Юрин Егор

Методы вычисления обратных матриц

(Реферат)

1. Вычисление обратной матрицы методом исключения.

Дана матрица вещественных коэффициентов A.

$$\begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \cdots & a_{1\,N} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \cdots & a_{2\,N} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \cdots & a_{3\,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1\,1} & a_{N-1\,2} & a_{N-1\,3} & \cdots & a_{N-1\,N} \\ a_{N\,1} & a_{N\,2} & a_{N\,3} & \cdots & a_{N\,N} \end{vmatrix} = A \qquad (1)$$

Все коэффициенты матрицы имеют индексы, из которых левый указывает на номер строки, а правый на номер столбца.
Например $a_{i,j}$ указывает на коэффициент, стоящий в строке с номером i и в столбце с номером j матрицы.
Все матрицы
хранятся в виде таблиц в базе данных Dbase.
Припишем к матрице «A» справа единичную матрицу «E», у которой все элементы с индексами (i=j) равны 1. все остальные равны 0.

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Получим матрицу из N строк и 2N столбцов, назовём её матрицей G,

$$
G=\left|\begin{matrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \dots & a_{1\,N} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \dots & a_{2\,N} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \dots & a_{3\,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1\,1} & a_{N-1\,2} & a_{N-1\,3} & \dots & a_{N-1\,N} \\ a_{N\,1} & a_{N\,2} & a_{N\,3} & \dots & a_{N\,N} \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right| \qquad (3)
$$

При формировании исходной матрицы надо позаботиться чтобы коэффициент $a_{1,1}$ был бы не равен 0.
Разделим все коэффициенты первой строки матрицы G на $a_{1,1}$ Затем из каждой строки матрицы G начиная со второй и до N вычитаем первую строку умноженную на $a_{k,1}$, где k номер строки. K=2,3,,,,,N;
Затем проделываем тоже самое со всеми строками от 2 до N-1, .
Делим строку номер i на $a_{i,i}$ и из каждой строки, номера которых от i + 1 до N вычитаем строку номер i умноженную на $a_{k,i}$ (k=i +1,...N)
Последнее, что мы делам в этой половине алгоритма делим строку номер N на $a_{N,N}$.

Получим преобразованную матрицу G

$$
G=\left|\begin{matrix} 1 & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \dots & a_{1\,N} \\ 0 & 1 & a_{2\,3} & \dots & a_{2\,N} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3\,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1\,N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} g_{1\,1} & g_{1\,2} & g_{1\,3} & \dots & g_{1\,N} \\ g_{2\,1} & g_{2\,2} & g_{2\,3} & \dots & g_{2\,N} \\ g_{3\,1} & g_{3\,2} & g_{3\,3} & \dots & g_{3\,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1\,1} & g_{N-1\,2} & g_{N-1\,3} & \dots & g_{N-1\,N} \\ g_{N\,1} & g_{N\,2} & g_{N\,3} & \dots & g_{N\,N} \end{matrix}\right| \qquad (4)
$$

Последняя операция:
Умножая последнюю строку матрицы G последовательно на $a_{N-1,N}, a_{N-2,N}, .., a_{2,N}, a_{1,N}$ и вычитая её соответственно из строк номера которых $N-1, N-2, ...2, 1$ получим нули для всех элементов в столбце номер N, которые лежат выше последнего элемента в этом столбце.
Переходя затем к (N-1)-му столбцу и производя подобный процесс, получим нули всюду в этом столбце. за исключением единицы , лежащей в (N-1)-й строке. Проведём такой процесс до конца для каждого из столбцов от N-го до второго получим расширенную матрицу

