Расчёт магнитного поля дипольного источника, заключённого внутри магнитопаузы заданной формы.

Выполнил Лапин Ярослав. 1 июня 2011.

Постановка задачи

В данной работе ищется численное решение задача Неймана методом Нелдера-Мида

Задача формулируется следующим образом:

- Внутреннее магнитное поле ограниченно дипольными источниками, которые считаются с помощью утилиты DIP_08
- Магнитопауза симметрична относительно оси X и задана в виде уравнения $r = R(\theta)$, где $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, а угол $\theta = \arccos X/R$ (угол от положитель-ного направления оси X)
- Так как поле диполя не должно проникать вне магнитосферы, то на границе должно выполняться условие $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$
- Где B это суммарное поле диполя и токов экранировки (CF-токи, Chapman-Ferraro), текущих по магнитопаузе, а n это вектор нормали.
- Из условия $\vec{B}_{CF} \cdot \vec{n} = -\vec{B}_d \cdot \vec{n}$ на границе нужно найти $\vec{B}_{CF}$

Поле $\vec{B}_{CF}$

- Внутри магнитосферы поле $\vec{B}_{CF}$ потенциально, то есть можно представить его в виде $\vec{B}_{CF} = -\nabla U$.
- Из уравнения Максвелла $\nabla \cdot \vec{B}_{CF} = 0$ следует, что $\nabla^2 U = 0$
- Так же из $-\nabla U \cdot \vec{n} = -\vec{B}_d \cdot \vec{n}$ получаем $\frac{\partial U}{\partial n} = \vec{B}_d \cdot \vec{n}$
- Таким образом система уравнений $\nabla^2 U = 0$ и $\frac{\partial U}{\partial n} = \vec{B}_d \cdot \vec{n}$ образует задачу Неймана для скалярного потенциала U.
- Решение будем искать в виде суммы гармонических функций:

$$U = \sum_{i=1}^{N} a_i f_i(\vec{r}, b_1, b_2, ..., b_K)$$

- Коэффициенты a_i, b_i получаются из условия минимизации среднеквадратичного отклонения $\nabla U \cdot \vec{n} - \vec{B}_d \cdot \vec{n}$ по ансамблю M точек на поверхности магнитопаузы:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=j}^{M}[\vec{B}_d(\vec{r}_j) \cdot \vec{n}_j - \nabla U(\vec{r}_j) \cdot \vec{n}_j]^2}{M}}$$

Потенциал U

- В качестве базисных функций f_i использовались “коробчатые” гармоники, являющиеся решением уравнения Лапласа
$$f_i = \exp(\sqrt{2} b_i X) \cos(b_i Y) \sin(b_i Z)$$

- b_i имеет смысл обратной величины пространственного масштаба i-ой гармоники.

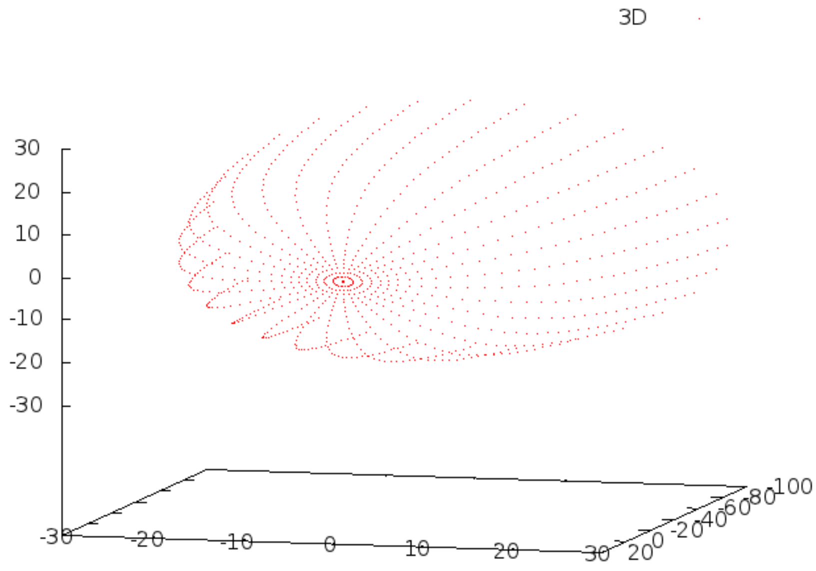
Генерация набора

- Первое, что необходимо сделать, это создать набор M точек на магнитопаузе равномерно распределённый от “лобовой” точки $X = R_0$ до области удалённого хвоста $X = -100R_E$.

