 1976.
9. Апресян Л.А., Кравцов Ю.А. *Теория переноса излучения*. М., 1983.
10. Аронов В.И. *Методы математической обработки на ЭВМ*. М., 1977.
11. Афиши А., Эйзен С. *Статистический анализ*. М., 1982.
12. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. М., 1972.

13. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. *Пространственно-временной лучевой метод* // Линейные и нелинейные волны. Л., 1985.
14. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Некорректные задачи* // Численные методы и приложения. М., 1989.
15. Белишев М.И. *Уравнение типа Гельфанд-Левитана в многомерной обратной задаче для волнового уравнения* // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1987. Т. 156, вып.17.
16. Белишев М.И., Благовещенский А.С. *Динамические обратные задачи теории волн*. СПб., 1999.
17. Бирюлина М.С. *О влиянии возмущения решающего оператора на точность решения обратной задачи* // Вопросы обработки и интерпретации данных измерений с метеорологических ИСЗ. 1985, вып. 20.
18. Благовещенский А.С. *О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной среды* // Труды Матем. ин-та АН СССР. 1971. № 65.
19. Благовещенский А.С. *Обратные задачи теории распространения упругих волн* // Изв. АН СССР. Сер. физ. Земли. 1978. № 12.
20. Благовещенский А.С. *Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн* // Пробл. мат. физики. 1981. Вып. 10.
21. Бокс Дж., Дженкинс Г. *Анализ временных рядов*. Вып. 1. М., 1975.
22. Брандт З. *Статистические методы анализа наблюдений*. М., 1975.
23. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах*. М., 1973.
24. Бреховских Л.М., Годин О.А. *Акустика слоистых сред*. М., 1989.
25. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. *Теоретические основы акустики океана*. Л., 1982.
26. Бухгейм А.Л. *Введение в теорию обратных задач*. Новосибирск, 1988.
27. Василенко Г.И., Тараторин А.Н. *Восстановление изображений*. М., 1986.
28. *Введение в современную томографию* / К.С.Терновой, М.В.Синьков, А.И.Закидальский и др.; Под ред. К.С.Тернового, М.В.Синькова. Киев, 1983.

29. Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. М., 1971.
30. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления*. М., 1984.
31. Волков А.М. *Применение сплайн-функций при решении геологических и геофизических задач*. М., 1981.
32. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений*. М., 1962.
33. Гольдин С.В. *Интерпретация данных сейсмического метода отраженных волн*. М., 1979.
34. Гольцман Ф.М. *Статистические модели интерпретации*. М., 1971.
35. Горюнов А.А., Сасковец А.В. *Обратные задачи рассеяния в акустике*. М., 1989.
36. Дайнес К., Лайл Р. *Машинная томография в геофизике* // Труды Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1979. Т. 67, № 7.
37. Джонсон Н., Лион Ф. *Статистика и планирование эксперимента в технике и науке*. М., 1980.
38. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. *Статистическое моделирование*. М., 1982.
39. Жданов М.С., Матусевич В.Ю., Френкель М.А. *Сейсмическая и электромагнитная миграция*. М., 1988.
40. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. *Методы сплайн-функций*. М., 1980.
41. Карус Е.В., Кузнецов О.Л., Файзуллин И.С. *Межсекважинное прозвучивание*. М., 1986.
42. Киселев Ю.В., Троян В.Н. *Численное моделирование в задачах дифракционной томографии* // Учен. зап. С.-Петербург. ун-та. № 433. Вопросы геофизики. 1998. Вып. 35.
43. Клаэрбоут Д.Ф. *Теоретические основы обработки геофизической информации*. М., 1981.
44. Клаэрбоут Д.Ф. *Сейсмические изображения земных недр*. М., 1989.
45. Козлов Е.А. *Миграционные преобразования в сейсморазведке*. М., 1986.

46. Колмогоров А.Н. *Основные понятия теории вероятностей*. М., 1974.
47. Крамер Г. *Математические методы статистики*. М., 1975.
48. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. *Геометрическая оптика неоднородных сред*. М., 1980.
49. Кульбак С. *Теория информации и статистика*. М., 1967.
50. Лаврентьев М.М. *О некоторых некорректных задачах математической физики*. Новосибирск, 1962.
51. Левшин А.Л., Яновская Т.Б., Ландер А.В. *Поверхностные сейсмические волны в горизонтально неоднородной Земле*. М., 1987.
52. *Линейные и нелинейные задачи вычислительной томографии* / Под ред. В.Р.Кирейтова, В.В.Пикалова. Новосибирск, 1985.
53. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. М., 1989.
54. *Математические методы планирования эксперимента* / Под ред. В.В.Пененко. Новосибирск, 1981.
55. *Математическая теория планирования эксперимента* / Под ред. С.М.Ермакова. М., 1983.
56. Мешалкин Л.Д., Курочкина А.И. *Новый подход к параметризации регрессионных зависимостей: Исследования по математической статистике* // Зап. науч. семин. ЛОМИ. Л., 1979. № 8.
57. Морозов В.А. *Регулярные методы решения некорректно поставленных задач*. М., 1987.
58. Наттерер Ф. *Математические аспекты компьютерной томографии*. М., 1990.
59. Никитин А.А. *Теоретические основы обработки геофизической информации*. М., 1986.
60. Никитин А.А. *Статистические методы выделения геофизических аномалий*. М., 1979.
61. Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Краукарис П.В. *Волны в слоисто-однородных упругих средах*. Л., 1985.
62. Петрашень Г.И., Нахамкин С.А. *Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки*. Л., 1973.
63. Петрашень Г.И. *Основы математической теории распространения упругих волн* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 18. Л., 1978.
64. Петрашень Г.И. *Распространение волн в анизотропных упругих средах*. Л., 1980.

65. Петрашень Г.И., Каштан Б.М. *Элементарная теория распространения объемных волн в анизотропных упругих средах* // Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах. Л., 1984.
66. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. *Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы*. Новосибирск, 1983.
67. Потемкин В.Г. *Система МАТЛАБ 5 для студентов*. М., 1998.
68. Пугачев В.С. *Теория вероятностей и математическая статистика*. М., 1979.
69. Пытьев Ю.П. *Методы анализа и интерпретации эксперимента*. М., 1990.
70. Рао К.Р. *Линейные статистические методы и их применение*. М., 1968.
71. Романов В.Г. *Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа*. Новосибирск, 1972.
72. Романов В.Г. *Обратные задачи математической физики*. М., 1984.
73. Рыжиков Г.А. *О сходимости итерационных методов решения некорректных задач* // Проблемы физики атмосферы. Вып. 14. Л., 1976.
74. Рыжиков Г.А. *Построение алгоритма решения некорректных задач с использованием дробно-рациональных операторных функций* // Проблемы физики атмосферы. Вып. 17. Л., 1982.
75. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. *Применение методов вычислительной томографии при решении интерпретационных сейсмических задач* // Вестник Ленингр. ун-та. 1985. № 25.
76. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. *Определение волнового поля и скорости в среде с использованием метода теории возмущений* // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 4. Вып. 4 1986. .
77. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. *Два подхода к задаче обработки данных гидролокации*. Деп. ВИНИТИ от 12.09.86 г. № 6649-В86.
78. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. *Восстановление поля скорости в трехмерной среде по функционалам от полей упругих волн* // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1986. № 7.
79. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. *Линейное оценивание функционалов от полей упругих параметров и сейсмотомографов* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 27. Л., 1987.

80. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. *Томографические функционалы в интерпретационных задачах зондирования упругими волнами* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 28. Л., 1989.
81. Рыжиков Г.А., Троян В.Н., Юрин А.В. *Методы регуляризации в задачах трехмерной лучевой сейсмотомографии* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 28. Л., 1989.
82. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. *Обратное проецирование в дифракционной томографии* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 29. Л., 1990.
83. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. *Томография и обратные задачи дистанционного зондирования*. СПб., 1994.
84. Стратонович Р.Л. *Теория информации*. М., 1975.
85. Судварг Д.И. *Об использовании полиномиальных многозвеньников при описании сейсмических границ* // Применение методов вычислительной математики и математической статистики при цифровой обработке данных сейсморазведки. Новосибирск, 1974.
86. Тимошин Ю.В. *Импульсная сейсмическая голограмма*. М., 1978.
87. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. М., 1986.
88. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. *Математические задачи компьютерной томографии*. М., 1987.
89. Троицкий И.Н. *Статистическая теория томографии*. М., 1989.
90. Троян В.Н. *Применение сплайн-функции для аппроксимации геофизической информации* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 20. Л., 1981.
91. Троян В.Н. *Статистические методы обработки сейсмической информации при исследовании сложных сред*. М., 1982.
92. Троян В.Н. *Решение интерпретационных сейсмических задач методом конечных элементов* // Вестник Ленингр. ун-та. 1983. № 16.
93. Троян В.Н. *Оценивание параметров сейсмических сигналов корректным методом моментов* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 24. Л., 1984.

94. Троян В.Н. *Метод локального оценивания параметров сейсмических волн* // Вестник Ленингр. ун-та. 1985. № 11.
95. Троян В.Н. *Методы обработки сейсмической информации при отклонениях от стандартной модели сейсмограммы* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 29. Л., 1989.
96. Троян В.Н. *Применение сплайн-функций для аппроксимации геофизической информации* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 20. Л., 1981.
97. Троян В.Н. *Статистические методы аппроксимации геофизической информации*. // Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio Geologica. 1981. XIII.
98. Троян В.Н., Рыжиков Г.А. *Трехмерная дифракционная сейсмическая томография. I. Томографический функционал и алгоритм реконструкции* // Геофизика. 1994. №6.
99. Троян В.Н., Рыжиков Г.А. *Трехмерная дифракционная сейсмическая томография. II. Разрешающая способность метода* // Геофизика. 1995. № 2.
100. Троян В.Н., Соколов Ю.М. *Аппроксимация сейсмического горизонта с учетом скважинных наблюдений* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 22. Л., 1982.
101. Троян В.Н., Соколов Ю.М. *Методы аппроксимации геофизических данных на ЭВМ*. Л., 1989.
102. Троян В.Н., Соколов Ю.М. *Определение пластовой скорости по данным площадных сейсмических наблюдений* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 23. Л., 1983.
103. Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малкевич Н.С. *Использование методов математической статистики для решения некорректных задач* // Усп. физич. наук. 1970. Т. 102. Вып. 3.
104. Фаддеев Л.Д. *Обратная задача квантовой теории рассеяния* / Современные проблемы математики (Итоги науки и техники). М., 1974. Т. 3.
105. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М., 1971.
106. Федотов А.М. *Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных*. Новосибирск, 1982.

