Численное решение интегрального уравнения Вольтера второго рода.

1.0 Постановка задачи.

Уравение

$$\Phi(x)=f(x)+\int_{a}^{x} K(x,y)\Phi(y)dy \qquad \textbf{(1)}$$

Называется уравнением Вольтера второго рода.
Если f(x) = 0 , то уравнение (1) называется уравнением Вольтера первого рода.
Функция K(x,y) называется ядром интегрального уравнения.
Функция K(x,y) непрерывна, ограничена и симметрична относительно переменных x,y в квадрате a < x < b, a < y < b . Функция f(x) непрерывна и ограничена на отрезке a < x < b .

2.0 Вычислительные формулы.

Область определения функций K(x,y) и f(x) разобъём на N частей по оси x и по оси y.
Введём обозначения:

h = (b - a) / N шаг сетки интегрирования;
Ki,j = K(a+ih,a+jh);
fj = f(a+jh);
Фi = Ф(a+ih);
$R_{i,j}=hA_{i,j}K_{i,j}$

Рассмотрим первую разность уравнения (1):

$$\mathbf{\Phi(x) - \Phi(x\text{-}h) = f(x) - f(x - h) +} \int_{(x-h)}^{x} K(x,y)\Phi(y)dy \qquad \textbf{(2)}$$

Положим $x_i=a+ih$ и применим квадратурную формулу для вычисления интеграла, получим:

$$\Phi_i=\Phi_{i-1}=f_i-f_{i-1}+h\sum_{j=0}^{j=i-2} A_{i,j}K_{i,j}\Phi_j \qquad \textbf{(3)}$$

Где $A_{i,j}$ веса , определяемые применяемой

квадратурной формулой.
Для определённости воспользуемся кадратурной формулой Симпсона , тогда

$A_{i,j} = 1/3, \text{если } j=0 \text{ или } j=i-2$
2/3 если j чётно 0 < j < i
4/3 если j нечётно 0 < j < i

В этих обозначениях $\Phi_0 = f_0$

Из уравнения (3) получаем рекуррентную формулу:

$$\Phi_i = \frac{f_i - f_{i-1} + (1 + R_{i,i-1})\Phi_{i-1} + \sum_{j=0}^{i-2} R_{i,j}\Phi_j}{(1 - R_{i,i})} \qquad \textbf{(4)}$$

При этом Φ_1 рассчитывается по формуле:

$$\Phi_1 = \frac{f_1 + R_{1,0} f_0}{(1 - R_{1,1})} \qquad \textbf{(5)}$$

По формулам (4) и (5) можно вычислить все Φ_i ,i = 1,…,N+1.

3.0 Результаты вычислений представлены в виде графиков и таблиц.

Было выбрано 18 точек графика функции Ф(x), и по ним построен полином 17 степени, который приблизительно можно считать аналитическим решением уравнения (1). Приводится также график этого пиолиома, который очень напоминает график функции Ф(x).

3.1 расчёты проводились при следующих параметрах и функций K(x,y) и f(x):

$$K(x,y)=\frac{\left(e^{-\left(x^2+y^2\right)}\right)}{e^{-xy/2}}$$

$$f(x)=\frac{x\sin(x)}{e^{-x/4}}$$

a = 0.0;

b = 16.0;

N = 300;

Графики и таблицы прилагаются.