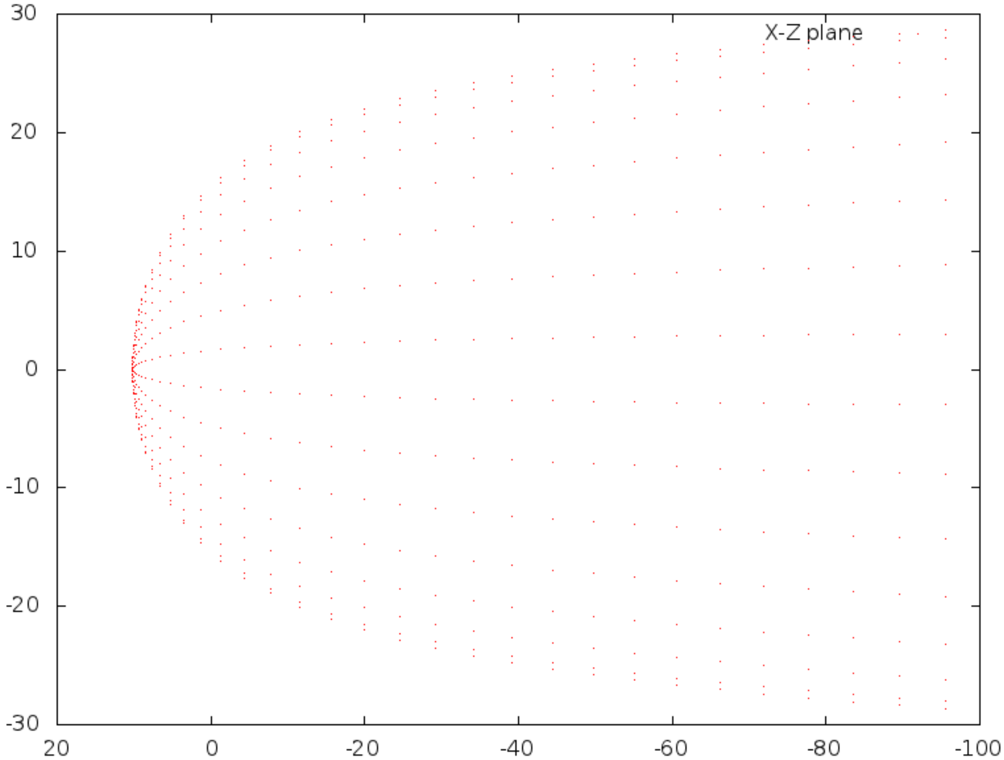
- Форма магнитопаузы по модели Shue et al. [JGR, 1998]
$$R(\theta) = R_0 \left(\frac{2}{1 + \cos\theta}\right)^{\alpha}$$

- R_0, α зависят от условий ММП: B_z, P_{dyn}, в данной работе было взято $B_z = 0, P_{dyn} = 2nPa$, $R_0 = 10.252, \alpha = 0.5896$