107. Хаттон Л., Уэрдингтон М., Мейкин Дж. *Обработка сейсмических данных*. М., 1989.
108. Хелгасон С. *Преобразование Радона*. М., 1983.
109. Хермен Г. *Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии*. М., 1983.
110. Хьюбер П. *Робастность в статистике*. М., 1984.
111. Шерифф Р., Гелдарт Л. *Сейсморазведка*. М., 1987. Т.1, 2.
112. Яновская Т.Б., Порохова Л.Н. *Обратные задачи геофизики*. Л., 1983.
113. Яновская Т.Б. *Томографические исследования земной коры при использовании поверхностных волн* // Изв. вузов. Геология и разведка. 1988. N 12.
114. Akaike H. *A new look at the statistical model identification* // IEEE Trans. Autom. Control. 1974. AC-19.
115. Anderson N.O. *On the calculation of filter coefficients for maximum entropy spectral analysis* // Geophysics. 1974. Vol. 39.
116. Andrews D.F. *A robust method for multiple linear regression* // Technometrics. 1974. Vol. 16, N 4.
117. Angelier J., Tarantola A., Vallette B. *Inversion of field data in fault tectonics to obtain the regional stress* // Geophys. J. Roy Astr. Soc. 1982. Vol. 69.
118. Backus G., Gilbert F. *Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems* // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1967. Vol. 13.
119. Backus G., Gilbert F. *The resolving power of gross Earth data* // Geophys. J. Roy Astr. Soc. 1968. Vol. 16.
120. Berkhouit A.J. *Seismic migration—Imaging of acoustic energy by wave field extrapolation (theoretical aspects)*. Amsterdam; N.Y., 1980.
121. Berkhouit A.J. *Seismic migration—Imaging of acoustic energy by wave field extrapolation (practical aspects)*. Amsterdam; N.Y., 1984.
122. Beylkin G. *Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon transform* // J. Math. Phys. 1985. Vol. 26, N 1.
123. Bleistein N. *Mathematical methods for wave phenomena*. N.Y., 1984.
124. Burg J.P. *The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra* // Geophysics. 1972. Vol. 37.

125. Carrion Ph. *Inverse problems and tomography in acoustics and seismology*. Atlanta, 1988.
126. Cohen J.K., Frank G.H., Bleistein N. *Three-dimensional Born inversion with an arbitrary reference* // Geophysics. 1986. Vol. 51, N 8.
127. Devaney A. *Geophysical diffraction tomography* // Trans., IEEE. 1984. Vol. GE-22.
128. Devaney A. *Diffraction tomography* // Inverse methods in electromagnetic imaging. 1985. Vol. 2.
129. Devaney A. *Reconstructive tomography with diffracting wavefields* // Inverse Problems. 1986. Vol. 2.
130. Ivansson S. *Seismic borehole tomography theory and computational methods* // Proc., IEEE. 1986. Vol. 74.
131. Kennett T. *Seismic wave propagation in stratified media*. Cambridge, 1983.
132. Lee Y.W. *Statistical theory of communication*. N.Y. 1960.
133. Newton R.G. *Inversion reflection data for layered media: a review of exact methods* // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1981. Vol. 65, N 1.
134. Nolet G. *Solving or resolving inadequate and noisy tomographic systems* // J. Comp. Phys. 1985. Vol. 61.
135. Nolet G., Trier J., Huisman R. *A formalism for nonlinear inversion of seismic surface waves* // Geophys. Res. Lett. 1986. Vol. 13, N 1.
136. Pratt R.G., Worthington M.H. *The application of diffraction tomography to cross-hole seismic data* // Geophysics. 1988. Vol. 53, N 2.
137. Raz S. *Three-dimensional velocity profile inversion from finite-offset scattering data* // Geophysics. 1981. Vol. 46, N 6.
138. Ryzhikov G., Troyan V. *The solution of an inverse dynamic seismic problem for three-dimensional inhomogeneous media* // Revista de geofisica. 1988. Vol. 44.
139. *Seismic tomography with application in global seismology and exploration geophysics* // Ed. G.Nolet. Dordrecht; Boston; Tokyo, 1987.
140. Smylie D.E., Clarke C.K.G., Ulrych T.J. *Analysis of irregularities in the earth's rotation: in Methods in Computational Physics* // Geophysics. 1973. Vol. 13.

141. Späth H. *Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen*. München; Wien, 1973.
142. Stolt R.H., Weglein A.B. *Migration and inversion of seismic data* // Geophysics. 1985. Vol. 50, N 8.
143. Tarantola A. *Inverse problem theory: Methods for data fitting and model parameter estimation*. Amsterdam; N.Y.; Tokyo, 1987.
144. Tarantola A. *Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation* // Geophysics. 1984. Vol. 49, N 4.
145. Tarantola A., Nercessian A. *Three dimensional inversion without blocks* // Geophys. J. Roy Astr. Soc. 1984. Vol. 76.
146. Troyan V.N. *Application of statistical methods for the processing of seismic information* // Revista de geofisica. 1988. Vol. 44.
147. Troyan V.N., Windgassen W. *Approximation geophysikalischer Daten unter Berücksichtigung linearer Bedingungen* // Geophysik und Geologie. 1979. Bd. 11, 1.
148. Ursin B. *Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media* // Geophysics. 1983. Vol. 48, N 2.
149. Ursin B., Berteussen K.-A. *Comparison of some inverse methods for wave propagation in layered media* // Proc., IEEE. 1986. Vol. 74.
150. Wenzel F. *The relation between Born inversion and standart migration schemes* // J. Geophys. 1988. Vol. 62, N 3.
151. Wu Ru-Shan J., Taksöz M.N. *Diffraction tomography and multisource holography applied to seismic imaging* // Geophysics. 1987. Vol. 52, N 1.

Приложение А

КОМПЬЮТЕРНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Компьютерные упражнения, представленные в Приложении, составляют основу вычислительного практикума по курсам лекций “Статистические методы обработки геофизических данных” и “Обратные задачи геофизики”, читаемых магистрантам и аспирантам кафедры физики Земли на физическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета в течение последних десяти лет. Выполнение компьютерных упражнений позволит читателю глубже понять содержание и возможности представленных в книге методов анализа и обработки геофизической информации.

Основой компьютерных упражнений является набор программ¹, написанных на языке пакета МАТЛАБ. Программы содержат краткое описание входных и выходных данных, демонстрационный пример и рекомендации по изменению входных данных². Здесь не приводится руководства по работе в пакете МАТЛАБ, поскольку для выполнения компьютерных упражнений практически не требуется (по крайней мере на начальном этапе) знания языка пакета МАТЛАБ (необходимые сведения можно найти, например, в книге [67] и в системе помощи пакета МАТЛАБ).

¹ Тексты программ, написанные на языке МАТЛАБ, находятся на FTP сервере Лаборатории динамики упругих сред физического факультета С.-Петербургского государственного университета (ldus.phys.spbu.ru).

² Тексты программ на языке МАТЛАБ и демонстрационные примеры, представленные в Приложении, были подготовлены авторами в Институте геофизики Лозанского университета. Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность профессору R.Olivier за создание превосходных условий для работы и дружескую атмосферу.

A.1. Статистические методы

A.1.1. Численное моделирование случайных величин

В пакете МАТЛАБ имеются встроенные функции, реализующие генераторы случайных чисел с равномерным распределением на интервале $(0, 1)$ — `rand` и с нормальным распределением $(N(0, 1))$ — `randn`. Следующая программа (скрипт `r0a.m`), в зависимости от значения переменной `indd` генерирует случайные выборки и реализует их графическое представление.

```
% Script r0a.m
% Генераторы случайных чисел
% indd=1 : равномерное распределение в интервале (0,1)
% indd=2 : нормальное распределение (N(0,1))
clear
% ВВОД ДАННЫХ
indd=1;
m=25;          % объем выборки
% КОНЕЦ ВВОДА
n=1:m;         % n=1,2,...,m
if indd==1
    s=rand(1,m);      % s : вектор-строка
else
    s=randn(length(n),1);    % s : вектор-столбец;
length(n)=m
    s=s';        % s : вектор-строка
end
rect=[0.1 0.1 .8 0.5];      % размер рисунка
axes('position',rect)
stem(n,s);      % графическое представление
```

Упражнения

1. С использованием скрипта `r0a.m` получить графическое представление выборок из равномерного и нормального распределений для различных объемов выборок.

2. Выполнить задание из предыдущего упражнения, используя командную строку.

A.1.2. Построение гистограмм

Гистограмма характеризует вероятностные свойства случайной величины по выборке конечных размеров. Скрипт `p0hist.m` реализует построение нормированной гистограммы по выборке из нормального распределения $N(0, 1)$. Графический вывод содержит как гистограмму, так и плотность вероятностей соответствующего ей нормального распределения.

```
%Script p0hist.m
% Построение гистограммы
% nr : объем выборки
clear
% ВВОД ДАННЫХ
nr=500;      % объем выборки
del=0.5;      % размер интервала для разбиения оси x
% КОНЕЦ ВВОДА
x=-5:del:5; % создание интервалов на оси x
d=randn(1,nr);          % d : выборка из нормального
                         %распределения (вектор-строка)
% hist(d,x);
[n,x]=hist(d,x);
bar(x,n./(nr.*del)); % графическое представление
                         % нормированной гистограммы
hold on
d2=d_gauss(x,0,1); % нормальная плотность вероятностей
                     % (вектор-строка)
plot(x,d2,'g') % графическое представление нормальной
                  % плотности вероятностей
```

Упражнения

1. Сравнить гистограммы, построенные по выборкам различного объема (например 100 – 500).
2. Сравнить гистограммы, построенные для различного размера интервалов разбиения оси x (например 4 – 20), без изменения минимальной и максимальной точек на оси x , задающих область определения гистограммы.

A.1.3. Описание случайных переменных

Ниже приведен ряд распределений дискретных случайных величин и плотностей вероятностей непрерывных случайных величин.

Бета-распределение

Плотность вероятностей

$$f_{\xi}(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{если } x \leq 0 \text{ или } x \geq 1, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

$$M\xi = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)}, \quad D\xi = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

Графическое представление (A.1) реализует скрипт `d0beta.m`. Функция `d=d_beta(x,a1,bt)` возвращает вектор-строку `d` — значения плотности вероятностей бета-распределения.

Биномиальное распределение

Биномиальное распределение вероятностей дается формулой (1.38).

Графическое представление плотности вероятностей (1.38) реализует скрипт `d0bin.m`. Функция `d=d_bin(n,p)` возвращает вектор-строку `d` — значения вероятностей биномиального распределения.

