Юрин В. И.

Численное решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

1.0 Постановка задачи.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\Phi(x)=f(x)+\lambda*\int_a^b K(x,y)*\Phi(y)dy \qquad (1)$$

содержащее неизвестную функцию Ф(x) и известные функции f(x) и K(x,y).

Функция K(x,y) называется ядром интегрального уравнения. Пределы интегрирования a и b конечные. Функция K(x,y) ограничена и положительна в квадратной области a≤x≤b, a≤y≤b и симметрична относительно x и y.

f(x) - непрерывная функция переменной x. [1]

Интервал интегрирования (a,b) разобьём на N равных частей. Точки деления

$X_0, X_1, X_2 ... X_N$, $X_0=a,\ X_N=b$ **Имеем (N+1) точек деления.**

Введём обозначения:

$h=(b-a)/N$ **- шаг сетки интегрирования,**

$K_{i,j}=K(a+ih,a+jh)$

$f_i=f(a+jh)$

$\Phi_i=\Phi(a+ih)$

Для аппроксимации интеграла применим какую-нибудь квадратурную формулу. Вдоль любой линии постоянного x_j будем иметь

$$\Phi_i=f_i+\lambda\sum_{i=0}^{i=N} R_{i,j}*\Phi_i \qquad (2)$$

где $R_{i,j}=h*A_j*K_{i,j}$, A_j **- веса, которые применяются в используемой квадратурной формуле.**

Для определённости используем квадратурную формулу Симпсона, тогда

$$A_j=\begin{cases} 1/3, & \text{если } j=0 \text{ или } j=N \\ 2/3, & \text{если } j \text{ чётное} \\ 4/3, & \text{если } j \text{ нечётное} \end{cases}$$

Систему уравнний (2) перепишем в виде

$$\Phi_i - \lambda \sum_{j=0}^{j=N} R_{i,j} * \Phi_i = f_i \qquad (3)$$

Определитель этой системы алгебраических уравнений

Стр 2

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda R_{0\,0} & -\lambda R_{0\,1} & -\lambda R_{0\,2} & \dots & -\lambda R_{0\,N} \\ -\lambda R_{1\,0} & 1-\lambda R_{1\,1} & -\lambda R_{1\,2} & \dots & -\lambda R_{1\,N} \\ -\lambda R_{2\,0} & -\lambda R_{2\,1} & 1-\lambda R_{2\,2} & \dots & -\lambda R_{2\,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda R_{N-1\,0} & -\lambda R_{N-1\,1} & -\lambda R_{N-1\,2} & \dots & -\lambda R_{N-1\,N} \\ -\lambda R_{N\,0} & -\lambda R_{N\,1} & -\lambda R_{N\,2} & \dots & 1-\lambda R_{N\,N} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

На главной диагонали $1-\lambda R_{i,i}$ **, на остальных местах** $-\lambda R_{i,j}$

Вектор правой части равен

$$F = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

Система алгбраических уравнений решается с помощью правила Крамера.
Алгоритм правила Крамера требует (N+1) раз вычислять определитель (N+1)
порядка. Алгоритм вычислепия определителя можно увидеть в [2] и во многих других книгах по вычислительной математике. Правило Крамера подробно описано в [3].

2.0. Начальные данные для вычислений.

Вычисления проведены при следующих заданных функциях и параметрах:

$$K(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\, e^{-(x^2+y^2)}}{e^{-xy/2}} \quad ;$$

$$f(x) = \frac{x \sin(x)}{e^{-x/4}} \quad ;$$

$$\lambda = 1{,}64\,;$$

a = -3.0;
b = 18.0;
N = 300.

3.0 Результаты вычислений.

Вычисления производились на персональном компьютере ASUS со следующими характристиками:

Операционная сиситема : Windows XP; .
CPU: 3.47ГГЦ;
ОЗУ: 1.24 Гб;
Ёмкость жёсткого диска 80 Гб.

Результаты вычислений представлены в виде таблицы и графика функции Ф(x).

Было выбрано 18 точек графика функции Ф(x) и по этим точкам построен полином 17-й степени, график которого проходит через выбранные точки. Построенный таким образом полином можно рассматривать как некоторое приближение к аналитическому решению уравнения (1). Для сравнения представлен также и график этого полинома, который очень сильно напоминает график функции Ф(x).

Была сделана попытка найти параметр λ , при котором определитель системы уравнений (4) равен нулю, но эта попытка оказалась безуспешной.

Приводится график функции $U(\lambda)=det(A(\lambda))$, где A – матрица системы алгебраических уравнений (3). Из этого графика видно, что найти достаточно точное значение λ , при котором det(A(λ)) = 0 невозможно.

4.0 Несколько слов об уравннии Фредгольма первого рода.

Уравнение Фредгольма первого рода отличается от уравнения второго рода тем, что в уравнении (1) полагается f(x)=0. Функция Ф(x)=0 является в этом случае решением уравнения (1).

Если определитель системы уравнений (3) отличен от нуля, то других решений не существует. Для того, чтобы существовали другие решения системы алгебраических уравнний (3), требуется равенство нулю определителя (4). Если удастся подобрать такое λ , при котором $det(A(\lambda))=0$, то можно попробовать поискать другие решения системы алгебраических уравнений (3), хотя алгоритмы поиска таких решений мне неизвестны.

3.0 Построение полинома степени N, график которого пересекает (N+1) заданные точки плоскости.

Полином степени N $F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...a_Nx^N$ **имеет (N+1) коэффициент, поэтому должно быть (N+1) условий, позволяющих однозначно определить его коэффициенты. Этими условиями являются требования прохождения графика этого полинома через (N+1) заданные**

точки плоскости. Условием прохождения графика полинома через точку (x_i, y_i) **является равенство:**

$$y_i=\sum_{k=0}^{k=N} a_k x_i^k \quad (i=1\ ...\ N+1) \qquad \textbf{(5)}$$

Имеем систему (N+1) линейных алгебраических уравнений с (N+1) неизвестных $a_0, a_1, a_2, ...\ a_N$ **. Определитель этой системы уравнений:**

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^N \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N+1} & x_{N+1}^2 & x_{N+1}^3 & \dots & x_{N+1}^N \end{vmatrix}$$

является определителем Вандермонда и при $x_i \neq x_j$ **(** $i \neq j$ **) не равен нулю [3] . Значит решение системы уравнений (5) существует и единственно [3]. Решается система уравнений (5) с помощью правила Крамера.**

Юрин В. И. Тел 8-(8482) 37-84-96

Литература:

[1] Г. И. Марчук "Методы расчёта ядерных реакторов", госатомиздат, 1961г.

[2] Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева "Вычислительные методы линейной алгебры",

Государственное издательство физико-математической литературы, 1963г.

[3] А. Г. Курош "Курс высшей алгебры"

4.0 Приложения