Расчёт магнитного поля дипольного источника, заключённого внутри магнитопаузы заданной формы.

Выполнил Лапин Ярослав. 1 июня 2011.

Постановка задачи

В данной работе ищется численное решение задача Неймана методом Нелдера-Мида

Задача формулируется следующим образом:

- Внутреннее магнитное поле ограниченно дипольными источниками, которые считаются с помощью утилиты DIP_08
- Магнитопауза симметрична относительно оси X и задана в виде уравнения $r = R(\theta)$, где $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, а угол $\theta = \arccos X/R$ (угол от положитель-ного направления оси X)
- Так как поле диполя не должно проникать вне магнитосферы, то на границе должно выполняться условие $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$, где B это суммарное поле диполя и токов экранировки (CF-токи, Chapman-Ferraro), текущих по магнитопаузе, а n это вектор нормали.
- Из условия $\vec{B}_{CF} \cdot \vec{n} = -\vec{B}_d \cdot \vec{n}$ на границе нужно найти $\vec{B}_{CF}$

Поле $\vec{B}_{CF}$

- Внутри магнитосферы поле $\vec{B}_{CF}$ потенциально, то есть можно представить его в виде $\vec{B}_{CF} = -\nabla U$.
- Из уравнения Максвелла $\nabla \cdot \vec{B}_{CF} = 0$ следует, что $\nabla^2 U = 0$
- Так же из $-\nabla U \cdot \vec{n} = -\vec{B}_d \cdot \vec{n}$ получаем $\frac{\partial U}{\partial n} = \vec{B}_d \cdot \vec{n}$
- Таким образом система уравнений $\nabla^2 U = 0$ и $\frac{\partial U}{\partial n} = \vec{B}_d \cdot \vec{n}$ образует задачу Неймана для скалярного потенциала U.
- Решение будем искать в виде суммы гармонических функций:

$$U = \sum_{i=1}^{N} a_i f_i(\vec{r}, b_1, b_2, ..., b_K)$$

- Коэффициенты a_i, b_i получаются из условия минимизации среднеквадратичного отклонения $\nabla U \cdot \vec{n} - \vec{B}_d \cdot \vec{n}$ по ансамблю М точек на поверхности магнитопаузы:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=j}^{M} [\vec{B}_d(\vec{r}_j) \cdot \vec{n}_j - \nabla U(\vec{r}_j) \cdot \vec{n}_j]^2}{M}}$$

Потенциал U

- В качестве базисных функций f_i использовались “коробчатые” гармоники, являющиеся решением уравнения Лапласа

$$f_i = \exp(\sqrt{2} b_i X) \cos(b_i Y) \sin(b_i Z)$$

- b_i имеет смысл обратной величины пространственного масштаба i-ой гармоники.

Генерация набора

- Первое, что необходимо сделать, это создать набор М точек на магнитопаузе равномерно распределённый от “лобовой” точки $X = R_0$ до области удалённого хвоста $X = -100 R_E$.

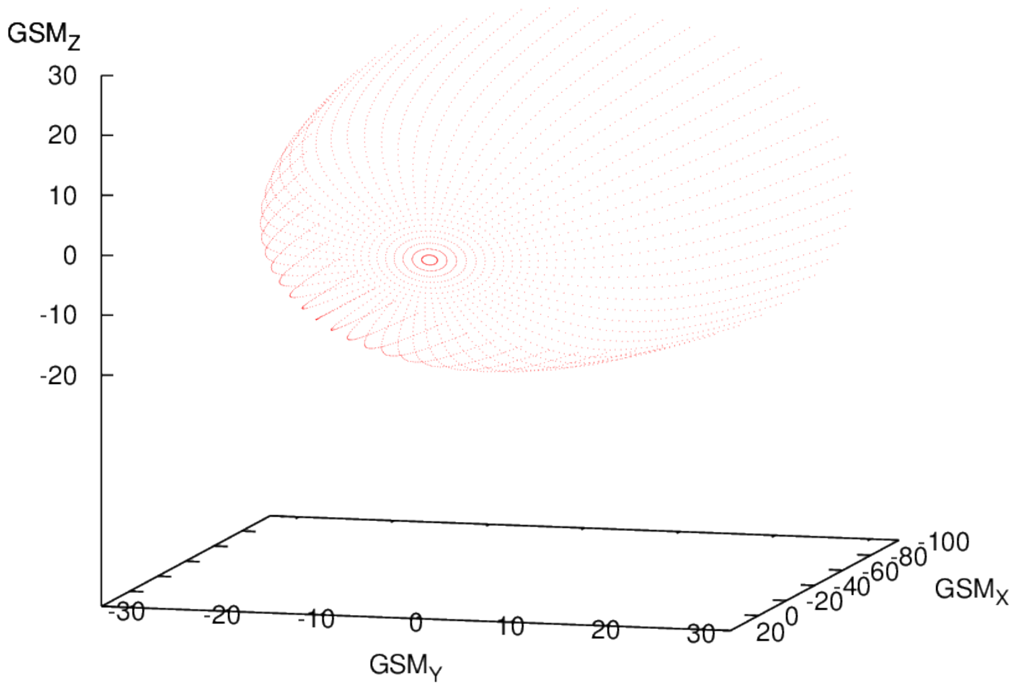
- Форма магнитопаузы по модели Shue et al. [JGR, 1998]