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \gamma_{1\,1} & \gamma_{1\,2} & \gamma_{1\,3} & \cdots & \gamma_{1\,N} \\ \gamma_{2\,1} & \gamma_{2\,2} & \gamma_{2\,3} & \cdots & \gamma_{2\,N} \\ \gamma_{3\,1} & \gamma_{3\,2} & \gamma_{3\,3} & \cdots & \gamma_{3\,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N-1\,1} & \gamma_{N-1\,2} & \gamma_{N-1\,3} & \cdots & \gamma_{N-1\,N} \\ \gamma_{N\,1} & \gamma_{N\,2} & \gamma_{N\,3} & \cdots & \gamma_{N\,N} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Всё. что мы проделали над матрицей G равенство (3) равносильно умножению её слева на некоторую матрицу Γ . В левой половине матрицы мы получили единичную матрицу E, значит эта матрица Γ есть не что иное как обратная матрица исходной матрицы .
То есть . $\Gamma = A^{-1}$.Но мы в этой матрице G умножили и левую и правую половины матрицы G (3) на эту матрицу Γ .
В правой половине матрицы G (3) была единичная матрица E. Значит обратная матрица A^{-1} сосредоточена в правой половине матрицы G. Остаётся только переписать правую половину Матрицы G (5) в отдельную таблицу базы данных и приступить к контролю полученной обратной матрицы на предмет:

$A^{-1}A = AA^{-1} = E$ **.**

Сервис:
1. Программа позволяет ввод исходной матрицы построчно и внутри строки по столбцам. Оператор, вводящий матрицу всегда видит номер строки и столбца вводимого элемента матрицы.

2. Имеется возможность просмотра и корректировки всех элементов исходной матрицы

3. Имеется возможность просмотреть и распечатать исходную. обратную и произведение этих матриц.

4, Имеется возможность контроля как $A^{-1}A = E$ так и $AA^{-1} = E$
замечание:
этот метод обладает высокой точностью и высокой скоростью. Выше всех рассмотренных здесь методов. Единственным ограничением этого метода является неравенство нулю элемента матрицы $a_{1,1} \neq 0$.

Обозначим значение определителя обратной матрицы Δ_{-1}

5. из курса линейной алгебры известно, что если определитель исходной матрицы есть Δ , то определитель обратной матрицы равен $\Delta_{-1} = \frac{1}{\Delta}$. Во всех программах предусмотрен контроль на значение
абсолютной величины разности $\left|\left(\frac{1}{\Delta} - \Delta_{-1}\right)\right|$ Во всех методах эта величина оказывается очень малой порядка 10^{-40} и даже ещё меньше. Что свидетельствует о высокой точности вычислений.

Литература:

К.С. Кунц «Численный Анализ» издательство «техника» Киев 1964г.

Другие методы вычисления обратных матриц.

2.1 Вычисление обратной матрицы к заданной матрице с использованием миноров всех её элементов.

Дана матрица A порядка N

$$A = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \cdots & a_{1\,N} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \cdots & a_{2\,N} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \cdots & a_{3\,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1\,1} & a_{N-1\,2} & a_{N-1\,3} & \cdots & a_{N-1\,N} \\ a_{N\,1} & a_{N\,2} & a_{N\,3} & \cdots & a_{N\,N} \end{vmatrix} ;$$

Минором элемента $a_{i,j}$ является значение определителя матрицы порядка (N-1),
полученной из матрицы A вычёркиванием из неё
её i-й строки и j-го столбца. Обозначается этот объект $A_{i,j}$
Обозначим значение определителя матррицы A символом Δ
Тогда каждый элемент обратной матрицы A^{-1}

вычисляется по формуле:

$\gamma_{i,j} = \frac{A_{j,i}}{\Delta}$ **. Никакой ошибки в индексации здесь нет.**
Имеется программа вычисления обратной матрицы по данному алгоритму.
Сервис в этой программе полностью совпадает
с сервисом предыдущего пункта.
Этот метод уступает предыдущему незначительно в скорости вычисления. За то не имеет никаких ограничений на элементы исходной матрицы.

Литература:

А. Г. Курош «Курс высшей алгебры» Государственное издательство

стр. 5

физико-математической литературы Москва 1962г.

2.2 Вычисление обратной матрицы с помощью решения системы N систем уравнений порядка N.