Ниже приводится текст скрипта `d0bin.m`.

```
% Script d0bin.m
% биномиальное распределение вероятностей
% call function d=d_bin(n,p)
% n : n=1,2,...; - максимальная величина аргумента x
%       x=0,1,...,n
% p : 0 < p < 1
% d : вектор-строка, содержит распределение вероятностей
%
clear
% ВВОД ДАННЫХ
```

```

n=50;
p=0.7;
% КОНЕЦ ВВОДА
d=d_bin(n,p);
x=0:n;
% графическое представление
rect=[0.1 0.1 .8 0.5]; % размер рисунка
axes('position',rect)
stem(x,d);
comp_prob=sum(d) % вычисление суммы вероятностей
math_exp= n .* p % математическое ожидание
stand_dev=sqrt(n .* p .* (1-p)) % стандартное
отклонение
m1=sum(x.*d) % математическое ожидание
s1=sqrt(sum((x-m1).^2.*d)) % стандартное отклонение
pause
% сравнение с нормальным распределением
hold on
dn=d_gauss(x,math_exp,stand_dev);
plot(x,dn,'g');

```

В процессе работы программы на экран выводятся значения математического ожидания и стандартного отклонения, вычисленные как по аналитическим выражениям, так и полученные суммированием взвешенных значений вероятностей (“по определению”).

Ниже приводится текст функции $d=d_bin(n,p)$.

```

function d=d_bin(n,p);
% биномиальное распределение d=d_bin(n,p)
% n : n=1,2,...; - максимальное значение аргумента x
%       x=0,1,...,n
% p : 0 < p < 1
%
n1=prod(1:n);
d=zeros(1,n+1); % задание вектора-строки d нулевыми
% значениями
for m=0:n
    if m==0
        m1=1;
    else

```

```

m1=prod(1:m);
end
nm=n-m;
if nm==0
    nm1=1;
else
    nm1=prod(1:nm);
end
d(m+1)=(n1/(m1*nm1))*p^m * (1-p)^nm;
end

```

Распределение Коши

Плотность вероятностей распределения Коши дается формулой (1.51). Графическое представление плотности вероятностей распределения Коши реализует скрипт `d0cauch.m`. Функция `d=d_cauch(x)` возвращает вектор-строку `d` — значения плотности вероятностей распределения Коши.

χ^2 -распределение

Графическое представление плотности вероятностей χ^2 -распределения (1.45) реализует скрипт `d0chisq.m`. Функция `d=d_chisq(x,n)` возвращает вектор-строку `d` — значения плотности вероятностей χ^2 -распределения.

Ниже приводится текст скрипта `d0chisq.m`.

```

% Script d0chisq.m
% плотность вероятностей для  $\chi^2$ -распределения
% call d=d_chisq(x,n)
% n : число степеней свободы
% x : значения случайной переменной, a < x < b
% d : вектор-строка, возвращает значения плотности
% вероятностей
clear
% ВВОД ДАННЫХ
n=50
% задание интервала на оси x для вычисления плотности
% вероятностей
a=0;          % (a < x < b)

```

```

b=100.0;
nx=500;          % объем выборки
% КОНЕЦ ВВОДА
del=(b-a)/(nx-1);      % задание значений аргумента
x=a:del:b;
d=d_chisq(x,n);      % вектор-строка
plot(x,d);           % графическое представление
comp_prob=trapz(x,d)    % вычисление полной вероятности
math_exp=n            % математическое ожидание
stand_dev=sqrt(2 .* n)    % стандартное отклонение
m1=trapz(x,x.*d)      % математическое ожидание
s1=sqrt(trapz(x,(x-m1).^2.*d))    % стандартное
отклонение
%
pause
% сравнение с нормальным распределением
hold on
dn=d_gauss(x,math_exp,stand_dev);
plot(x,dn,'g');       % графическое представление
% нормального распределения

```

В процессе работы программы на экран выводятся значения математического ожидания и стандартного отклонения, вычисленные как по аналитическим выражениям, так и полученные интегрированием взвешенных значений вероятностей (“по определению”). Ниже приводится текст функции $d=d_chisq(x,n)$.

```

function d=d_chisq(x,n)
%  $\chi^2$ -распределение d=d_chisq(x,n)
% n : число степеней свободы
% x : вектор-строка значений аргумента( $0 < x < \inf$ )
% d : вектор-строка -- значения плотности вероятностей
%
d=((x./2).^(n./2-1).*exp(-x ./ 2))/(2.*gamma(n./2));

```

Экспоненциальное распределение

Графическое представление экспоненциальной плотности вероятностей (1.49) реализует скрипт `d0expon.m`. Функция

`d=d_expon(x,1)` возвращает вектор-строку `d` — значения плотности вероятностей экспоненциального распределения.

Распределение Фишера

Графическое представление плотности вероятностей распределения Фишера (1.48) реализует скрипт `d0fish.m`. Функция `d=d_fish(x,n1,n2)` возвращает вектор-строку `d` — значения плотности вероятностей распределения Фишера.

Гамма распределение

Плотность вероятностей гамма-распределения дается формулой

$$f_{\xi}(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

$$M\xi = \frac{\alpha}{\beta}, \quad D\xi = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Графическое представление плотности вероятностей гамма-распределения реализует скрипт `d0gam.m`. Функция `d=d_gam(x,a1,bt)` возвращает вектор-строку `d` — значения плотности вероятностей гамма-распределения.

Нормальное (одномерное) распределение

Графическое представление плотности вероятностей нормального распределения (1.41) реализует скрипт `d0gauss.m`. Функция `d=d_gauss(x,xm,s)` возвращает вектор-строку `d` — значения плотности вероятностей нормального распределения.

Геометрическое распределение

Графическое представление геометрического распределения (1.40) реализует скрипт `d0geom.m`. Функция `d=d_geom(n,p)` возвращает вектор-строку `d` — значения вероятностей геометрического распределения.

Гипергеометрическое распределение

Распределение вероятностей гипергеометрического распределения дается формулой

$$f_{\xi}(x|n, a, b) = \begin{cases} \frac{C_x^a C_{n-x}^b}{C_n^{a+b}}, & x = 0, 1, 2, \dots, n, \\ 0, & x \neq 0, 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

где $a = 0, 1, 2, \dots$, $b = 0, 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $a + b \geq n$,

$$M\xi = \frac{nab}{(a+b)^2}, \quad D\xi = \frac{a+b-n}{a+b-1}.$$

Графическое представление гипергеометрического распределения реализует скрипт `d0hypg.m`. Функция `d=d_hypg(n,a,b)` возвращает вектор-строку `d` — значения вероятностей гипергеометрического распределения.

Распределение Лапласа

Графическое представление плотности вероятностей распределения Лапласа (1.50) реализует скрипт `d0lap1.m`. Функция `d=d_lap1(x,1)` возвращает вектор-строку `d` — значения плотности вероятностей распределения Лапласа.

Логарифмически нормальное распределение

Графическое представление плотности вероятностей логарифмически нормального распределения (1.52) реализует скрипт `d0lnorm.m`. Функция `d=d_lnorm(x,xm,s)` возвращает вектор-строку `d` — значения плотности вероятностей логарифмически нормального распределения.

Распределение Пауссона

Графическое представление распределения Пуассона (1.39) реализует скрипт `d0poiss.m`. Функция `d=d_poiss(n,a)` возвращает вектор-строку `d` — значения вероятностей распределения Пуассона.

Распределение Стьюдента

Графическое представление плотности вероятностей распределения Стьюдента (1.46) реализует скрипт `d0stu.m`. Функция `d=d_stu(x,n)` возвращает вектор-строку `d` — значения плотности вероятностей распределения Стьюдента.

Равномерное распределение

Графическое представление плотности вероятностей равномерного распределения (1.44) реализует скрипт `d0unif.m`. Функция `d=d_unif(x,a1,b1)` возвращает вектор-строку `d` — значения плотности вероятностей равномерного распределения.

Двумерное нормальное распределение

Графическое представление плотности вероятностей двумерного нормального распределения (см.п. 1.8.2) реализует скрипт `d0gauss2.m`. Функция `d=d_gauss2.m` возвращает матрицу `d` — значения плотности вероятностей двумерного нормального распределения.

Упражнения

1. Сравнить биномиальное распределение с плотностью вероятностей нормального распределения для различных значений параметров n ($n = 1, 5, 20$) и p ($p = 0.1, 0.5, 0.9$).
2. Сравнить распределение Пуассона с плотностью вероятностей нормального распределения для различных значений параметра a ($a = 0.1, 0.5, 1.0, 5.0$).
3. Сравнить плотность вероятностей χ^2 -распределения с плотностью вероятностей нормального распределения при различных значениях параметра n ($n = 2, 5, 10, 20$).
4. Сравнить плотность вероятностей распределения Стьюдента с плотностью вероятностей нормального распределения при различных значениях параметра n ($n = 2, 5, 10, 20$).
5. Выполнить графическое построение двумерной нормальной плотности при различных значениях математических ожиданий m_1

и m_2 ($m_1 = 0, 1, 10$; $m_2 = 0, 1, 10$), стандартных отклонений σ_1 и σ_2 ($\sigma_1 = 0, 1, 10$; $\sigma_2 = 0, 1, 10$) и коэффициента корреляции ρ ($\rho = -0, 95; 0; 0, 95$).

6. Выполнить графическое представление других распределений вероятностей, упомянутых в п. А.1.3.

A.1.4. Генераторы случайных чисел

Существует широкий спектр алгоритмов генерирования случайных чисел на ЭВМ (см., например, [38]) для различных типов распределений. Ниже приведены простейшие алгоритмы для генерации случайных чисел, реализованные в скриптах `rnd0ald.m` и `rnd0alc.m` соответственно для дискретных и непрерывных случайных величин, упомянутых в п. А.1.3.

При этом в обоих случаях для создания выборок случайных чисел, удовлетворяющих различным распределениям, используется генератор случайных чисел с равномерным распределением на интервале $[0, 1]$, т. е. с плотностью вероятностей вида

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 0. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Метод моделирования значений дискретных случайных величин ξ с распределением вероятностей $p_m = P(\xi = x_m)$ основан на следующем равенстве:

$$P\left(\sum_{n=0}^{m-1} p_n \leq \alpha < \sum_{n=0}^m p_n\right) = p_m, \quad (\text{A.5})$$

где величина α принадлежит равномерному распределению (А.4).

В случае непрерывных случайных величин, задаваемых функцией распределения $F(x)$, генератор случайных чисел построен с использованием выражения

$$\xi = F^{-1}(\alpha), \quad (\text{A.6})$$

где $F^{-1}(\alpha)$ — обратная функция распределения, α принадлежит равномерному распределению (А.4), ξ принадлежит распределению с функцией распределения $F(x)$ (в работе [38] обсуждаются ограничения данного подхода и другие алгоритмы построения генераторов

случайных чисел). Отметим, что если $F(x)$ — строго монотонная непрерывная функция, то справедливы следующие равенства:

$$P(F^{-1}(\alpha) < x) = P(\alpha < F(x)) = F(x). \quad (\text{A.7})$$

Генераторы случайных величин, подчиняющиеся равномерному и нормальному распределениям с произвольными параметрами, реализованы соответственно в скриптах `rnd0uni.m` и `rnd0gau.m`. Скрипт `rnd0n2.m` реализует генератор двумерного нормального распределения.