$$R(\theta) = R_0 \left(\frac{2}{1 + \cos\theta} \right)^{\alpha}$$

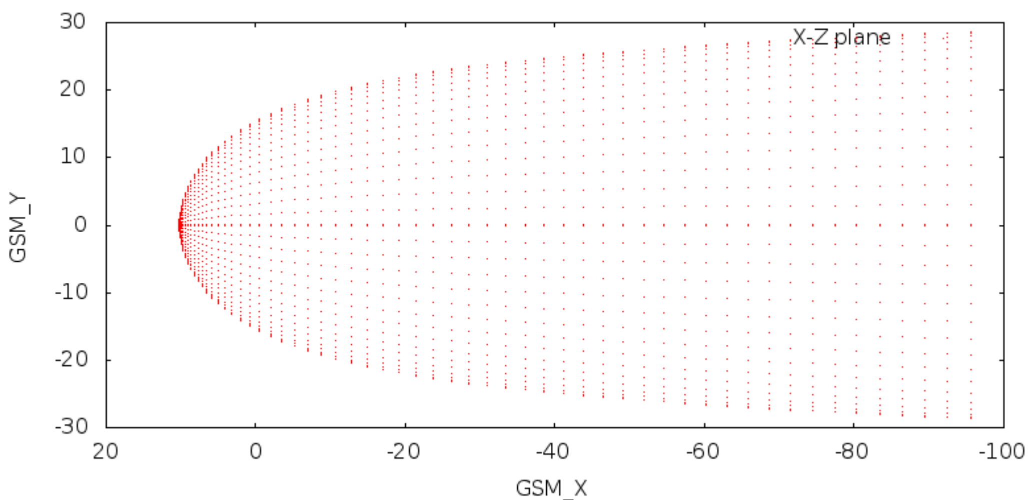
- R_0, α зависят от условий ММП: B_z, P_{dyn}, в данной работе было взято $B_z = 0, P_{dyn} = 2nPa$, $R_0 = 10.252, \alpha = 0.5896$

Форма магнитопаузы по модели Shue

Точки были выбраны на сетке по X от R_0 до $100 R_E$ с шагом по углам в плоскости YZ 5 градусов (60 линий).



Эти же точки в проекции на плоскость XZ.



Поиск коэффициентов

- Рассмотрим для примера N = 3. Тогда потенциал U будет вида:

$$U = a_1 \exp(\sqrt{2} b_1 X) \cos(b_1 Y) \sin(b_1 Z)$$

$$+ a_2 \exp(\sqrt{2} b_2 X) \cos(b_2 Y) \sin(b_2 Z)$$

$$+ a_3 \exp(\sqrt{2} b_3 X) \cos(b_3 Y) \sin(b_3 Z)$$

- Получаем 3 нелинейных коэффициента и 3 линейных.