Определение всех элементов обратной матрицы A^{-1} сводится к решению N систем линейных алгебраических уравнений N-го порядка, Вот все эти системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^{k=N} a_{k,i} \gamma_{j,k} = \delta_{i,j} \quad \text{(j=1,....N), (i=1,...,N)} \qquad (1)$$

где $\delta_{i,j}$ символ Кронекера $\delta_{i,j}=1$ если (I = j)
$\delta_{i,j}=0$ если ($i \neq j$)

Решив одну такую систему уравнений мы получаем j-й столбец обратной матрицы Γ .
Для вычисления всех элементов обратной матрицы потребуется систему уравнений (1) решать N раз, перемещая единицу в правой части системы уравнений (1) от строки к строке и заменяя единицу на прежнем месте нулём.
Система уравнений (1) каждый раз решается с помощью правила Крамера.
Имеется программа, реализующая этот метод вычисления обратной матрицы.
Точность вычисления этого метода хорошая, а время вычисления всех элементов обратной матрицы очень большое, по сравнению с первыми двумя методами отличается больше чем на порядок в сторону увеличения.
Сервис этой программы полностью совпадает с сервисом двух предыдущих методов.

Литература:

Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева
«Вычислительные методы линейной алгебры»
Государственное издательство физико-математической литературы

Москва   1963г.   Ленинград

Все программы написаны на языке Paskal   в системе Delphi 5-й версии В операционной системе Windows-XP.
Прмечание: Все вычисляемые числовые величины во всех программах определяются как числовые данные с плавающей запятой
расширенной точности (Extended), кроме индексов элементов матриц, которые заданы целыми числами (integer), что позволяет избегать ошибочной ситуации типа деления на ноль.

3. Вычисление Определителей.
Введём обозначения:
Символом Δ будем Обозначать численное значение вычисляемого определителя :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \cdots & a_{1\,N} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \cdots & a_{2\,N} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \cdots & a_{3\,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1\,1} & a_{N-1\,2} & a_{N-1\,3} & \cdots & a_{N-1\,N} \\ a_{N\,1} & a_{N\,2} & a_{N\,3} & \cdots & a_{N\,N} \end{vmatrix}$$

Вычисление определителя состоит из нескольких шагов. Номер шага будем указывать ввиде верхнего индекса при элементе матрицы. Не путать этот верхний индекс с показателем степени. Он всего лишь указывает на номер шага в вычислении.
Например; $a_{i,j}^{k}$ означает элемент матрицы стоящий в i строке. j столбце на к шаге вычисления.
Будем использовать все изученные нами ранее свойства определителей как-то;
1) если некоторую строку определителя умножить на число t, то значение определителя изменится в t раз:
2) Если некоторую строку определителя сложить с любой линейной комбинацией остальных строк, то значение определителя не изменится.
3) Если в определителе переставить две рядом стоящие строки. То определитель меняет знак на противоположный. Если строки не рядом стоящие, то знак определителя изменится столько раз какова разность в номерах этих строк.
4) Будем использовать свойство определителя так называемое разложение по строке или по столбцу.
Например разложение по первому столбцу выглядет так:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{k=N} a_{k,1} A_{k,1} \quad ; \qquad (1)$$

где как обычно $a_{k,1}$ элементы первого столбца определителя, а $A_{k,1}$ их алгебраические дополнения, то есть определители матриц, полученных из исходной матрицы вычёркиванием в исходной матрице строки номера k и столбца номера 1 (поскольку у всех элементов в примере номер столбца 1)

Всё сказанное здесь относительно строк применимо и к столбцам и наоборот.

Пусть $a_{1,1} \neq 0$ Если это не так, то с помощью перестановок строк и столбцов можно добиться этого условия, при этом только следить надо за изменениями знака вычисляемого определителя.

Умножим первую строку в исходном определителе на $\frac{1}{a_{1,1}}$ Согласно свойству 1) значение определителя изменится в $\frac{1}{a_{1,1}}$ Фактически мы разделили первую строку на $a_{1,1}$.