Критерий согласия Колмогорова

В скрипте `gc0kolm.m` реализован критерий согласия Колмогорова о принадлежности выборки случайных величин (эмпирической функции распределения) заданному распределению (распределению, заданному своей функцией распределения).

Критерий Колмогорова дает вероятность события, заключающегося в том, что максимальная верхняя грань модуля разности функции распределения $F_\xi(x)$ и ее выборочного аналога $F_N^*(x)$ меньше, чем величина γ/\sqrt{N} ,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\sup_{-\infty < x < \infty} |F_\xi(x) - F_N^*(x)| < \gamma/\sqrt{N}\right) &= \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2\gamma^2), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

где N — объем выборки. Критерий реализован для непрерывных распределений из п. А.1.3.

Упражнения

1. Используя скрипты `rnd0alc.m` и `rnd0ald.m` из п. А.1.4, сравнить величины математического ожидания и стандартного отклонения с их выборочными аналогами для различных объемов выборок (например 10 – 500).

2. Используя скрипт `rnd0n2.m`, сравнить значения параметров двумерного нормального распределения (математических ожиданий, стандартных отклонений, коэффициента корреляции) с их выборочными аналогами для различных объемов выборки (например 100 – 5000).

3. Используя скрипт `gc0kolm.m`, вычислить вероятность, отвечающую критерию Колмогорова, для некоторых типов распределений (нормального, χ^2 , Стьюдента). Обратить внимание на поведение выборочной функции распределения при различных объемах выборки (например 10 – 1000).

A.1.5. Доверительные интервалы

Скрипт `g0conf.m` реализует построение доверительного интервала для выборочного среднего (см. п. 1.8.14) случайной величины, распределенной по нормальному закону.

Упражнения

1. Используя скрипт `g0conf.m`, найти доверительные интервалы для выборочного среднего случайной величины, распределенной по нормальному закону при различных значениях доверительной вероятности β (например $\beta=0.2, 0.5, 0.9$) и объема выборки (например 10 – 100).

A.1.6. Временные ряды

Коррелированные и некоррелированные процессы

Скрипт `r0covrp.m` генерирует некоррелированный временной ряд и цепь Маркова (см. § 1.10), выполняет построение выборочной ковариационной матрицы.

Автокорреляционная и взаимокорреляционная функции

Скрипт `r0corf.m` выполняет построение автокорреляционных и взаимокорреляционных функций для некоррелированных временных рядов и цепей Маркова.

Упражнения

1. Используя скрипт `r0covrp.m`, вычислить выборочные ковариационную и корреляционную матрицы для некоррелированных и коррелированных временных рядов различной длины (например 100, 1000, 10000).

2. Используя скрипт `p0corf.m`, сравнить автокорреляционные и взаимокорреляционные функции для коррелированных и некоррелированных временных рядов.

A.2. Преобразования

A.2.1. Преобразование Фурье

Функции МАТЛАБ `fft` и `ifft` реализуют дискретное преобразование Фурье и обратное дискретное преобразование Фурье соответственно (см. также § 12.1), которые задаются формулами вида

$$y_k = \sum_{r=0}^{N-1} x_r \exp \left[-i \frac{2\pi kr}{N} \right], \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (\text{A.9})$$

(преобразование Фурье),

$$x_r = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \exp \left[i \frac{2\pi kr}{N} \right], \quad r = 0, \dots, N-1 \quad (\text{A.10})$$

(обратное преобразование Фурье).

A.2.2. Простейшие сигналы и их спектральные характеристики

Скрипт `p0wlet.m` создает модель простейшей сейсмической трассы: сигнал и некоррелированный шум с нормальным распределением. Вычисляются спектральные характеристики трассы, автокорреляционная функция и спектр мощности (см. § 1.10). Функция `p_wlet.m`, вызываемая скриптом `p0wlet.m`, создает различные сигналы.

1. Дискретная дельта-функция:

$$x_r = \begin{cases} 1, & \text{если } r = j, \\ 0, & \text{если } r \neq j. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

2. Дельта-подобный сигнал:

$$x_r = \exp \left[-\pi(r - t_p)/t_c \right]^2, \quad r = 0, \dots, N-1, \quad (\text{A.12})$$

где t_c — ширина импульса, а t_p определяет сдвиг относительно нулевого отсчета $r = 0$.

3. Импульс Риккера:

$$x_r = \exp \left[-(\pi * (r - (t_c + t_p)) / t_c)^2 \right] \times \\ \times \left(1 - 2 (\pi(r - (t_c + t_p)) / t_c)^2 \right), \\ r = 0, \dots, N - 1, \quad (A.13)$$

где t_c — ширина импульса, а t_p определяет сдвиг относительно нулевого отсчета $r = 0$. Пример графического вывода скрипта `p0wlet.m` дан на рис. А.1.

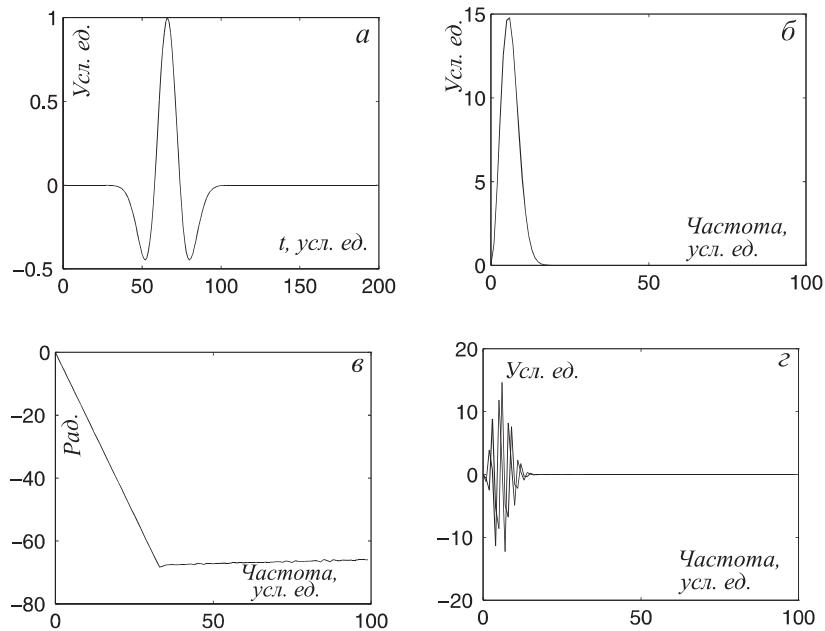


Рис. А.1. Пример графического вывода скрипта `p0wlet.m`. Импульс Риккера (a) и модуль его спектра (б), фаза спектра (в), вещественная и мнимая части спектра (г). По оси абсцисс отложены номера отсчетов — см. формулы (A.9), (A.10).

Упражнение

1. Используя скрипт `p0wlet.m`, вычислить спектры импульсов сигналов из формул (A.11)–(A.13) для различных значений t_p — временного сдвига и различных соотношений шум/сигнал.

A.2.3. Многофакторный анализ

Скрипт `p0cater1.m` реализует алгоритм многофакторного анализа (см. § 12.9).

Ниже приведен пример задания исходных данных для скрипта `p0cater1.m` при анализе простейшей записи “сигнал и шум” (рис. A.2):

```
np=500; % длина записи (число отсчетов)
jm=20; % максимальное число главных
% компонент
unzer=2; % число главных компонент
% (ненулевые собств., числа) при
% восстановлении
op=3; % задание формы сигнала
tp=100; % сдвиг сигнала на записи
% (число отсчетов)
%
xm=0; % математическое ожидание для шума
s=0.05; % стандартное отклонение для шума
```

Ковариационная матрица записи и ее собственные числа (и собственные векторы) представлены на рис. A.3 и A.4 соответственно. Диаграммное представление пар главных компонент и полный набор главных компонент даны соответственно на рис. A.5 и A.6 (см. пример из § 12.9). Результат восстановления исходной записи с суммированием различного числа (1 – 4) главных компонент представлен на рис. A.7.

Упражнение

1. Используя скрипт `p0cater1.m`, выполнить многофакторный анализ записи (сигнал и нормальная шумовая компонента) для различных значений максимального числа главных компонент (напри-

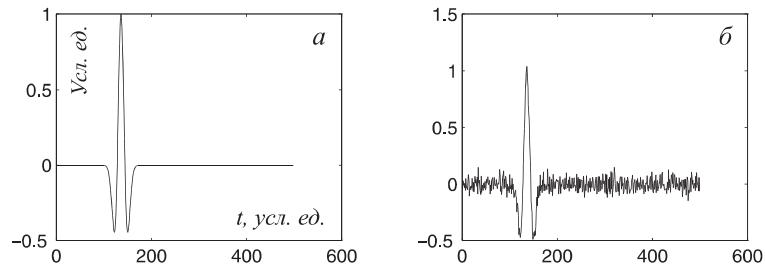


Рис. А.2. Исходная запись без шума (а) и с аddитивным некоррелированным шумом (б).

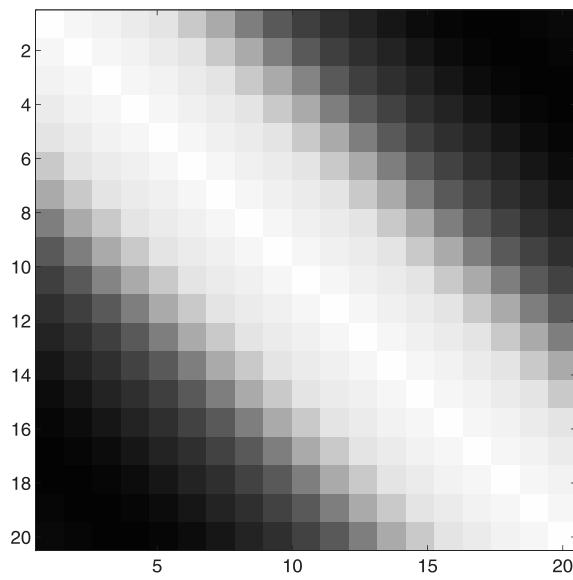


Рис. А.3. Корреляционная матрица $M = 20$.

мер 5 – 20), для различного числа главных компонент (ненулевых собственных чисел) (например 2 – 10), при различном отношении шум/сигнал.