- Задав некоторый начальный набор нелинейных коэффициентов, линейные можно посчитать методом наименьших квадратов:

  - Допустим мы имеем M уравнений вида:

$$a_1 x_1 + a_2 y_1 + ... = n_1$$

$$a_1 x_2 + a_2 y_2 + ... = n_2$$

$$a_1 x_m + a_2 y_m + ... = n_m$$

  - Где x,y,..—значения функций, посчитанные при заданных нелинейных параметрах в каждой точке, а a_i — неизвестные линейные параметры которые нужно найти.
  - Дальше методом наименьших квадратов[1](Singular Value Decomposition) решается задача поиска параметров a_i.

- Поиск нелинейных коэффициентов происходит методом Нелдера—Мида:

  - Это метод по поиску оптимального направления движения в n-мерном пространстве нелинейных параметров, в котором значение функции от этих параметров будет уменьшаться. В нашем случае функцией выступает значение среднеквадратичного отклонения, полученное на предыдущем этапе.

- Тогда наша задача может быть переформулирована в терминах поиска минимума функции $\sigma(\{r\}, \{a\}, \{b\})$, при условии, что для каждого набора b_i методом наименьших квадратов ищутся соответствующие a_i.

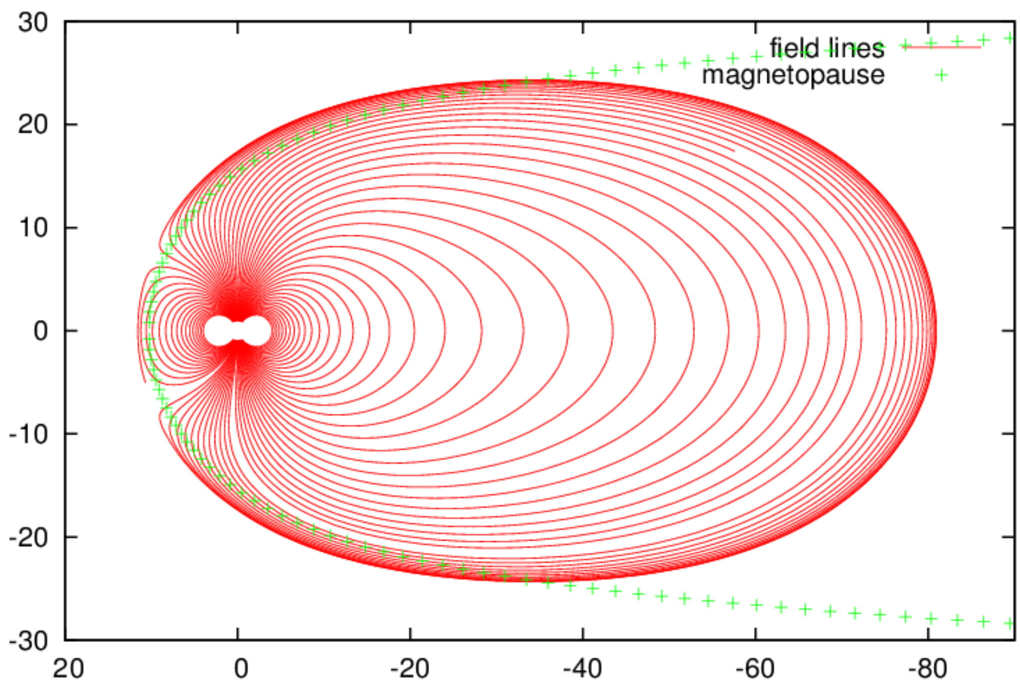
[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Total_least_squares

Результаты

В результате поиска коэффициентов в разложении до 8 членов (8 линейных коэффициентов a_i и 8 нелинейных b_i) была построена модель с средним квадратическим отлонением порядка 2.3% величины.

a_i	b_i
-0.230740	0.360697
1.17955	0.329291
1.96982	0.262955
-7.07680	0.274865
-12.5596	0.200351
13.9235	0.232801
-134.273	0.0576564
-138.127	0.0596382

Используя полученную модель была построена карта силовых линий суммарного поля (дипольная составляющая и поле экранизации) в плоскости XZ (Y=0).



В целом данная картина вполне соответствует ожидаемому результату, хотя заметно, что если бы удалось выполнить поиск коэффициентов с большей точностью, то мы бы не видели таких проблем, как линии поля пересекающие магнитопаузу.