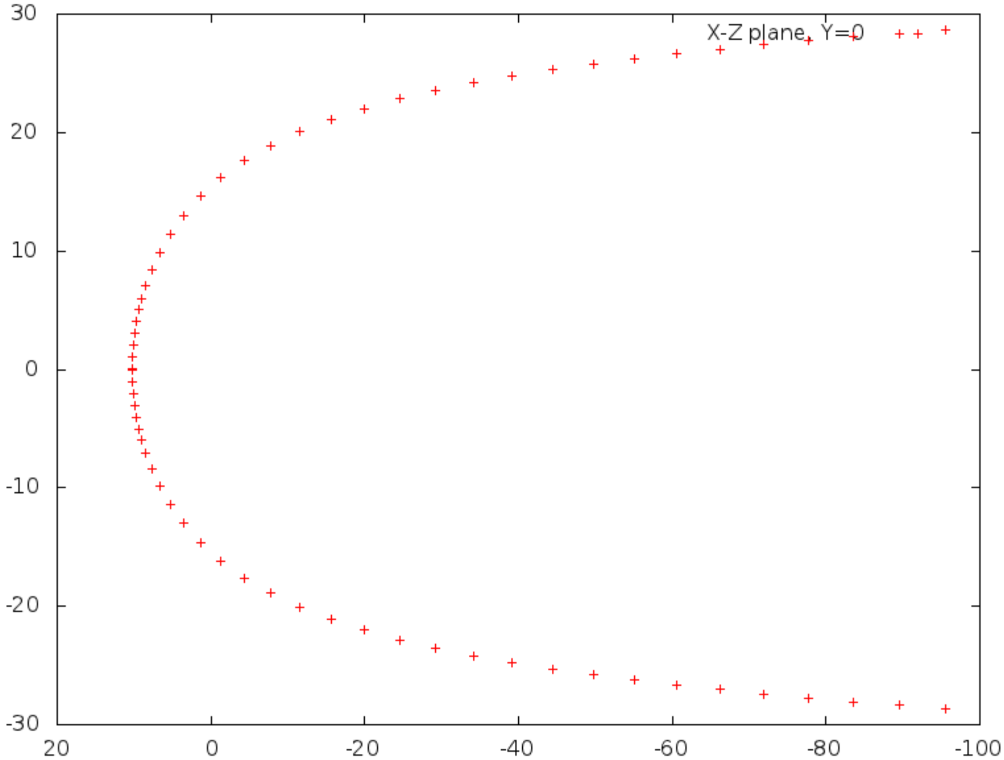
Форма магнитопаузы



Форма магнитопаузы



Форма магнитопаузы



Поиск коэффициентов

- Рассмотрим для примера N = 3. Тогда потенциал U будет вида:

$$U = a_1 \exp(\sqrt{2} b_1 X) \cos(b_1 Y) \sin(b_1 Z)$$

$$+a_2 \exp(\sqrt{2} b_2 X) \cos(b_2 Y) \sin(b_2 Z)$$

$$+a_3 \exp(\sqrt{2} b_3 X) \cos(b_3 Y) \sin(b_3 Z)$$

- Получаем 3 нелинейных коэффициента и 3 линейных.
- Задав некоторый начальный набор нелинейных коэффициентов линейные можно посчитать методом наименьших квадратов:
  - Допустим мы имеем M уравнений вида:

$$a_1 x + b_1 y + ... = n_1$$

$$a_2 x + b_2 y + ... = n_2$$

$$a_n x + b_n y + ... = n_n$$

  - Где a_i заданные числа, а x,y,.. неизвестные, которые нужно найти
  - Тогда нужно сначала умножить каждое i-ое уравнение на a_i, сложить все уравнения и получится первое "нормальное" уравнение. Потом умножить каждое i-ое уравнение на b_i и так далее. В итоге получится количество "нормальных" уравнений равное количеству неизвестных переменных.
  - Система нормальных уравнений может быть решена уже обычным способом.
- Поиск нелинейных коэффициентов происходит методом Нелдера—Мида.
  - Это метод по поиску оптимального направления движения в n-мерном пространстве нелинейных параметров в котором значение функции от этих параметров будет уменьшаться.
- Тогда наша задача может быть переформулирована в терминах поиска минимума функции $\sigma(\{r\}, \{a\}, \{b\})$, при условии, что для каждого набора b_i методом наименьших квадратов ищутся соответствующие a_i.

Результаты

- С помощью TRACE_08 были построены картинки