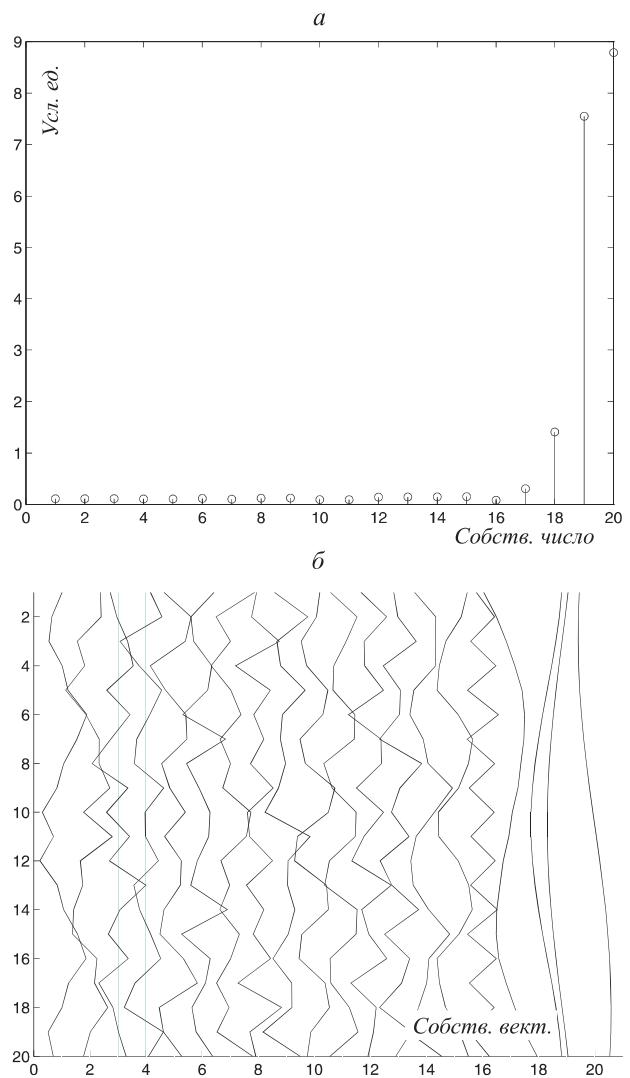


Рис. А.4. Собственные числа (а) и собственные векторы (б) корреляционной матрицы.

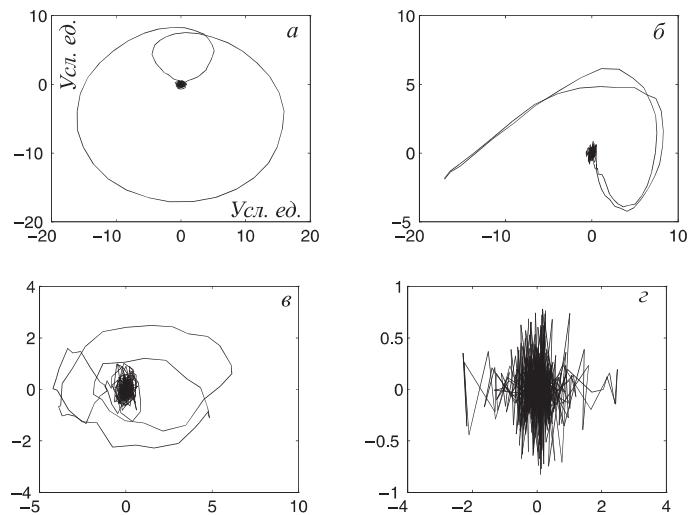


Рис. А.5. Диаграммное представление пар главных компонент: M и $M - 1$ (а); $M - 1$ и $M - 2$ (б); $M - 2$ и $M - 3$ (в); $M - 3$ и $M - 4$ (г).
Максимальное число главных компонент — 20.

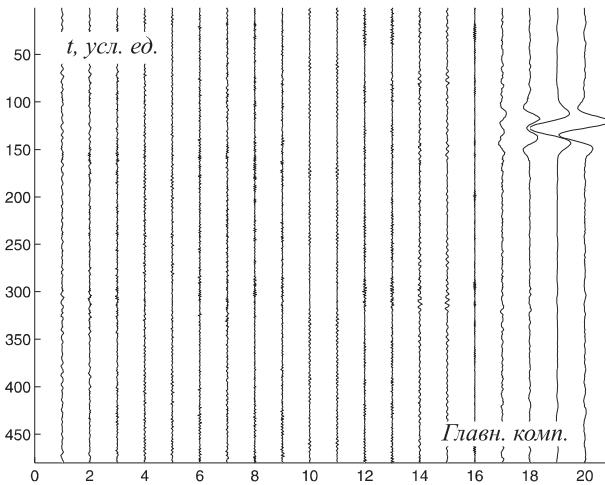


Рис. А.6. Полный набор главных компонент ($M = 20$).

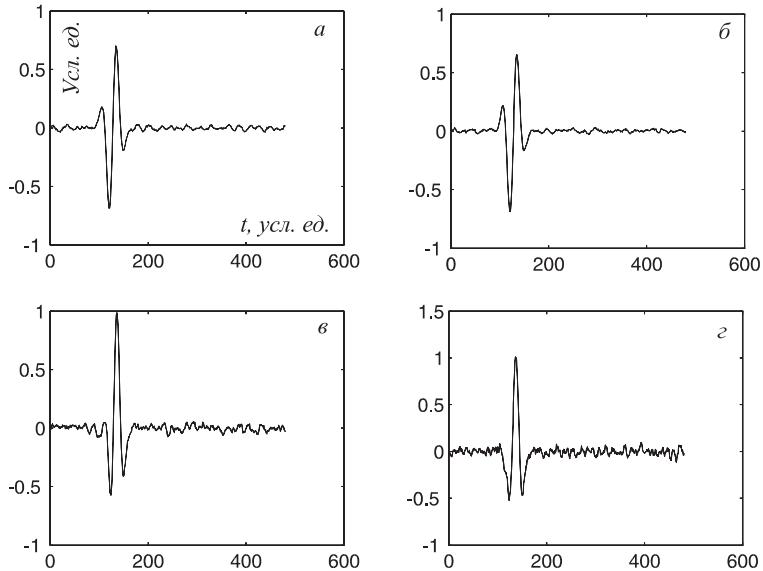


Рис. А.7. Восстановление исходной записи, представленной на рис. А.2, б. Восстановление выполнено только по первой главной компоненте (а), а также суммированием двух (б), трех (в) и четырех (г) главных компонент (см. рис. А.6).

A.2.4. Кепстральное преобразование

Скрипт `p0sep1.m` реализует кепстральное преобразование (см. § 12.6).

Кепстральное преобразование в скрипте `p0sep1.m` реализовано следующим образом:

```
d=fft(trace); % преобразование Фурье
% вектора "trace"
dabs=abs(d); % вычисление абсолютной
% величины спектра
dang=unwrap(angle(d)); % вычисление фазы
dcep=fft(log(dabs)+i*dang); % преобразование Фурье
% логарифма спектра (кепстр)
```

Обратное кепстральное преобразование реализовано следующим образом:

```
dback=ifft(dcep); % обратное преобразование
dexp=exp(dback); % Фурье
dback0=ifft(dexp); % обратное преобразование
% Фурье
```

На рис. А.8–А.9 представлены два сигнала и их кепстральные характеристики соответственно. Результат свертки первого и второго сигналов сравнивается с обратным кепстральным преобразованием суммы их кепстров — рис. А.10.

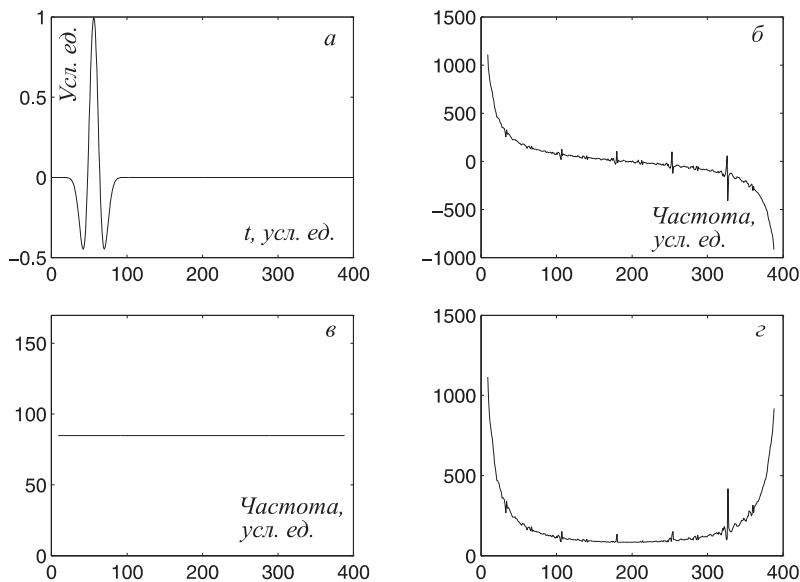


Рис. А.8. Первый сигнал (а) и его кепстральные характеристики (б – г). Импульс Риккера (а), вещественная (б), мнимая (в) части и модуль его кепстра (г).

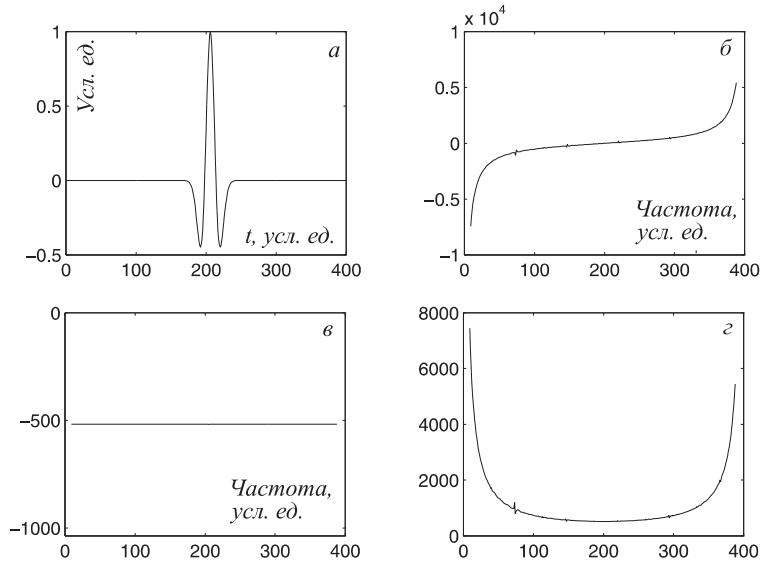


Рис. А.9. Второй сигнал и его кепстральные характеристики
(см. рис. А.8).

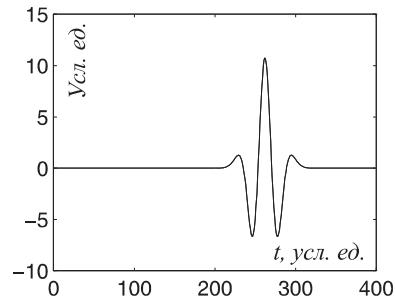


Рис. А.10. Свертка сигналов,
представленных на рис. А.8, а, А.9, а и
обратное кепстральное преобразование
суммы их кепстров.

Упражнение

Используя скрипт `r0sep1.m`, сравнить операцию свертки и суммирование в кепстральной области.

A.3. Решение прямых и обратных задач

A.3.1. Моделирование гравитационного поля

Гравитационное поле однородной сферы

Скрипт `f0sph1.m` моделирует гравитационное поле однородной сферы.