Для компенсации значения исходного определителя умножим значение определителя на $a_{1,1}$

получим:

$$\Delta = a_{1,1} \begin{vmatrix} 1 & a^1_{1\,2} & a^1_{1\,3} & \dots & a^1_{1\,N} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \dots & a_{2\,N} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \dots & a_{3\,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1\,1} & a_{N-1\,2} & a_{N-1\,3} & \dots & a_{N-1\,N} \\ a_{N\,1} & a_{N\,2} & a_{N\,3} & \dots & a_{N\,N} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

где $a^1_{1,j} = \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}$

Затем из каждой строки, номер которой больше 1 отнимем первую строку, умноженную на $a_{k,1}$, где k ={2,3, …, N} номера строк, лежащих ниже первой строки получим:

$$\Delta = a_{1,1} \begin{vmatrix} 1 & a^1_{1\,2} & a^1_{1\,3} & \dots & a^1_{1\,N} \\ 0 & a^1_{2\,2} & a^1_{2\,3} & \dots & a^1_{2,N} \\ 0 & a^1_{3\,2} & a^1_{3\,3} & \dots & a^1_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^1_{N-1\,2} & a^1_{N-1\,3} & \dots & a^1_{N-1\,N} \\ 0 & a^1_{N\,2} & a^1_{N\,3} & \dots & a^1_{N\,N} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Прибегнем к разложению определителя по первому столбцу, это очень удобно так как все элементы этого столбца ниже первой строки равны нулю, а левый верхний элемент равен 1 получим:

$$\Delta = a_{1,1} \begin{vmatrix} a^1_{1\,1} & a^1_{1\,2} & \dots & a^1_{1\,N-1} \\ a^1_{2\,1} & a^1_{2\,2} & \dots & a^1_{2,N-1} \\ a^1_{3\,1} & a^1_{3\,2} & \dots & a^1_{3,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^1_{N-1\,1} & a^1_{N-1\,2} & \dots & a^1_{N-1\,N-1} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

В равенстве (4) мы получили справа определитель размерности (N-1).Продолжаем этот процесс, будем на каждом шаге выносить элемент определителя, стоящий в левом верхнем углу определителя в качестве числового множителя и понижая справа размерность определителя до 1.

На следующем шаге получим:

$$\Delta = a_{1,1} a^1_{1,1} \begin{vmatrix} a^2_{1\,1} & \dots & a^2_{1,N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots a^2_{N-2\,1} & \dots & a^2_{N-2\,N-2} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

В случае равенства нулю левого,
углового элемента верхней строки переставляем строки и столбцы, следя за знаком результата, как было сказано выше.
Продолжая этот процесс, мы получим, что искомый определитель равен произведению верхних левых элементов на каждом шаге

$$\Delta = a_{1,1} a^1_{1,1} a^2_{1,1} \dots a^{(N-1)}_{1,1} (-1)^S \ ; \qquad (6)$$

Здесь в формуле (6) трудно добиться четкой и понятой индексации множителей. Надо иметь ввиду, что все множители кроме самого левого $a_{1,1}$ являются элементами очередного определителя, который появляется после разложения предыдущего определителя в его верхней строке и в крайнем левом столбце(и после всех перестановок строк и столбцов, если это требуется).
Где s общее количество всех перестановок строк и столбцов на всех этапах вычисления и является показателем степени при множителе (-1).
Во всех программах, где приходится решать системы линейных алгебраических уравнений, для вычисления определителей любого порядка, используется этот метод. Самый большой порядок вычисляемого определителя, который приходилось вычислять, (N=301), при решении интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

Литература:
Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева
«Вычислительные методы линейной алгебры»
Государственное издательство физико-математической литературы
Москва 1963г. Ленинград

Юрин Егор
E-mail: Urin.vi@Yandex.ru ;
телефон : 8482 378496