Гравитационный потенциал V однородной сферы дается формулой

$$V = \gamma \frac{4}{3} \frac{\pi a^3 \rho}{r}, \quad (\text{A.14})$$

где γ — гравитационная постоянная; a — радиус сферы; ρ — массовая плотность; r — расстояние от центра сферы до точки наблюдения.

Гравитационная сила, порожденная однородной сферой, записывается в виде

$$\mathbf{g} = -\gamma \frac{4}{3} \frac{\pi a^3 \rho}{r^2} \mathbf{n}, \quad (\text{A.15})$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный из центра сферы в точку наблюдения.

Гравитационное поле однородного цилиндра

Скрипт `f0cyl1.m` моделирует гравитационное поле однородного цилиндра.

Гравитационный потенциал V однородного горизонтального цилиндра дается формулой

$$V = 2\pi a^2 \rho \gamma \log \frac{1}{r}, \quad (\text{A.16})$$

где γ — гравитационная постоянная; a — радиус цилиндра; ρ — массовая плотность; r — расстояние между осью цилиндра и точкой наблюдения.

Гравитационная сила, порожденная однородным горизонтальным цилиндром, записывается в виде

$$\mathbf{g} = -\frac{2\pi a^2 \rho \gamma}{r} \mathbf{n}, \quad (\text{A.17})$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный из центра цилиндра в точку наблюдения.

A.3.2. Моделирование магнитного поля

Магнитная индукция диполя

Скрипт `f0dip1.m` моделирует магнитную индукцию, вызванную магнитным диполем.

Магнитный потенциал V магнитного диполя дается формулой

$$V = C_m \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^3}, \quad (\text{A.18})$$

где C_m — равно $\mu_0/4\pi$ в системе СИ; \mathbf{m} — дипольный момент; r — расстояние между диполем и точкой наблюдения. Магнитная индукция записывается в виде

$$\mathbf{B} = C_m \frac{m}{r^3} [3(\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{n}_r) \mathbf{n}_r - \mathbf{n}_m], \quad (\text{A.19})$$

где $m = |\mathbf{m}|$, $\mathbf{n}_m = \mathbf{m}/|\mathbf{m}|$, $\mathbf{n}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$.

Магнитная индукция горизонтального цилиндра

Скрипт `f0mcyl1.m` моделирует магнитную индукцию, вызванную горизонтальным магнитным цилиндром.

Магнитный потенциал горизонтального магнитного цилиндра дается формулой

$$V = 2C_m \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_r)}{r}, \quad (\text{A.20})$$

где C_m — равно $\mu_0/4\pi$ в системе СИ; \mathbf{m} — дипольный момент на единицу длины; $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние между центром цилиндра и точкой наблюдения; $\mathbf{n}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$.

Магнитная индукция записывается в виде

$$\mathbf{B} = \frac{2C_m m}{r^2} [2(\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{n}_r) \mathbf{n}_r - \mathbf{n}_m], \quad (\text{A.21})$$

где $m = |\mathbf{m}|$, $\mathbf{n}_m = \mathbf{m}/|\mathbf{m}|$.

A.3.3. Моделирование сейсмического поля

Скрипт `fd0mn1.m` реализует численное моделирование распространения упругих волн конечно-разностным методом (1-D задача)

в полупространстве с внутренними границами (на которых параметры среды испытывают разрыв).

Компонента поля смещений φ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial(\lambda + 2\mu)}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + f = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (\text{A.22})$$

и граничным условиям на свободной границе ($z = 0$)

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (\text{A.23})$$

и внутренних границах ($z = z_i$)

$$\varphi|_{z=z_i-0} = \varphi|_{z=z_i+0}, \quad (\lambda + 2\mu) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=z_i-0} = (\lambda + 2\mu) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=z_i+0}, \quad (\text{A.24})$$

где ρ — массовая плотность, λ и μ — параметры Ламе. Волновое поле возбуждается точечным источником

$$f = \delta(z) \hat{f}(t), \quad (\text{A.25})$$

расположенным в точке $z = z_0$.

Кусочно-однородное полупространство может содержать плавную неоднородность величины $E = \lambda + 2\mu$, которая задается формулой

$$\delta E(z) = \begin{cases} \delta E = 0, & \text{если } |z - \tilde{z}| > \Delta, \\ \delta E = E_m 0.5[1 + \cos(\pi(z - \tilde{z})/\Delta)], & \text{если } |z - \tilde{z}| < \Delta, \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

или плавную неоднородность массовой плотности ρ :

$$\delta \rho(z) = \begin{cases} \delta \rho = 0, & \text{если } |z - \tilde{z}| > \Delta, \\ \delta \rho = \rho_m 0.5[1 + \cos(\pi(z - \tilde{z})/\Delta)], & \text{если } |z - \tilde{z}| < \Delta, \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

где \tilde{z} — положение центра неоднородности, Δ — полуширина неоднородности, E_m и ρ_m — соответственно максимальные величины возмущения E и ρ .

Упражнения

1. Вычислить волновое поле в кусочно-однородном полупространстве для следующей модели среды и схемы наблюдений:

расположение источника — $z_s = 0.003$ км;

расположение приемников — $z_r = 0.003, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5$ км;

расположение границ — $z=0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ км;

упругие параметры — $E = \lambda + 2\mu = 1$;

массовая плотность $\rho = 1.0, 1.2, 0.8, 1.2, 1.0$;

шаг по времени $dt = 0.001$ с;

временная функция источника — импульс Риккера с частотой 25 Гц.

На рис. А.11 представлены модель среды, временная функция в источнике и первая трасса. Выполнить качественный анализ волнового поля. Сейсмограмма представлена на рис. А.12.

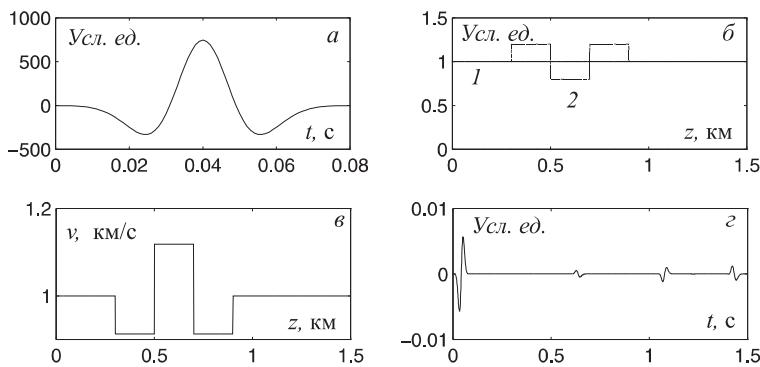


Рис. А.11. Исходные данные для моделирования распространения упругих волн: зависимость воздействия в источнике от времени (а); 1 — ρ , 2 — $\lambda + 2\mu$ (б); скорость распространения продольных волн (с); волновое поле в первой точке наблюдения (д).

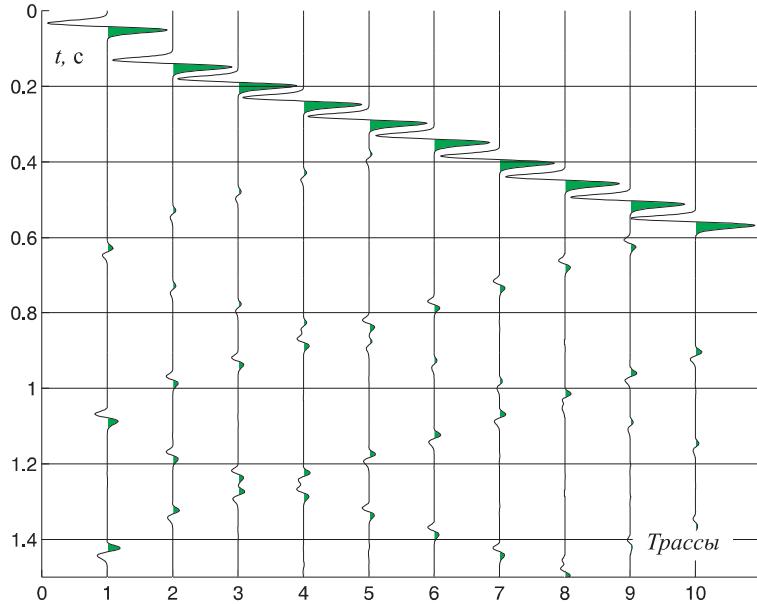


Рис. А.12. Сейсмограмма.

A.3.4. Деконволюция с использованием фильтра Винера

Скрипт `p0decon2.m` дает пример деконволюции с использованием винеровского фильтра (см. § 12.10)³.

Рассмотрим пример работы скрипта `p0decon2.m`. Пусть имеется сейсмограмма из п. А.3.3 (см. упражнение к п. А.3.3, рис. А.12) с дополнительным шумом. Поставим задачу уменьшить отношение шум/сигнал и приблизить форму сигналов на сейсмограмме к δ -функции. На рис. А.13 представлен фрагмент сейсмограммы из рис. А.12 с добавлением шума с нормальным распределением ($N(0, \sigma A_m)$, где $\sigma=0.1$, A_m — максимальная величина сейсмического сигнала на сейсмограмме). На рис. А.14 изображен фрагмент сейсмограммы, представленной на рис. А.13, после деконволюции.

³В свою очередь фильтр Винера можно рассматривать как пример применения метода наименьших квадратов, рассмотренный в § 6.4.

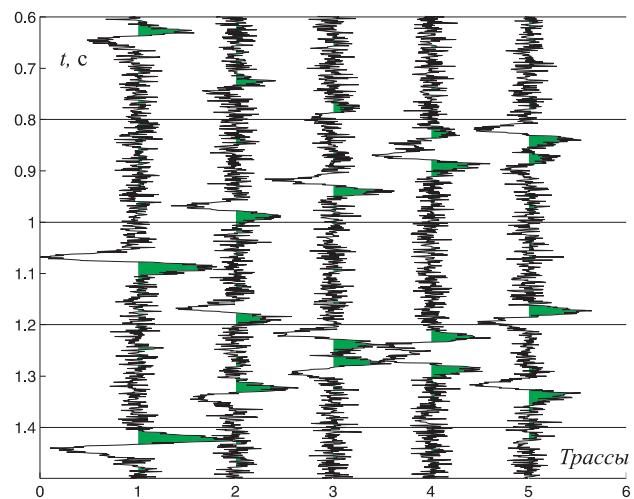


Рис. А.13. Фрагмент сейсмограммы из рис. А.12 с добавлением некоррелированного шума с нормальным распределением.

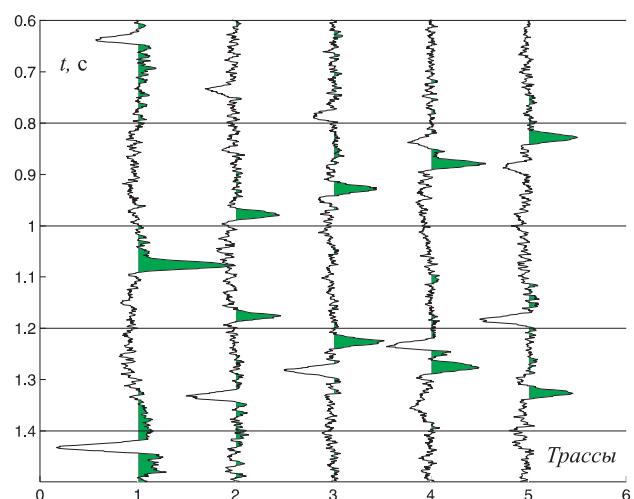


Рис. А.14. Деконволюция сейсмограммы, представленной на рис. А.13.

Упражнения

Выполнить деконволюцию сейсмического поля:

без добавления шума (`sig1=sig2=0`);

при различных значениях регуляризующего коэффициента α (см. формулу (12.36)) (при `eps1=2.0, 1.0, 0.5`);

при различных величинах уровня шума (`sig1=sig2=0.5, 0.1`).

A.3.5. Количественная интерпретация

Рассмотрим применение метода Ньютона–Лекама (см. § 3.2, 6.2, 6.3) для точечного оценивания параметров $\boldsymbol{\theta}$ геофизических объектов (script `p0mg1.m`). В качестве примера рассмотрим тела с вертикальной намагниченностью: нить полюсов

$$f_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2Mh}{h^2 + (x_k - \xi)^2}, \quad \boldsymbol{\theta} = \{M, h, \xi\}; \quad (\text{A.28})$$

нить диполей

$$f_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2M[h^2 - (x_k - \xi)^2]}{[h^2 + (x_k - \xi)^2]^2}, \quad \boldsymbol{\theta} = \{M, h, \xi\}; \quad (\text{A.29})$$

полюс

$$f_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{M(2h^2 - x_k^2)}{(h^2 + x_k^2)^{5/2}}, \quad \boldsymbol{\theta} = \{M, h\}; \quad (\text{A.30})$$

диполь

$$f_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{Mh}{(h^2 + x_k^2)^{3/2}}, \quad \boldsymbol{\theta} = \{M, h\}; \quad (\text{A.31})$$

где M — магнитный момент, h — глубина, ξ — положение максимума функции $f_k(\boldsymbol{\theta})$.

Применяя метод максимального правдоподобия к аддитивной модели экспериментального материала

$$u_k = f_k(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon_k \quad (\mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (\text{A.32})$$

содержащей некоррелированную нормальную шумовую компоненту ε_k ($N(0, \sigma)$), можно получить следующую процедуру оценивания

вектора искомых величин $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_S)$ (см. § 6.3). Сначала выбирается вектор начальных значений $\boldsymbol{\theta}_0$ для вектора искомых величин $\boldsymbol{\theta}$, затем решается система линейных уравнений

$$\tilde{C}\Delta\boldsymbol{\theta}^{(1)} = \mathbf{d}, \quad (\text{A.33})$$

где

$$d_s = \frac{1}{\sigma^2} \left[(\mathbf{u} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}))^T \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} \right] \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(0)}},$$

$$\tilde{c}_{ss'} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \mathbf{f}^T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(0)}} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{s'}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{(0)}},$$

$$s = 1, \dots, S$$

и вычисляется первое приближение $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}$ для искомых величин $\boldsymbol{\theta}$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)} = \boldsymbol{\theta}^{(0)} + \Delta\boldsymbol{\theta}^{(1)}. \quad (\text{A.34})$$

Итерационный процесс заканчивается, если выполнены пороговые условия, например,

$$|\Delta\hat{\theta}_s^{(n)} / \hat{\theta}_s^{(n)}| \approx 10^{-2} \div 10^{-3}. \quad (\text{A.35})$$

Пример подобного численного моделирования для поля из формулы (A.28) представлен на рис. А.15 для следующего набора входных данных:

```
x=-4:0.1:4; % точки наблюдения
m=1; % магнитный момент
h=1; % глубина
xi=0.0; % расположение восстанавливаемого объекта
xm=0.0; % математическое ожидание шума
s=0.1; % стандартное отклонение шума
m0=0.5; % начальная величина m
h0=1.5; % начальная величина h
xi=0.; % начальная величина xi
eps_m=1.0e-5; % пороговое условие для m
eps_h=1.0e-5; % пороговое условие для h
```

Выходными данными скрипта p0mg1.m являются оценки величин M и h , матрица Фишера и обратная к ней матрица.

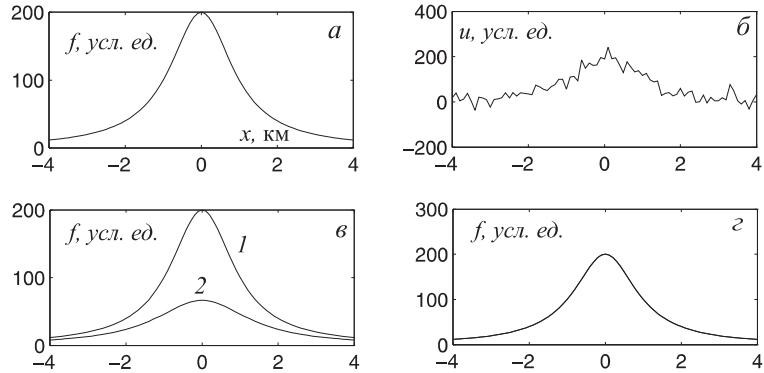


Рис. А.15. Иллюстрация количественной интерпретации. Модельное поле без шума (а), с шумом (б), модельное поле (1) и поле (2), отвечающее начальным параметрам (в), сравнение модельного поля и поля объекта с параметрами, полученными в результате оценивания (г).

Упражнения

Используя скрипт `r0mg1.m`, выполнить следующие задания для моделей (А.28) – (А.31) (обратить внимание на величины элементов матрицы Фишера и обратной к ней матрицы):

1. Найти оценки параметров M и h при различных величинах стандартного отклонения (например, $\sigma = 0.1, 0.2, 0.3$).
2. Исследовать сходимость итерационного процесса при различных величинах начальных значений M и h .
3. Выполнить моделирование при различном числе точек наблюдения (например 10, 20, 50, 100).

A.3.6. Качественная интерпретация

Скрипт `r0mg2.m` реализует алгоритм качественной интерпретации (см. § 3.4 – “сигнал и шум (H_0) или шум (H_1)”), основанный на критерии отношения апостериорных вероятностей (см. § 7.1, 7.2) для моделей сигналов из формул (А.28)–(А.31). В случае некоррелированного нормального шума такой критерий записывается в

следующем виде:

$$\alpha = \ln \frac{P(1)}{P(0)} + \frac{1}{2\sigma^2} [\mathbf{u}^T \mathbf{u} - (\mathbf{u} - \mathbf{f}_1)^T (\mathbf{u} - \mathbf{f}_1)]. \quad (\text{A.36})$$

Если $\alpha \geq 0$, то принимается гипотеза H_1 (“шум”). Если $\alpha < 0$, то принимается гипотеза H_0 (“сигнал и шум”).

Предполагается, что модельная функция $f_1(\boldsymbol{\theta})$ отличается от “истинной” функции $f_1(\boldsymbol{\theta} + \Delta\boldsymbol{\theta})$. Такое отличие задается отклонением $\Delta\boldsymbol{\theta}$ “истинных” параметров $\boldsymbol{\theta} + \Delta\boldsymbol{\theta}$ от их предполагаемых значений $\boldsymbol{\theta}$.

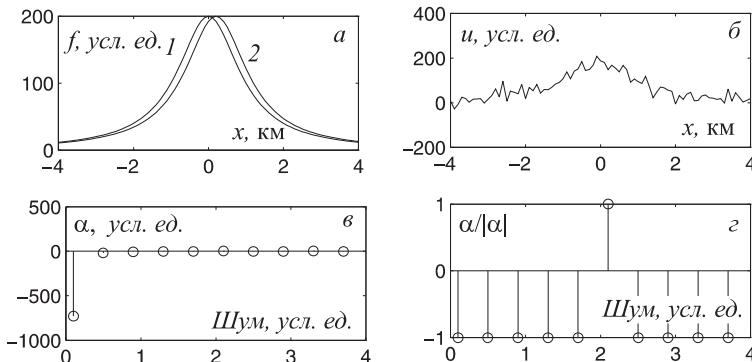


Рис. А.16. Иллюстрация качественной интерпретации. Модельное поле $f_1(\boldsymbol{\theta})$ (1) и “истинное” поле $f_1(\boldsymbol{\theta} + \Delta\boldsymbol{\theta})$ (2) (a), модельное поле с некоррелированным шумом (б), зависимость параметра α (в) и нормированного параметра $\alpha/|\alpha|$ (г) от величины шума.

Пример качественной интерпретации для поля (А.28) демонстрируется на рис. А.16 при следующих значений входных данных:

```
x=-4:0.1:4; % точки наблюдения
m=1; % магнитный момент
h=1; % глубина
xi=0.0; % положение объекта
ddm=0.0; % отклонение m
ddh=0.0; % отклонение h
ddxi=0.2; % отклонение xi
```

```

xm=0.0;      % математическое ожидание шума
p0=0.5;      % априорная вероятность существования объекта
s=0.1;        % начальное стандартное отклонение для шума
s1=s:0.4:4;   % величины стандартных отклонений для шума

```

Упражнения

Используя скрипт `p0mg2.m`, выполнить для моделей (A.28) – (A.31):

- 1) моделирование для широкого диапазона изменения отношения шум/сигнал (переменная `s1`);
- 2) моделирование для различных величин расхождения $\Delta\theta$ аргументов модельной функции и “истинного” поля;
- 3) моделирование для различных величин априорной вероятности, например, $p0=0,25; 0,5; 0,75$;
- 4) численное моделирование для различного числа точек наблюдения (например 10, 20, 50, 100).

A.3.7. Дифракционная томография

Скрипт `dt0mn1.m` реализует численное моделирование восстановления (определения параметров) неоднородности среды методом дифракционной томографии (см. гл. 10, 11).

Прямая задача на распространение упругих волн (1-D) в однородном пространстве, содержащем плавное возмущение параметров с размером порядка длины волны, решается конечно-разностным методом. При этом компонента волнового поля φ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных (A.22) и граничным условиям (A.23), (A.24). Восстановление возмущений параметров λ , μ и ρ осуществляется методом дифракционной томографии по следующему алгоритму.

Если ввести томографические функционалы p_ρ и p_E , связанные с величинами ρ и $E = \lambda + 2\mu$ соответственно:

$$p_\rho(z, z_s, z_r, t) = - \int_0^\infty \varphi_{\text{out}}(z, z_r, t - \tau) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{\text{in}}(z, z_s, \tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned}
p_E(z, z_s, z_r, t) &= - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{\text{out}}(z, z_r, t - \tau) \times \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{\text{in}}(z, z_s, \tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{A.37}$$

и использовать приближение Борна, то рассеянное (или *разностное*) поле $\Delta\varphi$, порожденное неоднородностью, можно записать в виде

$$\Delta\varphi \approx \int_L (p_E \delta E + p_\rho \delta \rho) dl, \tag{A.38}$$

где z_s и z_r — положение источника и точки наблюдения; φ_{in} — волновое поле, генерируемое источником; φ_{out} — волновое поле, генерируемое расположенным в точке наблюдения “искусственным” источником с временной зависимостью $\delta(t)$; L — область восстановления параметров среды; δE , $\delta \rho$ — искомые величины (возмущение E и ρ относительно опорной среды).

Если, например, считается выполненным $\delta \rho \approx 0$ и определению подлежит только δE , то интегральное уравнение (A.38) после дискретизации может быть представлено как система линейных уравнений

$$P\boldsymbol{\delta}_E = \boldsymbol{\delta}_\varphi, \tag{A.39}$$

где $\boldsymbol{\delta}_E$ — искомый вектор, а $\boldsymbol{\delta}_\varphi$ — разностное поле.

Одна из простых схем регуляризации решения системы линейных уравнений (A.39) состоит в решении следующей системы линейных уравнений:

$$(P'P + \varepsilon D'D)\boldsymbol{\delta}_E = P'\boldsymbol{\delta}_\varphi, \tag{A.40}$$

где ε — параметр регуляризации, D — например, единичная матрица.

Рассмотрим пример численного моделирования для следующей модели:

$$z_s = z_r = 0.003 \text{ км};$$

$$\rho = 1, E = 1, v = \sqrt{E/\rho} = 1;$$

искомая неоднородность задается формулой

$$\delta E(z) = \begin{cases} \delta E = 0, & \text{если } |z - \tilde{z}| > \Delta, \\ \delta E = E_m 0.5[1 + \cos(\pi(z - \tilde{z})/\Delta)], & \text{если } |z - \tilde{z}| < \Delta, \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

где \tilde{z} — расположение центра неоднородности, Δ — полуширина неоднородности, E_m — максимальная величина возмущения E . $\tilde{z} = 0.3$ км, $\Delta = 0.03$ км, $E_m = 0.3$; импульс Риккера

$$F(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \exp\left\{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\} \exp\{-2\pi i\omega/\omega_0\} \quad (\text{A.42})$$

с доминирующей частотой $\omega_0 = 25$ Гц; интервал L восстановления параметров среды $L = 0.21 - 0.39$ км; параметр регуляризации $\varepsilon = 10^{-5}$.

Графическое представление модели среды и результата решения прямой задачи дано на рис. А.17 и рис. А.18 соответственно.

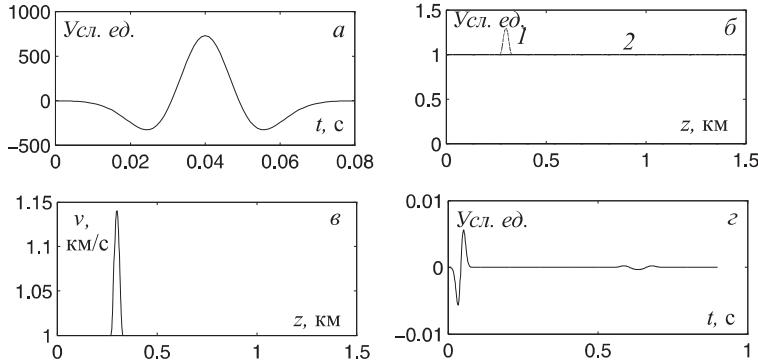


Рис. А.17. Исходные данные для моделирования распространения упругих волн и волновое поле в первой точке наблюдения. Форма представления данных та же, что и на рис. А.11.

Результат восстановления параметров неоднородности представлен на рис. А.19.

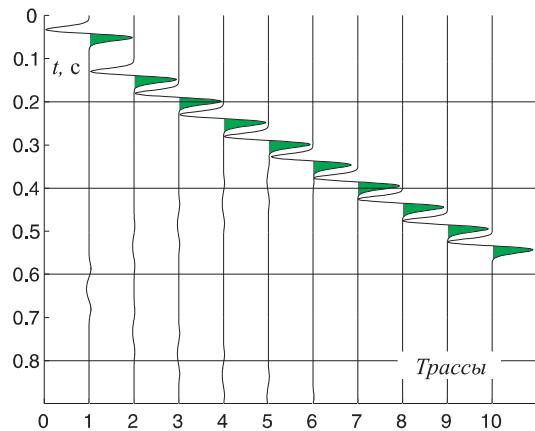


Рис. А.18. Сейсмограмма для точек наблюдения (км): 0.003, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5.

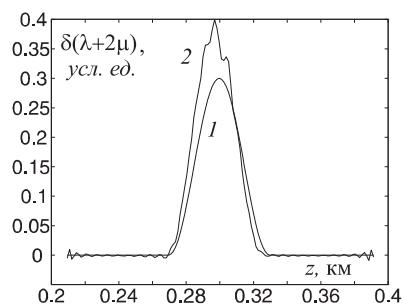


Рис. А.19. Восстановление возмущения скорости распространения продольной волны: 1 — модель неоднородности; 2 — результат восстановления.

Упражнения

- Используя скрипт `dt0mn1`, исследовать точность восстановления параметра E методом дифракционной томографии в зависимости от контрастности и размера неоднородности (например, $E = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5 \Delta = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$).
- Оценить влияние шумовых отклонений в исходных данных на качество восстановления неоднородности.

Приложение Б

ТАБЛИЦЫ

Приведенные здесь таблицы позволяют выполнять вероятностные вычисления с использованием функции Лапласа, распределением χ^2 и распределением Стьюдента.

Таблица Б.1. Значения функции $\tilde{\Phi}(z) = 2(1 - \Phi(z))$
(см. п. 1.8.1, формулу (1.42))

z	$\tilde{\Phi}(z)$	z	$\tilde{\Phi}(z)$	z	$\tilde{\Phi}(z)$	z	$\tilde{\Phi}(z)$
0,0	1,00000	1,0	0,31732	2,0	0,04550	3,0	0,00270
0,1	0,92034	1,1	0,27134	2,1	0,03572	3,1	0,00194
0,2	0,84148	1,2	0,23014	2,2	0,02780	3,2	0,00138
0,3	0,76418	1,3	0,19360	2,3	0,02144	3,3	0,00096
0,4	0,68916	1,4	0,16152	2,4	0,01640	3,4	0,00068
0,5	0,61708	1,5	0,13362	2,5	0,01242	3,5	0,00087
0,6	0,54850	1,6	0,10960	2,6	0,00932	3,6	0,00061
0,7	0,48392	1,7	0,08914	2,7	0,00694	3,7	0,00042
0,8	0,42372	1,8	0,07186	2,8	0,00512	3,8	0,00029
0,9	0,36812	1,9	0,05714	2,9	0,00374	3,9	0,00020

Таблица Б.2. Значения x_P и вероятность $P(x > x_P)$ при степенях свободы n (см. п. 1.8.4, формулу (1.45))

n	P				
	0,99	0,90	0,50	0,10	0,01
1	0,0001157	0,0158	0,455	2,706	6,635
2	0,0201	0,211	1,386	4,605	9,210
3	0,115	0,584	2,366	6,251	11,345
4	0,297	1,064	3,357	7,779	13,277
5	0,554	1,610	4,351	9,236	15,086
10	2,558	4,865	9,342	15,987	23,209
15	5,229	8,547	14,399	22,307	30,578
20	8,260	12,444	19,337	28,412	37,566
25	11,524	16,473	24,337	34,382	44,314
30	14,953	20,599	29,336	40,256	50,892

Таблица Б.3. Значения t_P и вероятность P отличия t от нулевого среднего в любую сторону более чем на t_P при числе степеней свободы $\nu = n - 1$ (см. п. 1.8.5, формулу (1.47))

ν	P				
	0,9	0,5	0,1	0,05	0,01
1	0,158	1,000	6,314	12,706	63,657
2	0,142	0,816	2,920	4,303	9,925
3	0,137	0,765	2,353	3,182	5,841
4	0,134	0,741	2,132	2,776	4,604
5	0,132	0,727	2,015	2,571	4,032
10	0,129	0,700	1,812	2,228	3,169
15	0,128	0,691	1,753	2,131	2,947
20	0,127	0,687	1,725	2,086	2,845
25	0,127	0,684	1,708	2,060	2,787
30	0,127	0,683	1,697	2,042	2,750
∞	0,1257	0,6745	1,6448	1,9590	2,5758

Summary

The study of a structure of the Earth and near Earth space requires joint interpretation of a large volume of experimental data. Presence of a random error, which is inevitably present at measurements, and also the presence of random noise at wave fields, which deforms useful signals, leads to necessity of use of probability-statistical methods for the analysis and interpretation of the geophysical data.

The offered book is devoted to a presentation of the probability statistical approach to the processing and interpretation of geophysical data. This book is based on the courses of lectures, which are given for master students and students of 5-th year on a speciality “Physics of the Solid Earth” on Faculty of Physics of St.Petersburg State University.

The basic definitions and principles of the statistical interpretation of geophysical data and the important theoretical results of the solution of the inverse geophysical problems are considered.

The main milestones of this book are the following: introduction to the probability theory; information and entropy concepts; elements of the mathematical statistics; the models of measurements of geophysical data; relations between sounding signal and the parameters of medium; elements of the ray method; statistical criteria for a choice of models; algorithms for approximation of geophysical data; methods of parameter estimation; method of separation of interfering signals; elements of ray and diffraction tomography; the transforms for geophysical data processing. Some elements of statistical estimation and solution of the ill-posed problems in the notions of functional analysis are given for advanced students.

In appendix the computer exercises are introduced. The realization of the computer exercises will promote more deep understanding of a material given in this book and will give practical acquaintance with some algorithms of processing of the geophysical data and the solution of the inverse problems.

Учебное издание

*Владимир Николаевич Троян
Юрий Васильевич Киселев*

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ОБРАБОТКИ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Учебник

Редактор Е.П. Парфенова
Технический редактор Г.И. Чередниченко
Набор и верстка Ю.В. Киселев

Лицензия ЛР №040050 от 15.08.96

Подписано в печать с оригинала-макета 03.07.2001.
Ф-т 60×90/16. Усл. печ. л. 35,75.
Уч.-изд. л. 36,25. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство С.-Петербургского университета.
199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.

Лицензия ЛР №040050 от 15.08.96

Подписано в печать с оригинала-макета 29.12.2000.
Ф-т 60×90/16. Усл. печ. л. 35,75.
Уч.-изд. л. 36,25. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство С.-Петербургского университета.
199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.